ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

QE33XN

ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ

(ALGEBRAIC EXPRESSIONS AND IDENLITIES)

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରକାରର ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Expression) ଯାହା ସମ୍ପର୍କରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସମ୍ୟକ୍ ଧାରଣା ପାଇଛ । ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମିଶାଣ, ଫେଡ଼ାଣ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଧାରଣା ପାଇଛ । ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ କେତେକ ଅଭେଦ ତଥା ଉକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କିପରି ହୋଇଥାଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଅଧିକ କିଛି ଅଭେଦକୁ ଜାଣିବା ସହ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ଜାଣିବ । ତତ୍ ସହ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଏବଂ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ ଅବଗତ ହେବ । ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗ.ସା.ଗୁ ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସହ କେତେକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶର ସରଳୀକରଣ ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଜାଣିବ ।

3.2 ମନୋମିଆଲ୍ (Monomial) :

ଯଦି a ($a \neq 0$) ଏକ ଧ୍ରୁବକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଏବଂ n ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ax^n ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ x ରେ n ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ a କୁ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ (Coefficient) କୁହାଯାଏ । $3x^2$, $2\sqrt{2}$, $-7x^4$ ଇତ୍ୟାଦି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ।

ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ (Degree of the Monomial) :

କୌଣସି ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଘାତାଙ୍କକୁ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ଯଥା : x, $2x$, $-\sqrt{3}x$ ଇତ୍ୟାଦି ଏକଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ଏବଂ $5x^2$, $-6x^3$, $32x^4$, $2\sqrt{2}x^5$ ଯଥାକ୍ରମେ ଦ୍ୱିଘାତୀ, ତ୍ରିଘାତୀ, ଚତୁର୍ଘାତୀ, ପଞ୍ଚଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି ।

$1, \frac{2}{3}, 3, -2, \sqrt{3}$ ଇତ୍ୟାଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । କାରଣ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x^0, $\frac{2}{3}x^0$, $3x^0$, $-2x^0$, $\sqrt{3}x^0$, ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକୁ **ଶୂନଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍** କୁହାଯାଏ ।

ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ (Like Monomials) :

ଯଦି ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି 'x' ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଦୁଇଟି ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ମନୋମିଆଲ୍ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନେ ସଦୃଶ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2x$ ଓ $-\frac{5}{2}x$ ମନେମିଆଲ୍ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ । କାରଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତାଙ୍କ 1 । ସେହିପରି $\frac{1}{2}x^2$, $-2x^2$ ଓ $\sqrt{3}x^2$ ମନୋମିଆଲ୍ ତ୍ରୟ ସଦୃଶ । କାରଣ ଏମାନେ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଶୂନ ମନୋମିଆଲ୍ (Zero Monomials) :

ସଂଖ୍ୟା 0 କୁ ax^n ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ, କାରଣ $0=0.x = 0.x^2 = 0.x^3 = ...$ । ତାହାହେଲେ 0 କୁ କେତେ ଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ବୋଲି କୁହାଯିବ ? ଏଥିପାଇଁ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉତ୍ତର ନଥିବାରୁ **0 ଏକ ବିଶେଷ ଧରଣର ମନୋମିଆଲ୍ ଯାହାକୁ ଶୂନ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।**

3.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) :

କୌଣସି ଏକପଦୀ କିମ୍ବା ବହୁପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : $2+3x-4x^2$, $1+x^3$, $3x^{10}$ ଇତ୍ୟାଦି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ମଧ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି 'x' ରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ତେବେ $p(x)$ ର ବ୍ୟାପକ ପରିପ୍ରକାଶ ହେଉଛି: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ । $a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ($a_n \neq 0$), n ଏକ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ ତେବେ $p(x)$ କୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ 'x' ର n- ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ସଂଜ୍ଞାରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

(i) $a_0, a_1x, a_2x^2 ... a_nx^n$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ।

(ii) ଉକ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକ $p(x)$ର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ପଦ (nomial) ।

(iii) a_0 ହେଉଛି $p(x)$ ର ଏକ ଧ୍ରୁବକ ପଦ (constant term)।

(iv) $a_0, a_1, a_2, a_3 .... a_n$ ଯଥାକ୍ରମେ $x^0, x^1, x^2, x^3 .... x^n$ ର ସହଗ (co-efficient) ।

ସହଗଗୁଡ଼ିକ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (rational number) ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $p(x)$କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯିବ । ସେହିପରି ସହଗଗୁଡ଼ିକ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $p(x)$କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

(a) $2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{4}x^2$, $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

(b) $x^2 - x - 2$, $1 - 2x - 4x^2 + 3x^3$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ନାମକରଣ :

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦସଂଖ୍ୟା ଅନୁସାରେ ତା'ର ନାମକରଣ କରାଯାଏ । $p(x)$ ର ପଦସଂଖ୍ୟା 1 ହେଲେ ତାହାକୁ **ଏକପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** (Manomial) **,** ପଦସଂଖ୍ୟା ଦୁଇ ହେଲେ ସେହି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଦ୍ୱିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Binomial) ଏବଂ ପଦସଂଖ୍ୟା ତିନି ଥିଲେ ତାହକୁ **ତ୍ରିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** (Trinomial) କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $4x$, x^2-5, $4-6x+7x^3$ ଯଥାକ୍ରମେ ମନୋମିଆଲ୍, ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଓ ଟ୍ରାଇନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଲେଖିଲାବେଳେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେଥିବା ସାନରୁ ବଡ କିମ୍ବା ବଡରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଏ । ଏହି **କ୍ରମ ଲିଖନକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର Standard Form ଲିଖନ** କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $x-2x^2+3x^3+1$ ର Standard form ଲିଖନ ହେଉଛି $3x^3-2x^2+x+1$ ବା $1+x-2x^2+3x^3$ ।

(ii) 'x' ରେ ବିଭିନ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କୁ ସାଧାରଣତଃ $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $t(x)$ ଇତ୍ୟାଦି ସଂଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ଲେଖାଯାଏ।

3.3.1. ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ (Degree of Polynomial) :

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ଚଳରାଶି (x)ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । $2x-3$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତାଙ୍କ 1। କାରଣ 'x' ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କ 1 । ସେହିପରି x^2+2x+3 ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2 । ତେଣୁ ଏହାକୁ ଦ୍ୱିଘାତୀ (Quadratic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $2x^3-x^2+7$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 3 ହେତୁ ଏହାକୁ ତ୍ରିଘାତୀ (cubic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ $3-2x+2x^2-x^4$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 4 । ଫଳର ଏହା ଏକ ଚତୁଃଘାତୀ (Biquadratic ବା Quartic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

3.3.2 ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial in more than one variable):

ଏହା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିଅଛେ । ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସମସ୍ତ ଧାରଣା ସବୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ମଧ୍ୟ ସଂପ୍ରସାରିତ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $5x^2y^3$ ରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ଓ y ର ଘାତାଙ୍କ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ ଏହା ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ । ସେହିପରି $x+xy+xy^2$ ମଧ୍ୟ x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେ ଥିବା ଘାତାଙ୍କ ଗୁଡିକର ସମଷ୍ଟିକୁ ଉକ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ଯଥା : $5x^2y^3$ ର ଘାତ = x ର ଘାତାଙ୍କ + y ର ଘାତାଙ୍କ = $2+3=5$

ସେହିପରି ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେଲେ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦଗୁଡ଼ିକର ଘାତ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ସ୍ଥିରିକୃତ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ହେବ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $x+xy+xy^2$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବାମଆଡୁ ପ୍ରଥମ ପଦ x ର ଘାତ = 1, ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ xy ର ଘାତ = $1+1=2$ ଓ ତୃତୀୟ ପଦ xy^2 ର ଘାତ ହେଉଛି $1+2=3$ ।

ତେଣୁ ସମସ୍ତ ପଦମାନଙ୍କ ଘାତ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 3; ଯାହାକି ପ୍ରଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ଅଟେ ।

ସେହିପରି $x+y^2+3x^2y^2$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ = 4

ଟୀକା : (i) x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ସାଧାରଣତଃ $p(x,y)$, $r(x,y)$, $t(x,y)$ ଇତ୍ୟାଦି ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।

(ii) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ $p(x,y,z)$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

3.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପୁନରାଲୋଚନା :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂଗଠିତ ହୁଏ ତାହା ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଛ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେ ପକାଇବା ।

3.4.1 ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କିପରି କରାଯାଏ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ । ଏଥିପାଇଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଅଥବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ standard form ରେ ଲେଖାଯାଏ । ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କଲା ବେଳେ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ ବା ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

$2x^3 - 5 + 3x^2 - 7x$, $20x - 5x^2 + 3 - x^3$ ଓ $3x + 4x^3 - 7 + x^2$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

(a) ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{r} 2x^3 + 3x^2 - 7x - 5 \\ -x^3 - 5x^2 + 20x + 3 \\ 4x^3 + x^2 + 3x - 7 \\ \hline 5x^3 - x^2 + 16x - 9 \end{array}$$

(ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $5x^3 - x^2 + 16x - 9$ (ଉତ୍ତର)

(b) ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $(2x^3 - 5 + 3x^2 - 7x) + (20x - 5x^2 + 3 - x^3) + (3x + 4x^3 - 7 + x^2)$

$= (2x^3 + 3x^2 - 7x - 5) + (-x^3 - 5x^2 + 20x + 3) + (4x^3 + x^2 + 3x - 7)$

(ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖାଗଲା)

$= (2x^3 - x^3 + 4x^3) + (3x^2 - 5x^2 + x^2) + (-7x + 20x + 3x) + (-5 + 3 - 7)$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ଏକତ୍ର ଲେଖାଯାଇଛି)

$= 5x^3 - x^2 + 16x - 9$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 :

