QHGKK3

ତ୍ରିକୋଣମିତି
(TRIGONOMETRY)

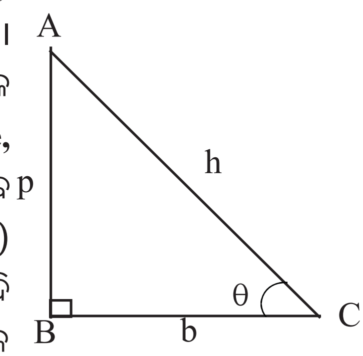
7.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ତ୍ରିକୋଣମିତି (Trigonometry) ଶବ୍ଦର ଅର୍ଥ ତିନି କୋଣର ପରିମାପ । ତ୍ରିକୋଣମିତିର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ଜ୍ୟାମିତିର ଅଭିବୃଦ୍ଧି ସହ ସଂପୃକ୍ତ । **ଗ୍ରୀକ୍ ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଦ୍ Hipparchus (140 B.C.)** ତ୍ରିକୋଣମିତିର ଆବିଷ୍କାର କରିଥିଲେ । ଗଣିତଜ୍ଞ **Bertholomaus Pitisces** ଷୋଡ଼ଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ପ୍ରଥମ ତ୍ରିକୋଣମିତି ଗ୍ରନ୍ଥ ରଚନା କରିଥିଲେ । ଗଣିତର ବିଭିନ୍ନ ଶାଖାରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ପ୍ରୟୋଗ ଅତ୍ୟନ୍ତ ବହୁଳ । ଉଚ୍ଚତା ଓ ଦୂରତା (Height and Distance) ନିରୂପଣ ଏବଂ ଜ୍ୟୋତିର୍ବିଜ୍ଞାନ(Astronomy)ରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିର ବହୁ ପ୍ରୟୋଗ ଅଛି ।

7.2 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ (Trigonometrical Ratios) :

ମନେକର ABC ଗୋଟିଏ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ (ଚିତ୍ର 7.1) ଓ $\angle ABC$ ସମକୋଣ । ଏଠାରେ $\angle BAC$ ଓ $\angle BCA$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ । ମନେକର ଏଥିରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ କୋଣ $\angle BCA$କୁ ନେଇ ଆମେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ସଂକ୍ଷେପରେ $m\angle BCA$ କୁ ଡିଗ୍ରୀ ମାପରେ θ ବୋଲି ଲେଖିବା । (θ ଏକ ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ଓ ଏହାକୁ 'ଥିଟା' ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।)

$\overline{AC}$ କୁ କର୍ଣ୍ଣ (hypotenuse), $\angle BCA$ ର ସଂଲଗ୍ନ ବାହୁ $\overline{BC}$ କୁ ଭୂମି (base) ଓ $\angle BCA$ର ସମ୍ମୁଖୀନ ବାହୁ $\overline{AB}$କୁ ଲମ୍ବ (perpendicular) କୁହାଯାଏ । ସଂକ୍ଷେପରେ $BC = b$, $AB = p$ ଓ $AC = h$ ଲେଖାଯାଇଥାଏ । p, b ଓ h ରୁ ଯେକୌଣସି ଦୁଇଗୋଟିର ଅନୁପାତ, θ କୋଣର ଏକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ । ସମୁଦାୟ ଛଅ ଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଯଥା: **sine, cosine, tangent, cotangent, secant** ଓ **cosecant** ଅଛନ୍ତି । ସଂକ୍ଷିପ୍ତ ଭାବେ ଏଗୁଡ଼ିକୁ sin (ସାଇନ୍), cos (କସ୍), tan (ଟାନ୍), cot (କଟ୍), sec (ସେକ୍) ଓ cosec (କୋସେକ୍) ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । କୋଣ θର sin, cos ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଏକ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଅନୁପାତକୁ ସୂଚାଇ ଥାଆନ୍ତି । ଏହି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞାକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା :

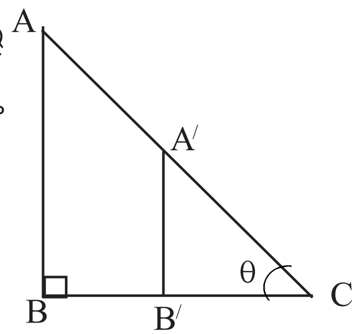


(ଚିତ୍ର 7.1)

$$\left.\begin{array}{ll}
\sin\theta = \dfrac{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{p}{h} & \cot\theta = \dfrac{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{b}{p} \\[2ex]
\cos\theta = \dfrac{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{b}{h} & \sec\theta = \dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{h}{b} \\[2ex]
\tan\theta = \dfrac{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{p}{b} & \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}}{\text{ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \dfrac{h}{p}
\end{array}\right\} \quad .....(1)$$

