ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ଚତୁର୍ଭୁଜ

(QUADRILATERAL)

3.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ସହ ପରିଚିତ ହେବା ସହ କେତେକ ବିଶେଷ ଧରଣରେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯଥା, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ରମ୍ବସ, ଆୟତଚିତ୍ର ଓ ବର୍ଗଚିତ୍ର ସହ ମଧ୍ୟ ପରିଚିତ ହୋଇଛ । ଉପରୋକ୍ତ ବିଶେଷ ଧରଣର ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ମାଧ୍ୟମରେ କରାଯାଇଥିଲା ।

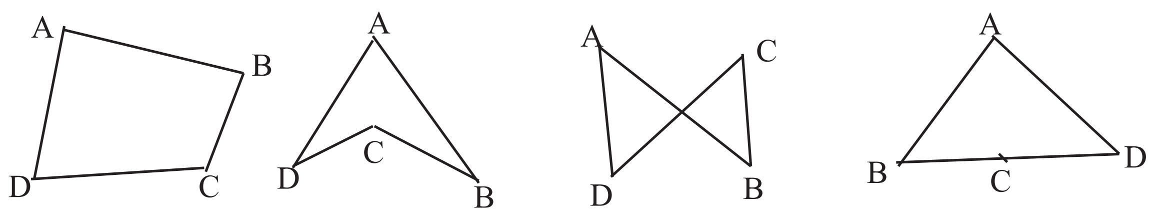
ସେହି ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରିବା ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ । ଏଥି ସହ ବହୁଭୁଜ (polygon) ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଆଲୋଚନା ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

3.2 ଚତୁର୍ଭୁଜ ଓ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Quadrilateral and convex quadrilateral) :

ସଂଜ୍ଞା : ମନେକର ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ଚାରୋଟି ବିନ୍ଦୁ A,B,C ଓ D ମଧ୍ୟରୁ

(i) ଯେକୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ନୁହନ୍ତି ;

(ii) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ନ ଥିଲେ; ଏହି ଚାରିଗୋଟି ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍ $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।



(a) (b) (c) (d)

(ଚିତ୍ର 3.1)

ଚିତ୍ର 3.1(a) ଓ (b) ପ୍ରତ୍ୟେକରେ ABCD ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଚତୁର୍ଭୁଜ । ଚିତ୍ର 3.1(c)ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ପରସ୍ପରକୁ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିବାରୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ

ନୁହେଁ । ଚିତ୍ର 4.1(d)ରେ B, C, D ଏକ ସରଳରେଖାରେ ଅବସ୍ଥିତ ହୋଇଥିବାରୁ ABCD କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜ କୁହାଯିବ ନାହିଁ ।

$\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ ଓ $\overline{DA}$ କୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ (side) ଏବଂ $\angle BAD$, $\angle ABC$, $\angle BCD$, $\angle CDA$ କୁ ଏହାର କୋଣ (Angle) କୁହାଯାଏ । A, B, C, D କୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ (Vertex) କୁହାଯାଏ ।

ଚତୁର୍ଭୁଜର ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ବାହୁର ଏକ ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ଥାଏ ସେ ଦ୍ୱୟକୁ **ସନ୍ନିହିତ (adjacent) ବାହୁ** ବା କୌଣସି ସାଧାରଣ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ନଥିବା ବାହୁଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ (Opposite) ବାହୁ** କୁହାଯାଏ । ଚତୁର୍ଭୁଜର ଗୋଟିଏ ବାହୁର ଦୁଇଟି ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁକୁ **କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ** ଓ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ **କ୍ରମିକ କୋଣ** କୁହାଯାଏ । ଯେଉଁ ଶୀର୍ଷଦ୍ୱୟ କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ନୁହନ୍ତି ସେଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ** କୁହାଯାଏ । ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁରେ ଥିବା କୋଣଦ୍ୱୟକୁ **ବିପରୀତ କୋଣ** କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1(a)ରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{BC}$ ସନ୍ନହିତ ବାହୁ ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ବିପରୀତ ବାହୁ ; $\angle A$, $\angle B$ କ୍ରମିକ କୋଣ ଓ $\angle A$, $\angle C$ ବିପରୀତ କୋଣ; A ଓ B କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷ ଏବଂ A ଓ C ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ।

ବିପରୀତ ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡଦ୍ୱୟକୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ (diagonal) କୁହାଯାଏ ।

ଚିତ୍ର 3.1 (a) ରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$, ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣ ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଚତୁର୍ଭୁଜର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏକ କ୍ରମାନ୍ୱୟତା (Order) ରହିଛି । କ୍ରମାନ୍ୱୟତାର ପରିବର୍ତ୍ତନ ନକରି ABCD ପରିବର୍ତ୍ତେ BCDA ବା CDAB ବା DABC ଚତୁର୍ଭୁଜ ଲେଖାଯାଇପାରେ । କ୍ରମାନ୍ୱୟତାରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗଠିତ ହୋଇ ପାରେ ନାହିଁ ।

ଚିତ୍ର 3.1(a)ରେ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ଛେଦ କରୁଛନ୍ତି, କିନ୍ତୁ ଚିତ୍ର 3.1(b) ରେ ଛେଦ କରୁନାହାନ୍ତି । ବିଶେଷ ପ୍ରକାରର ଚତୁର୍ଭୁଜ ଗୁଡ଼ିକର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସବୁବେଳେ ଛେଦ କରନ୍ତି । ଏହି ପ୍ରକାର ଚତୁର୍ଭୁଜର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ବାହୁ ଏହାର ବିପରୀତ ବାହୁଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ ନକରେ, ତାହେଲେ ଏହାକୁ ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ (Convex Quadrilateral) କୁହାଯାଏ ।

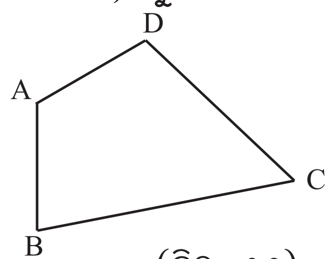
ଅର୍ଥାତ୍ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ହେଲେ,

(i) A ଓ B ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{CD}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ

(ii) B ଓ C ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{DA}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ

(iii) C ଓ D ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{AB}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଏବଂ

(iv) D ଓ A ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ $\overleftrightarrow{BC}$ ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।



(ଚିତ୍ର 3.2)

ଚିତ୍ର 3.1 (a) ରେ ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ମାତ୍ର ଚିତ୍ର 3.1 (b) ରେ ଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଉତ୍ତଳ ଚର୍ତୁଭୁଜ ନୁହେଁ । କାରଣ, ଏଥିରେ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overline{AD}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରିବ ।

3.3 : ବହୁଭୁଜ (Polygon) :

ସଂଜ୍ଞା : ମନେକର P_1, P_2 ..... P_n ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ କେତେକ ବିନ୍ଦୁ ($n \geq 3$) ଏବଂ ଏମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସି ତିନୋଟି ବିନ୍ଦୁ ଏକ ରେଖୀୟ ନୁହନ୍ତି । $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ .... $\overline{P_{n-1}P_n}$, $\overline{P_nP_1}$ ସେମାନଙ୍କ ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁନଥିଲେ ଏହି n ସଂଖ୍ୟକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ସେଟ୍ $\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup .... \cup \overline{P_{n-1}P_n} \cup \overline{P_nP_1}$ କୁ P_1 P_2 ..... P_n ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।