$3x^4 + x^2 - 4$, $x^3 - 5x + 2$ ଓ $2x^4 + 3x^2 + 2x$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଏହି ତିନିଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ କୌଣସି ଗୋଟିକର ସମସ୍ତ ପଦର ସଦୃଶ ପଦ ଅନ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ନାହିଁ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ କିପରି ଯୋଗ କରିବାକୁ ହେବ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ଦେଖ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrrrr} & 3x^4 & & +x^2 & & -4 \\ & & x^3 & & -5x & +2 \\ & 2x^4 & & +3x^2 & +2x & \\ \hline \text{ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ} = & 5x^4 & +\ x^3 & +4x^2 & -\ 3x & -2 \end{array}$$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3x^4 + x^2 - 4) + (x^3 - 5x + 2) + (2x^4 + 3x^2 + 2x)$

$= (3x^4 + 2x^4) + x^3 + (x^2 + 3x^2) + (-5x + 2x) + (-4 + 2)$

$= 5x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 :

$\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2,\ \ 8 + 3x^4,\ \ -\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2$ ଓ $\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5$ କୁ ଯୋଗକର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrrrr} & x^4 & +\frac{5}{2}x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & -3x & \\ & 3x^4 & & & & +8 \\ & & -\frac{9}{2}x^3 & +\frac{11}{2}x^2 & & \\ & & & \frac{13}{2}x^2 & -2x & +5 \\ \hline \text{ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ} = & 4x^4 & -\ 2x^3 & +\frac{23}{2}x^2 & -\ 5x & +13 \end{array}$$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2) + (8 + 3x^4) + (-\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2) + (\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5)$

$= (x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x) + (3x^4 + 8) + (-\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2) + (\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5)$

(ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ୍)

$= (x^4 + 3x^4) + (\frac{5}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^3) + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{13}{2}x^2) + (-3x - 2x) + (8 + 5)$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର ସଜାଇ ରଖ୍)

$= 4x^4 - 2x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 5x + 13$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : $7x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ରୁ $4x^3 - 3 - 3x^2 + 2x$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrrr} & 7x^3 & -2x^2 & +3x & -5 \\ & 4x^3 & -3x^2 & +2x & -3 \\ & - & + & - & + \\ \hline \text{ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ} = & 3x^3 & +x^2 & +x & -2 \end{array}$$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ତଳକୁ ତଳ ଲେଖି)

(ବିୟୋଗ କରାଯାଉଥିବା ରାଶିର ଚିହ୍ନ ବଦଳାଇ)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

$(7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (4x^3 - 3 - 3x^2 + 2x)$

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$ (ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ)

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + \{-(4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)\}$ $[\because a - b = a + (-b)]$

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + \{-4x^3 + 3x^2 - 2x + 3)\}$ (ଫେଡ଼ାଯାଉଥିବା ରାଶିର ଚିହ୍ନ ବଦଳାଇ)

$= 7x^3 - 4x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 3x - 2x - 5 + 3$ (ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର ସଜାଇ ଲେଖି)

$= 3x^3 + x^2 + x - 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 :

$2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$ ରୁ $2.5x^2 + 1.5x^3 + 9 - 12x$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrr} 2.5x^3 & -3.5x^2 & & -7 \\ 1.5x^3 & +2.5x^2 & -12x & +9 \\ - & - & + & - \\ \hline x^3 & -6x^2 & +12x & -16 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ = $x^3 - 6x^2 + 12x - 16$

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ = $(2.5x^3 - 7 - 3.5x^2) - (2.5x^2 + 1.5x^3 + 9 - 12x)$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) - (1.5x^3 + 2.5x^2 - 12x + 9)$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) + \{-(1.5x^3 + 2.5x^2 - 12x + 9)\}$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) + \{-1.5x^3 - 2.5x^2 + 12x - 9\}$

$= 2.5x^3 - 1.5x^3 - 3.5x^2 - 2.5x^2 + 12x - 7 - 9$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 16$ (ଉତ୍ତର)

3.4.2 ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ ।**

ଯଦି $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୁଏ,

ତେବେ $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ।**

ଯଦି $\{p(x) + q(x)\} + r(x) = p(x) + \{q(x) + r(x)\}$

(iii) $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$

ଅର୍ଥାତ୍ 0 **(ଜିରୋ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେଉଛି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ)**

(iv) $p(x) + \{-p(x)\} = \{-p(x)\} + p(x) = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ **$p(x)$ ଓ $-p(x)$ ପରସ୍ପରର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।**

ବି.ଦ୍ର. : ଉଦାହରଣ ଜରିଆରେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ନିୟମଗୁଡ଼ିକର ସଠିକତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବା ।

3.4.3 ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

x ରେ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive Law)** ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଗୁଣନ ପରେ ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର କରି ପ୍ରାପ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ x ର ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । ଅବଶ୍ୟ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ନ ହୋଇ y, z ଇତ୍ୟାଦି ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 6 :

$5x^2 + 3x - 4$ ଓ $2x + 3$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଇଛି ।

ମନେକର $p(x) = 5x^2 + 3x - 4$ ଓ $q(x) = 2x + 3$

$\therefore p(x) \times q(x) = (5x^2 + 3x - 4)(2x + 3)$

$= (5x^2 + 3x - 4) \times 2x + (5x^2 + 3x - 4) \times 3$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 5x^2 \times 2x + 3x \times 2x - 4 \times 2x + 5x^2 \times 3 + 3x \times 3 - 4 \times 3$

(ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପୁନଃ ପ୍ରୟୋଗ)

$= 10x^3 + 6x^2 - 8x + 15x^2 + 9x - 12$

$= 10x^3 + (6x^2 + 15x^2) + (-8x + 9x) - 12$ (ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ରୀକରଣ)

$= 10x^3 + 21x^2 + x - 12$ (ଉତ୍ତର)

ମନେକର ଗୁଣଫଳ $= 10x^3 + 21x^2 + x - 12 = r(x)$

ଉଦାହରଣ - 6 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏଠାରେ $p(x)$ ଏବଂ $q(x)$ ର ଘାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 ଏବଂ 1 । ଉକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର ଘାତ 3, ଏଥିରୁ ଦେଖାଯାଉଛି ଯେ, ଯଦି $p(x)$ ଏବଂ $q(x)$ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍, ତେବେ **$\{p(x) \times q(x)\}$ ର ଘାତ $=$ $p(x)$ର ଘାତ $+$ $q(x)$ର ଘାତ**

ଯେକୌଣସି ଉଦାହରଣ ନେଇ ଏହି ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ, (i) $p(x) \times q(x) = r(x)$ ହେଲେ, $r(x)$ କୁ ଉଭୟ $p(x)$ ଓ $q(x)$ ର ଗୁଣିତକ କୁହାଯାଏ ।

(ii) $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $r(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ।

ବି.ଦ୍ର. : ଏଠାରେ ଆଲୋଚିତ ଉଦାହରଣଟିରେ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇଛି । ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀରେ ମଧ୍ୟ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କରାଯାଇପାରେ । ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର ।

3.4.4 ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ** । ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେଲେ, $p(x) \times q(x) = q(x) \times p(x)$ ।

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ** । ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $p(x)$, $q(x)$ ଓ $r(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ତେବେ, $\{p(x) \times q(x)\} \times r(x) = p(x) \times \{q(x) \times r(x)\}$ ।

(iii) **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ :** $\{p(x) + q(x)\} \times r(x) = p(x) \times r(x) + q(x) \times r(x)$

(iv) $p(x) \times 0 = 0 \times p(x) = 0$

(v) $p(x) \times 1 = 1 \times p(x) = p(x)$ ଅର୍ଥାତ୍ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **1 ହେଉଛି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।**

3.4.5 ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଦ୍ୱାରା ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଭାଗକ୍ରିୟା :

ମନେକର $p(x)$ ଓ $q(x) \neq 0$ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏବଂ $q(x)$ ର ଘାତ, $p(x)$ ର ଘାତଠାରୁ ଛୋଟ କିମ୍ବା $p(x)$ ର ଘାତ ସହିତ ସମାନ ।

ତେବେ, $p(x) = q(x) \times k(x) + r(x)$

ଏଠାରେ, $r(x) = 0$ କିମ୍ବା $r(x)$ ର ଘାତ, $q(x)$ ର ଘାତଠାରୁ ଛୋଟ । ଯଦି $r(x) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $p(x)$, $q(x)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଭାଗକ୍ରିୟା କିପରି ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଏ, ତାହା ତୁମେମାନେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଛ । ମନେପକାଇବା ନିମନ୍ତେ ଏଠାରେ କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦିଆଗଲା ।

ଉଦାହରଣ -7 : $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ କୁ $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଉଭୟ ଭାଜ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଓ ଭାଜକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖାଯାଇଛି ।

ଭାଗକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭରେ ଦେଖିବାକୁ ହେବ ଯେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $2x^3$ କୁ ଭାଜକ ପ୍ରଥମ ପଦ $2x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଯାହା ଭାଗଫଳ ହେବ ତାହାହିଁ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $2x^3 \div 2x = x^2$ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ।

$$
\begin{array}{llll}
2x + 3 \;) & 2x^3 + 5x^2 - x - 6 & (\; x^2 + x - 2 & \\
& 2x^3 + 3x^2 & & \text{(2x + 3 କୁ } x^2 \text{ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)} \\
& - \quad - & & \\
\hline
& \quad 2x^2 - x - 6 & & \\
& \quad 2x^2 + 3x & & \text{(2x+3 କୁ x ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ } 2x^2 - x - 6 \text{ ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)} \\
& \quad - \quad - & & \\
\hline
& \qquad -4x - 6 & & \\
& \qquad -4x - 6 & & \text{(2x+3 କୁ –2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ } -4x-6 \text{ ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)} \\
& \qquad + \quad + & & \\
\hline
& \qquad\quad 0 & &
\end{array}
$$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ କୁ $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ $x^2 + x - 2$ ଏବଂ ଭାଗଶେଷ 0 ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (2x+3)(x^2 + x - 2)$