ମନ୍ତବ୍ୟ (i) ଆମେ ଯଦି $\angle BCA$ ର ପରିମାଣକୁ θ ନ ନେଇ $\angle CAB$ ର ପରିମାଣକୁ θ ନେଇଥାନ୍ତେ ତେବେ, AB = ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= b$ ଓ BC = ଲମ୍ବର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $= p$ ହୋଇଥାନ୍ତା ।

(ii) $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\operatorname{cosec}\theta$ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ବାହୁ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରନ୍ତି ନାହିଁ ଏମାନେ କେବଳ ସମ୍ପୃକ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ଉପରେ ନିର୍ଭର କରନ୍ତି ।



(ଚିତ୍ର 7.2)

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $\sin\theta = \dfrac{AB}{AC}$ ଏବଂ $\overline{AC}$ ଉପରିସ୍ଥ A' ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{A'B'} \perp \overline{BC}$ ହେଲେ $\Delta\ ABC$ ଓ $\Delta\ A'B'C$ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ଏବଂ $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{A'B'}{A'C} = \sin\theta$ । ମାତ୍ର $AB \neq A'B'$ ଏବଂ $AC \neq A'C$ ।

7.3 ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ (Relations among trigonometrial ratios) :

(a) ବ୍ୟୁତକ୍ରମ ସଂପର୍କ (Reciprocal Relations) : $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ $\sin\theta$ ଅନୁପାତଟି $\operatorname{cosec}\theta$ ଅନୁପାତର, $\cos\theta$ ଅନୁପାତଟି $\sec\theta$ ଅନୁପାତର ଏବଂ $\tan\theta$ ଅନୁପାତଟି $\cot\theta$ ଅନୁପାତର ବ୍ୟୁତକ୍ରମୀ (reciprocal) ।

ଯେହେତୁ
$$\left.\begin{array}{r}
\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{p}{h}\times\dfrac{h}{p} = 1 \\[2ex]
\cos\theta \times \sec\theta = \dfrac{b}{h}\times\dfrac{h}{b} = 1 \\[2ex]
\tan\theta \times \cot\theta = \dfrac{p}{b}\times\dfrac{b}{p} = 1
\end{array}\right\} \quad .....(2)$$

ଅତଏବ
$$\left.\begin{array}{ll}
\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta} \text{ ଏବଂ } & \operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \\[2ex]
\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} \text{ ଏବଂ } & \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta} \\[2ex]
\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta} \text{ ଏବଂ } & \cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}
\end{array}\right\} \quad .....(3)$$

ABC ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ଅର୍ଥାତ୍ (ଚିତ୍ର 7.1ରେ)

$$p^2 + b^2 = h^2 \qquad ....(4)$$

ଏହା ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ **ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ (Pythagoras Theorem)** (ଏହାକୁ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ)

ପିଥାଗୋରାସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ (ସମ୍ବନ୍ଧ (4)) ର ସହାୟତାରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦି ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ସମ୍ପର୍କ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରାଯାଇପାରିବ ।

(b) ବର୍ଗ ସଂପର୍କ (Square Relations) :

θ ଏକ କୋଣର ପରିମାଣ ହେଲେ (θ^0 ନ ଲେଖି କେବଳ θ ଲେଖାଯାଉଛି)

$\sin\theta \times \sin\theta = (\sin\theta)^2$ କୁ $\sin^2\theta$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ ।

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1\\ \text{(ii) } \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1\\ \text{(iii) } \mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1\end{array}\right\} \qquad .....(5)$$

ପ୍ରମାଣ : (ଚିତ୍ର 7.1)

(i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^2\theta + \cos^2\theta = (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$

$$= \left(\frac{p}{h}\right)^2 + \left(\frac{b}{h}\right)^2 = \frac{p^2+b^2}{h^2} = \frac{h^2}{h^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ସମ୍ବନ୍ଧ (4) ପ୍ରୟୋଗ କରି)}$$

(ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sec^2\theta - \tan^2\theta = \left(\frac{h}{b}\right)^2 - \left(\frac{p}{b}\right)^2$

$$= \frac{h^2-p^2}{b^2} = \frac{p^2+b^2-p^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)}$$