$\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$ .... $\overline{P_nP_1}$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ଏବଂ P_1, P_2 ..... P_n ବହୁଭୁଜର ଶୀର୍ଷବିନ୍ଦୁ ଅଟନ୍ତି । n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବହୁଭୁଜରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ଥାଏ ।

ଉତ୍ତଳ ବହୁଭୁଜ (Convex Polygon) :

P_1 P_2 P_3 ..... P_n ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାହୁ ଦ୍ୱାରା ନିର୍ଣ୍ଣିତ ରେଖାର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଯଦି ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଶୀର୍ଷ ଅବସ୍ଥାନ କରନ୍ତି ତେବେ ବହୁଭୁଜଟିକୁ **ଉତ୍ତଳ ବହୁଭୁଜ (Convex Polygon)** କୁହାଯାଏ ।

ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ (Regular Polygon) :

ଯେଉଁ ବହୁଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଏବଂ ସମସ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ସମାନ, ସେପରି ବହୁଭୁଜକୁ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ କୁହାଯାଏ ।

ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ଉପରେ ବହୁଭୁଜର ନାମକରଣ ନିର୍ଭର କରେ ।

ବହୁଭୁଜ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ମୌଳିକ ହେଉଛି ତ୍ରିଭୁଜ ଯାହାର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 3.

ବାହୁସଂଖ୍ୟା	ବହୁଭୁଜର ନାମ
3	ତ୍ରିଭୁଜ (Triangle)
4	ଚତୁର୍ଭୁଜ (Quadrilateral)
5	ପଞ୍ଚଭୁଜ (Pentagon)
6	ଷଡ଼ଭୁଜ (Hexagon)

ସେହିପରି ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 7, 8, 9 ଏବଂ 10 ପାଇଁ ବହୁଭୁଜକୁ ଯଥାକ୍ରମେ Heptagon (ସପ୍ତଭୁଜ), Octagon (ଅଷ୍ଟଭୁଜ), nonagon (ନଅଭୁଜ) ଓ Decagon (ଦଶଭୁଜ) କୁହାଯାଏ । ଆମେ ସାଧାରଣତଃ ଚତୁର୍ଭୁଜ, ପଞ୍ଚଭୂଜ, ଷଡ଼ଭୂଜ.... ଇତ୍ୟାଦିକୁ ନେଇ ବହୁଭୁଜ ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁଗୁଡ଼ିକର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ $\Leftrightarrow$ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସମାନ; କିନ୍ତୁ ବହୁଭୁଜ ସ୍ଥଳରେ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ତ୍ରିଭୁଜ, ବହୁଭୁଜ ପରିବାରର ଏକ ସଦସ୍ୟ ନୁହେଁ । ଏ ସବୁ ସତ୍ତ୍ୱେ 'ତିନି'କୁ 'ବହୁ' ଭାବରେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଇଥିବାରୁ ଏବଂ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ ଏବଂ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସୂତ୍ର ସମୂହ ତ୍ରିଭୁଜ ପାଇଁ ପ୍ରଯୁଜ୍ୟ ହୋଇଥିବାରୁ, ତ୍ରିଭୁଜକୁ ବେଳେ ବେଳେ ବହୁଭୁଜ ପରିବାରରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ କରାଯାଏ ।

3.4 (A) ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (Sum of the measures of the interior angles of a polygon) :

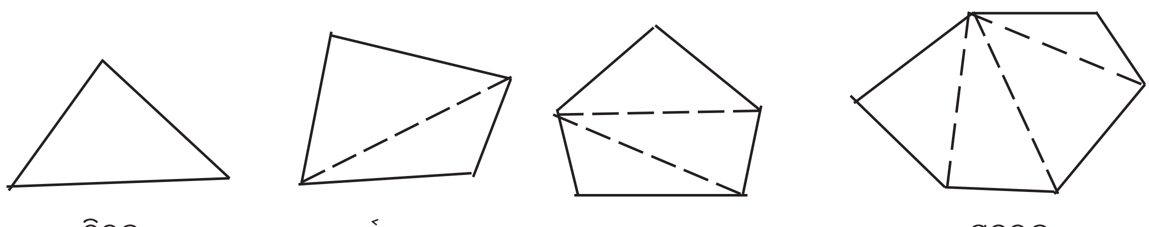
ତ୍ରିଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = 180^0

ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଦୁଇଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରିବ ।

ତେଣୁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = $2 \times 180^0 = (4-2) \times 180^0$

ପଞ୍ଚଭୁଜଟି ତିନିଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ ହୁଏ ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= 3 \times 180^0 = (5-2) \times 180^0$



(ଚିତ୍ର 3.3)

ସେହିପରି ଷଡ଼ଭୁଜକ୍ଷେତ୍ର କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି= $4 \times 180^0 = (6-2) \times 180^0$

n- ଭୁଜକୁ $(n \geq 3)$ $(n-2)$ ସଂଖ୍ୟକ ତ୍ରିଭୁଜରେ ପରିଣତ କରିହେବ ।

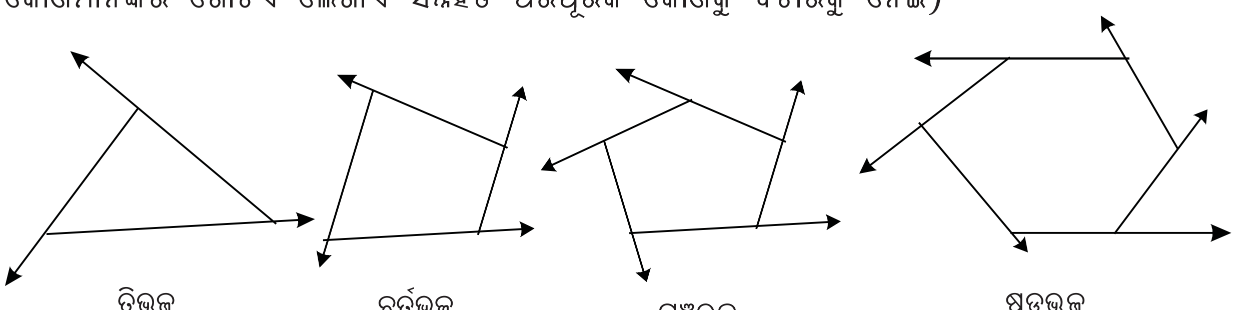
ତେଣୁ ଏହାର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି = $(n-2) \times 180^0 = (n-2) \times 2$ ସମକୋଣ

= $(2n-4)$ ସମକୋଣ

n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ $(n \geq 3)$ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (2n–4) ସମକୋଣ ।

(B) ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି (Sum of the measures of the exterior angles of a polygon) :

ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷ (Vertex) ରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ । (ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସନ୍ନିହିତ ପରିପୂରକ କୋଣକୁ ବିଚାରକୁ ନେଇ)



(ଚିତ୍ର 3.4)

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ପ୍ରତ୍ୟେକ n ଭୂଜ $(n \geq 3)$ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣ ସଂଖ୍ୟା n (ଚିତ୍ର 3.4 କୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶୀର୍ଷରେ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ + ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 = 2$ ସମକୋଣ

ଗୋଟିଏ n ଭୁଜ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= n \times 2$ ସମକୋଣ $- n$ ସଂଖ୍ୟକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି

$= n \times 2$ ସମକୋଣ $-$ $(2n - 4)$ ସମକୋଣ

$=$ 4 ସମକୋଣ $= 360^0$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟାର ନିରପେକ୍ଷ (indepedent of the sides of the polygon) ଅଟେ ।

ମନେରଖ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି 360^0

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନା ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ଆମେ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କରିପାରିବା ।

ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ ଯେଉଁ ବହୁଭୁଜର ସମସ୍ତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ହେବା ସଂଗେ ସଂଗେ ସମସ୍ତ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟ ପରସ୍ପର ସମାନ ତାହାକୁ **ସମବହୁଭୁଜ ବା ସୁଷମ ବହୁଭୁଜ (Regular Polygon)** କୁହାଯାଏ ।

ଏଣୁ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \left(\frac{2n-4}{n}\right)$ ସମକୋଣ

ଏବଂ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{n}$

ମନେରଖ : n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{2n-4}{n}$ ସମକୋଣ

ଏବଂ ଏକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{n}$

ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ସାରଣୀରେ କେତେଗୋଟି ବହୁଭୁଜମାନଙ୍କ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଓ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଓ ବହୁଭୁଜଟି ସୁଷମ ହୋଇଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣ ଦିଆଯାଇଛି ।

ବହୁଭୁଜ	ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କ ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି	ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି	ବହୁଭୁଜ ସୁଷମ ହୋଇଥିଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ
ତ୍ରିଭୁଜ	2 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	60^0
ଚର୍ତୁଭୁଜ	4 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	90^0
ପଞ୍ଚଭୁଜ	6 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	108^0
ଷଡ଼ଭୁଜ	8 ସମକୋଣ	4 ସମକୋଣ	120^0

ଉଦାହରଣ - 1 :

ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 140^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n

$\therefore$ n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ = $\frac{2n-4}{n}$ ସମକୋଣ

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{2n-4}{n} \times 90^0 = 140^0 \Rightarrow (2n-4)\ 90 = n \times 140$

$\Rightarrow 2n \times 90 - 4 \times 90 = 140n \Rightarrow 180n - 360 = 140n$

$\Rightarrow 180n - 140n = 360 \Rightarrow 40n = 360 \Rightarrow n = 9$

$\therefore$ ସୁଷମବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା 9 ।

ଉଦାହରଣ - 2 :

ଗୋଟିଏ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି, ଏହାର ବହିଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟିର ତିନି ଗୁଣ ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା n

$\therefore$ n ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= (2n-4) \times 90^0$

ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି $= 360^0$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ, $(2n-4) \times 90^0 = 3 \times 360^0 \Rightarrow 180n - 360 = 1080$

$\Rightarrow 180n = 1440 \Rightarrow n = \frac{1440}{180} = 8$, $\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା 8 ।

ଉଦାହରଣ - 3 :

ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 144^0 । ଉକ୍ତ ବହୁଭୁଜର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 144^0 ।

$\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 - 144^0 = 36^0$

$\Rightarrow$ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା $= \frac{360^0}{36^0} = 10$

ନୂତନ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା $= 2 \times 10 = 20$

$\therefore$ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= \frac{360^0}{20} = 18^0$

$\Rightarrow$ ବହୁଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ $= 180^0 - 15^0 = 162^0$ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

(କ) ବିଭାଗ

1. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ---- ।

(ii) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି---- ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଅଷ୍ଟଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ---- ।

(iv) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ଷଡ଼ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(v) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 45^0 ହେଲେ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ---।

(vi) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 150^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା--- ।

(vii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି 1440^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା---- ।

(viii) ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା 9 ହେଲେ, ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ---- ।

(ix) n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---।

(x) n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ---- ।

(ଖ) ବିଭାଗ

2. (i) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ 2:3:4:6 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ କ୍ରମିକ କୋଣ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ପରିମାଣ ଅନ୍ୟର ପରିମାଣର $\frac{3}{2}$ ଗୁଣ ହେଲେ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3:4:5:6 ହେଲେ ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(iv) ଗୋଟିଏ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି କୋଣ ସମକୋଣ ଏବଂ ଅନ୍ୟ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ 120^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

(v) ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ $x^0, (x-10)^0, (x-20)^0, (2x-40)^0, (2x-90)^0$ ହେଲେ 'x' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(vi) ଗୋଟିଏ ଅଷ୍ଟଭୁଜର ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

(vii) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ କ୍ରମିକ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଅନ୍ୟକୋଣ ମାନଙ୍କର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।

(ଗ) ବିଭାଗ

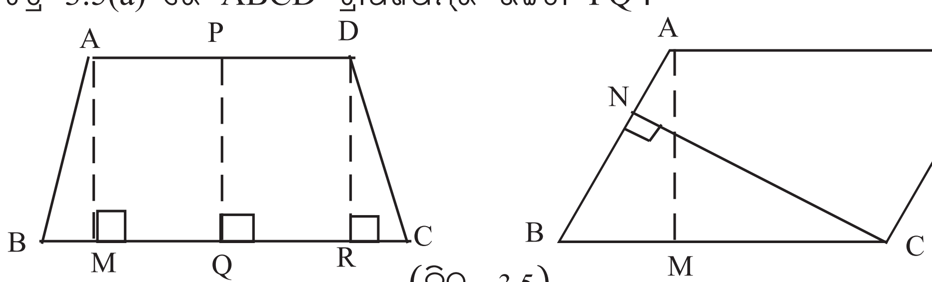
3. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତଃସ୍ଥକୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ତିନିଗୁଣ ।
4. ABCDE ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜ ΔBED ର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର ।
5. ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ ଏବଂ ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 5:1 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
6. n ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ଓ (n+2) ସଂଖ୍ୟକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ ମଧ୍ୟରେ ଅନ୍ତର 9^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
7. ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ଏକ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 120^0 ହେଲେ, ବହୁଭୁଜର ବାହୁସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।
8. (n–1) ସଂଖ୍ୟକ ଏବଂ (n+2) ସଂଖ୍ୟକ ସୁଷମ ବହୁଭୁଜର ବହିଃସ୍ଥ କୋଣଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର 6^0 ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 'n' ର ମାନ 13 ହେବ ।
9. ଗୋଟିଏ ପଞ୍ଚଭୁଜର ଗୋଟିଏ ଅନ୍ତଃସ୍ଥ କୋଣର ପରିମାଣ 140^0 । ଅନ୍ୟ କୋଣଗୁଡ଼ିକର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 1:2:3:4 ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ବୃହତ୍ତମ କୋଣର ପରିମାଣ 160^0 ।
10. ABCDE ଗୋଟିଏ ସୁଷମ ପଞ୍ଚଭୁଜର $\overline{AD}$, $\angle$CDEକୁ ଦୁଇଭାଗ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $m\angle ADE : m\angle ADC = 1 : 2$ ।

3.5 କେତେକ ବିଶେଷ ଚତୁର୍ଭୁଜ :

ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁଯୋଡ଼ା ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସମାନ୍ତରଣର ସର୍ତ୍ତ ଅନୁଯାୟୀ ଚତୁର୍ଭୁଜ ମୁଖ୍ୟତଃ ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ, ଯଥା : (1) ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍, (2) ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

1. **ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କେବଳ ଏକ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ (Trapezium) କୁହାଯାଏ ।** ଚିତ୍ର 3.5(a) ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ହେତୁ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ । ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{DC}$ ଦ୍ୱୟ ଅସମାନ୍ତର ।

ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ର ଦୁଇ ସମାନ୍ତର ବାହୁ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତାକୁ ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ର ଉଚ୍ଚତା (Height) କୁହାଯାଏ । ଚିତ୍ର 3.5(a) ରେ ABCD ଟ୍ରାପିଜିଅମ୍ର ଉଚ୍ଚତା PQ ।



(a) (ଚିତ୍ର 3.5) (b)