ଉଦାହରଣ -8 : $6x^3 + 11x^2 - 29x + 17$ କୁ $3x^2 - 5x + 2$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଭାଜ୍ୟ ଓ ଭାଜକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଦ୍ୱୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ରଖାଯାଇଛି । ନିମ୍ନରେ ଭାଗକ୍ରିୟାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଏଠାରେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $6x^3$ କୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ $3x^2$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ $2x$ । ଏହା ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ।

$$
\begin{array}{r|l|l}
3x^2 - 5x + 2 & 6x^3 + 11x^2 - 29x + 17 & 2x + 7 \\
 & \quad 6x^3 - 10x^2 + 4x & (3x^2 - 5x + 2 \text{ କୁ } 2x \text{ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ} \\
 & \quad - \quad + \quad - & \text{ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)} \\
\hline
 & \qquad 21x^2 - 33x + 17 & \\
 & \qquad 21x^2 - 35x + 14 & (3x^2 - 5x + 2 \text{ କୁ } 7 \text{ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ} \\
 & \qquad - \quad + \quad - & 21x^2 - 33x + 17\text{ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)} \\
\hline
 & \qquad\qquad 2x + 3 &
\end{array}
$$

$\therefore$ ଏହି ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳ $= 2x + 7$ ଓ ଭାଗଶେଷ $= 2x + 3$

ତେଣୁ $6x^3 + 11x^2 - 29x + 17 = (3x^2 - 5x + 2)(2x + 7) + (2x + 3)$

ଅର୍ଥାତ୍ **ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ × ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ**

ବି.ଦ୍ର. : ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଭାଗକ୍ରିୟାରୁ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା 'n' କୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା $m(m \le n$ ଏବଂ $m \neq 0)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଯଦି ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ଯଥାକ୍ରମେ k ଓ r ହୁଏ,

ତେବେ $n = mk + r$

ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ ଏଠାରେ $r = 0$ କିମ୍ବା $r < m$

ଏହାକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm)** କୁହାଯାଏ ।

3.4.6 ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ଭାଗକ୍ରିୟା :

ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ, ତେବେ $2xy$, x^2y, $-5xy^2$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । ସେହିପରି xyz, $3x^2yz$, $-5x^3yz^2$, $\frac{1}{3}x^3yz^3$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x, y ଓ z ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ହେବ । ଏହିପରି କେତେକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ ବା ବିୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିମୋନିଆଲ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।

ମନେକର x ଓ y ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଇଛି । ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର କରି ଯୋଗଫଳ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଲବ୍ଧ ଯୋଗଫଳକୁ x ବା y ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଅଥବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବିୟୋଗ କଲାବେଳେ ମଧ୍ୟ ଉପରୋକ୍ତ ପଦ୍ଧତି ଅନୁସରଣ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 9 :

$2x^2 + 3xy - 4y^2$ ଓ $5x^2 - 4xy + 6y^2$ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଉଭୟ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ ଓ ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3xy - 4y^2 \\ 5x^2 - 4xy + 6y^2 \\ \hline 7x^2 - xy + 2y^2 \end{array}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= 7x^2 - xy + 2y^2$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2x^2 + 3xy - 4y^2) + (5x^2 - 4xy + 6y^2)$

$= (2x^2 + 5x^2) + \{3xy + (-4xy)\} + \{(-4y^2) + 6y^2\}$

$= 7x^2 - xy + 2y^2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

$2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$ ରୁ $x^3 - x^2y + 4xy^2 + 2y^3$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -\ 3x^2y & +\ 4xy^2 & \\ x^3 & -\ x^2y & +\ 4xy^2 & +\ 2y^3 \\ - & + & - & - \\ \hline x^3 & -\ 2x^2y & +\ 0 & -\ 2y^3 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= x^3 - 2x^2y - 2y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ : $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - (x^3 - x^2y + 4xy^2 + 2y^3)$

$= 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - x^3 + x^2y - 4xy^2 - 2y^3$

$= 2x^3 - x^3 - 3x^2y + x^2y + 4xy^2 - 4xy^2 - 2y^3$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= x^3 - 2x^2y - 2y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

$2x + 3y$ ଓ $4x^2 - 5xy + y^2$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଉଭୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ x ର ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଇଛି ।

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{l} \quad 4x^2 - 5xy + y^2 \\ \times\ 2x + 3y \\ \hline 8x^3 - 10x^2y + 2xy^2 \quad \text{(ପ୍ରଥମେ 2x ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି)} \\ \qquad 12x^2y - 15xy^2 + 3y^3 \quad \text{(3y ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି)} \\ \hline 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3 \end{array}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

$(2x + 3y)\ (4x^2 - 5xy + y^2)$

$= 2x\ (4x^2 - 5xy + y^2) + 3y(4x^2 - 5xy + y^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 8x^3 - 10x^2y + 2xy^2 + 12x^2y - 15xy^2 + 3y^3$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପୁନଃ ପ୍ରୟୋଗ)

$= 8x^3 + (-10x^2y + 12x^2y) + (2xy^2 - 15xy^2) + 3y^3$ (ସଦୃଶ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଏକତ୍ରୀକରଣ)

$= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଭାଗକ୍ରିୟା ସମୟରେ ଭାଜ୍ୟ ତଥା ଭାଜକ ଉଭୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ବା y କୌଣସି ଗୋଟିକର ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମ ବା ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । ପୂର୍ବ ଭାଗକ୍ରିୟା ଭଳି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଭାଗକ୍ରିୟାର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 12 :

$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$ କୁ $x-y$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଭାଜ୍ୟ ଏବଂ ଭାଜକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ x ର ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମରେ ଥିବା ବେଳେ y ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ହୋଇ ରହିଛି ।

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-y & x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 & x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\
 & \underline{\begin{array}{l} x^4 - x^3y \\ - \quad + \end{array}} & \\
 & \quad -3x^3y + 6x^2y^2 & \\
 & \quad \underline{\begin{array}{l} -3x^3y + 3x^2y^2 \\ + \qquad - \end{array}} & \\
 & \qquad\qquad 3x^2y^2 - 4xy^3 & \\
 & \qquad\qquad \underline{\begin{array}{l} 3x^2y^2 - 3xy^3 \\ - \qquad + \end{array}} & \\
 & \qquad\qquad\qquad -xy^3 + y^4 & \\
 & \qquad\qquad\qquad \underline{\begin{array}{l} -xy^3 + y^4 \\ + \qquad - \end{array}} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ ।

$1.4y^3, \quad \sqrt{2}\,y^2, \quad -51, \quad 7y^8, \quad -8y^4, \quad \frac{11}{13}y^9, \quad \sqrt{3}\,y$

2. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ପୃଥକ ଭାବେ ଲେଖ ।

$12x^2, \quad -3x, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x^3, \quad -5x^2, \quad \frac{x}{7}, \quad 15, \quad \sqrt{3}\,x^3, \quad 10x^4, \quad \frac{8}{11}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରୁ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

(i) ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

(ii) ଏକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

(iii) ଦୁଇ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

(iv) ତିନି ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

4. ଯୋଗ କର -

(i) $2y^3 - 3y - 4, \quad 2 - y^3 + 5y$

(ii) $3x^4 - 2x^3 - 5 + x - 5x^2, \quad 3x^3 + 2x^2 - x^4 - x + 1$

(iii) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x - 3, \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{5}x + 2$

(iv) $2.1x^3 + 3.2x^2 + 5 - 3x, \quad 1.9x^3 - 1.2x^2 + 2x - 1$

(v) $\frac{1}{2}z^3 - \frac{3}{2}z^2 + 6z, \quad \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 3z - 1, \quad z^3 + 2z^2 + 3z - 4$

(vi) $8x - 3xy + 2xyz, \quad 2xy - 5x + 3xyz, \quad xy - 3x + 4xyz$

(vii) $5x^2 - 2xy + y^2, \quad 4xy - 2y^2 - 3x^2, \quad 4y^2 - xy - x^2$

5. ବିୟୋଗ କର -

(i) $6x^3 - 13x^2 + 14$ ରୁ $-x^3 + 2x - 7x^2 + 11$

(ii) $t^4 - 11 + 2t^2 - t^3$ ରୁ $2t^3 - 8t^2 - 10$

(iii) $\frac{12}{13}y^2 - \frac{5}{13}y^3 - 15$ ରୁ $-\frac{1}{13}y^2 + \frac{8}{13}y^3 + 20$

(iv) $2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$ ରୁ $2.5x^2 + 1.5x^3 + 8 - 2x$

(v) $x^2 - 2xy + 3y^2$ ରୁ $2x^2 - xy - 2y^2$

(vi) $2x^2 - 3xy - 4xy^2$ ରୁ $x^2 - xy - 2xy^2$

(vii) $a - 3b + 2c$ ରୁ $3b - 7c + 2a$

(viii) $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{2}c$ ରୁ $a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$

6. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରି ଗୁଣଫଳର ଘାତ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $2x^2 - 3x + 5$ ଓ $x^2 + 5x + 2$

(ii) $y^3 - 5y^2 + 11y$ ଓ $y^5 - 20y^4 + 17$

(iii) $(2x+3)$ ଓ $5x^2 - 7x + 8$

(iv) $(x-1), (7x-9)$ ଓ $3x^3 - 14x^2 + 8$

(v) $(x^2 + y^2)$ ଓ $(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

(vi) $(2x+3y), (2x-3y)$ ଓ $(4x^2 + 9y^2)$

7. ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

(ii) $(-81y^2 + 64) \div (8 - 9y)$

(iii) $(2x^3 - 7x^2 - x + 2) \div (x^2 - 3x - 2)$

(iv) $(x^3 - 14x^2 + 37x - 26) \div (x - 2)$

(v) $(t^3 - 6t^2 + 11t - 6) \div (t^2 - 5t + 6)$

(vi) $(8a^2 - 34ab + 21b^2) \div (4a + 3b)$

(vii) $(16xy^2 - 21x^2y + 9x^3 - 4y^3) \div (x - y)$

(viii) $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$

8. ଯଦି $p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2$ ଏବଂ $q(x) = 2x^2 - 5x + 1$

