(xv) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ହେଉଛି ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧମାନଙ୍କର .... ସଙ୍ଗେ ସମାନ ।

(xvi) ଏକ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ସରଳରେଖାଟି ସର୍ବାଧିକ ..... ବୃତ୍ତର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ହୋଇପାରିବ ।

2. ଦତ୍ତ ଥିବା ଉକ୍ତି ଭୁଲଥିଲେ (ଏହାକୁ ଦତ୍ତ ଉକ୍ତିର ନାସ୍ତିବାଚକ ଉକ୍ତି (Negative Statement) ବ୍ୟବହାର ନ କରି) ସଂଶୋଧନ କର ।

(i) r ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତର L ରେଖା ଏକ ଛେଦକ ହେଲେ, ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ରଠାରୁ L ର ଦୂରତା = r ଏକକ ।

(ii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଏକ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ହେଲେ ΔOPT ରେ $\angle POT$ ଏକ ସମକୋଣ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ r ଏକକ । ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ t ଏକକ ଏବଂ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଠାରୁ P ର ଦୂରତା d ଏକକ ହେଲେ, $d^2 + r^2 = t^2$.

(iv) ଏକ ବୃତ୍ତର ସମତଳରେ ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ $\overline{PT}$; P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ, ବୃତ୍ତଟିକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରି P-A-B । ତେବେ $PT^2 = PA \times AB$

(v) ଏକ ବୃତ୍ତର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ Q ଠାରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ।

(vi) ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ P ଅଛି, ଯେଉଁଠାରୁ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ହେବ ।

(vii) ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା ସହ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧର ସମଷ୍ଟି ସମାନ ହେଲେ, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେବେ ।

(viii) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା, ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ବ୍ୟସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟର ପାର୍ଥକ୍ୟ ସହ ସମାନ ।

(ix) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଟିର ଅନ୍ତର୍ଦେଶରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ସେ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ରହିବ ।

(x) ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର କେବଳ ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଥାଏ ।

(xi) ଦୁଇଟି ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ, ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବୃତ୍ତର ଏକ ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

(xii) ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ, ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟିର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ ନୁହେଁ ।

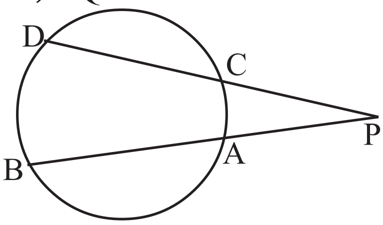
3. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର ବିନ୍ଦୁ O ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ୪ ସେ.ମି. । ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ PO=17 ସେମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

ଖ – ବିଭାଗ

4. ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ 4.5 ସେ.ମି. ଓ 12.5 ସେ.ମି. । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁ ରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କେତେ ?

5. ଦୁଇଟି ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ଏକ ତିର୍ଯ୍ୟକ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା 20 ସେମି. ଏବଂ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଦ୍ୱୟ 7 ସେମି ଓ 5 ସେମି. ହେଲେ, PQ କେତେ ସେ.ମି. ?

6. ଚିତ୍ର - 3.28 ରେ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦତ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ଯେପରିକି P-C-D । (i) ସ୍ପର୍ଶକ-ସମ୍ପୃକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ପ୍ରମାଣ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.28)

PA x PB = PC x PD

(ii) PA = 10 ସେ.ମି. PB = 16 ସେ.ମି. ଓ PD = 20 ସେ.ମି. ହେଲେ, CD ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

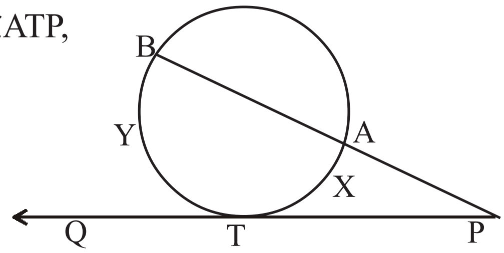
(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ AB = 10 ସେ.ମି. ହେଲେ, P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

7. ଚିତ୍ର 3.29 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ଛେଦକ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ଯେପରି P-A-B । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T ।

(i) $m\,\widehat{AXT} = 60^0$ ଏବଂ $m\,\widehat{BYT} = 130^0$ ହେଲେ $m\angle ATP$, $m\angle APT$, $m\angle ATB$ ଓ $m\angle BTQ$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $m\angle BTQ = 2m\angle ATP$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର : (a) BT = TP (b) TA = AP



(ଚିତ୍ର 3.29)

(iii) PA = 8 ସେ.ମି. ଓ PT = 12 ସେ.ମି ହେଲେ, AB ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iv) PT = 2AP ଏବଂ AB = 18 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

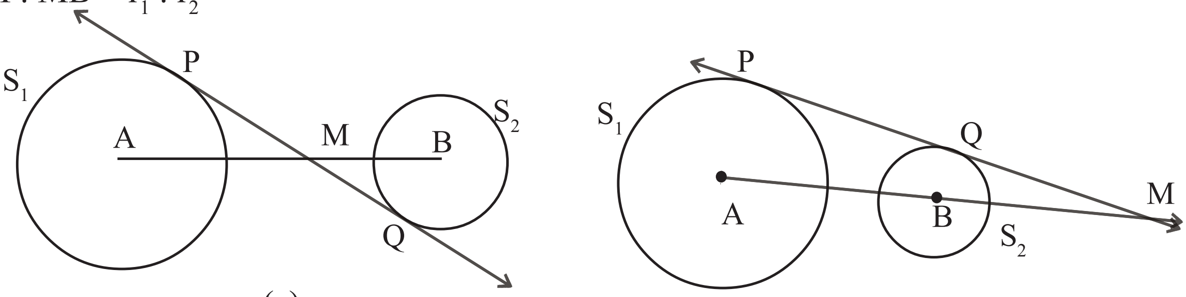
(v) PT = 2AP ଏବଂ PB = 24 ସେ.ମି. ହେଲେ, PT ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8.(a) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ଏହାର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

(b) ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ ଅନ୍ତସ୍ପର୍ଶୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସେମାନଙ୍କର ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରୁ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

9. ପରସ୍ପରଛେଦୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ଛେଦବିନ୍ଦୁ A ଓ B । $\overleftrightarrow{AB}$ ଉପରିସ୍ଥ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି A-B-P । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରୁ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ।

10. ଚିତ୍ର 3.30 ରେ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ର କେନ୍ଦ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B । ଚିତ୍ର 3.30 (a)ରେ ବୃତ୍ତଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : MB = r_1 : r_2$



(ଚିତ୍ର 3.30)

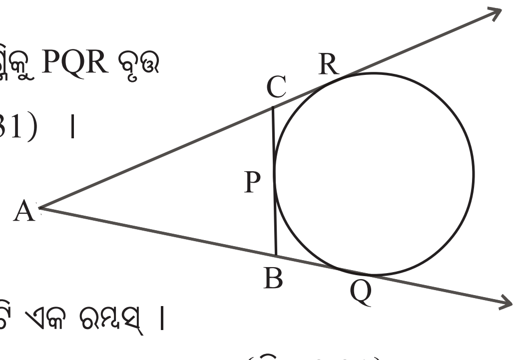
ଚିତ୍ର 3.30 (b) ରେ ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଗୋଟିଏ ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି A-B-M . । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AM : BM = r_1 : r_2$ ।

11. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{PR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି P ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{QR}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।

12. ଦୁଇଟି ଏକକେନ୍ଦ୍ରିକ ବୃତ୍ତ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{AB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

13. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ବୃତ୍ତର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଜକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତର ଏକ ବ୍ୟାସ ।

14. ΔABC ସମ୍ପୃକ୍ତ $\overline{BC}$ ବାହୁ, $\overrightarrow{AB}$ ରଶ୍ମି ଓ $\overrightarrow{AC}$ ରଶ୍ମିକୁ PQR ବୃତ୍ତ ଯଥାକ୍ରମେ P,Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ (ଚିତ୍ର 3.31) । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $AQ = \frac{1}{2}(AB + BC + AC)$



(ଚିତ୍ର 3.31)

15. ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ସମସ୍ତ ବାହୁକୁ ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତ ସ୍ପର୍ଶ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରଟି ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।

ଗ – ବିଭାଗ

16. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ଏହି ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P । P ଠାରୁ ପୂର୍ବୋକ୍ତ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱୟ ହେଉଛନ୍ତି $\overline{PA}$ ଓ $\overline{PB}$ । $\overline{OP}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବୃତ୍ତଟିର ବ୍ୟାସ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ ΔABP ଏକ ସମବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜ ।