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \mathrm{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = \left(\frac{h}{p}\right)^2 - \left(\frac{b}{p}\right)^2$

$$= \frac{h^2-b^2}{p^2} = \frac{p^2+b^2-b^2}{p^2} = \frac{p^2}{p^2} = 1 = \text{ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)}$$

ଉପରେ ଲିଖିତ ସୂତ୍ର (i), (ii) ଓ (iii) ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ ଏବଂ $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$,

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ ଏବଂ $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$,

$\mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ ଏବଂ $\cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta - 1$ ।

(c) ଭାଗକ୍ରିୟା ସଂପର୍କ (Quotient Relations) :

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ଏବଂ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ । ....(6)

$\sin\theta = \frac{p}{h}$ ଏବଂ $\cos\theta = \frac{b}{h}$ ନେଇ ସମ୍ପର୍କ (6) ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ । (ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର ।)

ଉଦାହରଣ – 1:

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ ହେଲେ $\sin\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\mathrm{cosec}\,\theta$ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$\cos\theta = \frac{b}{h}$ ଅତଏବ ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $\frac{b}{h} = \frac{3}{5}$ କିମ୍ବା $\frac{b}{3} = \frac{h}{5} = k$ (ମନେକର)

$\therefore\ b = 3k,\quad h = 5k$

ସୁତରାଂ $p = \sqrt{h^2 - b^2} = \sqrt{(5k)^2 - (3k)^2} = \sqrt{16k^2} = 4k$ ।

ତେଣୁ $\sin\theta = \frac{p}{h} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$,

$\tan\theta = \frac{p}{b} = \frac{4k}{3k} = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{b}{p} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$,

$\sec\theta = \frac{h}{b} = \frac{5k}{3k} = \frac{5}{3}$ ଏବଂ $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{h}{p} = \frac{5k}{4k} = \frac{5}{4}$ ।

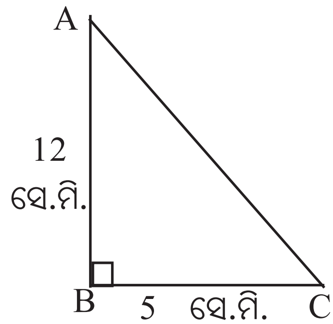
ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$,

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{4}{3}$, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{3}{4}$,

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{5}{3}$ ଏବଂ $\mathrm{cosec}\,\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{5}{4}$

ଉଦାହରଣ – 2 :

Δ ABC ରେ ଓ $m\angle B = 90^0$ ଓ AB=12 ସେ.ମି. ଏବଂ BC=5 ସେ.ମି. ହେଲେ $\mathrm{cosec}^2 C - \tan A$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।



(ଚିତ୍ର : 7.3)

ସମାଧାନ :

$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13$,

ଅର୍ଥାତ୍ AC = 13 ସେ.ମି. ।

$\therefore\ \mathrm{cosec}\,C = \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$ ଏବଂ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$

ଏବଂ $\mathrm{cosec}^2 C - \tan A = \left(\frac{13}{12}\right)^2 - \frac{5}{12} = \frac{169}{144} - \frac{5}{12} = \frac{169 - 60}{144} = \frac{109}{144}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 3 :

ଯଦି $\cot\theta = \frac{a}{b}$ ତେବେ $\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\cot\theta = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{a}{b}$

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{\cos\theta}{a} = \frac{\sin\theta}{b} = k$ (ମନେକର) $\therefore \cos\theta = ak$ ଓ $\sin\theta = bk$;

$$\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{a \times ak - b \times bk}{a \times ak + b \times bk} = \frac{k(a^2 - b^2)}{k(a^2 + b^2)} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$ ।

$\therefore \cot\theta = \frac{a}{b}$ ହେଲେ ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶଟିର ମୂଲ୍ୟ $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $$\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{a\cos\theta + b\sin\theta} = \frac{\frac{a\cos\theta - b\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{\sin\theta}} = \frac{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{b\sin\theta}{\sin\theta}}{\frac{a\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{b\sin\theta}{\sin\theta}} \quad (\because \sin\theta \neq 0)$$

$$= \frac{a\cot\theta - b}{a\cot\theta + b} = \frac{a \times \frac{a}{b} - b}{a \times \frac{a}{b} + b} = \frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{a^2}{b} + b} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{b}}{\frac{a^2 + b^2}{b}} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \quad \text{(ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ – 4 :

$\sec\theta = \frac{13}{5}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = 3$

ସମାଧାନ : $\sec\theta = \frac{13}{5} \Rightarrow \cos\theta = \frac{5}{13}$ । ସୁତରାଂ