ତେବେ (i) $2p(x) - 5q(x)$ ଓ (ii) $4p(x) + 3q(x)$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

9. ଯଦି $p(x) = 2x^3 + 3x + 5$, $q(x) = x^2 + 4x + 1$ ଓ $r(x) = x - 1$ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(i) $p(x) \times q(x) = q(x) \times p(x)$

(ii) $p(x) \times \{q(x) + r(x)\} = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$

10. ସରଳ କର :

(i) $(x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - x - 2) - (3x^2 + 7x - 3)$

(ii) $(x^2 - xy + 2y^2) - (2x^2 + 4xy + 3y^2) + (4x^2 - 2xy - y^2)$

(iii) $(a + b + c)(a - b + c) - (a + b - c)(a - b - c)$

3.5 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ (Zeroes of a Polynomial) :

ମନେକର ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 10$

$p(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 10$ ରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି $x = 1$ ହେଲେ

$p(1) = 3 \times (1)^3 - 6 \times (1)^2 - 5 \times (1) + 10 = 3 - 6 - 5 + 10 = 2$ ହେବ ।

$\therefore$ $p(x)$ରେ x ର ମାନ 1 ପାଇଁ $p(x)$ ର ମାନ 2 ହେବ ।

ସେହିପରି $x = -1$ ହେଲେ, $p(-1) = 3 \times (-1)^3 - 6(-1)^2 - 5x(-1) + 10 = -3 - 6 + 5 + 10 = 6$ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ରେ x ର ମାନ -1 ପାଇଁ $p(x)$ ର ମାନ 6 ହେବ ।

ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେଲେ $p(x)$ ର ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ ହେବ ?

ପରୀକ୍ଷା କଲେ ଜଣାଯିବ ଯେ, ଯଦି $x = 2$ ହୁଏ, ତେବେ $p(2) = 3 \times 2^3 - 6 \times 2^2 - 5 \times 2 + 10$

$= 24 - 24 - 10 + 10 = 0$ ହେବ।

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ 2 କୁ $p(x)$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଜିରୋ ବୋଲି କହିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି $p(x)$ ଏକ ଅଣଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍, 'x' ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ 'x' ର ମାନ c ପାଇଁ $p(x) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ c କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ର ଏକ ଜିରୋ (zero) କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ର ଜିରୋ ଏକ ସଂଖ୍ୟା 'c' । ଯେଉଁଠାରେ $p(c) = 0$ ହେବ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ନିରୂପଣ :

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟିକୁ ଶୂନ ସଙ୍ଗେ ସମାନ କରି ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର । ଏହି ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କଲେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଯେଉଁ ବାସ୍ତବମାନଗୁଡ଼ିକ ମିଳିବ ତାହାହିଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $2x + 1$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ହେଉଛି $-\frac{1}{2}$ ।

କାରଣ $2x + 1 = 0$ ହେଲେ, $x = -\frac{1}{2}$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସର୍ବାଧିକ n ସଂଖ୍ୟକ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ ରହିପାରେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2x - 6$ ପଲିନୋମିଆଲଟି ଏକ ଘାତୀ ଓ ଏହାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଜିରୋ ଅଛି; ଯାହା 3, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ଦ୍ୱିଘାତୀ ହେତୁ ଏହାର ଦୁଇଟି ଜିରୋ 2 ଓ 3 ଅଛି । ସେହିପରି ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର

ତିନୋଟି 'ଜିରୋ' ମଧ୍ୟରୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ ଥାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, x^3-8 ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ 2 ଅଛି ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) ଅଣଶୂନ ଶୂନଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ (ଧ୍ରୁବକ)ର କୌଣସି 'ଜିରୋ' ନ ଥାଏ ।

(ii) ଜିରୋ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ବା ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ' ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇ ଥାଏ ।

(iii) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକାଧିକ ଜିରୋ ଥାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 13 : $p(x) = x^5-7x^2-10$ ହେଲେ (i) $p(0)$ (ii) $p(-2)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

i) $p(x) = x^5-7x^2-10 \Rightarrow p(0) = 0^5-7 \times 0^2-10 = -10$ (ଉତ୍ତର)

ii) $p(x) = x^5-7x^2-10 \Rightarrow p(-2) = (-2)^5-7 \times (-2)^2-10 = -32-28-10 = -70$(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $p(x) = 3x + 2$ ର ଜିରୋ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆବଶ୍ୟକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି : $3x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{2}{3}$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 -3x$ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ'ଦ୍ୱୟ 0 ଏବଂ 3 ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $x^2 - 3x$ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି : $x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ବା $x = 3$

$\therefore$ 0 ଏବଂ 3, $x^2 -3x$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଦୁଇଟି 'ଜିରୋ' । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ : $p(x) = x^2 -3x$

$p(x)$ ର 0 ଏବଂ 3 ଦୁଇଟି ଜିରୋ ହେଲେ ଦର୍ଶାଇବାକୁ ହେବ ଯେ $p(0) = 0$, ଏବଂ $p(3) = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା $p(0) = (0)^2 - 3 \times 0 = 0$ ଏବଂ $p(3) = (3)^2 - 3 \times 3 = 9 - 9 = 0$

$\therefore$ 0 ଏବଂ 3 ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟନ୍ତି । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 16 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 +6x + 15$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ' ନାହିଁ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^2 +6x + 15$

$= x^2 +6x + 9+6 = [x^2+ 2. x. 3 + (3)^2] + 6$

$= (x + 3)^2 + 6$

ଏଠାରେ x ର କୌଣସି ବାସ୍ତବ ମାନ ପାଇଁ $(x+3)^2$ ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ । ତେଣୁ p(x) ର ମାନ ସର୍ବଦା ≥ 6 ହେବ ।

$\therefore$ p(x) ର କୌଣସି ଜିରୋ ନାହିଁ ।

3.6 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ (Remainder Theorem and its Application)

ପୂର୍ବରୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରିବା ବିଷୟରେ ତୁମେ ଅବଗତ ଅଛ । ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 17 :

$x-2$) x^3-3x^2+4x-5 (x^2-x+2
x^3-2x^2
$-\quad+$

$-x^2+4x-5$
$-x^2+2x$
$+\quad-$

$2x-5$
$2x-4$

-1

$\therefore$ x^3-3x^2+4x-5 କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବାରୁ ଭାଗଶେଷ -1 ହେଲା ।

ପୁନଶ୍ଚ $p(x) = x^3-3x^2+4x-5$ ହେଲେ,

$p(2) = (2)^3-3(2)^2+4(2)-5$
$= 8-12+8-5 = -1$

ଏଠାରେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ? ଯେତେବେଳେ p(x)କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରୁଛ, ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ = p(2) ହେଉଛି ।

ଉପରୋକ୍ତ ସତ୍ୟକୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି, ଯାହାକୁ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ (Reminder Theory) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 18 : ଯଦି $p(x) = x^4+x^3+x^2-5x+1$ ଏବଂ $q(x) = x+1$ ହୁଏ ତେବେ p(x)କୁ q(x) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଶେଷ r(x) ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

$x+1$) $x^4+x^3+x^2-5x+1$ (x^3+x-6
x^4+x^3
$-\quad-$
---
x^2-5x+1
x^2+x
$-\quad-$

$-6x+1$
$-6x-6$
$+\quad+$

7

ପୁନଶ୍ଚ $p(-1) = (-1)^4+(-1)^3+(-1)^2-5(-1)+1$
$= 1-1+1+5+1 = 7$

ଏଠାରେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ?

ଯେତେବେଳେ p(x) କୁ (x+1) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଉଛି ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ = p(–1) ହେଉଛି ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣି ପରିବ ଯେ, ଯେତେବେଳେ $p(x)$ କୁ $(x–a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ $p(a)$ ପାଇବା ।

ଏପରି କେତେକ ଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

3.6.1 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ (Remainder Theorem):

$p(x)$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଯାହାର ଘାତ ≥ 1 ତେବେ, $P(x)$ କୁ $(x - a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଶେଷ $P(a)$ ହେବ ।

ଦତ୍ତ : ଭାଜ୍ୟ = $p(x)$ ଓ ଭାଜକ = $x - a$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ, ଭାଗଶେଷ = $p(a)$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ ଭାଗଫଳ = $q(x)$ ଓ ଭାଗଶେଷ = $r(x)$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ (Euclidean Algorithm)

$\Rightarrow p(x) = (x - a) . q(x) + r(x)$ ଏଠାରେ $r(x)$ ର ଘାତ, ଭାଜକର ଘାତରୁ କମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ 0 ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ତେଣୁ $r(x)$ ଗୋଟିଏ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ହେବ, ମନେକର r ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଭୟ ପଟରେ $x = a$ ନେଲେ ପାଇବା

$p(a) = (a - a)\, q(a) + r \Rightarrow p(a) = 0.\, q(a) + r \Rightarrow r = p(a)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ଫଳସ୍ୱରୂପ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା –

$$p(x) = (x - a) . q(x) + p(a) \;....\; (1)$$

(ii) ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟର କଥନରେ $p(x)$ କୁ $x - a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ ନ କରି, ଯଦି $2x - a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଇଥାନ୍ତା, ତେବେ ଭାଗଶେଷ $p\left(\frac{a}{2}\right)$ ହୋଇଥାନ୍ତା ।

ପ୍ରମାଣ : $p(x) = (2x - a) . q(x) + r$

$x = \frac{a}{2}$ ନେଲେ ପାଇବା, $p\left(\frac{a}{2}\right) = \left(2.\frac{a}{2} - a\right)q\left(\frac{a}{2}\right) + r \Rightarrow p\left(\frac{a}{2}\right) = 0.q\left(\frac{a}{2}\right) + r \Rightarrow p\left(\frac{a}{2}\right) = r$

$\therefore\ r = p\left(\frac{a}{2}\right)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନେରଖ : ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ କୁ $(kx - a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ $p\left(\frac{a}{k}\right)$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ -19 : ଭାଜ୍ୟ= $y^4 - 3y^2 + 2y + 6$ ଭାଜକ= $(y+1)$ ବିନା ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଶେଷ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(y) = y^4 - 3y^2 + 2y + 6$ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ ଭାଗଶେଷ $p(-1)$ ହେବ ।