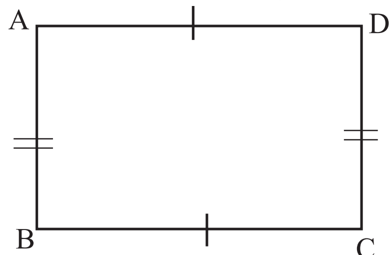
2. ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର (Parallelogram) ।

ଚିତ୍ର 3.5(b) ରେ ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ । ଉକ୍ତ ଚତୁର୍ଭୁଜକୁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ ।

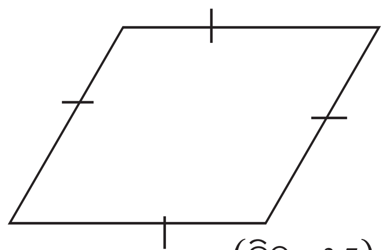
ଚିତ୍ର 3.5(b)ରେ ଥିବା ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ ବିପରୀତ ବାହୁ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା AM ଏବଂ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{CD}$ ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଦୂରତା CN । ABCD ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରର $\overline{BC}$ ଅଥବା $\overline{AD}$ ବାହୁକୁ ଭୂମି ନିଆଗଲେ AM କୁ ଉଚ୍ଚତା ରୂପେ ନିଆଯାଏ । ସେହିପରି $\overline{AB}$ ଅଥବା $\overline{DC}$ ଭୂମି ହେଲେ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଉଚ୍ଚତା CN ହୁଏ ।

(i) ଆୟତଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ତାହା ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର (Rectangle) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣ ସମକୋଣ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଏକ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 । ଚିତ୍ର 3.6 ରେ ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ABCD ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 3.6)

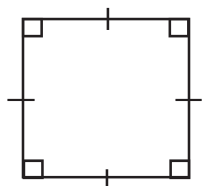
(ii) ରମ୍ବସ୍ : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ୍ (Rhombus) । ଆଗକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯିବ ଯେ ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ ବିପରୀତ ବାହୁମାନ



(ଚିତ୍ର 3.7)

ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତର ହେବେ । ତେଣୁ ରମ୍ବସ୍ ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ପ୍ରକାରର ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଯାହାର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । ଚିତ୍ର 3.7 ରେ ABCD ଏକ ରମ୍ବସ୍ ।

(iii) ବର୍ଗଚିତ୍ର : ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ଓ ପ୍ରତ୍ୟେକ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର (Square) । ଏଣୁ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ସମକୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ରମ୍ବସ୍ ଅଟେ । ଚିତ୍ର 3.8 ରେ ABCD ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 3.8)

ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ଚତୁର୍ଭୁଜମାନଙ୍କର ପ୍ରକାରଭେଦକୁ ନିମ୍ନ ଚାର୍ଟରେଦର୍ଶାଯାଇଛି, ଦେଖ-

ଚତୁର୍ଭୁଜ (ଚାରି ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ)

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର
(ଉଭୟ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର)

ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍
(କେବଳ ଏକ ଯୋଡ଼ା ବିପରୀତ ବାହୁ ସମାନ୍ତର)

(ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ) (କୋଣମାନେ ସମକୋଣ)

ରମ୍ବସ୍ ଆୟତଚିତ୍ର

(କୋଣମାନ ସମକୋଣ) (ବାହୁମାନଙ୍କର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ)

ବର୍ଗଚିତ୍ର

3.6 କେତେକ ଉପପାଦ୍ୟ :

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଯେଉଁ ବିକଳ୍ପ ସର୍ତ୍ତରେ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ବା ରମ୍ବସ ବା ଆୟତଚିତ୍ର ହୋଇପାରେ, ସେପରି କେତେକ ବିକଳ୍ପ ସର୍ତ୍ତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉପପାଦ୍ୟ ମାନଙ୍କରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

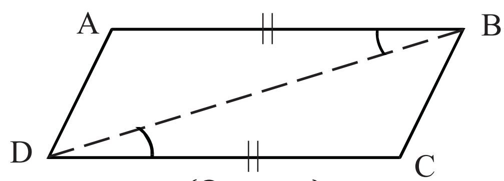
ଉପପାଦ୍ୟ - 20

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ଦୁଇଟି ବିପରୀତ ବାହୁ ସର୍ବସମ ଓ ସମାନ୍ତର ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (If two opposite sides of a quadrilateral are congruent and parallel, the quadrilateral is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.9)

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BDC ରେ

$\because \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD} \text{ (ଦତ୍ତ)} \\ \overline{BD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ} \\ \text{ଏବଂ } \angle ABD \cong \angle BDC \text{ (ଏକାନ୍ତର କୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta\ ABD \cong \Delta\ BCD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ADB = m\angle DBC$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ) କିନ୍ତୁ ଏମାନେ ଏକାନ୍ତର

$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$\therefore$ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 21

ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁମାନେ ସର୍ବସମ ।

(The opposite sides of a parallelogram are congruent.)

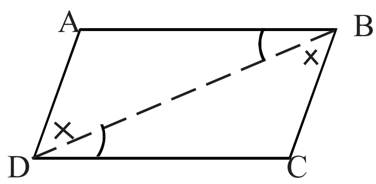
ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଅର୍ଥାତ୍

$\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BCD ରେ



(ଚିତ୍ର 3.10)

$\because$ {
$\angle ABD \cong \angle BDC$ (ଏକାନ୍ତରକୋଣ)
$\angle ADB \cong \angle DBC$ (ଏକାନ୍ତରକୋଣ)
ଏବଂ $\overline{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

$\therefore \Delta\ ABD \cong \Delta BDC$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow AB = CD$ ଏବଂ $AD = BC$

$\Rightarrow \overline{AB} \cong \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 22

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ ବାହୁମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

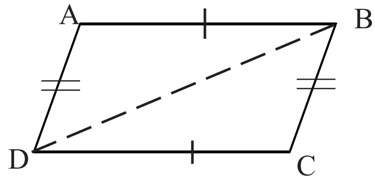
(A quadrilateral is a parallelogram if both pairs of its opposite sides are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, $\overline{AD} \cong \overline{BC}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର, ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଓ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।

ପ୍ରମାଣ : Δ ABD ଓ Δ BDC ରେ



(ଚିତ୍ର 3.11)

$\because$ {
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ (ଦତ୍ତ)
$\overline{AD} \cong \overline{BC}$ (ଦତ୍ତ)
ଏବଂ $\overline{BD}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta BDC$ (ବା-ବା-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle BDC$ ଏବଂ $m\angle ADB = m\angle CBD$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

= ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 23

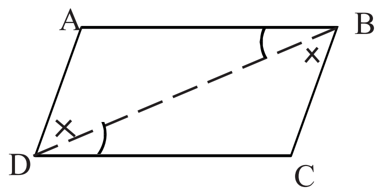
ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ କୋଣମାନେ ସର୍ବସମ ।

(The opposite angles of a parallelogram are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରମାଣ୍ୟ : $\angle A \cong \angle C$, $\angle B \cong \angle D$

ଅଙ୍କନ : କର୍ଣ୍ଣ $\overline{BD}$ ଅଙ୍କନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.12)

ପ୍ରମାଣ : ΔABD ଓ ΔBDC ମଧ୍ୟରେ

$$\because \begin{cases} m\angle ABD = m\angle BDC \; [\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}] \\ m\angle ADB = m\angle CBD \; [\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}] \\ \overline{BD} \text{ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।} \end{cases}$$