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{13^2 - 5^2}{13^2}} = \sqrt{\frac{12^2}{13^2}} = \frac{12}{13};$$

$$\therefore \frac{2\sin\theta - 3\cos\theta}{4\sin\theta - 9\cos\theta} = \frac{2 \times \frac{12}{13} - 3 \times \frac{5}{13}}{4 \times \frac{12}{13} - 9 \times \frac{5}{13}} = \frac{\frac{24 - 15}{13}}{\frac{48 - 45}{13}} = \frac{9}{3} = 3$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

7.4 ସରଳ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅଭେଦ (Simple Trigonometrical Indentities) :

θ ର ଯେକୌଣସି ମୂଲ୍ୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ।

$\sin\theta \times \operatorname{cosec}\theta = 1,\qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$

$\cos\theta \times \sec\theta = 1,\qquad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1,$

$\tan\theta \times \cot\theta = 1,\qquad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ ।

ଅତଏବ ଏ ପ୍ରତ୍ୟେକଟି ସୂତ୍ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଅଭେଦ । ମାତ୍ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ନେଇ ଅନେକ ଅଭେଦର ଗଠନ ସମ୍ଭବ । ସେହି ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କରିବା ପାଇଁ ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ ବାରମ୍ବାର କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ପ୍ରତି ଅଭେଦରେ ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ ଥାଏ । ଯଥା:ବାମପାର୍ଶ୍ୱ (L.H.S) ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (R.H.S) । ଅଭେଦଟିର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ଆମକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରେ କିମ୍ବା ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ କିମ୍ବା ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳୀକରଣ କରି ଏକ ସାଧାରଣ ସୋପାନରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ପଡ଼ିଥାଏ ।

ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କଲାବେଳେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବୀଜଗଣିତର ସୂତ୍ର ବା ଅଭେଦ ଯଥା -

$$(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab,$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\ (a \pm b),$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\ (a^2 \mp ab + b^2) = (a \pm b)^3 \mp 3ab\ (a \pm b)$$

ଇତ୍ୟାଦିର ପ୍ରୟୋଗ ଆବଶ୍ୟକତା ଅନୁଯାୟୀ କରାଯାଇଥାଏ । (ଅଭେଦରେ θ (ଥିଟା) ପରିବର୍ତ୍ତେ α (ଆଲ୍‌ଫା), β (ବିଟା) ଏବଂ γ (ଗାମା) ଆଦି ଗ୍ରୀକ୍ ଅକ୍ଷର ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ ।)

ଉଦାହରଣ – 5 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $\sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta = 1$

(ii) $\tan^4\alpha + \tan^2\alpha = \sec^4\alpha - \sec^2\alpha$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta$

$= \sin^6\theta + \cos^6\theta + 3\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \times (1)$

$= (\sin^2\theta)^3 + (\cos^2\theta)^3 + 3\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta\ (\sin^2\theta + \cos^2\theta)$

$[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^3 = 1^3 = 1 =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \tan^4\alpha + \tan^2\alpha = \tan^2\alpha\ (\tan^2\alpha + 1) = \tan^2\alpha\ (1 + \tan^2\alpha)$

$= \tan^2\alpha \cdot \sec^2\alpha \qquad [\because \sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha]$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \sec^4\alpha - \sec^2\alpha$

$= \sec^2\alpha\ (\sec^2\alpha - 1)$

$= \sec^2\alpha\ \tan^2\alpha \qquad [\because \sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha]$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – 6 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $(\sec\theta - \cos\theta)\ (\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta) = \dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta}$

(ii) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}} = \mathrm{cosec}\,\theta - \cot\theta$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)$

$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right) = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$$

$[\because 1-\cos^2\theta = \sin^2\theta$ ଏବଂ $1-\sin^2\theta = \cos^2\theta]$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \times \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta} = \sin\theta \,.\, \cos\theta \text{ ।}$$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{1}{\tan\theta + \cot\theta} = \dfrac{1}{\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \dfrac{\sin\theta.\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta.\cos\theta}{1}$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \sin\theta \,.\, \cos\theta$

$\therefore$ ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ$= \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \sqrt{\dfrac{(1-\cos\theta)(1-\cos\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}}$

(ଲବ ଓ ହରକୁ $(1-\cos\theta)$ ଦ୍ୱାରାଗୁଣନ କରି)