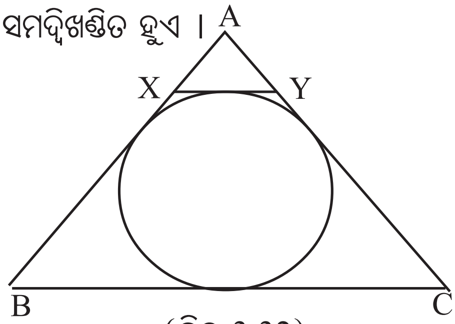
17. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ P ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକବିନ୍ଦୁ । $\overrightarrow{PT}$ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମିର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ T, $\overline{OP}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Q (ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁ) ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ QT = QP ।

18. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି $\overrightarrow{PT}$ ର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ T । P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ଏକ ରେଖା ଉକ୍ତ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ଯେପରିକି P-A-B । $\overline{AB}$ ଉପରେ A ଓ B ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ C ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ପ୍ରମାଣ କର: (a) $\overrightarrow{TC}$, $\angle ATB$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ହେଲେ, PC=PT

(b) PC = PT ହେଲେ $\overrightarrow{TC}$ ଦ୍ୱାରା $\angle ATB$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

19. ΔABC ର ବାହୁ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ X ଓ Y ବିନ୍ଦୁ ଅବସ୍ଥିତ, ଯେପରିକି ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତକୁ $\overline{XY}$ ସ୍ପର୍ଶ କରିବ (ଚିତ୍ର 3.32) ।

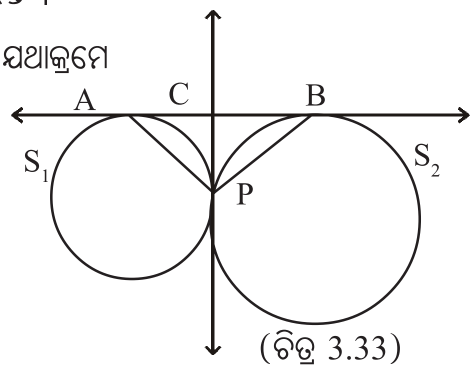
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ AX + XY +YA= AB + AC – BC



(ଚିତ୍ର 3.32)

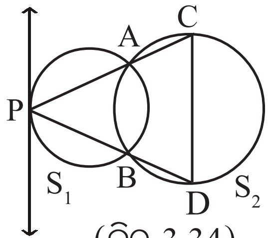
20. ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତ S_1 ଓ S_2 ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ଏକ ସରଳ ସାଧାରଣସ୍ପର୍ଶକ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର - 3.33) । P ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{AB}$ କୁ C ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (a) AC = BC ଏବଂ

(b) $m\angle APB = 90^0$



(ଚିତ୍ର 3.33)

21. S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି (ଚିତ୍ର 3.34) । S_1 ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overrightarrow{PA}$ ଓ $\overrightarrow{PB}$ S_2 ବୃତ୍ତକୁ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁରେ S_1 ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ, $\overline{CD}$ ସହ ସମାନ୍ତର ।



(ଚିତ୍ର 3.34)

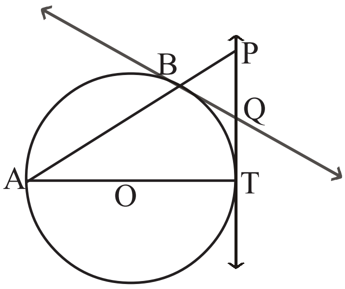
22. ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ବୃତ୍ତର ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ r_1 ଓ r_2 ଏକକ ଏବଂ $r_1 > r_2$ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର କେନ୍ଦ୍ର ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା d ଏକକ ।

(a) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ A ଓ B ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = d^2 - (r_1 - r_2)^2$ ଏବଂ

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତର ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ C ଓ D ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $CD^2 = d^2 - (r_1 + r_2)^2$

23. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ବହିଃସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସ୍ପର୍ଶକ ରଶ୍ମି ଦ୍ୱୟର ସ୍ପର୍ଶ ବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ Q ଏବଂ R । $\overline{QR}$ ଜ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଛେଦିତ କ୍ଷୁଦ୍ର ଚାପର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ S ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\overrightarrow{QS}$ ଦ୍ୱାରା $\angle PQR$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

24. ଚିତ୍ର -3.35 ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର $\overline{AT}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଅନ୍ୟ ଏକ ବିନ୍ଦୁ B । $\overrightarrow{AB}$ ଏବଂ T ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{TP}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ Q ବିନ୍ଦୁ ହେଉଛି $\overline{PT}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।



(ଚିତ୍ର 3.35)

25. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\overline{CA}$, ବୃତ୍ତକୁ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AB^2 = AC \times AD$

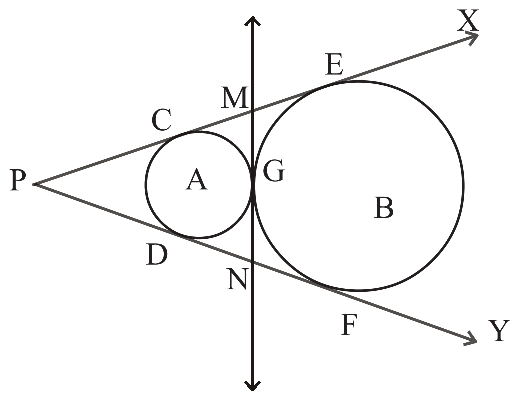
26. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତରେ $\overline{AB}$ ଏକ ବ୍ୟାସ । B ବିନ୍ଦୁରେ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ଉପରେ C ଓ D ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି C-B-D । ଯଦି $\overline{CA}$ ଓ $\overline{DA}$ ଯଥାକ୍ରମେ ବୃତ୍ତକୁ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $AC \times AP = AD \times AQ$

27. ଚିତ୍ର 3.36 ରେ S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତ ଦୁଇଟି ବହିଃସ୍ପର୍ଶୀ ଏବଂ G ସେମାନଙ୍କର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ । ବୃତ୍ତ ଦ୍ୱୟର ସରଳ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକରଶ୍ମି $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ ଦ୍ୱୟର ସାଧାରଣ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁ P। S_1 ଓ S_2 ବୃତ୍ତକୁ $\overrightarrow{PX}$ ଯଥାକ୍ରମେ C ଓ E ବିନ୍ଦୁରେ ଏବଂ $\overrightarrow{PY}$ ଯଥାକ୍ରମେ D ଓ F ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରନ୍ତ ।

(a) ପ୍ରମାଣ କର :

(i) P, A, G, B ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ଓ

(ii) CE = DF

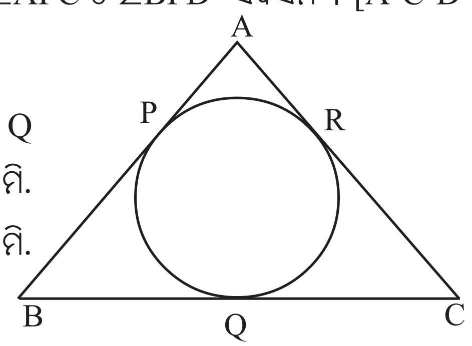


(ଚିତ୍ର 3.36)

(b) ଉଭୟ ବୃତ୍ତ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ସାଧାରଣ ସ୍ପର୍ଶକ $\overrightarrow{PX}$ ଓ $\overrightarrow{PY}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କଲେ, ପ୍ରମାଣ କର : (i) PM = PN, (ii) MG = NG ।

28. ପରସ୍ପର ଅନ୍ତଃସ୍ପର୍ଶୀ ଦୁଇଟି ବୃତ୍ତର ସ୍ପର୍ଶବିନ୍ଦୁ P । ଏକ ସରଳରେଖା ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତକୁ A ଓ B ବିନ୍ଦୁରେ ଓ ଅନ୍ୟ ବୃତ୍ତକୁ C ଓ D ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle APC$ ଓ $\angle BPD$ ସର୍ବସମ । [A-C-D ଓ A-D-C ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପ୍ରମାଣ ଯୋଗ୍ୟ ।]

29. ΔABC ର ଅନ୍ତଃବୃତ୍ତ, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ ଓ $\overline{CA}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P, Q ଓ R ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ପର୍ଶ କରେ । (ଚିତ୍ର -3.37) BQ = 8 ସେ.ମି. CQ = 6 ସେ.ମି. ଏବଂ ΔABC ର ପରିସୀମା 36 ସେ.ମି. ହେଲେ, AB ଓ AC ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

