QDJBUD

ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ସେଟ୍‌ର ପ୍ରୟୋଗ

(SET OPERATIONS AND APPLICATION OF SET)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction):

ବିଂଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଗଣିତଶାସ୍ତ୍ରରେ ଚମକ ସୃଷ୍ଟି କରିଥିବା ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱର ସ୍ରଷ୍ଟା ହେଉଛନ୍ତି ବିଖ୍ୟାତ ଜର୍ମାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ କ୍ୟାଣ୍ଟର (Georg Cantor, (1845 – 1918)**। ସୂର୍ଯ୍ୟ ବିହୁନେ ଗ୍ରହମାନେ ଯେପରି ନିଷ୍ପ୍ରଭ ଓ ନିସ୍ତେଜ ହୋଇଥାନ୍ତି, **ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ (Set Theory)** ବିନା ଗଣିତଶାସ୍ତ୍ରର ବିଭିନ୍ନ ବିଭାଗ ଯଥା: ଜ୍ୟାମିତି, ବୀଜଗଣିତ, କଳନ ଶାସ୍ତ୍ର (Calculus) ଇତ୍ୟାଦିର ଅବସ୍ଥା ଠିକ୍ ସେହିପରି ହୋଇଥାଏ। ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତକୁ ସହଜ ଓ ସୁନ୍ଦର କରିବାରେ, ଜଟିଳ ଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସରଳ ଓ ସାବଲୀଳ ଭାବରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବାରେ ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିପାରିଛି। ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ, ସେଟ୍‌ର ଲିଖନ ପଦ୍ଧତି, ସସୀମ ସେଟ୍ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍, ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍, ଉପସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନା ପାଇବା ସହ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ସଂଯୋଗ, ଛେଦ ଓ ଅନ୍ତର) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପାଠ କରିଛ । ଏଥିସହ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କ ତଥା ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଧାରଣା ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର (Venn–diagram) ର ଆବଶ୍ୟକତା ମଧ୍ୟ ଉପଲବ୍ଧି କରିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ସେହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ତଥା ଅନ୍ୟ କିଛି ନୂତନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ।

1.2 ପୂର୍ବପାଠର ପର୍ଯ୍ୟାଲୋଚନା :

ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମାନ୍ୟ ରୂପେ ପୁନଃ ଆଲୋଚନା ପ୍ରଥମେ କରିବା।

(i) ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ (Set and its elements) :

ସେଟ୍ ଓ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ଏ ଦୁଇଟିର ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ। ମାତ୍ର ଆମକୁ ଏକ ସେଟ୍ S ଓ ଏକ ବସ୍ତୁ (ଯାହାକୁ ଆମେ x ଲେଖି ସୂଚାଇବା) ଦିଆଗଲେ ଆମେ କହି ପାରିବା ଉଚିତ ଯେ, $x \in S$. ଅର୍ଥାତ୍ x, S ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପାଦନ କିମ୍ବା $x \notin S$ ଅର୍ଥାତ୍ x, ସେଟ୍ S ର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ।

ସେଟ୍‌କୁ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ ଦୁଇଟି ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ। ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା– ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀ (Tabular or Roster Method) ଏବଂ ସୂତ୍ର (ସେଟ୍ ଗଠନକାରୀ) ପ୍ରଣାଳୀ (Set-builder method)।

ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ କୁଟୀଳବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖାଯାଏ। ଯେପରିକି

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6....\}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଏହି ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌କୁ ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ସାଧାରଣ ଧର୍ମକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଲେଖାଯାଏ। ଯେପରିକି

$S = \{x \mid x$, ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $1 \leq x \leq 5\}$, $N = \{x \mid x$, ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା$\}$

(ii) ସସୀମ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍ (Finite and Infinite sets):

ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ଗଣିଲେ ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟି ଏକ **ସସୀମ ସେଟ୍** ଅଟେ। ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଏହି ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ନ ଘଟୁଥିଲେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍ ଟି ଏକ **ଅସୀମ ସେଟ୍** ଅଟେ ।

ଏକ ସସୀମ ସେଟ୍ A ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାକୁ $|A|$ ଦ୍ୱାରା କିମ୍ବା $n(A)$ (Cardinality of A) ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ ।

(iii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ (Empty or Null Set) : ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍ ଉପାଦାନ ବିହୀନ ତେବେ ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ। ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌କୁ ϕ ବା $\{\ \}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(iv) ଉପସେଟ୍ (Subset) : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଯଦି A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦନ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ A କୁ B ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ। ଏହାକୁ $A \subset B$ ବା $B \supset A$ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । $A \subset B$ ଅର୍ଥ ହେଉଛି : $x \in A \Rightarrow x \in B$

ମନେରଖ : (a) $\phi \subset A$ (ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍)
(b) $A \subset A$ (ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ ତା' ନିଜର ଉପସେଟ୍)

(v) ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ସମାନତା (Equality of two sets) : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ $A \subset B$ ଓ $B \subset A$ ହେଲେ, A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ସମାନ ଅର୍ଥାତ $A = B$

ମନେରଖ ଯେ, $\{1,2,3,4\}$ ଓ $\{4,2,1,3\}$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ଓ $\{1,1,2,3,4\}$ ଓ $\{1,2,3,4\}$ ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ। ଅର୍ଥାତ୍ ଉପାଦକଗୁଡ଼ିକର କ୍ରମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ କିମ୍ବା ଏକ ଉପାଦାନକୁ ଅଧିକ ଥର ଲେଖିଲେ ନୂତନ ସେଟ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ନାହିଁ ।

1.3 ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (Universal set) :

ଆମେ କୌଣସି ଏକ ଆଲୋଚନା କଲାବେଳେ ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍ ଓ ବିଭିନ୍ନ ଉପାଦାନ ଇତ୍ୟାଦି ସହ ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସିଥାଉ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ- ମନେକର ଆମର ଆଲୋଚନା ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ କରାଯାଉଛି । ଏଥିରେ ବୀଜଗଣିତ ଓ ପ୍ରୟୋଗ, ଜ୍ୟାମିତି ଓ ପ୍ରୟୋଗ, ସରଳ ଗଣିତ, ଗଣିତ ସୋପାନ, ତ୍ରିକୋଣମିତି ପରିଚୟ ଇତ୍ୟାଦି ଅଛି । ଓଡିଆ ଭାଷାରେ ଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍(S), ଇଂରାଜୀ ଭାଷାରେ ଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ (T) ନିଆଯାଉ ।