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}} \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$$

$$= \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$= \operatorname{cosec}\theta - \cot\theta =$ ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ – 7 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, (i) $\dfrac{\sec A - \sec B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B} = 0,$

(ii) $\dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}^2\theta}{\sec^2\theta - \operatorname{cosec}^2\theta} = \dfrac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$ ।

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\sec A - \sec B}{\tan A + \tan B} + \dfrac{\tan B - \tan A}{\sec A + \sec B}$

$$= \frac{(\sec A - \sec B)(\sec A + \sec B) + (\tan A + \tan B)(\tan B - \tan A)}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{\sec^2 A - \sec^2 B + \tan^2 B - \tan^2 A}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{(\sec^2 A - \tan^2 A) - (\sec^2 B - \tan^2 B)}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)}$$

$$= \frac{1-1}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)} \qquad [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$$

$$= \frac{0}{(\tan A + \tan B)(\sec A + \sec B)} = 0$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \dfrac{\tan^2\theta}{\tan^2\theta - 1} + \dfrac{\csc^2\theta}{\sec^2\theta - \csc^2\theta}$

$$= \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} - 1} + \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{1}{\cos^2\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}} = \frac{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\cos^2\theta}} + \frac{\frac{1}{\sin^2\theta}}{\frac{\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta.\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta - \cos^2\theta}$$ = ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $\sin\theta \times \cot\theta =$ .... $[\cos\theta, \tan\theta, \sec\theta]$

(ii) $\cos\theta \times \tan\theta =$ .... $[\sin\theta, \csc\theta, \cot\theta]$

(iii) $\sin\theta \times \sec\theta \times \cot\theta =$ .... $[\tan\theta, \csc\theta, 1]$

(iv) $\cos\theta \times \csc\theta \times \tan\theta =$ .... $[1, \cot\theta, \sec\theta]$

(v) $\tan\theta = 1$ ହେଲେ $\tan\theta + \cot\theta =$ .... $[1, 2, \sin\theta . \cos\theta]$

(vi) $\tan^2\theta + \cot^2\theta - (\csc^2\theta + \sec^2\theta) =$ .... $[1, -1, -2]$

(vii) ABC ସମକୋଣୀ Δ ରେ $m\angle B = 90^0$ ଓ
AB = 3, BC = 4 ହେଲେ sinC= .... $\left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1\right]$

(viii) ABC ସମକୋଣୀ Δ ରେ $m\angle B = 90^0$ ଓ
AB = 5, BC = 12 ହେଲେ cosA= .... $\left[1, \frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right]$

(ix) $\sin x = ...$ $[\sqrt{1-\cos^2 x}, \sqrt{\cos^2 x - 1}, \sqrt{1-\cos x}, \sqrt{\cos x - 1}]$

(x) $\sec x = ...$ $[\sqrt{1-\tan^2 x}, \sqrt{\tan^2 x - 1}, \sqrt{1+\tan^2 x}, \sqrt{1+\tan x}]$

2. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(i) $\sin\alpha$ କୁ $\cot\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(ii) $\cos\alpha$ କୁ $\tan\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(iii) $\operatorname{cosec}\alpha$ କୁ $\sec\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(iv) $\sec\alpha$ କୁ $\operatorname{cosec}\alpha$ ରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

3. ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପ୍ରଦାନ କର ।

(i) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ ହେଲେ $\cos\alpha \times \cot\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?

(ii) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ ହେଲେ $\sin\alpha \times \tan\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?

(iii) $\tan\alpha = \frac{5}{12}$ ହେଲେ $\cot\alpha \times \operatorname{cosec}\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?

(iv) $\cot\alpha = \frac{5}{12}$ ହେଲେ $\tan\alpha \times \sec\alpha$ ର ମାନ କେତେ ?

(ଖ) ବିଭାଗ

4. $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

5. $\tan\theta = 1$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

6. $\cot\theta = \sqrt{3}$ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ପାଞ୍ଚଗୋଟି ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ?