$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 6 = 1 - 3 - 2 + 6 = 2$

$\therefore\ p(y)$ କୁ $(y+1)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ $p(-1)$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ -20 : ବିନା ଭାଗ କ୍ରିୟାରେ $x^3 - ax^2 + 6x - a$ କୁ $x-a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଶେଷ ସ୍ଥିର କର । ଯଦି ଭାଗଶେଷ 10 ହୋଇଥାଏ ତେବେ 'a' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ, ଭାଗଶେଷ $p(a)$ ହେବ ।

$p(a) = (a)^3 - a \times (a)^2 + 6(a) - a = a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$

କିନ୍ତୁ ଭାଗଶେଷ 10 ହେତୁ $5a = 10 \Rightarrow a = 2$

$\therefore$ 'a' ର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମାନ 2 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -21 : ଭାଗକ୍ରିୟା ବିନା $x^3 - 2mx^2 + mx - 1$ କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ପରେ ଯଦି ଭାଗଶେଷ 1 ରହେ, ତେବେ m ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(x) = x^3 - 2mx^2 + mx - 1 \Rightarrow p(2) = (2)^3 - 2m(2)^2 + m(2) - 1$

$\Rightarrow 1 = 8 - 8m + 2m - 1 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$ (ଉତ୍ତର)

3.6.2 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ (Application of Remainder Theorem) :

ଭାଗକ୍ରିୟା ବିନା ସହଜ ଉପାୟ ଅବଲମ୍ବନରେ ଭାଗଶେଷ ନିରୂପଣ ସହ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ । ନିମ୍ନରେ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ଜାଣିବା ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ।

ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ (Factor Theorem) :

p (x) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯାହାର ଘାତ ≥ 1 ଏବଂ a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

(i) ଯଦି $p(a) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $(x - a)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

(ii) ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଯଦି $(x - a)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ $p(a) = 0$ ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ (i) **:** $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$ (ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ)

$= (x - a)\, q(x)$ $[\because p(a) = 0]$ (ଦତ୍ତ)

$\therefore (x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମାଣ (ii) **:** ଯେହେତୁ $(x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

ଅତଏବ $p(x) = (x - a)\, q(x)$ (ମନେକର)

$\Rightarrow p(a) = (a - a) \times q(a) = 0$

$\therefore (x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେଲେ, $p(a) = 0$ ହେବ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ -22 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(x - 3)$, $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $(x - 3)$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ଯଦି $p(3)=0$ ହେବ ।

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

$\therefore p(3) = (3)^3 - 3 \times (3)^2 + 4(3) - 12 = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$

$\therefore (x-3), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 23 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ $x^2 - 5x + 6$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^2 - 5x + 6$

$x = 1$ ପାଇଁ $p(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

$x = -1$ ପାଇଁ $p(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

$x = 2$ ପାଇଁ $p(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0$

$\therefore (x - 2)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଉତ୍ପାଦକ $(x - 2)$ ଦ୍ୱାରା $p(x)$ କୁ ଭାଗକରିବା ।

$$
\begin{array}{l}
x-2\ )\ x^2-5x+6\ (\ x-3 \\
\qquad\quad x^2-2x \\
\qquad\quad -\quad + \\
\hline
\qquad\qquad -3x+6 \\
\qquad\qquad -3x+6 \\
\qquad\qquad +\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

ଭାଗଫଳ $(x - 3)$, $p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

$\therefore x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

ଉଦାହରଣ - 24 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗରେ $x^3 + 2x^2 - x - 2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$x = 1$ ହେଲେ $p(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 3 - 3 = 0$

$\therefore (x - 1)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ....(i)

ପୁନଶ୍ଚ $x = -1$ ହେଲେ, $p(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1 + 2 + 1 - 2 = 0$

$\therefore (x + 1)$, $p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ .... (ii)

ପୁନଶ୍ଚ $x = -2$ ହେଲେ, $p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = -8 + 8 + 2 - 2 = 0$

$\therefore (x + 2)$ ମଧ୍ୟ $p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ । .... (iii)

(i), (ii) ଓ (iii) ରୁ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

ସୂଚନା : $p(x)$ ର ଉତ୍ପାଦକଟି ଜାଣିବା ପରେ ତା' ଦ୍ୱାରା $p(x)$ କୁ ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଯଦି ଭାଗଫଳଟି ଏକଘାତୀ ହୋଇଥାଏ ତାହା ଆବଶ୍ୟକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ । ଭାଗଫଳଟିର ଘାତ 1 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇଥିଲେ ଭାଗଫଳକୁ $q(x)$ ମନେକରି ପୁଣି ପୂର୍ବ ପଦ୍ଧତି ଅନୁସାରେ ଯଦି ସମ୍ଭବ, ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $p(x)$ ର ତିନିଗୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ ହେଲା ।

ଏଠାରେ $p(x)$ ର ଜିରୋ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1, –1 ଓ –2 ।

ଅର୍ଥାତ୍ x ର ମାନ 1, –1 ଓ –2 ପାଇଁ $p(x) = 0$ ହେଲା ।

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ତ୍ରିଘାତୀ ହେତୁ ଏହାର ତିନୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ ହେଲା (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 3,5)

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯେତେଗୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ; ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସେତେଗୋଟି ଏକଘାତୀ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ।

ଉଦାହରଣ - 25 : k ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍

$4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ର $x - 1$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $x - 1$, ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x) = 4x^3 + 3x^2 - 4x + k$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ,

ଅତଏବ $P(1) = 0$ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $P(1) = 4 \times 1^3 + 3 \times 1^2 - 4 \times 1 + k = 0$

$\Rightarrow 4 + 3 - 4 + k = 0 \Rightarrow 3 + k = 0 \Rightarrow k = -3$ (ଉତ୍ତର)

$\therefore$ k ର ମାନ -3 ପାଇଁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $(x - 1)$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 3 (b)

1. ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ ନକରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ ଭାଗଶେଷ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

i) ଭାଜ୍ୟ $x^3 + x^2 + x + 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $x - 1$,

ii) ଭାଜ୍ୟ $x^3 - x^2 + x - 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $x + 1$,

iii) ଭାଜ୍ୟ $2x^3 - 3x + 4$ ଏବଂ ଭାଜକ $2x - 1$ ଓ

iv) ଭାଜ୍ୟ $t^4 - t^3 + t^2 - t + 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $t + 2$

2. (a) $p(x) = 8x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ ହେଲେ,

(i) $p(0)$ (ii) $p(1)$ (iii) $p(-1)$ (iv) $p(2)$ (v) $p\left(\frac{1}{2}\right)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କର 'ଜିରୋ' ନିରୂପଣ କର ।

(i) $p(x) = 3x^2 + 4x + 1$ (ii) $p(x) = cx - d\ (c \neq 0)$

(iii) $p(z) = 4z^2 - 1$ (iv) $p(y) = (y-1)(y+2)$

3. ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x)ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି,

(i) $p(-3) = 0$ ହୁଏ । (ii) $p(2) = 0$ ହୁଏ ।

(iii) $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ହୁଏ । (iv) $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ହୁଏ ।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ କେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x+1$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଟେ ?

(i) x^3+x^2+x+1 (ii) $x^4+x^3+x^2+x+1$

(iii) $x^4+3x^3+3x^2+x+1$ (iv) $x^3 - x^2 - (2 + \sqrt{2})x - \sqrt{2}$

5. କେଉଁ କେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x) ର ପଲିନୋମିଆଲ୍ g(x) ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ?

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 - 2x - 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

6. ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ର $x - 1$ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେଲେ k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 + 3x + k$

7. ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x^4 - 1) \div (x + 1)$ (ii) $(x^3 - 3x + 7) \div (x - 2)$

(iii) $(x^2 - 3x + 2) \div (x+3)$ (iv) $(2x^2 - x - 1) \div (2x-1)$

8. ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $x^2 - 7x + 12$ (ii) $x^2 - 3x - 4$

(iii) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (iv) $y^3 + y^2 - 2y - 2$

9. ଯଦି $x^2 - 1$, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଗୁଣନୀୟକ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a + c + e = b + d = 0$

10. ଯଦି $(x - 1)$, $x^2 + mx + 1$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ $(x - m)$, x^3+3x^2+3x+2 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 + 2x + 3$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର କୌଣସି ଜିରୋ ନାହିଁ ।

12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $1, -1$ ଓ 3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଜିରୋ ଅଟନ୍ତି ।

13. 'b' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $x^3 - 3x^2 + bx - 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $(x - 3)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

14. ଯଦି $x^2 - bx + c = (x + p)(x - q)$ ହୁଏ ତେବେ $x^2 - bxy + cy^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3.7 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation of Polynomials) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସହ ପରିଚିତ । ନିମ୍ନ କେତେ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ବିଭିନ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା -

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $(x + a)(x+b) = x^2 + (a+b)x+ab$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନିମିତ୍ତ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣର ବହୁଳ ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । ସେଥିପାଇଁ କେତେକ ଅଧିକ ସୂତ୍ର ବା ଅଭେଦର ଆଲୋଚନା ଆବଶ୍ୟକ ।

କୌଣସି ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯିବା ବିଷୟ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଅବଗତ ଅଛ । ସେହିପରି ବୀଜଗାଣିତିକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ମୌଳିକ ରାଶିର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ । ଏହି ପ୍ରକାର ପ୍ରକାଶନ ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉତ୍ପନ୍ନ ମୌଳିକ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକ (Factors) କୁହାଯାଇଥାଏ ।

ଅଭେଦ - 1: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ କିମ୍ବା $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପକ୍ଷ = $(a + b)^3 = (a + b)^2 \times (a + b)$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$

ଅଭେଦ - 2 : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ କିମ୍ବା $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3\,ab\,(a - b)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ (1) ରୁ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ପାଇଛେ । ଏଠାରେ b ପରିବର୍ତ୍ତେ $-b$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