ଏହି ଆଲୋଚନାକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଆମେ ଏକ ସେଟ୍ କଳ୍ପନା କରିବା ଓ ଏହାକୁ E ଲେଖି ସୂଚାଇବା ଯେପରିକି ଯେ କୌଣସି ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ, E ର ଏକ ଉପାଦାନ ହେବ । ଏଠାରେ ସରଳ ବୀଜଗଣିତ $\in E$ ଓ $S \subset E, T \subset E$ ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ଏପରି ସେଟ୍ E କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

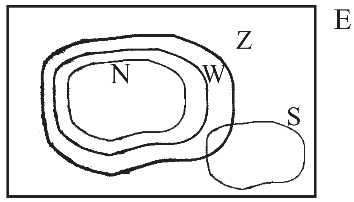
ସଂଜ୍ଞା : ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସର ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ଯଦି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସେଟ୍ 'E' ର ଉପସେଟ୍ କିମ୍ବା ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସେଟ୍ E ର ଉପାଦାନ ହୁଏ ତେବେ, ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (Universal Set) କୁହାଯାଏ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ, ସାଧାରଣତଃ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରେ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଓ ଏହାର ଉପସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ଆବଦ୍ଧ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ- 1 : ମନେକର N = ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସେଟ୍

N* ବା W = ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍

Z = ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଓ $S = \{ \frac{1}{n} \mid n \in N\}, n \neq 1$



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଏଠାରେ ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (Q) କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ଭାବରେ ନେଇ ପାରିବା । କାରଣ Q ର ଉପରୋକ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

1.4 ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Set Operations) :

ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B କୁ ନେଇ ତିନିଗୋଟି ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯଥା : **ସଂଯୋଗ (Union)**, **ଛେଦ (Intersection)** ଓ **ଅନ୍ତର (Difference)** ଘଟିଥାଏ। ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ଦ୍ୱୈତ ପ୍ରକ୍ରିୟା (binary operation)** ।

ମନେରଖ : ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଯେଉଁ ବୀଜଗଣିତର ସୃଷ୍ଟି ତାହାକୁ ବୁଲିଆନ୍ ବୀଜଗଣିତ (Boolean Algebra) କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଖ୍ୟାତ ଇଂରେଜ ଗଣିତଜ୍ଞ ଓ ତର୍କଶାସ୍ତ୍ରବିତ୍ George Boole (1815 -1866) ଙ୍କର ଏହି କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବିଶେଷ ଅବଦାନ ଥିବାରୁ ଏହି ବୀଜଗଣିତ ତାଙ୍କ ନାମରେ ନାମିତ ।

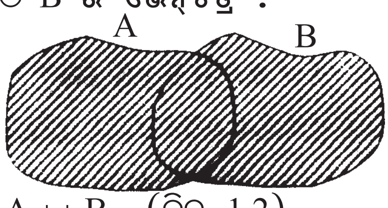
(i) ସଂଯୋଗ (Union) :

ସଂଜ୍ଞା : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cup B$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ।

ଅର୍ଥାତ୍ $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ବା $x \in B\}$

ଭେନ୍ ଚିତ୍ର 1.2 ରେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ $A \cup B$ ସେଟ୍‌କୁ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି।

$A \cup B$ ର **ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର :**



$A \cup B$ (ଚିତ୍ର 1.2)

ଏଠାରେ $x \in A$ ବା $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x ଉପାଦାନଟି A ରେ କିମ୍ବା B ରେ କିମ୍ବା ଉଭୟରେ ରହିପାରେ ।

ଉଦାହରଣ- 2 : $A = \{a,b,c\}$ ଓ $B = \{d, e, f, g\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ଉଦାହରଣ- 3 : $A = \{1,2,3,4\}$ ଓ $B = \{2,4,6,8\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,8\} = \{1,2,3,4,6,8\}$

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ ନେଇ $A \cup B$ ସେଟ୍ ଗଠିତ ହେଲା।

ଉଦାହରଣ- 4 : $A = \{p,q,r\}$ ଓ $B = \{p,q,r,s\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{p,q,r\} \cup \{p,q,r,s\} = \{p,q,r,s\}$ ହେବ ।

ସଂଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

1. $\mathbf{A \subset B}$ **ହେଲେ,** $\mathbf{A \cup B = B}$ **ହେବ।** ପୁନଶ୍ଚ $\mathbf{B \subset A}$ **ହେଲେ,** $\mathbf{A \cup B = A}$ **ହେବ ।**

2. ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ Aର ସଂଯୋଗ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cup A = A}$

3. ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବାରୁ ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ ଏହାର ସଂଯୋଗ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cup \phi = A}$

4. $A \cup B$ ସେଟ୍‌ଟି A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ। ତେଣୁ A ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ $A \cup B$ ରେ ରହିବେ; ତଥା B ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ $A \cup B$ ରେ ରହିବେ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \subset A \cup B, B \subset A \cup B}$

ସଂଯୋଗର ନିୟମ :

- ସଂଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ, B ଓ A ର ସଂଯୋଗ ଏକା ସେଟ୍ ମିଳେ। ସୁତରାଂ $A \cup B = B \cup A$
- ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ଅର୍ଥାତ୍ A, B, C ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ ହୋଇଥିଲେ

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

ଉଦାହରଣ- 5 :

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ ଓ $C = \{6,7,8\}$ ହେଲେ $S = (A \cup B) \cup C$

ଓ $T = A \cup (B \cup C)$ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $S = T$

ସମାଧାନ : $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore S = (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore T = A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

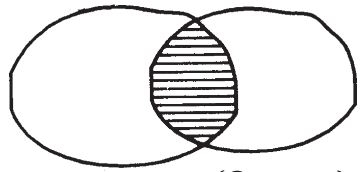
$\therefore S = T$ କିମ୍ବା $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ଛେଦ (Intersection) :

ସଂଜ୍ଞା : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବେ ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ଛେଦ କୁହାଯାଏ। A ଓ Bର ଛେଦ $A \cap B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A}$ **ଓ** $\mathbf{x \in B\}}$