7. Δ ABC ରେ $m\angle A = 90^0$, AB = 20 ସେ.ମି. ଓ AC = 21 ସେ.ମି. ହେଲେ, $\sin B$, $\cos C$ ଓ $\tan B$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

8. $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ହେଲେ, $(\sin\theta - \cos\theta) \div (2\tan\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

9. $\cos\theta = \frac{40}{41}$ ହେଲେ, $\tan\theta \div (1 - \tan^2\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

10. $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ହେଲେ, $(\cos\theta + \sin\theta) \div (\cos\theta - \sin\theta)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

11. $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ ହେଲେ, $\sin\theta + \cos\theta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

12. $\sin\beta = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$ ହେଲେ, $\tan\beta$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

13. $\sin A = \frac{1}{2}$ ହେଲେ, $\cot A + \frac{\sin A}{1+\cos A}$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

14. Δ ABC ରେ $m\angle C = 90^0$, BC = 20 ସେ.ମି. ଓ $\tan B = \frac{1}{4}$ ହେଲେ, AC ଓ AB ନିରୂପଣ କର ।

(ଗ) ବିଭାଗ

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ କର । (15 ରୁ 36 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ)

15. $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1 + 2\sin\theta \, . \cos\theta$

16. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

17. $\dfrac{\tan^2\theta}{\sec\theta + 1} = \sec\theta - 1$

18. $\dfrac{\cos A}{1 - \sin A} = \dfrac{1 + \sin A}{\cos A}$

19. $\cot\alpha + \tan\alpha = \operatorname{cosec}\alpha \times \sec\alpha$

20. $\cos^4\theta - 2\cos^2\theta + 1 = \sin^4\theta$

21. $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

22. $\dfrac{1}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1}{1 + \sin\theta} = 2\sec^2\theta$

23. $\dfrac{1 - \tan^3\theta}{1 - \tan\theta} = \sec^2\theta + \tan\theta$

24. $\dfrac{2\tan\theta}{1 + \tan^2\theta} = 2\sin\theta \, . \cos\theta$

25. $\dfrac{2\cos^2\theta - 1}{\cot\theta - \tan\theta} = \sin\theta \, . \cos\theta$

26. $\dfrac{\sin^2\theta}{1 + \cos\theta} + \dfrac{\sin^2\theta}{1 - \cos\theta} = 2$

27. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} + \dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta} - 4\tan^2\theta = 2$

28. $\dfrac{1}{1 + \tan^2\theta} + \dfrac{1}{1 + \cot^2\theta} = 1$

29. $\dfrac{1}{1 + \cos^2\theta} + \dfrac{1}{1 + \sec^2\theta} = 1$

30. $\sqrt{\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}} + \sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}} = 2\sec\theta$

31. $\dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec}A}{\operatorname{cosec}A + 1} = 2\sec^2 A$

32. $\cot^2\theta - \dfrac{1}{\sin^2\theta} + 1 = 0$

33. $\sec A\,(1 + \sin A)\,(\sec A - \tan A) = 1$

34. $(\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha)\,(\sec\alpha - \cos\alpha)\,(\tan\alpha + \cot\alpha) = 1$

35. $\dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} = (\sec\theta + \tan\theta)^2$

36. $\tan^2 A \, . \sec^2 B - \sec^2 A \, . \tan^2 B = \tan^2 A - \tan^2 B$

37. $\tan\theta + \sin\theta = m$ ଓ $\tan\theta - \sin\theta = n$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

[ସୂଚନା : ମିଶାଣ ଓ ଫେଡ଼ାଣ କଲେ $\tan\theta = \frac{1}{2}(m+n)$ ଓ $\sin\theta = \frac{1}{2}(m-n)$]

38. $x = a\sin\theta$ ଓ $y = b\tan\theta$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

[ସୂଚନା : $\frac{a}{x} = \operatorname{cosec}\theta$, $\frac{b}{y} = \cot\theta$]

39. $x = a\cos\theta + b\sin\theta$ ଓ $y = a\sin\theta - b\cos\theta$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $x^2+y^2 = a^2+b^2$

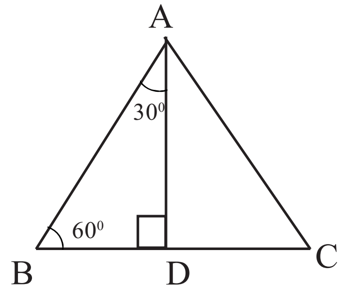
40. ଯଦି $\sin\theta + \sin^2\theta = 1$ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\cos^2\theta + \cos^4\theta = 1$

7.5 କେତେଗୋଟି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ

(Trigonometrical ratios of some particular angles) :

$\theta = 30^0$, 45^0 ଓ 60^0 ହେଲେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟ କିପରି ନିରୂପିତ ହୋଇ ପାରିବ ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବା ।

$\theta = 30^0, 45^0$: ମନେକର ABC ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ x ଏକକ । A ବିନ୍ଦୁରୁ $\overline{BC}$ ପ୍ରତି $\overline{AD}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । Δ ABC ରେ AB = BC = CA ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 60^0 ।