$\Rightarrow (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

ଅଭେଦ - 1 ଓ ଅଭେଦ - 2 ରୁ ପାଇବା $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ ଏବଂ

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

ଅଭେଦ - 3 : $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ - 1 ରୁ ପାଇବା :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)\,\{(a + b)^2 - 3ab\}$

$= (a + b)\,(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଅଭେଦ - 4 : $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a + ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ - 3 ରୁ ପାଇଲେ $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଏଠାରେ 'b' ପରିବର୍ତ୍ତେ $(-b)$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

ବି.ଦ୍ର. : ଅଭେଦ (1) ଓ (2) ରୁ ପକ୍ଷାନ୍ତରଣ ଦ୍ୱାରା ଅଭେଦ (3) ଓ ଅଭେଦ (4) କୁ ମଧ୍ୟ ପାଇ ପାରିବା ।

ଅଭେଦ - 5 : $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$= (a^2)^2 + 2.a^2.b^2 + (b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)\,(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଆଲୋଚିତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ ଉଚ୍ଚତର ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ଭବ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

1. $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3$

$= (x^2 + y^2)\,\{(x^2)^2 - x^2.y^2 + (y^2)^2\}$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

$\therefore\ x^6 - y^6 = (x^2 + y^2) - (x^4 - x^2y^2 + y^4)$

2. $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)\{(x^2)^2 + x^2.y^2 + (y^2)^2\}$ (ଅଭେଦ - 4)

$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$\therefore\ x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

ଅଭେଦ - 6 : $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a^3+b^3)+c^3-3abc$

$= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$ .... (ଅଭେଦ - 3)

$= \{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc$

$= \{(a+b)+c\}^3-3(a+b)c\{(a+b)+c\}-3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c)$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3c(a+b)-3ab\}$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ca-3bc-3ab)$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore\ a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

ଅଭେଦ - 7 : $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$ ଯେତେବେଳେ $a \neq 0, b = p + q$ ଏବଂ $ac = pq$

ପ୍ରମାଣ : $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac)$

$= \frac{1}{a}\{a^2x^2 + a(p + q)x + pq\}$ (b ସ୍ଥାନରେ p + q ଏବଂ ac ସ୍ଥାନରେ pq ଲେଖି)

$= \frac{1}{a}(a^2x^2+apx+aqx+pq) = \frac{1}{a}\{ax(ax+p)+q(ax+p)\}$

$= \frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ax^2+bx+c ର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉତ୍ପାଦକ = $\frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$

ସୂଚନା : ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ax^2+bx+c ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଯଦି x ଥିବା ପଦର ସହଗ b କୁ p ଓ q ଦୁଇଟି ରାଶିର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ x^2 ପଦର ସହଗ a ଏବଂ ଧ୍ରୁବକ ପଦ c ର ଗୁଣଫଳକୁ p ଓ q ର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେଉଥିବ ତେବେ, ଉକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 26 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : a^3+b^3+a+b

ସମାଧାନ : $a^3+b^3+a+b = (a^3+b^3)+(a+b)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (a+b)(a^2-ab+b^2+1)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 27 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $125p^3-27q^3-225p^2q+135pq^2$

ସମାଧାନ : $125p^3-27q^3-225p^2q+135pq^2 = 125p^3-225p^2q+135pq^2-27q^3$

$= (5p)^3-3.(5p)^2.3q+3.5p.(3q)^2-(3q)^3 = (5p-3q)^3 = (5p-3q)(5p-3q)(5p-3q)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 28 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $64a^6-b^6$

ସମାଧାନ : $64a^6-b^6 = (8a^3)^2-(b^3)^2 = (8a^3+b^3)(8a^3-b^3)$ ($\because x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$)

$= \{(2a)^3+(b)^3\}\{(2a)^3-(b)^3\}$

$= (2a+b)\{(2a)^2-2a.b+(b)^2\}(2a-b)\{(2a)^2+2a.b+(b)^2\}$ (ଅଭେଦ - 3 ଏବଂ ଅଭେଦ - 4)

$= (2a+b)(4a^2-2ab+b^2)(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

$= (2a+b)(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)(4a^2+2ab+b^2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 29 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $x^8+9x^4y^4+81y^4$

ସମାଧାନ: $x^8+9x^4y^4+81y^4 = (x^2)^4+(x^2)^2.(3y)^2+(3y)^4$

$= \{(x^2)^2+x^2.3y+(3y)^2\}\{(x^2)^2-x^2.3y+(3y)^2\}$ (ଅଭେଦ -5)

$= (x^4+3x^2y+9y^2)(x^4-3x^2y+9y^2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 30 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $8x^3+27y^3-8+36xy$

ସମାଧାନ: $8x^3+27y^3-8+36xy = (2x)^3+(3y)^3+(-2)^3-3.2x.3y.(-2)$

$= \{2x+3y+(-2)\}\{(2x)^2+(3y)^2+(-2)^2-2x.3y-2x(-2)-3y(-2)\}$ (ଅଭେଦ -6)

$= (2x+3y-2)(4x^2+9y^2+4-6xy+4x+6y)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 31 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $14m^3-4n^3+9m^2n$

ସମାଧାନ: $14m^3-4n^3+9m^2n = \frac{1}{2}(28m^3-8n^3+18m^2n)$

$= \frac{1}{2}(27m^3+m^3-8n^3+18m^2n) = \frac{1}{2}\{(3m)^3+(m)^3+(-2n)^3-3.3m.m.(-2n)\}$

$= \frac{1}{2}(3m+m-2n)\{(3m)^2+(m)^2+(-2n)^2-3m.m-m(-2n)-(-2n).3m\}$ (ଅଭେଦ -6)

$= \frac{1}{2}(4m-2n)(9m^2+m^2+4n^2-3m^2+2mn+6mn)$

$= \frac{1}{2}$ (4m–2n) ($7m^2+4n^2+8mn$)

$= \frac{1}{2}$ 2(2m–n) ($7m^2+4n^2+8mn$) = (2m–n) ($7m^2+8mn+4n^2$) (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 32 : $3x^2 - 2x - 8$ ଉତ୍ପାଦକକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ :

ସମାଧାନ: ଅଭେଦ - 7 ଅନୁଯାୟୀ – 2 ବଦଳରେ {(–6) + 4} ଲେଖିବା

କାରଣ (–6) x 4 = (–8) x 3 [$\because ax^2 + bx + c$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ $b = p+q$ ଏବଂ $ac = pq$]

ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ = $3x^2 - 2x - 8 = 3x^2 + (-6 + 4)x - 8$

$= 3x^2 - 6x + 4x - 8 = 3x(x-2) + 4(x-2) = (x-2)(3x+4)$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ : ସିଧାସଳଖ $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + p)(ax + q)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରିବା

ଯେତେବେଳେ $p = -6$ ଏବଂ $q = 4$

$3x^2 + (-2)x + (-8) = \frac{1}{3}(3x-6)(3x+4) = (x-2)(3x+4)$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3 (c)

1. ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟିକୁ ବାଛି ଲେଖ ।

(i) x^2-3x+2 ର ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱୟ

(a) (x–2) ଓ (x+1), (b) (x+2) ଓ (x–1), (c) (x–2) ଓ (x–1) (d) (x+2) ଓ (x+1)

(ii) ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱୟ (x–1) ଓ (x–3) ହେଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି

(a) x^2-4x-3 (b) x^2-4x+3 (c) x^2+4x-3 (d) x^2+4x+3

(iii) x^4-y^4 ର ଠିକ୍ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ବାଛ ।

(a) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (b) $(x^2-y^2)(x-y)(x+y)$

(c) $(x^2+y^2)(x+y)^2$ (d) $(x^2+y^2)(x-y)^2$

(iv) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ

(a) (2a–b),(2a+b),(2a+b) (b) (2a + b)(2a + b)(2a + b)

(c) (2a–b),(2a–b),(2a+b) (d) (2a – b),(2a – b),(2a – b)

(v) $625+25x^4+x^8$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁଟି $625+25x^4+x^8$ ର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ।

(a) $(25+5x^2+x^4), (25-5x^2+x^4)$ (b) $(25+5x^2+x^4), (25+5x^2-x^4)$

(c) $(25+5x^4+x^4), (25-5x^4+x^4)$ (d) $(25-5x^4+x^4), (25+5x^4-x^4)$

(vi) $1-a^3+b^3+3ab$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ

(a) $(1-a+b)$ (b) $(1-a-b)$ (c) $(1+a+b)$ (d) $(1+a-b)$

(vii) $(2x-3y)^3+(3y-4z)^3+(4z-2x)^3$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ ହେଲେ

(a) $6(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$ (b) $3(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$

(c) $60xyz$ (d) ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ ।

(viii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$ ର ସରଳୀକୃତ ମାନ

(a) 8190 (b) 16380 (c) 24570 (d) 4095

(ix) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ ର ମାନ

(a) $3abc$ (b) $3a^3b^3c^3$ (c) $3(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) $\{a-(b+c)\}^3$

(x) $2x^2-x-1$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ

(a) $2x-1$ (b) $x+1$ (c) $x-1)$ (d) $x+2$

2. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $2x^2-x-1$ (ii) $2x^2-3x+1$ (iii) $5x^2-x-4$

(iv) $4x^2-5x-6$ (v) $3x^2+11x+6$ (vi) $7x^2+x-6$

(vii) $2x^2+5x-7$ (viii) $4x^2-5x+1$ (ix) $4x^2-3x-7$

3. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $25a^4-16b^2$ (ii) $9-64p^2q^2$ (iii) $8x^3+27y^3$ (iv) $8x^3-27y^3$

(v) $(a+b)^2-9$ (vi) $(2a+5)^2-16$ (vii) $(x+2y)^2-(x-y)^2$ (viii) $4(a+2p)^2-9(2a-p)^2$