ଏଠାରେ $x \in A$ ଓ $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x, A ଓ Bର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ। ଅର୍ଥାତ୍ x, A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ।

ଛେଦର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର :



$A \cap B$ (ଚିତ୍ର 1.3)

$A \cap B$ କୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରେ ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଛି।

ଯଦି A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ (Common Elements) ନ ଥାଏ, ତେବେ A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟକୁ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ (Disjoint set) କୁହାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap B = \phi}$

ଉଦାହରଣ- 6 : $A = \{1, 2, 3\}$ ଓ $B = \{1,3,5\}$ ହେଲେ, $A \cap B = \{1,3\}$

ଉଦାହରଣ- 7 : $A = \{a,b,c\}$ ଓ $B = \{a,b,c,d,e\}$ ହେଲେ,

$A \cap B = \{a,b,c\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c\}$

ଉଦାହରଣ- 8 : $A = \{p, q\}$ ଓ $B = \{r, s, t\}$ ହେଲେ;

$A \cap B = \{p, q\} \cap \{r,s,t\} = \phi$ ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ

ଛେଦ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

(1) ଯଦି $\mathbf{A \subset B}$ **ହୁଏ ତେବେ,** $\mathbf{A \cap B = A}$ ଏବଂ $\mathbf{B \subset A}$ **ହେଲେ** $\mathbf{A \cap B = B}$

(2) ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ A ଓ ସେହି ସେଟ୍‌ର ଛେଦ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap A = A}$

(3) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବାରୁ ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ ଏହାର ଛେଦ ϕ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap \phi = \phi}$

(4) $A \cap B$ ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବାରୁ

$A \cap B \subset A$ ଓ $A \cap B \subset B$

ଛେଦର ନିୟମ :

- ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $A \cap B = B \cap A$
- ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅର୍ଥାତ୍ A, B, C ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ ତେବେ

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ଉଦାହରଣ- 9 : $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d, e\}$ ଓ $C = \{a, b, c, d\}$ ହେଲେ

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ସମାଧାନ : $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

$\therefore (A \cap B) \cap C = \{b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{b, c\}$ .....(i)

ପୁନଶ୍ଚ $B \cap C = \{b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{b, c\}$

$\therefore A \cap (B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$ .....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive law) :

ମନେକର A, B ଓ C ତିନିଗୋଟି ସେଟ୍। ତେବେ

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଯୋଗ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ଏବଂ

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ଅର୍ଥାତ୍ ଛେଦ ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ।

ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣନ (x) ଯୋଗ (+) କୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ଅର୍ଥାତ୍ $x(y+z) = xy + xz$; ମାତ୍ର ଯୋଗ ଗୁଣନକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ନାହିଁ; କାରଣ $x + (yz) \neq (x + y)(x + z)$ । କିନ୍ତୁ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱରେ ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ବଣ୍ଟନ କରିଥା'ନ୍ତି।

ଉଦାହରଣ- 10 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ଓ $C = \{1, 3, 5\}$ ହେଲେ ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\})$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3,5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \cap (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\})$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .... (i) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଯୋଗ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

ସେହିପରି $A \cap (B \cup C) = (1,2,3,4) \cap (\{3,4,5,6\} \cup \{1,3,5\})$

$= \{1,2,3,4\} \cap \{1,3,4,5,6\} = \{1,3,4\}$;

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\}) \cup (\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5\})$

$= \{3, 4\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3, 4\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .... (ii) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅର୍ଥାତ୍ ଛେଦ ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

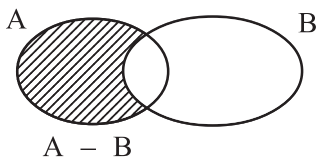
(iii) ଅନ୍ତର (Difference) :

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ B ରେ ନାହାଁନ୍ତି ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଅନ୍ତର B (A difference B) କୁହାଯାଏ ଏବଂ A ଅନ୍ତର B କୁ A – B ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A}$ **ଓ** $\mathbf{x \notin B\}}$

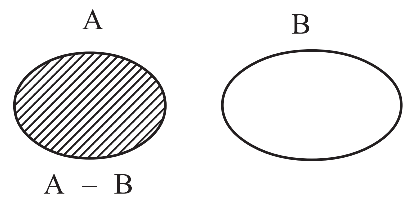
B ସେଟ୍‌ରେ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ A ରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ B ଅନ୍ତର A ସେଟ୍ ଟି ଗଠିତ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{B - A = \{x \mid x \in B}$ **ଓ** $\mathbf{x \notin A\}}$

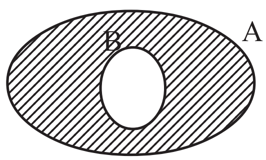
ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିରେ A – B ସେଟ୍‌କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରାଯାଇଛି। ଚିତ୍ରରେ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିତ୍ରିତ ସେଟ୍‌ଟି A – B



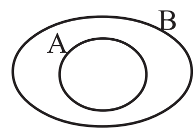
(i) A ଓ B ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ସେଟ୍



ii) A ଓ B ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ $A - B = A$



(iii) $B \subset A$



(iv) $A \subset B$, $A - B = \phi$

(A – B ସେଟ୍‌ଟି ଶୂନ୍ୟସେଟ୍)

(ଚିତ୍ର 1.4)

ଉଦାହରଣ- 11 :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଓ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ହେଲେ, ଏଠାରେ,

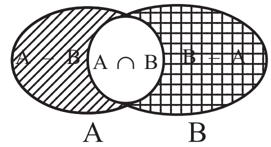
$A - B = \{1,2,3,4\} - \{3,4,5,6\} = \{1, 2\}$ ଏବଂ $B - A = \{3,4,5,6\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$

ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

1. କୌଣସି ଏକ ସେଟ୍ A ପାଇଁ $\mathbf{A - A = \phi}$

2. ଚିତ୍ର 1.4 ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟଯେ $\mathbf{A - B \subset A}$ **ଓ** $\mathbf{B - A \subset B}$

ଯଦି A ଓ B ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ତେବେ



(ଚିତ୍ର 1.5)