(ଚିତ୍ର : 7.4)

ଏଠାରେ $BD = \frac{x}{2}$ ଏକକ ଏବଂ

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{4}} = \frac{3x^2}{4} = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 60^0$ ଓ $m\angle BAD = 30^0$ ।

ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ

$$\sin 30^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2}, \qquad \cos 30^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 30^0 = \frac{\sin 30^0}{\cos 30^0} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \cot 30^0 = \frac{1}{\tan 30^0} = \sqrt{3},$$

$$\sec 30^0 = \frac{1}{\cos 30^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{cosec} 30^0 = \frac{1}{\sin 30^0} = 2 \quad ।$$

ସେହିପରି ABD ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 60^0$ । ସୁତରାଂ

$$\sin 60^0 = \frac{AD}{AB} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad \cos 60^0 = \frac{BD}{AB} = \frac{\frac{x}{2}}{x} = \frac{1}{2},$$

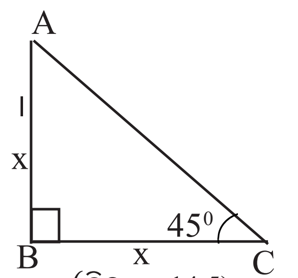
$$\tan 60^0 = \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}, \qquad \cot 60^0 = \frac{1}{\tan 60^0} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\sec 60^0 = \frac{1}{\cos 60^0} = 2, \qquad \operatorname{cosec} 60^0 = \frac{1}{\sin 60^0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad ।$$

$\theta = 45^0$:ମନେକର ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ଓ $m\angle B = 90^0$

ଏଠାରେ $m\angle A = m\angle C = 45^0$, AB = BC = x ଏକକ ହେଲେ,

$$AC = \sqrt{x^2 + x^2} \text{ ଏକକ } = x\sqrt{2} \text{ ଏକକ}$$



(ଚିତ୍ର : 14.5)

$\angle C$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଲେ,

$\sin 45^0 = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad \cos 45^0 = \frac{BC}{AC} = \frac{x}{x\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

$\tan 45^0 = \frac{\sin 45^0}{\cos 45^0} = 1$, $\quad \cot 45^0 = \frac{1}{\tan 45^0} = 1$,

$\sec 45^0 = \frac{1}{\cos 45^0} = \sqrt{2}$, $\quad \text{cosec } 45^0 = \frac{1}{\sin 45^0} = \sqrt{2}$ ।

ଏହି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ ଓ ଏହି ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦିଆଗଲା ।

ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ / କୋଣର ପରିମାଣ	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

ଏହି ସାରଣୀରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ,

$\sin 30^0 = \cos 60^0$, $\tan 30^0 = \cot 60^0$, $\sec 30^0 = \text{cosec } 60^0$, $\sin 60^0 = \cos 30^0$, $\tan 60^0 = \cot 30^0$, $\sec 60^0 = \text{cosec } 30^0$, $\sin 45^0 = \cos 45^0$, $\tan 45^0 = \cot 45^0$ ଏବଂ $\sec 45^0 = \text{cosec } 45^0$

ଉଦାହରଣ – 8 :

$\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 4\sin^2 60^0 + 2\,\text{cosec}^2 45^0 + \frac{4}{3}\tan^2 60^0$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{4}{3}\cot^2 30^0 + 4\sin^2 60^0 + 2\,\text{cosec}^2 45^0 + \frac{4}{3}\tan^2 60^0$

$= \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2\left(\sqrt{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\sqrt{3}\right)^2$

$= \frac{4}{3} \times 3 + 4 \times \frac{3}{4} + 2 \times 2 + \frac{4}{3} \times 3 = 4 + 3 + 4 + 4 = 15$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 9 :

$\theta = 30^0$ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin(2\theta) = 2\sin\theta.\cos\theta$

(ii) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= \sin(2\theta) = \sin(2 \times 30^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ $= 2\sin\theta.\cos\theta = 2 \times \sin 30^0 \times \cos 30^0 = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ସୁତରାଂ ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

(ii) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos(2\theta) = \cos(2 \times 30^0) = \cos 60^0 = \frac{1}{2}$,

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos^2 30^0 - \sin^2 30^0$

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; ଅତଏବ ଏହି ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ – 10 :

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin 60^0.\cos 30^0 + \cos 60^0.\sin 30^0 = \tan 45^0$

ସମାଧାନ : (i) ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin 60^0 . \cos 30^0 + \cos 60^0 . \sin 30^0$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} . \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ଦକ୍ଷିଣପାର୍ଶ୍ୱ = $\tan 45^0 = 1$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $\sin 30^0$ = ... $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