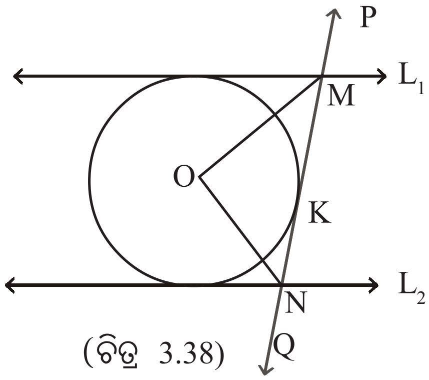


(ଚିତ୍ର 3.37)

30. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O ଏବଂ ପରିଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle AOB$ ଓ $\angle COD$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ । $\angle BOC$ ଏବଂ $\angle AOD$ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମ୍ପର୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

31. ଗୋଟିଏ ବୃତ୍ତର ଏକ ଜ୍ୟା $\overline{AB}$, ଏହି ବୃତ୍ତ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P ଠାରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ ସହ ସମାନ୍ତର ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ P ବିନ୍ଦୁ ଠାରେ $\widehat{APB}$ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ ।

32. ଚିତ୍ର 3.3୪ ରେ ଥିବା ବୃତ୍ତର କେନ୍ଦ୍ର O, L_1 ଓ L_2 ଦୁଇଟି ସ୍ପର୍ଶକ ଏବଂ $L_1 \parallel L_2$ । ବୃତ୍ତର K ବିନ୍ଦୁରେ ଅଙ୍କିତ ସ୍ପର୍ଶକ $\overleftrightarrow{PQ}$, L_1 ଓ L_2 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ । ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\angle MON$ ଏକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.3୪)

■ ■ ■

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ

TCPJ1C

ତ୍ରିକୋଣମିତି

(TRIGONOMETRY)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$ ଓ $\operatorname{cosec}\theta$ ର ସଂଜ୍ଞା, ଏହି ଅନୁପାତମାନଙ୍କୁ ନେଇ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ସୂତ୍ର ଏବଂ $\theta = 30^0, 45^0$ ଓ 60^0 ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା ।

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମେ ଅନ୍ୟ କେତେକ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମୂଲ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଜାଣିବା । ସାଧାରଣ ଜୀବନରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ ବ୍ୟବହାର ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଜାଣିବା ।

ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ପରିମାଣ θ ହେଉ । ଯେହେତୁ $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 ହେଲେ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ p (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଓ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ ମାଧ୍ୟମରେ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦିର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ, ତେଣୁ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 90^0$ ଓ $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ମୂଲ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଜ୍ଞାରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯିବ ।

ସଂଜ୍ଞା : (1) $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\tan 0^0 = \dfrac{\sin 0^0}{\cos 0^0} = 0$, $\sec 0^0 = \dfrac{1}{\cos 0^0} = 1$

$\dfrac{1}{0}$ ଅର୍ଥହୀନ ହୋଇଥିବାରୁ $\dfrac{\cos 0^0}{\sin 0^0}$ ଓ $\dfrac{1}{\sin 0^0}$ ଉଭୟ ଅର୍ଥହୀନ ।

ତେଣୁ $\cot 0^0$ ଓ $\operatorname{cosec} 0^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ (undefined) ।

(2) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\cot 90^0 = \dfrac{\cos 90^0}{\sin 90^0} = 0$, $\operatorname{cosec} 90^0 = \dfrac{1}{\sin 90^0} = 1$

$\tan 90^0$ ଓ $\sec 90^0$ ସଂଜ୍ଞାଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ ।

ମନ୍ତବ୍ୟ : ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣ ଯେ କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଲେ ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ $0 < \theta < 180$ । ସୁତରାଂ $\theta = 0$ କିମ୍ବା $\theta = 180^0$ ଲେଖିବାର ଯଥାର୍ଥତା ନାହିଁ । କିନ୍ତୁ ଦୁଇଟି କୋଣର ପରିମାଣର ଅନ୍ତର 0^0 ଏବଂ ଯୋଗ 180^0 ହୋଇପାରେ । ପୁନଶ୍ଚ $\sin\theta$, $\cos\theta$ ଆଦି ଛଅଗୋଟି ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତକୁ ବ୍ୟାପକ ଅର୍ଥରେ ତଥା

ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନ (Trigonometric function) ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି, ଯେଉଁ ଠାରେ θ ଏକ ଚଳରାଶି (variable ବା argument); ଅର୍ଥାତ୍ θ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ବାସ୍ତବ (real)ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ସୁତରାଂ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$, $\sin 180^0$, $\cos 180^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ମୂଲ୍ୟ ସଂଜ୍ଞାବଦ୍ଧ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

2. କୋଣର ପରିମାଣ ପାଇଁ θ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରର ସଂକେତ ଯଥା α (ଆଲଫା), β (ବିଟା) ଓ γ (ଗାମା) ଇତ୍ୟାଦି ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

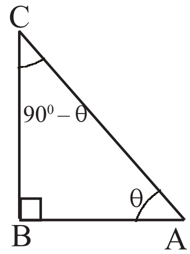
4.2 ଅନୁପୂରକ (Complementary) କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାଣ θ ହେଉ । ତେବେ ଯେଉଁ କୋଣ ଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ θ ଓ $90^0 - \theta$, ସେମାନେ ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ ଅଟନ୍ତି । θ ଓ $90^0 - \theta$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସମ୍ପର୍କକୁ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ।

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର 4.1 ରେ ABC ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜ । $m\angle B = 90^0$

ମନେକର $m\angle BAC = \theta \Rightarrow m\angle BCA = 90^0 - \theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin\theta = \dfrac{BC}{AC}$, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{AC}{BC}$, $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$, $\sec\theta = \dfrac{AC}{AB}$,



(ଚିତ୍ର - 4.1)

$\tan\theta = \dfrac{BC}{AB}$ ଏବଂ $\cot\theta = \dfrac{AB}{BC}$

ଦତ୍ତ ଚିତ୍ରରେ $\sin(90^0 - \theta) = \dfrac{AB}{AC}$ ମାତ୍ର $\cos\theta = \dfrac{AB}{AC}$

$\therefore\ \sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$

ସେହିପରି $\cos(90^0 - \theta) = \dfrac{BC}{AC} = \sin\theta$, $\tan(90^0 - \theta) = \dfrac{AB}{BC} = \cot\theta$

$$\cot(90^0 - \theta) = \frac{BC}{AB} = \tan\theta,\ \sec(90^0 - \theta) = \frac{AC}{BC} = \operatorname{cosec}\theta$$ ଏବଂ

$$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \frac{AC}{AB} = \sec\theta$$

$\therefore\ 0^0 < \theta < 90^0$ ପାଇଁ ଆମେ ପାଇଲେ

ସୂତ୍ର A :

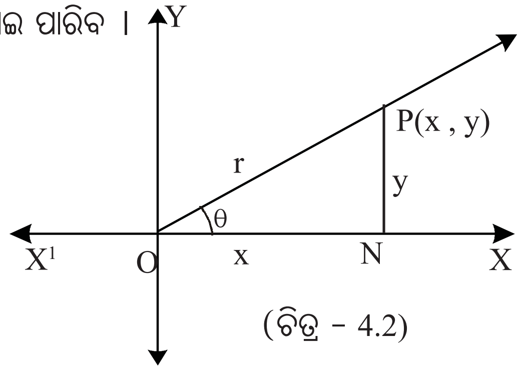
$\sin(90^0 - \theta) = \cos\theta$,	$\cos(90^0 - \theta) = \sin\theta$
$\tan(90^0 - \theta) = \cot\theta$,	$\cot(90^0 - \theta) = \tan\theta$
$\sec(90^0 - \theta) = \operatorname{cosec}\theta$,	$\operatorname{cosec}(90^0 - \theta) = \sec\theta$

4.3. ସ୍ଥୂଳକୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

ପୂର୍ବରୁ 0^0 ଠାରୁ 90^0 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ କୋଣମାନଙ୍କର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । ଆଲୋଚିତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ସଂଜ୍ଞାକୁ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ବିକଳ୍ପ ଉପାୟରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ଏବଂ ପ୍ରକୃତରେ ଏହି ବିକଳ୍ପ ସଂଜ୍ଞା ହିଁ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଙ୍କ ପରିସର ବିସ୍ତାର ପାଇଁ ସହାୟକ ।

କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ P(x,y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $\angle XOP$ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ (ଚିତ୍ର 4.2) ।

$\overline{PN}$, P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷପ୍ରତି ଲମ୍ବ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta$ । $\angle XOP$ ର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ O (ମୂଳବିନ୍ଦୁ) ଠାରୁ P ର ଦୂରତା = r ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ବ୍ୟବହାର କରି PON ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PON = \theta$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନମତେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର - 4.2)

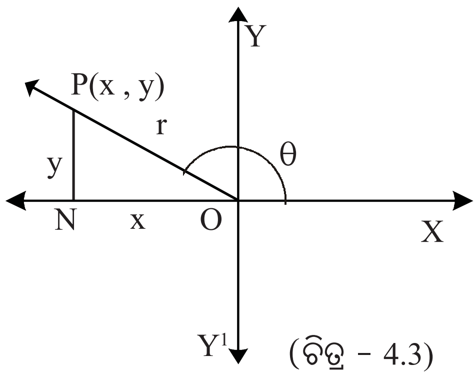
$$\sin\theta = \frac{PN}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{PN}{ON} = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x}$$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଥିବାରୁ x ଓ y ଉଭୟ ଧନାତ୍ମକ ଏବଂ OP, r ଦୂରତା ସୂଚାଉ ଥିବାରୁ ଏହା ସର୍ବଦା ଧନାତ୍ମକ । ଯେଉଁଠାରେ $OP = r = \sqrt{x^2 + y^2}$

ସେହିପରି $\angle XOP$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେଲେ (ଚିତ୍ର 4.3) ଅନୁରୂପ ଭାବେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ପାରିବା । ମାତ୍ର P ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେତୁ ଏହାର ଭୁଜ (= x) ଋଣାତ୍ମକ ଓ କୋଟି (= y) ଧନାତ୍ମକ । ମନେକର $m\angle XOP = \theta\ (0^0 < \theta < 180^0)$



(ଚିତ୍ର - 4.3)

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{r} = \frac{y}{r},$$ ଯାହାକି ଧନାତ୍ମକ,

$$\cos\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{r} = \frac{x}{r}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ

$$\tan\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{y}{x}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ

$$\cot\theta = \frac{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{x}{y}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ,

$$\sec\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର ଭୁଜ}} = \frac{r}{x}$$ ଓ ଏହା ଋଣାତ୍ମକ ଏବଂ

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{\text{P ବିନ୍ଦୁର କୋଟି}} = \frac{r}{y}$$ ଓ ଏହା ଧନାତ୍ମକ

4.5 : $\theta = 180^0$ ନିମନ୍ତେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକର ମୂଲ୍ୟ :

କୌଣସି କୋଣର ଡିଗ୍ରୀ ପରିମାପ θ ଏବଂ $0 < \theta < 180$ ହେଲେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ସଂଜ୍ଞା ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.2 ଏବଂ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 4.3 ରୁ ତୁମେମାନେ ପାଇସାରିଛ । $\theta = 0^0$ କିମ୍ବା 90^0 କିମ୍ବା 180^0 ହେଲେ ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ P (ଉଚ୍ଚତା), b (ଭୂମିର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ଏବଂ h (କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ) ମାଧ୍ୟମରେ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $\sin 0^0$, $\cos 0^0$; $\sin 90^0$, $\cos 90^0$ ଇତ୍ୟାଦିର ସଂଜ୍ଞା

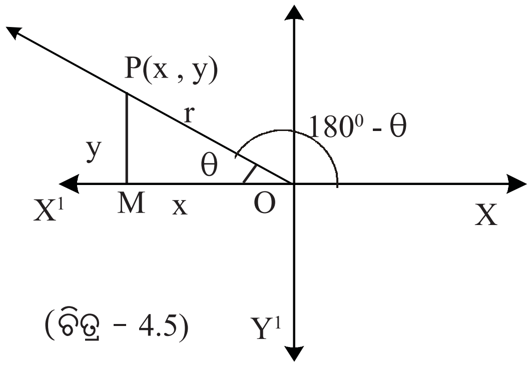
ନିରୂପଣ ଭଳି sin 180^0, cos 180^0 ଇତ୍ୟାଦିକୁ ସଂଜ୍ଞା ବଦ୍ଧ କରିବା । ଉଚ୍ଚତର ଗଣିତରେ ଉକ୍ତ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟାପକୀକୃତ କରିପାରିବା ।

$\sin 180^0 = 0$	$\operatorname{cosec} 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)
$\cos 180^0 = -1$	$\sec 180^0 = -1$
$\tan 180^0 = 0$	$\cot 180^0$ (ସଂଜ୍ଞାବିହୀନ)

4.6 ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ କୋଣ

$(180^0 - \theta)$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ବନ୍ଧ :

ଚିତ୍ର 4.5 ରେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜ ଉପରେ XOX' ଓ YOY' ଦୁଇଟି ଅକ୍ଷରେଖା ଏବଂ O ମୂଳବିନ୍ଦୁ । O ଠାରୁ r ଏକକ ଦୂରରେ P(x, y) ଏପରି ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରି $m\angle POX = (180^0 - \theta)$ ହେଉ (θ ଏକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ) । ତେବେ $m\angle POM = \theta$



(ଚିତ୍ର - 4.5)

$\sin(180^0 - \theta) = \frac{y}{r} = \frac{PM}{OP}$ .... (1)

ପୁନଶ୍ଚ OMP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ,

$\sin\theta = \frac{PM}{OP}$ .... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$

ସେହିପରି $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r}$ ଏବଂ ΔOMP ରେ $\cos\theta = \frac{OM}{OP}$ । ମାତ୍ର ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଋଣାତ୍ମକ ହେତୁ $\cos(180^0 - \theta) = \frac{x}{r} = \frac{-OM}{OP}$ । ସୁତରାଂ $\cos(180^0 - \theta) = -\cos\theta$

ବର୍ତ୍ତମାନ $\tan(180^0 - \theta) = \frac{\sin(180^0 - \theta)}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{\sin\theta}{-\cos\theta} = -\tan\theta$,

$\cot(180^0 - \theta) = \frac{\cos(180^0 - \theta)}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta} = -\cot\theta$,

$\sec(180^0 - \theta) = \frac{1}{\cos(180^0 - \theta)} = \frac{1}{-\cos\theta} = -\sec\theta$ ଏବଂ

$\operatorname{cosec}(180^0 - \theta) = \frac{1}{\sin(180^0 - \theta)} = \frac{1}{\sin\theta} = \operatorname{cosec}\theta$

ଏହା ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ θ ର ମୂଲ୍ୟ 0^0 ରୁ 180^0 ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ମୂଲ୍ୟ ନିମନ୍ତେ (tan ଓ sec କ୍ଷେତ୍ରରେ $\theta \neq 90^0$ ପାଇଁ) ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ।

ସୂତ୍ର - B	$\sin(180^0-\theta) = \sin\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0$ $\cos(180^0-\theta) = -\cos\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0$ $\tan(180^0-\theta) = -\tan\theta,\ 0^0 \le \theta \le 180^0 \quad \theta \ne 90^0$ $\cot(180^0-\theta) = -\cot\theta,\ 0^0 < \theta < 180^0$ $\sec(180^0-\theta) = -\sec\theta,\ \theta \ne 90^0,\ 0^0 \le \theta \le 180^0$ $\text{cosec}(180^0-\theta) = \text{cosec}\,\theta,\ 0^0 < \theta < 180^0$

4.7 ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ θ ଓ ସ୍ଥୂଳକୋଣ $(90^0+\theta)$ ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟରେ ସମ୍ପର୍କ :

ଯଦି θ ଗୋଟିଏ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହୁଏ $90^0+\theta$ ଏକ ସ୍ଥୂଳକୋଣ ହେବ । ଯେହେତୁ ଏହି ସ୍ଥୂଳକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ମାନ $(180^0-\theta)$ ଓ $(90^0-\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସୂତ୍ର ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ, ତେଣୁ ଏହାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଜ୍ୟାମିତିକ ପ୍ରମାଣର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ । $(90^0+\theta)$ କୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତର ମାନ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଭାବେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

$$\sin(90^0+\theta) = \sin\{180^0-(90^0-\theta)\} = \sin(90^0-\theta) = \cos\theta$$
$$\cos(90^0+\theta) = \cos\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\cos(90^0-\theta) = -\sin\theta$$
$$\tan(90^0+\theta) = \tan\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\tan(90^0-\theta) = -\cot\theta$$
$$\cot(90^0+\theta) = \cot\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\cot(90^0-\theta) = -\tan\theta$$
$$\sec(90^0+\theta) = \sec\{180^0-(90^0-\theta)\} = -\sec(90^0-\theta) = -\text{cosec}\,\theta$$
$$\text{cosec}(90^0+\theta) = \text{cosec}\{180^0-(90^0-\theta)\} = \text{cosec}(90^0-\theta) = \sec\theta$$