$(A - B) \cap (B - A) = \phi$,

$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$ ଏବଂ

$(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$

ଅର୍ଥାତ୍ **$A - B$, $B - A$ ଓ $A \cap B$ ସେଟ୍‌ତ୍ରୟ ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।** (ଚିତ୍ର 1.5 ଦେଖ)

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର 1.5 ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

$\mathbf{A - B = A - (A \cap B),\ B - A = B - (A \cap B)}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ। ଅର୍ଥାତ୍ $A - B \neq B - A$

କାରଣ $A = \{1, 2\}$ ଓ $B = \{2,3\}$ ହେଲେ $A - B = \{1\}$ ଓ $B - A = \{3\}$

ଏବଂ ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ନୁହେଁ । $A - (B - C) \neq (A - B) - C$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$ ଓ $C = \{2,3\}$ ହେଲେ,

$$A - (B - C) = \{1,2\} \text{ ଓ } (A - B) - C = \{1\}$$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ବନ୍ଧନୀରୁ ଠିକ୍ ଚିହ୍ନ ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

   (i) a... $\{a,b,c\}$ $[\in, \notin, \subset, =]$ (ii) d.... $\{a,b,c\}$ $[\in, \notin, \subset, =]$

   (iii) $\{a,c,b\}$ .... $\{a,b,c\}$ $[\in, \notin, =, \neq]$ (iv) $\{a,a,b,c\}$ ... $\{a,b,c\}$ $[\in, \notin, =, \neq]$

   (v) $\{a\}$ .. $\{a, b, c\}$ $[=, \subset, \in, \supset]$ (vi) $\{a,b, c\}$ ... $\{a\}$ $[=, \subset, \in, \neq]$

2. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ ଓ $C = \{5,6\}$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ନିରୂପଣ କର।

   (i) $B \cup C$ (ii) $A \cup B$ (iii) $A \cup C$ (iv) $B \cap C$ (v) $A \cap B$ (vi) $A \cap C$
   (vii) $B - C$ (viii) $A - B$ (ix) $A - C$ (x) $C - B$ (xi) $B - A$ (xii) $C - A$

3. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{6,7,8,9\}$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

   (i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $B \cap C = C \cap B$

   (iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   (v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (vii) $A - B \neq B - A$

   (viii) $(A - B) - C \neq A - (B - C)$

4. ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍, ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କେଉଁ ସେଟ୍ ସହ ସମାନ?

(i) $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ $[\phi, \{1\}, \{-1\}, \{1,-1\}, \{0, 1\}]$

(ii) {x | x ସଂଖ୍ୟାଟି 6 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା}

$[\phi, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}]$

(iii) {x | x ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $2 < x < 4$} $[\phi, (2), (4), (2,4)]$

(iv) $\{x \mid x \in N^*, x \leq 3\}$ $[\{0, 1, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}]$

5. $A = \{a, b, d, e, p\}$ ଓ $B = \{b, p, a, n, m, x, y\}$, $C = [n, x, z, s, t)$ ହେଲେ

(i) $(A - B) \cup (A \cap B)$,
(ii) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
(iii) $(A \cap B) \cup (B - C)$ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ।

6. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
(i) $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$, $(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$, ଏବଂ
(ii) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।

(i) $(A \cap B) \cup (A - B)$, (ii) $(A \cap B) \cup (B - A)$
(iii) $(A \cup B) - (A \cap B)$

8. ଏକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ଦର୍ଶାଅ ଯେ-
$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
(ଯେଉଁଠାରେ A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ସେଟ୍)

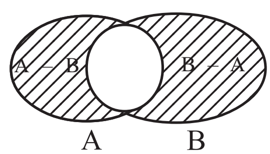
9. ଯଦି $I_n = \{1,2,3,4,.....,n\}$ ହୁଏ ତେବେ $I_{20} - I_{16}$ ଏବଂ $I_{16} - I_{20}$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟକୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ।

1.5. ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର (Symmetric – Difference) :

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A – B ଓ B – A ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସମଞ୍ଜସ- ଅନ୍ତର ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ $A \Delta B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)}$

$A \Delta B$ ସେଟ୍‌ଟି ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି।

ଚିତ୍ର 1.6 ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟଯେ, $\mathbf{A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)}$



(ଚିତ୍ର 1.6)

ଅର୍ଥାତ୍ $(A \cup B)$ ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ $(A \cap B)$ ରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର B କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 12 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଓ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ନେଇ $A \Delta B$ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : $A - B = \{1, 2\}$ ଓ $B - A = \{5, 6\}$

$\therefore A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ: $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$

$= (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) - (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5, 6\}$ (ଉତ୍ତର)

ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

ଯଦି A ଓ B ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍

(i) ସମଞ୍ଜସ– ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $A \Delta B = B \Delta A$

(ii) ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

1.6. ଏକ ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ (Complement of a Set) :

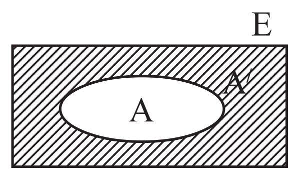
ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି E ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଓ A ଏହାର ଏକ ଉପସେଟ୍ ତେବେ, E ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ A ସେଟ୍‌ରେ ନାହାଁନ୍ତି ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ

ଏହା A' ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇଥାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $A' = E - A = \{x \mid x \in E$ ଓ $x \notin A\}$

A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A' କୁ ଚିତ୍ର 1.7 ରେ

ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇଛି।



(ଚିତ୍ର 1.7)

ଉଦାହରଣ- 13 : $E = \{x \mid x \in N, x \leq 10\}$ ଏବଂ

$A = \{x \mid x \in N, 1 < x \leq 5\}$ ନେଇ A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $E = \{x | x \in N, x \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{x \mid x \in N, 1 < x \leq 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ $= A' = E - A = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ଉତ୍ତର)

ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

1. A ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ (A') ସର୍ବଦା ଅଣଛେଦୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap A' = \phi}$

2. A ଓ A' ର ସଂଯୋଗ ସେଟ୍ ହେଉଛି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (E) । ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cup A' = E}$

3. A ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ହେଲେ, A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A' ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A ଅଟେ।
   ଅର୍ଥାତ୍ $(A')' = A$

4. $\phi' = E$ (ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E)
   ଓ $E' = \phi$ (ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ) ।