$\because \Delta ABD \cong \Delta BDC$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle A = m\angle C \Rightarrow \angle A \cong \angle C$

ସେହିପରି ΔABC ଓ ΔADC ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ,

$m\angle B = m\angle D \Rightarrow \angle B \cong \angle D$ (ପ୍ରମାଣିତ)

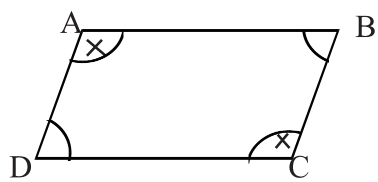
ଉପପାଦ୍ୟ - 24

ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବିପରୀତ କୋଣମାନ ସର୍ବସମ ହେଲେ ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(A quadrilateral whose opposite angles are congruent, is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ଚତୁର୍ଭୁଜ ABCD ରେ $\angle A \cong \angle C$ ଓ $\angle B \cong \angle D$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।



(ଚିତ୍ର 3.13)

ପ୍ରମାଣ : ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ ।

$\therefore m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D = 360^0$

ପୁନଶ୍ଚ : $m\angle A = m\angle C$ ଏବଂ $m\angle B = m\angle D$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow m\angle A + m\angle B = m\angle C + m\angle D = \frac{360^0}{2} = 180^0$

$\Rightarrow \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ .... (i)

ପୁନଶ୍ଚ $m\angle A + m\angle D = m\angle B + m\angle C = \dfrac{360^0}{2} = 180^0$

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

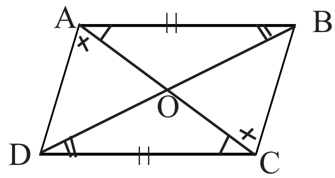
ଉପପାଦ୍ୟ - 25

ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ।

(Diagonals of a parallelogram bisect each other.)

ଦତ୍ତ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : AO = CO ଏବଂ BO = DO



(ଚିତ୍ର 3.14)

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଓ Δ COD ରେ

$\because \begin{cases} \overline{AB} \cong \overline{CD} \\ \angle ABO \cong \angle ODC & \text{(ଏକାନ୍ତର କୋଣ)} \\ \text{ଏବଂ } \angle BAO \cong \angle OCD & \text{(ଏକାନ୍ତର କୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow$ AO = CO ଏବଂ BO = DO (ଅନୁରୂପ ବାହୁ) (ପ୍ରମାଣିତ)

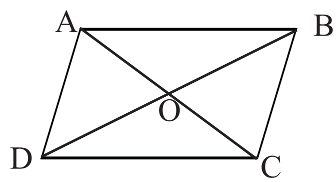
ଉପପାଦ୍ୟ - 26

ଯେଉଁ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ତାହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

(A quardrilateral whose diagonals bisect each other is a parallelogram.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ O; AO = CO ଏବଂ BO = DO

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ଏବଂ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$



(ଚିତ୍ର 3.15)

ପ୍ରମାଣ : Δ AOB ଓ Δ COD ରେ

$\because \begin{cases} AO = CO & \text{(ଦତ୍ତ)} \\ BO = DO & \text{(ଦତ୍ତ)} \\ m\angle AOB = m\angle COD & \text{(ପ୍ରତୀପ କୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ABO = m\angle ODC$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ)

$\Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

ସେହିପରି Δ AOD ଏବଂ Δ BOC ନେଇ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

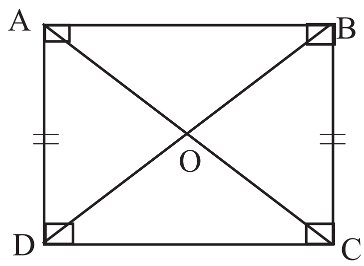
$\therefore$ ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 27

ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । (The diagonals of a rectangle are congruent.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଓ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ଏହାର କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



(ଚିତ୍ର 3.16)

ପ୍ରମାଣ : Δ ADC ଓ Δ BDC ମଧ୍ୟରେ

$\because$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
$\angle ADC \cong \angle BCD$ (ସମକୋଣ)
ଏବଂ $\overline{DC}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।

$\therefore$ $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (ବା-କୋ-ବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ)

$\Rightarrow \overline{AC} \cong \overline{BD}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

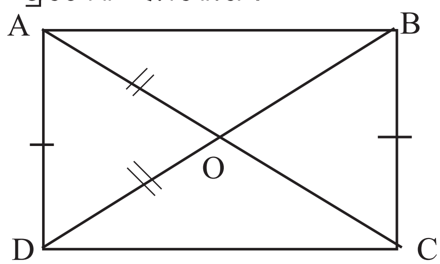
ଉପପାଦ୍ୟ - 28

ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ତାହା ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ।

(If the diagonals of a parrallelogram are congruent, it is a rectangle.)

ଦତ୍ତ : ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ କର୍ଣ୍ଣ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର ଅର୍ଥାତ୍ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମକୋଣ ।



(ଚିତ୍ର 3.17)

ପ୍ରମାଣ : Δ ADC ଓ Δ BDC ମଧ୍ୟରେ

$\because$ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$
$\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (ଦତ୍ତ)
ଏବଂ $\overline{DC}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ ।

$\therefore$ $\Delta ADC \cong \Delta BDC$ (ବା-କୋ-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle ADC = m\angle BCD$ (ସର୍ବସମ ତ୍ରିଭୁଜର ଅନୁରୂପ କୋଣ ହେତୁ)

ପୁନଶ୍ଚ, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବିପରୀତ ବାହୁ ହେତୁ)

$\Rightarrow m\angle ADC + m\angle BCD = 180^0$

$\therefore$ $m\angle ADC = m\angle BCD = 90^0$

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ ଯେ $m\angle DAB = m\angle ABC = 90^0$

$\therefore$ ABCD ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉପପାଦ୍ୟ - 29

ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

(The diagonals of a rhombus are perpendicular to each other.)

ଦତ୍ତ : ABCD ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ ଏବଂ $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ ଏହାର ଦୁଇ କର୍ଣ୍ଣ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।

Δ AOD ଓ Δ DOC ରେ

$\because$ { AO = CO, AD = DC [$\because$ ABCD ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ], ଏବଂ $\overline{DO}$ ସାଧାରଣ ବାହୁ

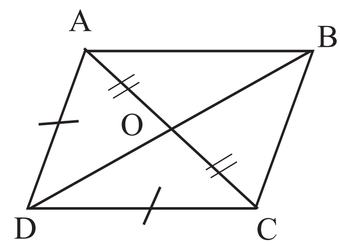
$\therefore$ $\Delta AOD \cong \Delta DOC$ (ବା-ବା-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow m\angle AOD = m\angle DOC$

କିନ୍ତୁ $m\angle AOD + m\angle DOC = 180^0$

$\therefore$ $m\angle AOD = m\angle DOC = 90^0$

ଅର୍ଥାତ୍ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ । (ପ୍ରମାଣିତ)



(ଚିତ୍ର 3.18)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହେଲେ ଏହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -2 : ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଓ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ -3 : ଯେଉଁ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ,ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ– 3 (b)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ଭୁଲ୍ କି ଠିକ୍ ଲେଖ।
   (a) ଚତୁର୍ଭୁଜର ଚାରୋଟି ବାହୁ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।
   (b) ପ୍ରତ୍ୟେକ ରମ୍ବସ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର।
   (c) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର ଏକ ରମ୍ବସ୍।
   (d) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇ ସନ୍ନିହିତ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେଲେ, ତାହା ଏକ ରମ୍ବସ୍।
   (e) ରମ୍ବସ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ।
   (f) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।
   (g) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେଲେ, ତାହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