ସୂତ୍ର - C	$\sin(90^0+\theta) = \cos\theta,\ 0^0 \le \theta \le 90^0$ $\cos(90^0+\theta) = -\sin\theta,\ 0^0 \le \theta \le 90^0$ $\tan(90^0+\theta) = -\cot\theta,\ 0^0 < \theta \le 90^0$ $\cot(90^0+\theta) = -\tan\theta,\ 0^0 \le \theta < 90^0$ $\sec(90^0+\theta) = -\text{cosec}\,\theta,\ 0 < \theta \le 90^0$ $\text{cosec}(90^0+\theta) = \sec\theta,\ 0^0 \le \theta < 90^0$

4.8 କେତକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ :

$\theta = 30^0, 45^0, 60^0$ ପାଇଁ ବିଭିନ୍ନ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ନିରୂପଣ କରାଯାଇଥିଲା । ଏମାନଙ୍କ ସାହାଯ୍ୟରେ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା $\theta = 120^0, 135^0$ ଓ 150^0 ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନ ସବୁ ମଧ୍ୟ ନିରୂପିତ ହୋଇପାରିବ ।

ଏହାର ଆଲୋଚନା ନିମ୍ନରେ କରାଯାଇଛି ।

(i) $\theta = \mathbf{120^0}$

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ଏବଂ $\tan 60^0 = \sqrt{3}$

$\therefore \sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$

$\tan 120^0 = \tan(180^0 - 60^0) = -\tan 60^0 = -\sqrt{3}$

$\cot 120^0 = \frac{1}{\tan 120^0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\sec 120^0 = \frac{1}{\cos 120^0} = -2$ ଏବଂ

$\operatorname{cosec} 120^0 = \frac{1}{\sin 120^0} = \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $\theta = \mathbf{135^0}$

ଏଠାରେ $\theta = 180^0 - 45^0$ ଏବଂ ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି ଯେ –

$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^0 = 1$

$\therefore \sin 135^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;

$\tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1$

[$\sin(180^0 - \theta)$, $\cos(180^0 - \theta)$, $\tan(180^0 - \theta)$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରି]

$\cot 135^0 = \frac{1}{\tan 135^0} = -1$; $\sec 135^0 = \frac{1}{\cos 135^0} = -\sqrt{2}$

ଏବଂ $\operatorname{cosec} 135^0 = \frac{1}{\sin 135^0} = \sqrt{2}$

(iii) $\theta = \mathbf{150^0}$

ପୂର୍ବରୁ ଜଣା ଅଛି $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore \sin 150^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos 150^0 = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\tan 150^0 = -\tan 30^0 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cot 150^0 = \frac{1}{\tan 150^0} = -\sqrt{3}$

$\sec 150^0 = \frac{1}{\cos 150^0} = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ ଏବଂ $\operatorname{cosec} 150^0 = \frac{1}{\sin 150^0} = 2$

ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଜଣା ଥିବା ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ1

$\theta =$	sin	cos	tan	cot	sec	cosec
0^0	0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
45^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	1
120^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$
135^0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	-1	-1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150^0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	2
180^0	0	-1	0	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ	-1	ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ

ଉଦାହରଣ - 1 : $\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \cos 60^0 + \sin 30^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $$\frac{\cos 30^0 + \sin 60^0}{1 + \cos 60^0 + \sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 2 : $\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \frac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $$\frac{\cos 70^0}{\sin 20^0} + \frac{\cos 55^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan 65^0 . \tan 85^0}$$

$$= \frac{\cos(90^0 - 20^0)}{\sin 20^0} + \frac{\cos(90^0 - 35^0) . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \tan(90^0 - 25^0) . \tan(90^0 - 5^0)}$$

$$= \frac{\sin 20^0}{\sin 20^0} + \frac{\sin 35^0 . \operatorname{cosec} 35^0}{\tan 5^0 . \tan 25^0 . \cot 25^0 . \cot 5^0}$$

$$= 1 + \frac{\sin 35^0 \times \frac{1}{\sin 35^0}}{(\tan 5^0 \times \cot 5^0) \times (\tan 25^0 \times \cot 25^0)} = 1 + \frac{1}{1 \times 1} = 1+1 = 2$$ (ଉତ୍ତର) ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 2$

ସମାଧାନ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $3\frac{\sin 62^0}{\cos 28^0} - \frac{\sec 42^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 3\frac{\sin(90^0 - 28^0)}{\cos 28^0} - \frac{\sec(90^0 - 48^0)}{\operatorname{cosec} 48^0}$

$= 3\frac{\cos 28^0}{\cos 28^0} - \frac{\operatorname{cosec} 48^0}{\operatorname{cosec} 48^0} = 3 - 1 = 2 =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 : ଯଦି A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଏବଂ $\sin A = \cos B$ ହୁଏ

ତେବେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $A + B = 90^0$

ସମାଧାନ : B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେତୁ $(90^0 - B)$ ମଧ୍ୟ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sin A = \cos B \Rightarrow \sin A = \sin(90^0 - B)$

$\Rightarrow A = 90^0 - B \Rightarrow A + B = 90^0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

[**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :** A ଓ B ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ହେଲେ $\sin A = \sin B \Rightarrow A = B$ ଏବଂ ସେହିପରି $\cos A = \cos B \Rightarrow A = B$ ଇତ୍ୟାଦି । କିନ୍ତୁ A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥୁଳକୋଣ ହେଲେ ଏହା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ ।

ଯେପରି : $\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 120^0$ କିନ୍ତୁ $60^0 \neq 120^0$ (ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଏ ବିଷୟରେ ଅଧିକ ଜାଣିବ)] ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର : $\frac{1 + \sec(180^0 - A)}{1 + \sec(90^0 + A)} \times \frac{1 - \operatorname{cosec} A}{1 - \sec A}$

ସମାଧାନ : $\frac{1 + \sec(180^0 - A)}{1 + \sec(90^0 + A)} \times \frac{1 - \operatorname{cosec} A}{1 - \sec A} = \frac{1 - \sec A}{1 - \operatorname{cosec} A} \times \frac{1 - \operatorname{cosec} A}{1 - \sec A} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 : $\operatorname{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\operatorname{cosec}^2(97^0 + \alpha) - \cot^2(83^0 - \alpha)$

$= \operatorname{cosec}^2[90^0 + (7^0 + \alpha)] - \cot^2[90^0 - (7^0 + \alpha)]$

$= \sec^2(7^0 + \alpha) - \tan^2(7^0 + \alpha)$

$= 1$ (ଉତ୍ତର)

ବି.ଦ୍ର.: $\cot^2(83^0 - \alpha) = [\cot\{180^0 - (97^0 + \alpha)\}]^2 = [-\cot(97^0 + \alpha)]^2 = \cot^2(97^0 + \alpha)$ ନିଆଯାଇ ସରଳ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ -7 : $\dfrac{\sin(180^0-A).\sin(90^0-A).\cot(90^0+A)}{\tan(180^0-A).\cos(90^0+A).\operatorname{cosec}(90^0-A)}$ କୁ ସରଳ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{\sin(180^0-A).\sin(90^0-A).\cot(90^0+A)}{\tan(180^0-A).\cos(90^0+A).\operatorname{cosec}(90^0-A)} = \dfrac{\sin A.\cos A.(-\tan A)}{-\tan A.(-\sin A).\sec A}$

$= \dfrac{-\sin A.\cos A.\tan A}{\tan A.\sin A.\sec A} = \dfrac{-\cos A}{\sec A} = -\cos^2 A$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -8 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots\ldots\ldots \tan 89^0 = 1$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\tan 1^0 . \tan 2^0 . \tan 3^0 \ldots\ldots\ldots \tan 89^0$

$= \tan(90^0-89^0) . \tan(90^0-88^0) . \tan(90^0-87^0)$

$\ldots\ldots\ldots \tan(90^0-46^0) . \tan 45^0 \ldots\ldots\ldots \tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= \cot 89^0 . \cot 88^0 . \cot 87^0 \ldots. \cot 46^0 . \tan 45^0 . \tan 46^0 \ldots \tan 87^0 . \tan 88^0 . \tan 89^0$