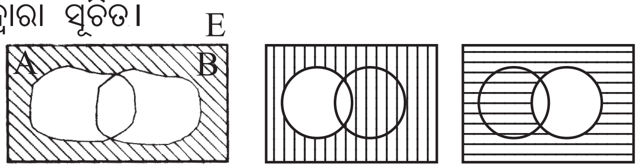
1.7 ଡିମର୍ଗାନ୍ ନିୟମ (De Morgan's Laws) :

ମନେକର E ଏକ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଓ A, B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଏହାର ଉପସେଟ୍ ।

$\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$ **...(i)** ଏବଂ $\mathbf{(A \cap B)' = A' \cup B'}$ **...(ii)**

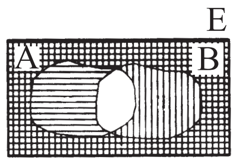
ଏହି ନିୟମ ଦ୍ୱୟ ଡିମର୍ଗାନ୍ (De Morgan) ନିୟମ ନାମରେ ଅଭିହିତ। (i) ରୁ ଆମେ ବୁଝୁଛେ ଯେ ସଂଯୋଗ ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍, ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଛେଦ ଓ (ii) ରୁ ବୁଝୁଛେ ଯେ ଛେଦର ପରିପୂରକ ସେଟ୍, ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗ ।

ମନେରଖ : ପରିପୂରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Complementation) ହେତୁ ସଂଯୋଗ, ଛେଦରେ ଓ ଛେଦ, ସଂଯୋଗରେ ପରବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ। ଭେନ ଚିତ୍ର 1.8 (a) ରେ $(A \cup B)'$ ସେଟ୍‌ଟି କେତେକ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ।



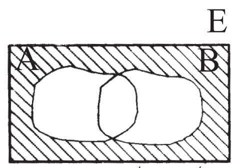
$(A \cup B)'$ A' B'

ଚିତ୍ର 1.8(a)



$A' \cap B'$

ଚିତ୍ର 1.8(b)



$A' \cap B'$

ଚିତ୍ର 1.8(c)

ଚିତ୍ର 1.8(b) ରେ A' ଓ B' ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟକୁ ଉଭୟ ଲମ୍ବ ଓ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଯାହା ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା $A' \cap B'$ ସୂଚିତ ହୋଇଛି, ଯାହା 1.8(a) ସହ ସମାନ।

ଚିତ୍ର 1.8(c)ରେ $A' \cap B'$ କୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ । ସୁତରାଂ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ଅନୁରୂପ ଭାବେ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କର ଦ୍ୱିତୀୟ ନିୟମ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ର ସତ୍ୟତା ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇ ପାରେ।

ମାତ୍ର ନିୟମ (ii) ମଧ୍ୟ ନିୟମ (i) ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କରି ହେବ।

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ....(i)

A ଓ B ପରିବର୍ତ୍ତେ ଯଥାକ୍ରମେ A' ଓ B' ଲେଖିଥିଲେ

$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$ ($\because (A')' = A$ ଏବଂ $(B')' = B$)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ନେଲେ

$\Rightarrow ((A' \cup B')')' = (A \cap B)' \Rightarrow A' \cup B' = (A \cap B)'$

$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$ .....(ii) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ- 14 : $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ଏବଂ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ନେଇ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦୁଇଟିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\therefore (A \cup B)' = E - (A \cup B)$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{8, 9\}$ .... (i)

$A' = E - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8, 9\}$

$B' = E - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

$A' \cap B' = \{6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 8, 9\} = \{8, 9\}$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ଅନୁରୂପଭାବେ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱିତୀୟ ନିୟମର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ।

(i) ଯଦି $E = \{1,2,3,4,5\}$ ଓ $S = \{2, 4\}$ ହୁଏ ତେବେ $S' =$ ....

(a) $\{1, 3\}$ (b) $\{1,4,5\}$ (c) $\{1,3,5\}$ (d) $\{1,2,5\}$

(ii) ଯଦି $E = \{a,b,c,d\}$ ଓ $T = \{a,b\}$ ତେବେ $T \cup T' =$....

(a) E (b) $\{a, b\}$ (c) $\{c, d\}$ (d) ϕ

(iii) ଯଦି $E = \{a,b,c,d\}$ ଓ $T = \{a,b\}$ ତେବେ $T \cap T' =$ ....

(a) E (b) $\{a, b\}$ (c) $\{c, d\}$ (d) ϕ

(iv) $(A \cup A') - (A' \cap A) =$ ——— (a) A (b) A' (c) E (d) ϕ

(v) $E - A' =$ —— (a) E (b) A (c) A' (d) ϕ

(vi) $(E - A) \cup (E - B) =$ ——

(a) $A \cup B$ (b) $(A \cup B)'$ (c) $(A \cap B)$ (d) $(A \cap B)'$

(vii) $A' \cap B' =$ ——

(a) $A \cup B$ (b) $(A \cup B)'$ (c) $(A \cap B)$ (d) $(A \cap B)'$

(viii) $(A - B) \cup (B - A) =$ ——

(a) $A \cup B$ (b) $A \Delta B$ (c) $A \cap B$ (d) B

(ix) $(A - B) \cup (B - A) =$ ——

(a) $(A \cup B) - (A \cap B)$ (b) $(A \cup B) - (A - B)$

(c) $(A-B)-(A \cap B)$ (d) $(A-B) \cap (B - A)$

(x) $(A \cup A^{/})^{/} =$ —— (a) A (b) $A^{/}$ (c) ϕ (d) E

(xi) $(A^{/} \cup B^{/})^{/} =$ —— (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A^{/} \cap B^{/}$ (d) $(A \cup B)^{/}$

(xii) $(A \cup B)^{/} =$ —— (a) $A^{/} \cup B^{/}$ (b) $(A \cap B)^{/}$ (c) $A^{/} \cap B^{/}$ (d) $E - (A \cap B)$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ଲେଖ ।

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (ii) $A \Delta B = B \Delta A$

(iii) $(A \cup B)^{/} = A^{/} \cup B^{/}$ (iv) $(A \cap B)^{/} = A^{/} \cup B^{/}$ (v) $\phi^{/} = E$