(h) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

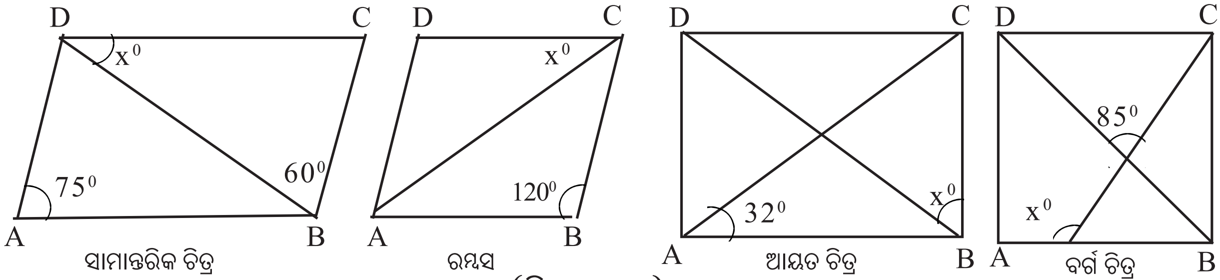
(i) ଯଦି ଏକ ଚତୁର୍ଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

(j) ପ୍ରତ୍ୟେକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍।

(k) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ଏକ ଆୟତ ଚିତ୍ର।

(l) ରମ୍ବସ ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର।

2. ନିମ୍ନଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖି "x"ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିର କର।



(ଚିତ୍ର 3.19)

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(a) ---- ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଏବଂ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ।

(b) ABCD ଚର୍ତୁଭୁଜରେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ ପରସ୍ପର ପରିପୂରକ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(c) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ହେଲେ ରମ୍ବସଟି ---।

(d) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = CD, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(e) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର AB = BC ଏବଂ AC = BD ଏବଂ$\angle B$ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି --।

(f) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସ୍‌ର ଗୋଟଏ କୋଣର ପରିମାଣ 90^0 ହେଲେ, ରମ୍ବସ୍‌ଟି ----।

(g) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ଏବଂ $m\angle A = 90^0$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(h) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜର $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି ଏବଂ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ ହେଲେ, ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ----।

(ଖ) ବିଭାଗ

4.(i) ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $m\angle B = (x+30^0)$ ଓ $m\angle C=(2x-60^0)$ ହେଲେ $m\angle A$ କେତେ ?

(ii) ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\angle A$ ଓ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି। $\angle APB$ର ପରିମାଣ କେତେ ?

(iii) ଗୋଟିଏ ରମ୍ବସର କ୍ଷୁଦ୍ରତର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଏକ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସହ ସମାନ ହେଲେ, ରମ୍ବସର ବୃହତ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(iv) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଦୁଇଟି କ୍ରମିକ ଶୀର୍ଷରେ ଉତ୍ପନ୍ନ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ 2 : 3 ହେଲେ, ବୃହତ୍ତର କୋଣର ପରିମାଣ କେତେ ?

(v) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ଗୋଟିଏ କୋଣର ପରିମାଣ ଏହାର ଏକ ସନ୍ନିହିତ କୋଣର $\frac{4}{5}$ ହେଲେ, ସନ୍ନିହିତ କୋଣଦ୍ୱୟର ପରିମାଣ ସ୍ଥିର କର।

5.(i) ABCD ଏକ ଉତ୍ତଳ ଚତୁର୍ଭୁଜ। ଏଥିରେ $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ ର ପରିମାଣ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle A$ ର ପରିମାଣର ଦୁଇଗୁଣ, ତିନିଗୁଣ, ଚାରିଗୁଣ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ଏହା ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍।

(ii) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle A$ ଓ $\angle B$ ର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ଏବଂ $\angle AOB$ ଏକ ସମକୋଣ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ABCD ଏକ ଟ୍ରାପଜିୟମ୍।

(iii) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\angle ADC$ ଏକ ସମକୋଣ, $m\angle BAC = m\angle ACB = 45^0$ ଏବଂ AD = DC ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଏହା ଏକ ବର୍ଗଚିତ୍ର ।

(iv) ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ AD = BC = 3 ସେ.ମି, AB = 8 ସେମି। $\overline{AB}$ ଉପରେ E ଓ F ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ। ଯେପରିକି A-E-F ଏବଂ EF = 2 ସେମି। $m\angle BCF = m\angle BFC = m\angle AED = m\angle ADE = 45^0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ABCD ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର।

(v) ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। ଯଦି AB = 2AD ଏବଂ P, $\overline{CD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $\angle APB = 90^0$

6. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜ ରେ $m\angle ABD = m\angle BDC$ ଏବଂ $m\angle ADB = m\angle CBD$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଏହା ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ $\Delta ABC \cong \Delta\ ADC$

(ଗ) ବିଭାଗ

7. ABCD ଚତୁର୍ଭୁଜରେ $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ । $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\angle BAD$ ଓ $\angle CDA$ କୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରୁଥିଲେ ପ୍ରମାଣକର ଯେ, AB = BC = CD

8. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର । $\angle A$ ଓ $\angle C$ ର ସମଦ୍ୱିଣ୍ଡକ ଯଥାକ୍ରମେ $\overrightarrow{AP}$ ଓ $\overrightarrow{CQ}$ । ଏମାନେ ଯଦି $\overline{BC}$ ଓ $\overline{AD}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, APCQ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

9. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ M ଓ N ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{DC}$ ଓ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। ପ୍ରମାଣ କରଯେ,

   (i) MCBN ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର,

   (ii) DMBN ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ଏବଂ

   (iii) $\overline{DB}$ ଓ $\overline{MN}$ ପରସ୍ପରକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି।

10. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{AC}$ ଓ $\overline{BD}$ କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତି। $\overline{DO}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ X ଓ $\overline{BO}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ Y ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AXCY ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

11. ABCD ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\overline{AC}$ ଉପରେ K, L ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AK = CL, ପ୍ରମାଣକରଯେ, DKBL ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

12. ABCD ଗୋଟିଏ ସାମନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର। $\overline{BD}$ ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି $\overline{AP} \parallel \overline{CQ}$ । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, DP = BQ ଏବଂ APCQ ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

13. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{DK} \perp \overline{AC}$, $\overline{BL} \perp \overline{AC}$ ଏବଂ K ଓ L ଯଥାକ୍ରମେ ଲମ୍ବଦ୍ୱୟର ପାଦବିନ୍ଦୁ। ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, DKBL ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

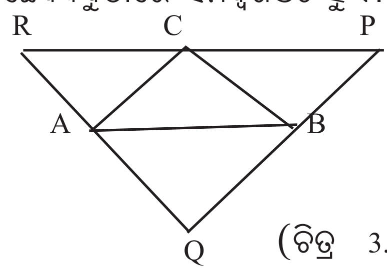
14. ABCD ଏକ ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ର । $\overline{AD}$ ଉପରେ P ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି DC = DP, $\overrightarrow{CP}$ ଓ $\overrightarrow{BA}$ ପରସ୍ପରକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,
(i) AQ = AP (ii) BC = BQ (iii) AD = CD + AQ

15. ABCD ସାମାନ୍ତରିକଚିତ୍ରରେ $\overline{DC}$ ବାହୁ ଉପରେ X ଏକ ବିନ୍ଦୁ ଯେପରିକି AD = AX । ପ୍ରମାଣକର ଯେ, $m\angle XAB = m\angle ABC$ ଏବଂ AC = BX

16. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କୋଣମାନଙ୍କର ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡକ ରେଖାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ଆୟତଚିତ୍ର।

17. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ ଓ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସୀମାବଦ୍ଧ ରେଖାଖଣ୍ଡ କର୍ଣ୍ଣମାନଙ୍କ ଛେଦବିନ୍ଦୁଠାରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୁଏ।

18. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.20 ରେ $\overline{RP} \parallel \overline{AB}$, $\overline{RQ} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ ହେଲେ,
ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $BC = \frac{1}{2}$ QR



(ଚିତ୍ର 3.20)

3.7. ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା ଏବଂ ତ୍ରିଭୁଜ (Parallel lines and Triangles) :

ଆଲୋଚିତ ସମସ୍ତ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପପାଦ୍ୟର ସହାୟତାରେ ଆମେ ତ୍ରିଭୁଜ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଉପାଦେୟ ଉପପାଦ୍ୟର ଆଲୋଚନା ଏଠାରେ କରିବା। ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ପରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ଚିତ୍ର ଗୁଡ଼ିକରେ ପ୍ରୟୋଗ କରି ବିଭିନ୍ନ ଜ୍ୟାମିତିକ ତଥ୍ୟର ଅବତାରଣା କରି ପାରିବା। ଏହି ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ଆଲୋଚିତ ଉପପାଦ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ହିଁ ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଛି ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 30

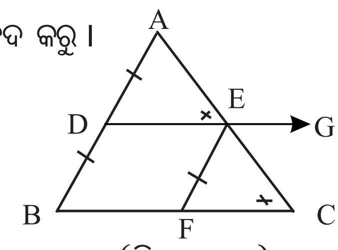
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।

(In a triangle, a line drawn through the mid-point of one side parallel to another side, bisects the third side)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D ଏବଂ $\overleftrightarrow{DG} \parallel \overline{BC}$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : $\overleftrightarrow{DG}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେବ ।

ଅଙ୍କନ : E ମଧ୍ୟ ଦେଇ $\overline{AB}$ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା $\overline{BC}$ କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ।



(ଚିତ୍ର 3.21)

ପ୍ରମାଣ : $\because$ $\overline{DE} \parallel \overline{BF}$ (ଦତ୍ତ) ଓ $\overline{EF} \parallel \overline{BD}$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ BDEF ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ।

$\Rightarrow$ BD = EF $\Rightarrow$ AD = EF ($\because$ AD = BD)

Δ ADE ଓ Δ EFC ରେ

$\because \begin{cases} AD = EF & \text{(ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)} \\ m\angle ADE = m\angle EFC & \text{(ଅନୁରୂପ କୋଣ)} \\ \text{ଏବଂ } m\angle AED = m\angle ECF & \text{(ଅନୁରୂପ କୋଣ)} \end{cases}$

$\therefore \Delta$ ADE $\cong \Delta$ EFC (କୋ-କୋ-ବା ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow$ AE = EC (ଅନୁରୂପ ବାହୁ) $\Rightarrow$ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ E (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନ୍ତବ୍ୟ - 1 (ନିମ୍ନ ଆଲୋଚନା ଶିକ୍ଷକ ତଥା ଜିଜ୍ଞାସୁ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କ ଲାଗି ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ।)

ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରାମାଣ୍ୟରେ $\overleftrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରିବ ବୋଲି ଚିତ୍ରାଙ୍କନ ଜନିତ ଧାରଣାରୁ ଧରିନିଆଯାଇଛି । ମାତ୍ର ପୂର୍ବରୁ ପଢ଼ିଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଉପପାଦ୍ୟ ମାନଙ୍କର ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ $\overrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ ବାହୁକୁ ଛେଦ କରେ (ପ୍ରମାଣ ଦେଖ)

ପ୍ରମାଣ : A ଓ B, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ($\because$ A–D–B)

ଏବଂ B ଓ C, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ । ($\because$ $\overline{BC} \parallel \overleftrightarrow{DG}$)

$\therefore$ A ଓ C, $\overleftrightarrow{DG}$ ର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

$\Rightarrow$ $\overleftrightarrow{DG}$, $\overline{AC}$ କୁ ଛେଦ କରେ ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 31

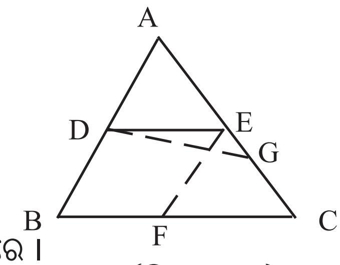
ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଯେ କୌଣସି ଦୁଇବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ ଯୋଗ କରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ ତୃତୀୟ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଓ ଏହାର ଅର୍ଦ୍ଧ-ଦୈର୍ଘ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ ।

(The segment joining the midpoints of two sides of a triangle is parallel to the third side and its length is half of that of the third side.)

ଦତ୍ତ : Δ ABC ରେ D ଓ E ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : (i) $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ (ii) DE = $\frac{1}{2}$ BC

ପ୍ରମାଣ : (i) ମନେକର D ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ ଅଙ୍କିତ; $\overline{BC}$ ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା, $\overline{AC}$ କୁ G ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରେ ।



(ଚିତ୍ର 3.22)

$\therefore$ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ G

$\Rightarrow$ G = E $\Rightarrow$ G ଓ E ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ଏକ ଏବଂ ଅଭିନ୍ନ ।

ମାତ୍ର $\overline{DG} \parallel \overline{BC}$ (ଧରିନିଆଯାଇଛି) $\Rightarrow$ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$

(ii) ମନେକର E ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ ଅଙ୍କିତ $\overline{AB}$ ପ୍ରତି ସାମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଖଣ୍ଡ $\overline{BC}$ କୁ F ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ ।

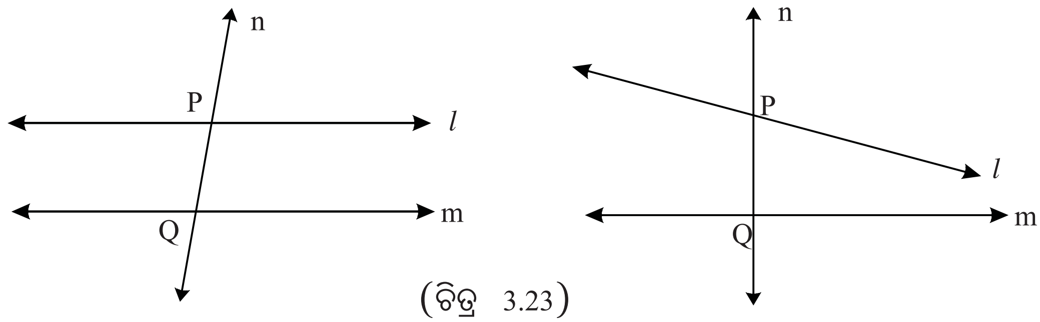
$\therefore$ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ F $\Rightarrow$ BF = CF = $\frac{1}{2}$ BC

ପୁନଶ୍ଚ, BDEF ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର ($\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$)

$\therefore$ $DE = BF \Rightarrow DE = \frac{1}{2} BC$ (ପ୍ରମାଣିତ)