$= (\cot 89^0 \times \tan 89^0) \times (\cot 88^0 \times \tan 88^0) \times (\cot 87^0 \times \tan 87^0)$

$\ldots\ldots \times (\cot 46^0 \times \tan 46^0) \times \tan 45^0$

$= 1 \times 1 \times 1 \times \ldots\ldots\ldots \times 1 \times 1 = 1$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ-9: Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$

ସମାଧାନ : A, B ଏବଂ C ତ୍ରିଭୁଜର ତିନୋଟି କୋଣ ହେତୁ $A + B + C = 180^0$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $\sin\left(\dfrac{B+C}{2}\right) = \sin\left(\dfrac{A+B+C-A}{2}\right)$

$= \sin\left(\dfrac{180^0-A}{2}\right) = \sin\left(90^0-\dfrac{A}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{A}{2}\right)$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

('କ' ବିଭାଗ)

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(a) $\sin 80^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[\sin 10^0, \sin 20^0, \cos 10^0, \cos 20^0]$

(b) $\cos 65^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[\sin 25^0, \sin 35^0, \cos 25^0, \cos 35^0]$

(c) $\sin 180^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[1, -1, 0, \pm 1]$

(d) $\cos 90^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[1, -1, 0, \pm 1]$

(e) $\cos 110^0 + \sin 20^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[2\cos 110^0, 2\sin 20^0, 0, 1]$

(f) $\sin 75^0 - \cos 15^0 = \ldots\ldots\ldots$ $[\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}, 0, 1]$

(g) $\sin 0^0 =$ .... [$\cos 0^0$, $\sin 90^0$, $\sin 180^0$, $\cos 180^0$]

(h) $\sin 15^0 + \cos 105^0 =$ .... [0, 1, – 1, ± 1]

(i) $\cos 121^0 + \sin 149^0 =$ .... [1, – 1, 0, ± 1]

(j) $\tan 102^0 - \cot 168^0 =$ .... [0, –1, 1, ± 1]

2. $90^0 + \theta$ କିମ୍ବା $90^0 - \theta$ କିମ୍ବା $180^0 - \theta$, ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ($0^0<\theta<90^0$)।

(i) $\sin 111^0$ (ii) $\cos 122^0$ (iii) $\tan 99^0$ (iv) $\cot 101^0$

(v) $\sin 91^0$ (vi) $\operatorname{cosec} 93^0$ (vii) $\cos 128^0$ (viii) $\operatorname{cosec} 132^0$ (ix) $\cot 131^0$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ 0^0 ଏବଂ 45^0 କୋଣ ପରିମାଣ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\cos 85^0 + \cot 85^0$ (ii) $\sin 75^0 + \tan 75^0$ (iii) $\cot 65^0 + \tan 49^0$

4. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର । i) $\dfrac{\sin 18^0}{\cos 72^0}$ ii) $\dfrac{\tan 26^0}{\cot 64^0}$ iii) $\dfrac{\sin 116^0}{\cos 26^0}$ iv) $\dfrac{\operatorname{cosec} 74^0}{\operatorname{cosec} 106^0}$ v) $\dfrac{\sin 28^0}{\cos 118^0}$

('ଖ' ବିଭାଗ)

5. ସରଳ କର :-

(i) $\operatorname{cosec} 31^0 - \sec 59^0$ (ii) $\sin(50^0 + \theta) - \cos(40^0 - \theta)$

(iii) $\dfrac{\cos^2 20^0 + \cos^2 70^0}{\sin^2 59^0 + \sin^2 31^0}$ (iv) $\tan(55^0 - \theta) - \cot(35^0 + \theta)$

(v) $\cos 1^0 . \cos 2^0 .... \cos 180^0$ (vi) $\left(\dfrac{\sin 27^0}{\cos 63^0}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos 63^0}{\sin 27^0}\right)^2$

(vii) $\cot 112^0 . \cot 158^0$ (viii) $\cos^2(90^0 + \alpha) + \cos^2(180^0 - \alpha)$

(ix) $\sec^2(105^0 + \alpha) - \tan^2(75^0 - \alpha)$ (x) $\sin^2(110^0 + \alpha) + \cos^2(70^0 - \alpha)$

6. ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\operatorname{cosec}^2 67^0 - \tan^2 23^0$ (ii) $\dfrac{\sin 51^0 + \sin 156^0}{\cos 39^0 + \cos 66^0}$

(iii) $\dfrac{\cos 68^0 + \sin 131^0}{\sin 22^0 + \cos 41^0}$ (iv) $\dfrac{\sin 162^0 + \cos 153^0}{\cos 72^0 - \cos 27^0}$

(v) $\dfrac{\cos 38^0 + \sin 120^0}{2\sin 52^0 + \sqrt{3}}$ (vi) $\dfrac{2\cos 67^0}{\sin 23^0} - \dfrac{\tan 40^0}{\cot 50^0} - \sin 90^0$

(vii) $\dfrac{\sec 61^0 + \operatorname{cosec} 120^0}{\sqrt{3}\operatorname{cosec} 29^0 + 2}$

7. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos(90^0 - \theta) . \operatorname{cosec}(180^0 - \theta) = 1$

(ii) $\dfrac{\cos 29^0 + \sin 159^0}{\sin 61^0 + \cos 69^0} = 1$ (iii) $\sin^2 70^0 + \cos^2 110^0 = 1$

(iv) $\sin^2 110^0 + \sin^2 20^0 = 1$ (v) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2(180^0 - \theta) = \sec^2\theta . \operatorname{cosec}^2\theta$

(vi) $2 \sin \theta . \sec(90^0 + \theta) . \sin 30^0 . \tan 135^0 = 1$

8. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\cos^2 135^0 - 2\sin^2 180^0 + 3\cot^2 150^0 - 4\tan^2 120^0 = \dfrac{-5}{2}$

(ii) $\tan 30^0 . \tan 135^0 . \tan 150^0 . \tan 45^0 = \dfrac{1}{3}$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\operatorname{cosec}^2 90^0 + \cot 120^0} = 1$

(iv) $\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 120^0 + \tan^2 150^0 = \dfrac{1}{3}$

('ଗ' ବିଭାଗ)

9. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର :

(i) $\tan 10^0 \times \tan 20^0 \times \tan 30^0 \times .... \times \tan 70^0 \times \tan 80^0$

(ii) $\cot 12^0 . \cot 38^0 . \cot 52^0 . \cot 60^0 . \cot 78^0$

(iii) $\tan 5^0 . \tan 15^0 . \tan 45^0 . \tan 75^0 . \tan 85^0$

10. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\sin 120^0 + \tan 150^0 . \cos 135^0 = \dfrac{3+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$

(ii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 150^0}{\operatorname{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 2 - \sqrt{3}$

(iii) $\dfrac{\sec^2 180^0 + \tan 45^0}{\operatorname{cosec}^2 90^0 - \cot 120^0} = 3 - \sqrt{3}$

11. ସରଳ କର :

(i) $\sin(180^0 - \theta) . \cos(90^0 + \theta) + \sin(90^0 + \theta) . \cos(180^0 - \theta)$

(ii) $\dfrac{\cos(90^0 - A) . \sec(180^0 - A) . \sin(180^0 - A)}{\sin(90^0 + A) . \tan(90^0 + A) . \operatorname{cosec}(90^0 + A)}$

12. Δ ABC ରେ $m\angle B = 90^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\sin^2 A + \sin^2 C = 1$

13. Δ ABC ରେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\cos(A+B) + \sin C = \sin(A + B) - \cos C$ ।

14. A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଅନୁପୂରକ କୋଣ ହେଲେ $\sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ABCD ଏକ ବୃତ୍ତାନ୍ତର୍ଲିଖିତ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ $\tan A + \tan C$ ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin^2 135^0 + \cos^2 120^0 - \sin^2 150^0 + \tan^2 150^0}{\sin^2 120^0 - \cos^2 150^0 + \tan^2 120^0 + \tan^2 135^0 + \cos 180^0} = \dfrac{5}{18}$

17. ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{5\sin^2 150^0 + \cos^2 45^0 + 4\tan^2 120^0}{2\sin 30^0 . \cos 60^0 - \tan 135^0} = \dfrac{55}{6}$

4.9. ମିଶ୍ରକୋଣର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ (Trigonometrical ratios of compound angles) :