(vi) $E^{/} = \phi$ (vii) $A \cup A^{/} = \phi$ (viii) $A \cap A^{/} = E$

(ix) $(A \cup A^{/})^{/} = E$ (x) $(A \cap A^{/})^{/} = \phi$

3. (i) $E = Z$ ହେଲେ, ସମସ୍ତ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) $E - A = B$ ହେଲେ, $B \cap A$ ଓ $B \cup A$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ।

(iii) ସେଟ୍ A ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ରେ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ଓ 6 ଟି ଉପାଦାନ ଥିଲେ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର।

4. ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ‘‘ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ’’।

5. ଯଦି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c\}$ ଏବଂ $C = \{b,f,g,h\}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର।

(i) $(A \cup B)^{/} = A^{/} \cap B^{/}$ (ii) $(A \cap B)^{/} = A^{/} \cup B^{/}$

6. ଏକ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର।

1.8 ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ (Cartesian product of two sets) :

ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x,y) ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇ ଦିଆଯାଏ । (x,y) ହେଉଛି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (Ordered Pair)।

ମନେରଖ :

(i) ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ତେବେ, (x,y) କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ; ମାତ୍ର $\{x, y\}$ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ଯାହାର ଦୁଇଗୋଟି ଉପାଦାନ ଅଛି ।

(ii) ଯଦି $x \neq y$ ହୁଏ, ତେବେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ (x,y) ଓ (y,x) ଦୁଇଟି ପୃଥକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇ ଥାଆନ୍ତି। କିନ୍ତୁ $\{x, y\}$ ଓ $\{y, x\}$ ସେଟ୍ ଦୁଇଟି ସମାନ।

ବି.ଦ୍ର. : ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ସମାନ ହେବେ ଯଦି $x_1 = x_2$ ଓ $y_1 = y_2$ ହେବ।

ଏହି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ର ଧାରଣାକୁ ନେଇ ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ A ଓ B ର କାର୍ଜେଟୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଇ ପାରିବ।

ମନେକର A ଓ B ଦୁଇଗୋଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଓ $a \in A$, $b \in B$ ।

ଏଠାରେ (a,b) ଏକ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି, ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b କୁ ଯଥାକ୍ରମେ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି (a,b) ର ପ୍ରଥମ ଉପାଂଶ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଂଶ କୁହାଯାଏ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍, ତେବେ A ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ପ୍ରଥମ ଉପାଂଶ ଓ B ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଂଶ ରୂପେ ନେଲେ ଯେତେଗୁଡ଼ିଏ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ସେହି ସମସ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ ଉପାଦାନ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ କୁହାଯାଏ।

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ସୁତରାଂ

A x B = $\{(a,b) \mid a \in A$ ଓ $b \in B\}$

ସେହିପରି B ଓ A ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୟ ଗୁଣଫଳ **B x A = $\{(b,a) \mid b \in B$ ଓ $a \in A\}$**

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $A = \{1,2\}$ ଓ $B = \{3,4,2\}$ ହେଲେ

A x B $=\{(1,3), (1,4), (1,2), (2,3), (2,4), (2,2)\}$

ଓ B x A $= \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (2,1), (2,2)\}$

ଯଦି A ରେ m ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥାଏ ଓ B ରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $|A| = m$ ଓ $|B| = n$ ତେବେ କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ଓ B x A ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ରେ mn ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ରହିବେ।

ଉଦାହରଣ- 15 : ଯଦି $(x + 1, 2) = (3, y - 1)$ ତେବେ x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : $(x + 1, 2) = (3, y - 1)$

କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱୟର ସମାନତା ରୁ ପାଇବା $x + 1 = 3$ ଏବଂ $2 = y - 1$

$\therefore x = 2$ ଏବଂ $y = 3$

ଉଦାହରଣ- 16 : $A = \{1,2,3\}$ ଓ $B = \{3,4,5\}$ ହେଲେ A x B ଏବଂ B x A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : A x B $= \{1,2,3\} \times \{3,4,5\}$

$= \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)\}$

ଏବଂ B x A $= \{3,4,5\} \times \{1,2,3\}$

$= \{(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}$

ଉଦାହରଣ- 17 : $A = \{a,b,c\}$ ହେଲେ $A \times A$ ଅଥବା A^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : $A \times A = (a,b,c) \times (a,b,c)$

$= \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

$A \times A$ କୁ A^2 ରୂପେ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ।

1.9. ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ :

ଉପପାଦ୍ୟ : ଯଦି ଉଭୟ A ଓ B ସସୀମ ସେଟ୍, ତେବେ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ପ୍ରମାଣ : ଆମେ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ପୃଥକ ଭାବରେ ଗଣିବା। ପ୍ରାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ $|A| + |B|$ ହେବ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରଚ୍ଛେଦୀ ସେଟ୍ ତେବେ ଆମେ $A \cap B$ ସେଟ୍ ଗଠନ କରିବା ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣିବା।

ପ୍ରଶ୍ନ ହେଉଛି $A \cup B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ?

A ଓ B ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୃଥକ ଭାବରେ ଗଣିବା ସମୟରେ ଆମକୁ ଉଭୟ A ଓ B ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଥର ଗଣିବାକୁ ପଡୁଛି।

ମାତ୍ର $A \cup B$ ସେଟ୍ ଗଠନ ବେଳେ A ଓ B ଉଭୟରେ ଥିବା ସାଧାରଣ ଉପାଦାନକୁ ଦୁଇ ଥର ଲେଖାଏଁ ନ ନେଇ ଥରେ ଲେଖାଯିବ। ଏହା ଆମେ ଜାଣିଛେ। (ଚିତ୍ର 1.3 ଦେଖ)

$\therefore$ $A \cup B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା =

A ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା + B ସେଟ୍ ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା– $A \cap B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା

$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ସୂଚନା : ଯଦି $|A| = m$, $|B| = n$ ଏବଂ $|A \cap B| = r$ ହୁଏ ତେବେ

$|A \Delta B| = m + n - 2r$ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ୍ $|\mathbf{A} \Delta \mathbf{B}| = |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| - 2|\mathbf{A} \cap \mathbf{B}|$ (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଯଦି A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ତେବେ $A \cap B = \phi \Rightarrow |A \cap B| = 0$

$\therefore$ A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହେଲେ $|A \cup B| = |A| + |B|$ ହେବ।

ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପାଇଁ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି। ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ।