(ix) $75(2a-b+1)^2-12(a+b)^2$ (x) $(a+b)^3-8c^3$

(xi) p^4-27pq^6 (xii) $1-(a+2)^3$ (xiii) $8-(2x-3)^3$

(xiv) $320p^6q-5p^2q^7$ (xv) $1+(a+2)^3$ (xvi) $8+(2x-3)^3$

(xvii) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$ (xviii) $a^3+9a^2+27a+27$ (xix) $8-36p+54p^2-27p^3$

(xx) $(b-q)^3-(c-q)^3-3(b-c)(b-q)(c-q)$

4. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) a^4+a^2+1 (ii) $a^4b^4+a^2b^2+1$ (iii) $16a^4+36a^2b^2+81b^4$

(iv) a^8+a^4+1 (v) x^4+4 (vi) $2a^4+8b^4$

(vii) $36a^4+9b^4$ (viii) $4a^4+7a^2+16$ (ix) $a^4+2a^2b^2+9b^4$

(x) a^4-3a^2+1 (xi) $25a^4-19a^2b^2+9b^4$ (xii) $9x^2+y^2+6xy-4z^2$

(xiii) $16-x^2-24y+9y^2$ (xiv) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4abxy$

(xv) $(a^2+b^2)(x^2-y^2)-2ab(x^2+y^2)$

5. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$ (ii) $8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$ (iii) $a^3 + b^3 - 8 + 6ab$

(iv) $l^3 - 27m^3 - n^3 - 9lmn$ (v) $(a-b)^3 + (c-b)^3 + (a-c)^3 - 3(a-b)(b-c)(c-a)$

(vi) $a^6 + 4a^3 - 1$ (vii) $x^3 + 72 - 24x$ (viii) $m^6 + 7m^3 - 8$ (ix) $a^6 + \frac{1}{a^6} + 2 \quad (a \neq 0)$

(x) $r^6 + 45r^3 - 8$ (xi) $16x^3 - 54y^6 - 2z^3 - 36xy^2z$ (xii) $a^3 + b^3 - \frac{1}{27}c^3 + abc$

(xiii) $27a^3 - 8b^6 + 125c^3 + 90ab^2c$ (xiv) $(2x+3)^3 + (3x-2)^3 - (5x+1)^3$

6. $a + b + c = 0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

7. $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ ର ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$

3.8 : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ.ସା.ଗୁ (H.C.F. of Polynomials) :

ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାନଙ୍କର ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ (ଗ.ସା.ଗୁ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇଥାଏ । ଏହା ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ । ପଲିନେମିଆଲଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପଲିନେମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ନିମିତ୍ତ ନିମ୍ନ ଅଭେଦ (ସୂତ୍ରାବଳୀ) ଗୁଡ଼ିକର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ।

ସୂତ୍ର : $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$;

$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$;

$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$;

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2$;

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$;

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$;

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$;

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$;

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$;

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$;

$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$;

$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$;

$x^6 - y^6 = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ ଏବଂ

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$

ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ପଲିନୋମିଆଲଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. (H.C.F.) ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. (L.C.M.) ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ମିଳୁଥିବା ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $36x^2y^3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times y \times y \times y$

$60xy^2z = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times x \times y \times y \times z$

ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜଣାଯାଏ ଯେ $36x^2y^3$ ରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଦୁଇ ଥର, x ଦୁଇ ଥର ଓ y ତିନିଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ ରହିଛି ।

ସେହିପରି $60xy^2z$ ରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଏକଥର, 5 ଏକଥର, x ଏକଥର, y ଦୁଇଥର ଓ z ଏକଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ ରହିଛି ।

ଅତଏବ ଉଭୟ ମନୋମିଆଲରେ ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଏକ ଥର, x ଏକଥର, y ଦୁଇଥର ରହିବ ।

ତେଣୁ $36x^2y^3$ ଓ $60xy^2z$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. $= 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times y = 12xy^2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 33 :

$30x^2y^3z^4$, $45x^5y^4z^3$ ଓ $75x^3y^5z^6$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$30x^2y^3z^4 = 2 \times 3 \times 5 \times x^2 \times y^3 \times z^4$

$45x^5y^4z^3 = 3^2 \times 5 \times x^5 \times y^4 \times z^3$

$75x^3y^5z^6 = 3 \times 5^2 \times x^3 \times y^5 \times z^6$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହେଲେ 3, 5, x, y ଓ z ।

3, 3^2 ଓ 3 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = 3

5, 5 ଓ 5^2 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = 5

x^2, x^5 ଓ x^3 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = x^2

y^3, y^4 ଓ y^5 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = y^3

ଏବଂ z^4, z^3 ଓ z^6 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = z^3

$\therefore$ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. = $3 \times 5 \times x^2 \times y^3 \times z^3 = 15x^2y^3z^3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 34 : $x^2 - 4$ ଓ $2x^2 + 4x$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

$2x^2 + 4x = 2x(x+2)$

$\therefore$ ଗ.ସା.ଗୁ. $= (x+2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 35 : $2x^2 - 10x + 12$, $3x^2 - 18x + 27$ ଓ $x^3 - 27$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x^2 - 2x - 3x + 6)$

$= 2\{x(x-2) - 3(x-2)\} = 2(x-2)(x-3)$

$3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x^2 - 2.x.3 + 3^2) = 3(x-3)^2$

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

$\therefore$ ଗ.ସା.ଗୁ. $= x - 3$ (ଉତ୍ତର)

3.9 : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. (Lowest Common Multiple or L.C.M. of Polynomials) :

ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲା ପରି ଲ.ସା.ଗୁ. ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ । କିନ୍ତୁ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିରୂପଣ ପାଇଁ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ବଛାଯାଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 36: $8x^2y$, $10y^2z$ ଓ $12xyz^2$ ର ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $8x^2y = 2 \times 2 \times 2 \times x^2 \times y$

$10y^2z = 2 \times 5 \times y^2 \times z$

$12xyz^2 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z^2$

$\because$ 2 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 2^3, 3 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 3
5 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 5, x ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = x^2
y ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = y^2, ଓ z ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = z^2

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଲ.ସା.ଗୁ. = $2^3 \times 3 \times 5 \times x^2 \times y^2 \times z^2 = 120x^2y^2z^2$ (ଉତ୍ତର)

ସଂଜ୍ଞା : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ଗୁଣିତକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଲ.ସା.ଗୁ. କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 37: $3x^3 - 24$, $8x^2 - 32x + 32$ ଓ $3x^2 + 12x + 12$ ର ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 8) = 3(x^3 - 2^3) = 3(x-2)(x^2 + 2x + 4)$

$8x^2 - 32x + 32 = 8(x^2 - 4x + 4) = 2^3(x-2)^2$

$3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x+2)^2$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଲ.ସା.ଗୁ. = $2^3 \times 3(x+2)^2(x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$

$= 24(x+2)^2(x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (d)

1. ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) xy^2, x^2y (ii) $6a^3b^2$, $8a^2b^3$ (iii) $12a^2b^4c$, $15ab^2c^3$

(iv) x^2y^2, x^3y, xy^3 (v) $144x^3y^9z^7$, $108x^6y^6z^6$

2. ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $x^2 - 1$, $x^2 + x$ (ii) $a^3 - ab^2$, $a^3 - b^3$

(iii) $4a^2 - b^2$, $b^2 - 2ab$ (iv) $(x-1)^3$, $(1-x)^2$

(v) $x^2 - xy + y^2$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (vi) $6(a^2 - 4b^2)$, $10(a^3 - 8b^3)$

(vii) $x^2 + 7x + 12$, $x^2 + 9x + 20$ (viii) $4x^3 - 9x$, $16x^3 + 54$, $2x^2 + 5x + 3$

(ix) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

(x) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $b^2 - c^2 - a^2 - 2ca$, $c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

(xi) $8a^2 - 14ab + 6b^2$, $15a^2 + 18ab - 33b^2$, $9a^2b - 7ab^2 - 2b^3$

(xii) $(a+b)x^2 - (2a+b)bx + ab^2$, $(a-b)x^2 - (2a-b)bx + ab^2$

(xii) $c^2 - 2ab - a^2 - b^2$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $b^2 - 2ca - c^2 - a^2$

(xiv) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$, $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

3. ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $3a^3b$, $4a^2b$ (ii) $6a^2b^3$, $4a^3b^4$ (iii) $20a^2b^3c^4$, $34a^3c^5$

(iv) $3a^2b$, $4ab^2$, $6ab$ (v) $25x^3y^2z^2$, $30x^2y^3z^3$, $x^3y^3z^2$

4. ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $a^2 + ab$, $ab - b^2$ (ii) $3(x^2 - y^2)$, $4(x^2 + xy)$

(iii) $x^3 + y^3$, $x^2y + xy^2$ (iv) $6a^3b - 12a^2b^2$, $8a^3 - 64b^3$

(v) $(x-y)^3$, $x^2 - y^2$ (vi) $x^2 - xy$, $(x-y)^2$, $x^2 - y^2$

(vii) $6(a+b)^2$, $8(a^2-b^2)$, $12(a-b)^2$ (viii) $2x^2 + 5x - 3$, $4x^2 - 4x + 1$

(ix) $3a^2 + 8a + 4$, $a^2 + 2a$ (x) $6x^2 - 5x - 6$, $4x^3 - 12x^2 + 9x$

(xi) $3x^3 + 5x^2 - 2x$, $6x^2 + 14x + 4$, $9x^3 - x$

(xii) $x^2 + xy + yz + zx$, $y^2 + xy + yz + zx$, $z^2 + xy + yz + zx$

(xiii) $a^2 - ab - ac + bc$, $b^2 - bc - ab + ca$, $c^2 - ca - bc + ab$

(xiv) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $b^2 - c^2 - a^2 - 2ca$, $c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

(xv) $a^4 + a^2b^2 + b^4$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$

(xvi) $a^6 - b^6$, $(a+b)^3$, $a^2 - b^2$

(xvii) $a^3 + b^3 - 1 - 3ab$, $a^3 + (b-1)^3$, $a^2 - 2a + 1 - b^2$

(xviii) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$, $(x-y)^3 - (z-y)^3 - (x-z)^3$