ଯଦି A ଓ B ଉଭୟ ଚଳରାଶି ଓ $\theta = A + B$ ବା $A - B$ ହୁଏ, ତେବେ θ ର ମୂଲ୍ୟ ଉଭୟ A ଓ B ଉପରେ ନିର୍ଭର କରିବ । A ଓ B ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ବା ଉଭୟ ପରିବର୍ତ୍ତିତ ହେଲେ θ ମଧ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ଗ୍ରହଣ କରିପାରେ । ଏ ପରିସ୍ଥିତିରେ θ ଅର୍ଥାତ୍ $A + B$ ବା $A - B$ କୁ ଯୌଗିକ ଚଳ (Compound argument) କୁହାଯାଏ ।

ଯୌଗିକ ଚଳ ପାଇଁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର କେତେଗୁଡ଼ିଏ ବିଶେଷ ଧର୍ମ ରହିଛି । ସେଥି ମଧ୍ୟରୁ କେତେକ ପ୍ରମୁଖ ଧର୍ମକୁ ସୂତ୍ର ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ସୂତ୍ର : $\sin(A + B) = \sin A . \cos B + \cos A . \sin B$ .... (1)

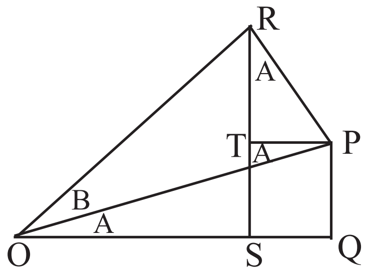
ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.6 ରେ $\angle QOP$ ଓ $\angle POR$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ A ଓ B, ତେଣୁ $\angle QOR$ ର ପରିମାଣ $A + B$ ଅଟେ ।

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ଏବଂ $\overline{PT} \perp \overline{RS}$, $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅଟେ ।

ତେଣୁ $\overline{PT} \parallel \overline{OQ}$ ଏବଂ

$m\angle TPO = m\angle POQ = A$ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ) .... (i)



(ଚିତ୍ର 4.6)

RTP ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle PRT + m\angle TPR = 90^0$

$\overline{RP} \perp \overline{OP}$ ହେତୁ $m\angle TPO + m\angle TPR = 90^0$

$\therefore m\angle PRT + m\angle TPR = m\angle TPO + m\angle TPR$

ତେଣୁ $m\angle PRT = m\angle TPO = A$ [(i) ଅନୁଯାୟୀ] .... (ii)

$$\therefore \sin(A + B) = \frac{RS}{OR} = \frac{RT + TS}{OR} = \frac{RT + PQ}{OR} = \frac{PQ}{OR} + \frac{RT}{OR} \quad (\because TS = PQ)$$

$$= \frac{PQ}{OP} . \frac{OP}{OR} + \frac{RT}{RP} . \frac{RP}{OR}$$

$= \sin\angle QOP \,.\, \cos\angle POR + \cos\angle PRT \,.\, \sin\angle POR$

$= \sin A.\ \cos B + \cos A\ .\ \sin B$

[$\because m\angle QOP = A = m\angle PRT$ ...... (ii)] (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ : (i) $\sin A$ କୁ $\sin m\angle QOP$ ଅଥବା $\sin m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\sin\angle QOP$ ଅଥବା $\sin\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି $\cos A$ କୁ $\cos m\angle QOP$ ଅଥବା $\cos m\angle PRT$ ନ ଲେଖି $\cos\angle QOP$ ଅଥବା $\cos\angle PRT$ ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତ ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରଥା ଅନୁସୃତ ହୁଏ ।

(2) $\angle PRT$ ଓ $\angle QOP$ ସମପରିମାଣ ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ PRT ବା QOP ଯେକୌଣସି ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରୁ ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା । ତ୍ରିଭୁଜଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ ହୋଇଥିବାରୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକ ସମାନ ଅଟନ୍ତି – ଏକଥା ସଦୃଶ ତ୍ରିଭୁଜ ପ୍ରସଙ୍ଗରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି ।

ସୂତ୍ର : $\cos(A+B) = \cos A \,.\, \cos B - \sin A \,.\, \sin B$ ..... (2)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.6 ରୁ $\cos(A+B) = \dfrac{OS}{OR} = \dfrac{OQ-SQ}{OR} = \dfrac{OQ-TP}{OR}$

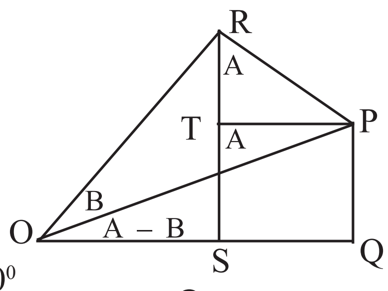
$= \dfrac{OQ}{OR} - \dfrac{TP}{OR} = \dfrac{OQ}{OP}.\dfrac{OP}{OR} - \dfrac{TP}{RP}.\dfrac{RP}{OR}$

$= \cos A \,.\, \cos B - \sin A \,.\, \sin B$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\sin(A-B) = \sin A \,.\cos B - \cos A \,.\, \sin B$ ....(3)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.7 ରେ $m\angle QOR = A$, $m\angle POR = B$, ତେଣୁ $\angle QOP = A - B$

$\overline{RS} \perp \overline{OQ}$, $\overline{PR} \perp \overline{OR}$, $\overline{PT} \perp \overline{RS}$ ଓ $\overline{PQ} \perp \overline{OQ}$



(ଚିତ୍ର 4.7)

ଅଙ୍କନ ଅନୁଯାୟୀ PQST ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

ତେଣୁ $PQ = TS$ ଓ $SQ = TP$

$\angle ROS$ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle ROS + m\angle ORS = 90^0$

ପୁନଶ୍ଚ $\overline{PR} \perp \overline{OR}$ ହେତୁ $m\angle PRT + m\angle ORS = 90^0$

$\therefore m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ($\because m\angle ROS = m\angle QOR = A$)

$\sin(A-B) = \sin\angle QOP = \dfrac{PQ}{OP} = \dfrac{TS}{OP}$ ($\because PQ = TS$)

$$= \frac{RS - RT}{OP} = \frac{RS}{OP} - \frac{RT}{OP} = \frac{RS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} - \frac{RT}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

$= \sin\angle ROS \,.\, \cos\angle POR - \cos\angle PRT \,.\, \sin\angle POR$

$= \sin A \,.\, \cos B - \cos A \,.\, \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂତ୍ର : $\cos(A - B) = \cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B$ ....(4)

ପ୍ରମାଣ : ଚିତ୍ର 4.7 ରେ $\cos(A - B) = \cos\angle QOP$

$$= \frac{OQ}{OP} = \frac{OS + SQ}{OP} = \frac{OS + TP}{OP} \; (\because \; SQ = TP)$$

$$= \frac{OS}{OP} + \frac{TP}{OP} = \frac{OS}{OR}\cdot\frac{OR}{OP} + \frac{TP}{RP}\cdot\frac{RP}{OP}$$

$= \cos\angle ROS \,.\, \cos\angle POR + \sin\angle PRT \,.\, \sin\angle POR$

$= \cos A \,.\, \cos B + \sin A \,.\, \sin B$

($\because$ $m\angle ROS = m\angle PRT = A$ ଓ $m\angle POR = B$) (ପ୍ରମାଣିତ)

ସୂଚନା : ସୂତ୍ର -1ରୁ ସୂତ୍ର - 4 ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଓ ଏହାକୁ ସ୍ମରଣ ରଖିବା ବାଞ୍ଛନୀୟ; କାରଣ ଏହାପରେ ଆଲୋଚିତ ହେବାକୁ ଥିବା ବିଷୟବସ୍ତୁ ପାଇଁ ଏହି ଚାରିଗୋଟି ସୂତ୍ର ହିଁ ଆଧାର । ଏହି ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ସୂକ୍ଷ୍ମକୋଣ ଆଧାରିତ ହୋଇଥିଲେ ହେଁ A ଓ B ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଁଇ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ – ଏହାର ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଦିଆଯିବ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ $\tan(A \pm B)$ ଏବଂ $\cot(A \pm B)$ର ତ୍ରିକୋଣମିତିକ ଫଳନର ସୂତ୍ର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିପାରିବା ।

ଉଦାହରଣ :-10

(i) $\tan(A + B) = \dfrac{\sin(A + B)}{\cos(A + B)} = \dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \; \mathbf{\tan\,(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \, . \, \tan B}}$$