ଉଦାହରଣ- 18 : A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ର ଉପସେଟ୍। ଯଦି $|E| = 100$, $|A \cup B| = 70$ ଏବଂ $|A \Delta B| = 60$ ହୁଏ, ତେବେ $|A' \cup B'|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.....(i)

ଏବଂ $|A \Delta B = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ ....(ii)

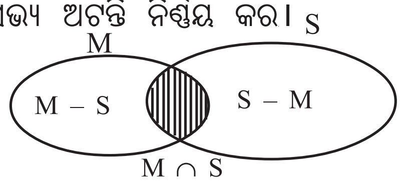
(i) ରୁ (ii) ବିୟୋଗ କଲେ $|A \cup B| - |A \Delta B| = |A \cap B|$

$\Rightarrow 70 - 60 = |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 10$

$\therefore |A' \cup B'| = |(A \cap B)'| = |E| - |A \cap B| = 100 - 10 = 90$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 19 : ଗଣିତସଂସଦ କିମ୍ବା ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତି ର ମୋଟ ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 750। କେବଳ ଗଣିତସଂସଦ ର ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 250 ଓ କେବଳ ବିଜ୍ଞାନ ପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 350। ତେବେ କେତେଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନ ପ୍ରଚାର ସମିତି ର ସଭ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ଭେନ୍ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।



(ଚିତ୍ର 1.9)

ମନେକର ଗଣିତସଂସଦର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ ଏବଂ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ S ।

ତେବେ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ $= M \cap S$

ଗଣିତସଂସଦ କିମ୍ବା ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟମାନଙ୍କ ସେଟ୍ $= M \cup S$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $|M-S| = 250$, $|S-M| = 350$ ଓ $|M \cup S| = 750$

ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $(M \cup S) = (M - S) \cup (M \cap S) \cup (S - M)$

ସୁତରାଂ $|M \cup S| = |M - S| + |M \cap S| + |S - M|$

$\Rightarrow 750 = 250 + |M \cap S| + 350$

$\Rightarrow 750 = 600 + |M \cap S|$

$\Rightarrow |M \cap S| = 750 - 600 = 150$

$\therefore$ 150 ଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟ ଅଛନ୍ତି। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 20 : କୌଣସି ଶ୍ରେଣୀରେ 50 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 22 ଜଣ ଫୁଟ୍‌ବଲ୍ ଓ 22 ଜଣ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳନ୍ତି। ଏଥିମଧ୍ୟରୁ 5 ଜଣ ଛାତ୍ର ଉଭୟ ଫୁଟ୍‌ବଲ ଓ କ୍ରିକେଟ ଖେଳୁଥିଲେ କେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର ଫୁଟ୍‌ବଲ କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳନ୍ତି ନାହିଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର E = ଶ୍ରେଣୀରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍।

F = ଫୁଟ୍‌ବଲ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍, C = କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍ ।

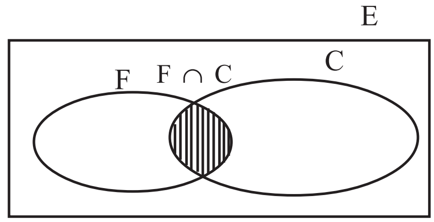
ଏଠାରେ E କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $|E| = 50$, $|F| = 22$, $|C| = 22$

ଉଭୟ ଫୁଟ୍‌ବଲ ଓ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି ହେଉଛି $F \cap C$

$|F \cap C| = 5$ (ଦତ୍ତ)

ଚିତ୍ର 1.10 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।



(ଚିତ୍ର 1.10)

ଆମେ ଜାଣୁଯେ, $|F \cup C| = |F| + |C| - |F \cap C|$

$= 22 + 22 - 5 = 39$

ଯେଉଁ ଛାତ୍ରମାନେ ଫୁଟ୍‌ବଲ୍ କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳନ୍ତି ନାହିଁ ସେମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌ଟି $(F \cup C)'$

$\therefore |(F \cup C)'| = |E| - |F \cup C| = 50 - 39 = 11$

$\therefore$ ଶ୍ରେଣୀରେ ଫୁଟବଲ୍ ଓ କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳୁ ନଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 11 ।

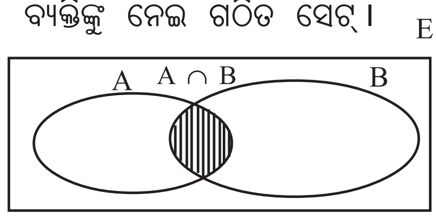
ଉଦାହରଣ- 21 : 1000 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 400 ଜଣ ହିନ୍ଦୀ, 380 ଜଣ ଇଂରାଜୀ ଓ 80 ଜଣ ଉଭୟ ହିନ୍ଦୀ ଓ ଇଂରାଜୀରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା ହୋଇ ପାରନ୍ତି। ତେବେ କେତେ ଜଣ ଏ ଦୁଇଟି ଭାଷାରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା ହୋଇ ପାରନ୍ତି ନାହିଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E = 1000 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍।

ତେବେ $|E| = 1000$

ହିନ୍ଦୀରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ A ଓ

ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ B



(ଚିତ୍ର 1.11)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $|A| = 400$, $|B| = 380$ ଏବଂ $|A \cap B| = 80$ (ଉଭୟ ହିନ୍ଦୀ ଓ ଇଂରାଜୀ ଭାଷାରେ କଥା ହୋଇପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା)

ହିନ୍ଦୀ କିମ୍ବା ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ $= A \cup B$.