3.10 : ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ (Algebraic Rational Expression) :

ଯଦି m ଓ n ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $n \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $\frac{m}{n}$ କୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Number) କୁହାଯାଏ । m କୁ ଲବ (Numerator) ଓ n କୁ ହର (Denominator) କହନ୍ତି ।

ସେହିପରି ଯଦି p(x) ଓ q(x) ଦ୍ୱୟ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ $q(x) \neq 0$ ହୁଏ ତେବେ, $\frac{p(x)}{q(x)}$ କୁ ଏକ **ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ p(x) ଲବ ଓ q(x) ହର ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $\frac{3}{x-2}$ ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ହେବ ଯେତେବେଳେ $x \neq 2$ । ଏହାର ଲବ 3 ଓ ହର $x-2$

ସେହିପରି $\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଯେପରିକି $x \neq 2$ ବା 3 । କାରଣ $x = 2$ ବା 3 ହେଲେ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ହେବ ।

3.10.1 ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶର ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପ :

ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଲବ ଓ ହର ମଧ୍ୟରେ ଯଦି 1 ଭିନ୍ନ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନ ଥାଏତେବେ ତାହାକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ କୁହାଯାଏ ।

ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକାରରେ ପରିଣତ କରିବାକୁ ହେଲେ ତା'ର ଲବ ଓ ହରକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରି ଉଭୟଙ୍କୁ ସେମାନଙ୍କ ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 38 : $\dfrac{24x^3y^2}{30xy^3}$ କୁ ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{24x^3y^2}{30xy^3} = \dfrac{6xy^2 \times 4x^2}{6xy^2 \times 5y} = \dfrac{4x^2}{5y}$ (ଉତ୍ତର) (ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଏଠାରେ ଲବ ଓ ହରର ଗ.ସା.ଗୁ. $6xy^2$)

ଉଦାହରଣ- 39 : ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର $\dfrac{x^4y^2 - x^2y^4}{x^4y^3 - x^3y^4}$ $(x \neq y)$

ସମାଧାନ : $\dfrac{x^4y^2 - x^2y^4}{x^4y^3 - x^3y^4} = \dfrac{x^2y^2(x^2 - y^2)}{x^3y^3(x - y)} = \dfrac{x^2y^2(x + y)(x - y)}{x^3y^3(x - y)} = \dfrac{x + y}{xy}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 40 : $\dfrac{a^2}{a - 1}$ ରୁ $\dfrac{a^3}{a^2 - 1}$ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{a^2}{a - 1} - \dfrac{a^3}{a^2 - 1} = \dfrac{a^2}{a - 1} - \dfrac{a^3}{(a + 1)(a - 1)}$

$= \dfrac{a^2(a + 1) - a^3}{(a + 1)(a - 1)} = \dfrac{a^3 + a^2 - a^3}{(a + 1)(a - 1)} = \dfrac{a^2}{(a + 1)(a - 1)}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 41: $\dfrac{1}{(x - y)(x - z)}$ ଓ $\dfrac{1}{(y - z)(y - x)}$ କୁ ଯୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{1}{(x - y)(x - z)} + \dfrac{1}{(y - z)(y - x)} = \dfrac{1}{(x - y)(x - z)} + \dfrac{1}{(y - z)\{-(x - y)\}}$

$= \dfrac{y - z + \{-(x - z)\}}{(x - y)(x - z)(y - z)}$ ($x - y$ ଓ $y - x$ ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକ ଥିବାରୁ $y - x$ କୁ $-(x - y)$ ରୂପେ ନେବା ଦ୍ୱାରା ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସୁବିଧାଜନକ)

$= \dfrac{y - z - x + z}{(x - y)(x - z)(y - z)} = \dfrac{y - x}{(x - y)(x - z)(y - z)} = \dfrac{-(x - y)}{(x - y)(x - z)(y - z)} = \dfrac{-1}{(x - z)(y - z)}$ (ଉତ୍ତର)

3.10.2. ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣନ ଓ ହରଣ :

ସଂଜ୍ଞା : $\dfrac{p(x)}{q(x)} \times \dfrac{r(x)}{t(x)} = \dfrac{p(x).\,r(x)}{q(x).\,t(x)}$ (ଗୁଣନ) ଏବଂ $\dfrac{p(x)}{q(x)} \div \dfrac{r(x)}{t(x)} = \dfrac{p(x).\,t(x)}{q(x).\,r(x)}$ (ହରଣ)

ଉଦାହରଣ - 42 : ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର : $\dfrac{x^3 + 8y^3}{x^3 - 2x^2y} \times \dfrac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

ସମାଧାନ : $\dfrac{x^3 + 8y^3}{x^3 - 2x^2y} \times \dfrac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 - 2xy + 4y^2} = \dfrac{(x)^3 + (2y)^3}{x^2(x - 2y)} \times \dfrac{(x - 2y)^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

$= \dfrac{(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)}{x^2(x - 2y)} \times \dfrac{(x - 2y)^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

$= \dfrac{(x + 2y)(x - 2y)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 43: $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)$କୁ $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right) \div \left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

$$= \frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2} \div \frac{x^2+xy-xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \div \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 1$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 44 : ସରଳ କର : $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right) \div \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$

ସମାଧାନ : $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right) \div \left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^6-b^6}{a^3b^3} \div \frac{a^2-b^2}{ab} \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$

$$= \frac{(a^2)^3-(b^2)^3}{a^3b^3} \times \frac{ab}{a^2-b^2} \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} = a^2-ab+b^2$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 45 : ସରଳ କର : $\dfrac{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$

ସମାଧାନ: $\dfrac{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = \dfrac{\frac{a}{x-a}+1+\frac{b}{x-b}+1+\frac{c}{x-c}+1}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$

$$= \dfrac{\frac{a+x-a}{x-a}+\frac{b+x-b}{x-b}+\frac{c+x-c}{x-c}}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = \dfrac{\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$$

$$= \dfrac{x\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = x$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 46 : ସରଳ କର : $\dfrac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a^3+(b-c)^3} \times \dfrac{a^3-(b+c)^3}{a^3-b^3-c^3-3abc}$

ସମାଧାନ : $\dfrac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a^3+(b-c)^3} \times \dfrac{a^3-(b+c)^3}{a^3-b^3-c^3-3abc}$

$$= \frac{(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(a+b-c)[a^2-a(b-c)+(b-c)^2]} \times \frac{(a-b-c)[a^2+a(b-c)+(b-c)^2]}{(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(a^2+b^2+c^2-ab+ac-2bc)} \times \frac{(a^2+b^2+c^2+ab-ac-2bc)}{(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac)}$$ (ଉତ୍ତର)

3.10.3 କ୍ରମିକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ :

$\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶକୁ କ୍ରମିକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ (continued rational expression) ବା (continued fraction) କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ ସରଳ କରିବା ପାଇଁ ଏହାର ସର୍ବନିମ୍ନ ଅଂଶରୁ ସରଳ କରିବା ଆରମ୍ଭ କରି କ୍ରମଶଃ ଉପର ଆଡ଼କୁ ଯିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣ- 47 : ସରଳ କର : $\dfrac{a}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-a}}}$

ସମାଧାନ:

$$\frac{a}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-a}}} = \frac{a}{a-\dfrac{1}{\dfrac{a-a^2-a}{1-a}}} = \frac{a}{a-\dfrac{1}{\dfrac{-a^2}{1-a}}}$$

$$= \frac{a}{a-\dfrac{1-a}{-a^2}} = \frac{a}{a+\dfrac{1-a}{a^2}} = \frac{a}{\dfrac{a^3+1-a}{a^2}}$$

$$= a \times \frac{a^2}{a^3-a+1} = \frac{a^3}{a^3-a+1}$$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (e)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କୋଠରୀ ମଧ୍ୟରେ ✔ ଚିହ୍ନ ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କୋଠରୀ ମଧ୍ୟରେ ✗ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(i) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{x+y}{5}$ ☐ (ii) $\dfrac{x}{y-z}-\dfrac{x}{z-y}=0$ ☐

(iii) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-x}=0$ $\square$ (iv) $\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}=0$ $\square$

(v) $\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ $\square$ (vi) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=0$ $\square$

2. ସରଳ କର:

(i) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$ (ii) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$ (iii) $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

(iv) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}$ (v) $\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$ (vi) $\frac{a^2}{a+b}-a+b$

(vii) $\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{x-2y}+\frac{2x}{4y^2-x^2}$ (viii) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$

(ix) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ (x) $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x-3}{3x+9}-\frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$

3. ସରଳ କର:

(i) $\frac{x^3y}{az^2}\times\frac{y^3z}{bx^2}\times\frac{z^3x}{cy^2}$ (ii) $\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x^2+xy}{x^2y-y^3}$ (iii) $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\times\frac{x^3-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$

(iv) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x-14}\times\frac{x^3+8}{x^3-8}$ (v) $\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$

(vi) $\frac{x^2-y^2}{x-z}\times\frac{x^2-z^2}{xy+y^2}\times\left(x+\frac{xy}{x-y}\right)$ (vii) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\times\frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)}$

(viii) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$ (ix) $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\frac{(x-y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\frac{xy}{x^2-y^2}$

(x) $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}\div\frac{a^4-b^4}{2ab(a-b)}\times\frac{a^2-b^2}{a}$ (xi) $\frac{a^2+3a-18}{a^2-4}\div\frac{a^2-36}{a^2-5a-14}$

(xii) $\frac{3a^2+a-4}{2a^2-a-3}\div\frac{3a^2-2a-8}{2a^2-7a+6}$

4. ସରଳ କର:

(i) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}}$ (ii) $\cfrac{a}{a-\cfrac{a-1}{1-\cfrac{1}{a+1}}}$ (iii) $\cfrac{y}{y^2-\cfrac{y^3-1}{y+\cfrac{1}{y+1}}}$ (iv) $\cfrac{x}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{x}{1+x}}}$