(ii) $\tan\,(A - B) = \dfrac{\sin(A - B)}{\cos(A - B)} = \dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$ (ଲବ ଓ ହରକୁ cosA .cosB ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଗଲା)

$$= \frac{\dfrac{\sin A.\cos B}{\cos A.\cos B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\cos A.\cos B}}{\dfrac{\cos A.\cos B}{\cos A.\cos B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}}$$

$$= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}$$

$$\therefore \; \mathbf{\tan\,(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \, . \, \tan B}}$$

(iii) $\cot\,(A + B) = \dfrac{\cos(A + B)}{\sin(A + B)} = \dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B - \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B + \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$$= \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$$

$$\therefore \; \mathbf{\cot\,(A + B) = \frac{\cot A.\cot B - 1}{\cot B + \cot A}}$$

(iv) $\cot\,(A - B) = \dfrac{\cos(A - B)}{\sin(A - B)} = \dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}$

$$= \frac{\dfrac{\cos A.\cos B + \sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B - \cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}} = \frac{\dfrac{\cos A.\cos B}{\sin A.\sin B} + \dfrac{\sin A.\sin B}{\sin A.\sin B}}{\dfrac{\sin A.\cos B}{\sin A.\sin B} - \dfrac{\cos A.\sin B}{\sin A.\sin B}}$$

$= \dfrac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ $\quad \therefore \; \mathbf{\cot\,(A - B) = \dfrac{\cot A.\cot B + 1}{\cot B - \cot A}}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଆଲୋଚିତ ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଉପ-ସୂତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ନିଜେ ସ୍ଥିର କର ।

(a) $\sin (A + B) + \sin (A - B) = 2 \sin A \,.\, \cos B$

(b) $\sin (A + B) - \sin (A - B) = 2 \cos A \,.\, \sin B$

(c) $\cos (A + B) + \cos (A - B) = 2 \cos A \,.\, \cos B$

(d) $\cos (A - B) - \cos (A + B) = 2 \sin A \,.\, \sin B$

ଉଦାହରଣ - 11 : $\sin 15^0$ ଓ $\tan 105^0$ ର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $\sin 15^0 = \sin(45^0 - 30^0)$

$$= \sin 45^0 . \cos 30^0 - \cos 45^0 . \sin 30^0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

$$\tan 105^0 = \tan(60^0 + 45^0) = \frac{\tan 60^0 + \tan 45^0}{1 - \tan 60^0 . \tan 45^0} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3} \times 1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1)(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = -2-\sqrt{3} \text{ (ଉତ୍ତର)}$$

ଉଦାହରଣ - 12 : ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \tan A + \tan B$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ $= \dfrac{\sin(A+B)}{\cos A . \cos B} = \dfrac{\sin A . \cos B + \cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$

$$= \frac{\sin A . \cos B}{\cos A . \cos B} + \frac{\cos A . \sin B}{\cos A . \cos B}$$

$$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\sin B}{\cos B} = \tan A + \tan B = \text{ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।}$$

ଉଦାହରଣ - 13 : ପ୍ରମାଣ କର : $\dfrac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \tan 61^0$

ସମାଧାନ : ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= \tan 61^0 = \tan(45^0 + 16^0)$

$$= \frac{\tan 45^0 + \tan 16^0}{1 - \tan 45^0 . \tan 16^0} = \frac{1 + \tan 16^0}{1 - \tan 16^0} = \frac{1 + \dfrac{\sin 16^0}{\cos 16^0}}{1 - \dfrac{\sin 16^0}{\cos 16^0}} = \frac{\dfrac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0}}{\dfrac{\cos 16^0 - \sin 16^0}{\cos 16^0}}$$

$$= \frac{\cos 16^0 + \sin 16^0}{\cos 16^0 - \sin 16^0} = \text{ବାମପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।}$$

ଉଦାହରଣ - 14 : ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

ସମାଧାନ : $70^0 + 65^0 = 135^0 \Rightarrow \tan(70^0 + 65^0) = \tan 135^0$

$$\Rightarrow \frac{\tan 70^0 + \tan 65^0}{1 - \tan 70^0 . \tan 65^0} = -1$$

$\Rightarrow -1 + \tan 70^0 . \tan 65^0 = \tan 70^0 + \tan 65^0$

$\Rightarrow \tan 70^0 . \tan 65^0 - \tan 70^0 - \tan 65^0 = 1$

$\Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 15 : $A+B+C = 180^0$ ହେଲେ,

ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C$

ସମାଧାନ : $A+B+C = 180^0 \Rightarrow A+B = 180^0 - C$

$$\Rightarrow \tan(A+B) = \tan(180^0 - C) \Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A . \tan B} = -\tan C$$

$\Rightarrow \tan A + \tan B = -\tan C + \tan A . \tan B . \tan C$

$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A . \tan B . \tan C \Rightarrow$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 16 : ପ୍ରମାଣ କର : $\cos 70^0 + \cos 50^0 = \sin 80^0$

ସମାଧାନ : ବାମପକ୍ଷ = $\cos 70^0 + \cos 50^0$

$= \cos(60^0 + 10^0) + \cos(60^0 - 10^0)$

$= \cos 60^0 . \cos 10^0 - \sin 60^0 . \sin 10^0 + \cos 60^0 . \cos 10^0 + \sin 60^0 . \sin 10^0$

$= 2\cos 60^0 . \cos 10^0 = 2 \times \frac{1}{2} \cos 10^0$

$= \cos 10^0 = \cos(90^0 - 80^0) = \sin 80^0$

= ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ) ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

('କ' ବିଭାଗ)

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

i) $\sin(A - B) = \frac{\sin A}{......} - \frac{\cos A}{......}$ ।

ii) $\cos(\theta + \alpha) + \cos(\alpha - \theta) =$ .... ।

iii) $\cos(60^0 - A) +$ .... $= \cos A$ ।

iv) $\sin(30^0 + A) + \sin(30^0 - A) =$ ...... ।

v) $2 \sin A . \sin B =$ .... $- \cos(A + B)$ ।

vi) $\tan(45^0 + \theta) . \tan(45^0 - \theta) =$ .... ।

'ଖ' ବିଭାଗ

2. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\dfrac{\sin(A - B)}{\cos A.\cos B} = \tan A - \tan B$ ii) $\dfrac{\cos(A + B)}{\cos A.\cos B} = 1 - \tan A . \tan B$

iii) $\dfrac{\cos(A - B)}{\cos A.\sin B} = \cot B + \tan A$ iv) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} - \dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

v) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\beta} = \dfrac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin\beta.\cos\beta}$

3. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(A + 45^0) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$ ii) $\sin(45^0 - \theta) = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sin\theta - \cos\theta)$

iii) $\tan(45^0 + \theta) = \dfrac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta}$ iv) $\cot(45^0 - \theta) = \dfrac{\cot\theta + 1}{\cot\theta - 1}$

4. ପ୍ରମାଣ କର :

i) $\cos(45^0 - A) . \cos(45^0 - B) - \sin(45^0 - A) . \sin(45^0 - B) = \sin(A + B)$

ii) $\sin(40^0 + A) . \cos(20^0 - A) + \cos(40^0 + A) . \sin(20^0 - A) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iii) $\cos(65^0 + \theta) . \cos(35^0 + \theta) + \sin(65^0 + \theta) . \sin(35^0 + \theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

iv) $\cos n\theta . \cos\theta + \sin n\theta . \sin\theta = \cos(n - 1)\theta$

v) $\tan(60^0 - A) = \dfrac{\sqrt{3}\cos A - \sin A}{\cos A + \sqrt{3}\sin A}$

'ଗ' ବିଭାଗ

5. ପ୍ରମାଣ କର :

(i) $\tan 62^0 = \dfrac{\cos 17^0 + \sin 17^0}{\cos 17^0 - \sin 17^0}$ (ii) $\tan 70^0 = \dfrac{\cos 25^0 + \sin 25^0}{\cos 25^0 - \sin 25^0}$

(iii) $\tan 7A . \tan 4A . \tan 3A = \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A$

(iv) $\tan(x + y) - \tan x - \tan y = \tan(x + y) . \tan x . \tan y$

(v) $(1 + \tan 15^0)(1 + \tan 30^0) = 2$

(vi) $(\cot 10^0 - 1)(\cot 35^0 - 1) = 2$

(vii) $\dfrac{1}{\cot A + \tan B} - \dfrac{1}{\tan A + \cot B} = \tan(A - B)$

(viii) $\sqrt{3} + \cot 50^0 + \tan 80^0 = \sqrt{3}\cot 50^0 . \tan 80^0$

6. $\cos 75^0$ ଓ $\sin 15^0$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।