ମାତ୍ର $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 400 + 380 - 80 = 700$

$\therefore$ ହିନ୍ଦୀ ବା ଇଂରାଜୀ କୌଣସିଟିରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁ ନ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା

$= |(A \cup B)'| = |E| - |A \cup B| = 1000 - 700 = 300$

$\therefore$ ହିନ୍ଦୀ ବା ଇଂରାଜୀ କୌଣସିଟିରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁ ନ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 300 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1.(a) ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(i) $|A| = 3$ ଓ $|B| = 4$ ହେଲେ $A \times B$ ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ——

[(a) 7 (b) 10 (c) 11 (d) 12]

(ii) $|A| = 3$ ହେଲେ $|A \times A| =$ ——

[(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ।]

(iii) $|A \cup B| = 15$, $|A| = 12$ ଓ $|B| = 6$ ହେଲେ $|A \cap B| =$ ———

[(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12]

(iv) $|A \cup B| = 10$, $|A \cap B| = 0$ ଓ $|A| = 4$ ହେଲେ $|B| =$ ——

[(a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 12]

(v) $A \cap B = \phi$, $|A| = 10$, $|B| = 3$ ହେଲେ $|A \cup B| =$ ——

(a)3 (b) 7 (c) 10 (d) 13

(vi) $|A| = |B| = 5$ ଓ $|A \cap B| = 3$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 3 (b) 4 (c) 7 (d) 8]

(vii) $|A \cup B| = 10$ ଓ $|A \cap B| = 3$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 10 (b) 7 (c) 3 (d) 0]

(viii) $|A - B| = 5$ ଓ $|B - A| = 7$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 2 (b) 12 (c) 7 (d) 5]

(b) ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଯଦି $(2 - x, 5) = (4, y+2)$ (ii) ଯଦି $(2x+3, 3y-4) = (7,5)$

(iii) ଯଦି $(x^2, y^2) = (4,9)$ (iv) ଯଦି $(x+y, x-y) = (3,1)$

(c) ଯଦି $A = \{1, 2, 3\}$ ଓ $B = \{2, 3, 4\}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $\{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B$ ଓ $x < y\}$ (ii) $\{(x,y) \mid (x,y) \in B \times A$ ଓ $x < y\}$

2. A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ $|A| = 60$, $|B| = 40$ ଓ $|A \Delta B| = 70$ ହେଲେ A ଓ B ର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କର ।

3. A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ $|A| = 80$, $|B| = 30$ ଓ $|A \cup B| = 100$ ହେଲେ $|A \Delta B|$ କେତେ ସ୍ଥିର କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀରେ 100 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 40 ଜଣ କମ୍ପ୍ୟୁଟର ବିଜ୍ଞାନ ଓ 52 ଜଣ ପ୍ରାଣୀବିଜ୍ଞାନ ଅଧ୍ୟୟନ କରନ୍ତି । ଯଦି 23 ଜଣ ଛାତ୍ର ଉଭୟ ବିଷୟକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରୁଥା'ନ୍ତି ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ର ଏହି ଦୁଇ ବିଷୟରୁ କୌଣସିଟିକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ସ୍ଥିର କର ।

5. ରାମଚନ୍ଦ୍ର ଉଚ୍ଚ ବିଦ୍ୟାଳୟର 80 ଜଣ ଛାତ୍ର ଗଣିତ ବା ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ରଖିଥିଲେ। ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 50 ଜଣ ଗଣିତରେ, 10 ଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତ ଓ ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ପାଇଥିଲେ। ତେବେ କେତେଜଣ କେବଳ ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ପାଇଥିଲେ ?

6. 200 ଜଣ ଲୋକ ଇଂରାଜୀ ବା ଓଡ଼ିଆରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା କରିପାରନ୍ତି, ଯଦି 80 ଜଣ ଲୋକ କେବଳ ଓଡ଼ିଆ ଓ 70 ଜଣ ଲୋକ କେବଳ ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ ଉଭୟ ଓଡ଼ିଆ ଓ ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରନ୍ତି ?

7. 100 ଜଣ ଟିଭି ଦର୍ଶକଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 75 ଜଣ ଦୂରଦର୍ଶନ ଜାତୀୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଓ 60 ଜଣ ବି.ବି.ସି. କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି। ତେବେ କେତେଜଣ ଏ ଉଭୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ? କେତେଜଣ କେବଳ ଦୂରଦର୍ଶନ ଜାତୀୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ?

8. ଗୋଟିଏ ହଷ୍ଟେଲ୍‌ର 40 ଜଣ ପିଲାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 15 ଜଣ କେବଳ ହକି ଖେଳନ୍ତି ଓ 20 ଜଣ କେବଳ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳନ୍ତି। ଯଦି ଏହି ପିଲାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସମସ୍ତେ ହକି କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ ପିଲା ହକି ଓ କ୍ରିକେଟ୍ ଉଭୟ ଖେଳ ଖେଳନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

9. 100 ଜଣ ଲୋକଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 18 ଜଣ କାର୍ କିମ୍ବା ସ୍କୁଟର ଚଳାଇବା ଜାଣିନାହାଁନ୍ତି; କିନ୍ତୁ 25 ଜଣ କାର୍ ଓ ସ୍କୁଟର ଉଭୟ ଚଳାଇବା ଜାଣିଛନ୍ତି। ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 55ଜଣ ସ୍କୁଟର ଚଳାଇବା ଜାଣିଥାଆନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ କାର୍ ଚଳାଇବା ଜାଣିଛନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

10. ଏକ ଶ୍ରେଣୀର 50 ଜଣ ଛାତ୍ରୀଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 22 ଜଣ ଗୀତ ଶିଖନ୍ତି ଓ 22 ଜଣ ନାଚ ଶିଖନ୍ତି। ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କେବଳ 5 ଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଉଭୟ ଗୀତ ଓ ନାଚ ଶିଖନ୍ତି। ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଗୀତ କିମ୍ବା ନାଚ କୌଣସିଟି ଶିଖନ୍ତି ନାହିଁ ଏବଂ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଏହି ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଶିକ୍ଷା କରନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

11. ଗୋଟିଏ କଲୋନୀର ଦୁଇ ପଞ୍ଚମାଂଶ ପରିବାର 'ସମ୍ବାଦ' ଓ ତିନି ଚତୁର୍ଥାଂଶ ପରିବାର 'ସମାଜ' ପଢ଼ନ୍ତି। ଯଦି 50 ଟି ପରିବାର ଏଇ ଦୁଇଟି ସମ୍ବାଦପତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ପଢ଼ନ୍ତି ନାହିଁ ଏବଂ 125ଟି ପରିବାର ଉଭୟ ଖବରକାଗଜ ପଢ଼ନ୍ତି ତେବେ ଉକ୍ତ କଲୋନୀର ପରିବାର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

12. 2 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ 200 ଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ 140ଟି ଯୁଗ୍ମ ଓ 40ଟି 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ। ତେବେ କେତେ ଗୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଓ କେତେଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।