(ii) $\sin 45^0 \times \cos 45^0$ = ... $\left[\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}\right]$

(iii) $\tan 30^0 \times \tan 60^0$ =................... $\left[\sqrt{3}, 1, 3\right]$

(iv) $\sec 60^0 \times \sin 30^0$ =................... $\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

(v) $\operatorname{cosec} 45^0 \times \sec 45^0$ =................... [1, 2, 3]

(vi) $2\cos 60^0 - 1$=................... [0, 1, 2]

(vii) $3 \tan 30^0 \times \cot 60^0 - 2$ =................... [–1, 0, 1]

(viii) $\sec 45^0 \times \operatorname{cosec} 45^0 - 2$ =................... [–1, 0, 1]

2. $\theta = 30^0$ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin\theta \times \cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$ (ii) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(iii) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (iv) $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$

(v) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

(ଖ) ବିଭାଗ

3. $\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\tan\theta \times \operatorname{cosec}\theta = \sec\theta$ (ii) $\cot\theta \times \sec\theta = \operatorname{cosec}\theta$

(iii) $\tan\theta + \cot\theta = \sec\theta . \operatorname{cosec}\theta$ (iv) $\cos^2\theta \times \operatorname{cosec}\theta + \sin\theta = \operatorname{cosec}\theta$

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $\sin 60^0 . \cos 30^0 + \cos 60^0 . \sin 30^0$

(ii) $\cos 60^0 . \cos 45^0 - \sin 60^0 . \sin 45^0$

(iii) $4 \cos^3 60^0 - 3\cos 60^0$

(iv) $4 \cos^2 60^0 + 4 \sin^2 45^0 - \sin^2 30^0$

(v) $(\text{cosec}^2 45^0 + \sec^2 30^0)(\sin^2 30^0 + 4 \cot^2 45^0 - \sec^2 60^0)$

(vi) $\dfrac{\sin 30^0 + \cos 45^0 - \tan 60^0}{\cot 30^0 - \sin 45^0 - \cos 60^0}$

(vii) $\dfrac{4}{\cot^2 30^0} + \dfrac{1}{\sin^2 60^0} - \cos^2 45^0 - \tan^2 45^0$

(viii) $\dfrac{\tan^2 60^0 + 4\cos^2 45^0 + 3\sec^2 30^0 + 6\cos^2 30^0}{\text{cosec} 30^0 + \sec 60^0 + \cot^2 45^0}$

(ix) $\dfrac{\tan 45^0}{\text{cosec} 30^0} + \dfrac{\sec 60^0}{\cot 45^0} - \dfrac{2\sin 30^0}{\tan 45^0}$

(x) $\dfrac{\sin^2 60^0 + \cos^2 45^0 + \tan^2 30^0}{\cos^2 60^0 + \sin^2 45^0 + \cot^2 30^0}$

(ଗ) ବିଭାଗ

5. ଯଦି $\alpha = 60^0$ ଓ $\beta = 30^0$ ହୁଏ, ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

(i) $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha . \cos\beta - \cos\alpha . \sin\beta$

(ii) $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha . \cos\beta + \sin\alpha . \sin\beta$

(iii) $\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha . \tan\beta}$

6. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin 45^0 . \cos 60^0 . \cos 30^0 + \cos 45^0 . \sin 60^0 . \sin 30^0 = \sin 45^0 . \sin 60^0$

(ii) $\cos 60^0 = 1 - 2\sin^2 30^0 = 2\cos^2 30^0 - 1$

(iii) $\tan 60^0 = \dfrac{2\tan 30^0}{1 - \tan^2 30^0}$ (iv) $\dfrac{\cot 60^0 . \cot 30^0 + 1}{\cot 30^0 - \cot 60^0} = \sqrt{3}$

(v) $\dfrac{\tan 45^0 + \tan 30^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 30^0} = 2 + \sqrt{3}$ (vi) $\cot 30^0 + \dfrac{1}{\text{cosec} 30^0 + \cot 30^0} = \text{cosec} 30^0$

(vii) $\dfrac{1}{\sec 45^0 - \tan 45^0} = \dfrac{1 + \sin 45^0}{\cos 45^0}$ (viii) $\dfrac{\cot^2 30^0}{\sin^2 60^0} - \dfrac{\cot^2 60^0}{\sin^2 30^0} = \cot^2 30^0 - \cot^2 60^0$