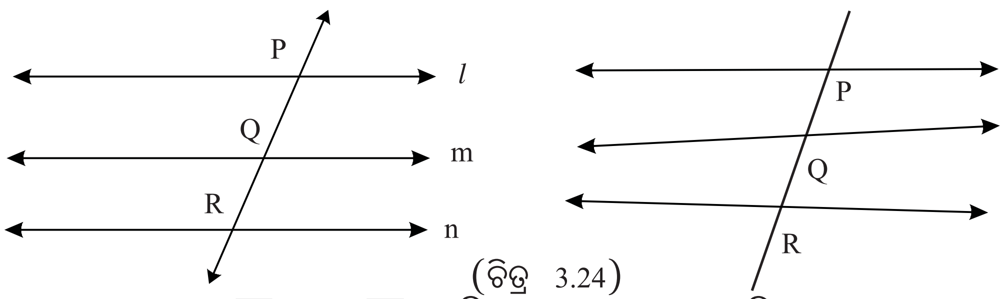
3.8 ଛେଦାଂଶ (Intercepts) :

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ l ଓ m ଦୁଇଟି ସରଳ ରେଖା । ଯଦି ଏକ ଛେଦକ n, ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟକୁ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ $\overline{PQ}$ କୁ ଛେଦକ ର ଏକ ଛେଦାଂଶ ବା ଛେଦିତ ଅଂଶ କୁହାଯାଏ । ଦତ୍ତ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।



(ଚିତ୍ର 3.23)

ଯଦି ଏକ ସମତଳରେ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ସରଳରେଖା (ପରସ୍ପର ସମାନ୍ତର କିମ୍ବା ସମାନ୍ତର ନ ହୋଇବି ପାରନ୍ତି)କୁ ଗୋଟିଏ ଛେଦକ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରେ, ତେବେ ଛେଦକର ଛେଦିତାଂଶ (Intercepts) ମଧ୍ୟ ଥାଏ । ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ।



(ଚିତ୍ର 3.24)

ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ $\overline{PQ}$ ଏବଂ $\overline{QR}$ ଛେଦିତାଂଶ (intercepts) ଅଟନ୍ତି।

ଟୀକା: (1) ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଛେଦିତାଂଶ ବା ଛେଦାଂଶ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ବା ଅସମାନ ହୋଇପାରନ୍ତି।

(2) ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବାର କଥା ଯେ, ଛେଦକର ଛେଦାଂଶ ମାନ, ଛେଦିତ ସରଳରେଖାମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଉତ୍ପନ୍ନ ହୋଇଥାଏ।

ଉପପାଦ୍ୟ - 32

ତିନି ବା ତତୋଽଧିକ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାକୁ ଛେଦ କରୁଥିବା ଏକ ଛେଦକର ଛେଦିତ ଅଂଶଗୁଡ଼ିକ ସର୍ବସମ ହେଲେ, ଅନ୍ୟ ଯେ କୌଣସି ଛେଦକର ଛେଦିତ ଅନୁରୂପ ଅଂଶ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ ସର୍ବସମ ହେବ ।

(If three or more parallel lines have congruent intercepts on any transversal, they have congruent intercepts on any other transversal.)

(ଉପପାଦ୍ୟ ଟି ତିନୋଟି ସରଳରେଖା ପାଇଁ ପ୍ରମାଣ କଲେ ଯଥେଷ୍ଟ ।)

ଦତ୍ତ : ମନେକର $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$; T_1 ଛେଦକ L_1, L_2, L_3 କୁ ଯଥାକ୍ରମେ A, B, Cରେ ଛେଦ କରେ ଏବଂ $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ ଅର୍ଥାତ୍ AB = BC । L_1, L_2, L_3 କୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ଛେଦକ T_2 ଯଥାକ୍ରମେ D, E, F ରେ ଛେଦ କରେ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : T_2 ର ଛେଦିତ ଅଂଶ ଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ ଅର୍ଥାତ୍ DE = EF

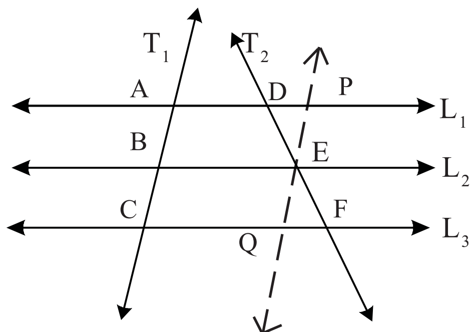
ଅଙ୍କନ : E ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟ ଦେଇ T_1 ସହିତ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖା L_1 ଓ L_3 କୁ P ଓ Q ରେ ଛେଦ କରୁ ।

ପ୍ରମାଣ : $L_1 \parallel L_2$ (ଦତ୍ତ) ଓ $T_1 \parallel \overleftrightarrow{PE}$ (ଅଙ୍କନ)

$\therefore$ APEB ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର $\Rightarrow$ AB = PE

ସେହିପରି BC = EQ $\Rightarrow$ PE =EQ ($\because$ AB=BC (ଦତ୍ତ))

Δ DPE ଓ Δ EFQ ରେ



(ଚିତ୍ର 3.25)

$\because$ $\begin{cases} m\angle DEP = m\angle FEQ & \text{(ପ୍ରତୀପକୋଣ)} \\ m\angle DPE = m\angle EQF & \text{(ଏକାନ୍ତର କୋଣ)} \\ PE = EQ & \text{(ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରମାଣିତ)} \end{cases}$

ଏବଂ

$\therefore$ Δ DPE $\cong$ Δ EFQ (କୋ-ବା-କୋ ଉପପାଦ୍ୟ)

$\Rightarrow$ DE = EF $\Rightarrow$ $\overline{DE} \cong \overline{EF}$

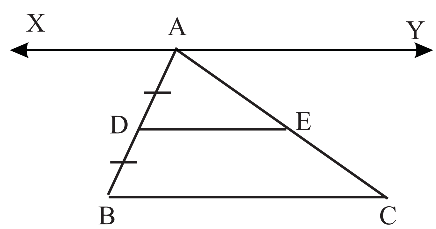
ଅର୍ଥାତ୍ T_2 ର ଛେଦିତ ଅଂଶଦ୍ୱୟ ସର୍ବସମ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ଉପରୋକ୍ତ ଉପପାଦ୍ୟ- 32 ର ସହାୟତାରେ ଉପପାଦ୍ୟ- 30 **''ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ଏକ ବାହୁରେ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁରୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ବାହୁ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା, ତୃତୀୟ ବାହୁକୁ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ।''** ର ପ୍ରମାଣ ସମ୍ଭବ ।

ଦତ୍ତ: D, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ।

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ: E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।

ଅଙ୍କନ: A ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟଦେଇ, $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର କରି $\overleftrightarrow{XY}$ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର।



(ଚିତ୍ର 3.26)

ପ୍ରମାଣ: $\overleftrightarrow{XY} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$;

$\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$, ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାଦ୍ୱୟକୁ ଯଥାକ୍ରମେ, A, D, B ଏବଂ A, E, C ରେ ଛେଦକରେ। $\overline{AB}$ ଛେଦକର ଛେଦିତାଂଶ (intercepts) ଦ୍ୱୟ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BD}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ । (ଦତ୍ତ) ଅର୍ଥାତ୍ AD = BD ।

ଉପପାଦ୍ୟ 32 ଅନୁଯାୟୀ ଅନ୍ୟଏକ ଛେଦକ $\overline{AC}$ ର ଛେଦିତାଂଶ ଦ୍ୱୟ $\overline{AE}$ ଓ $\overline{EC}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ସମାନ ହେବ। ଅର୍ଥାତ AE = EC $\Rightarrow$ E, $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁଶୀଳନୀ- 3(c)

(କ) ବିଭାଗ

1. ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$, $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{PS}$ ଓ AB=BC=CD

(a) ଶୂନ୍ୟ ସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

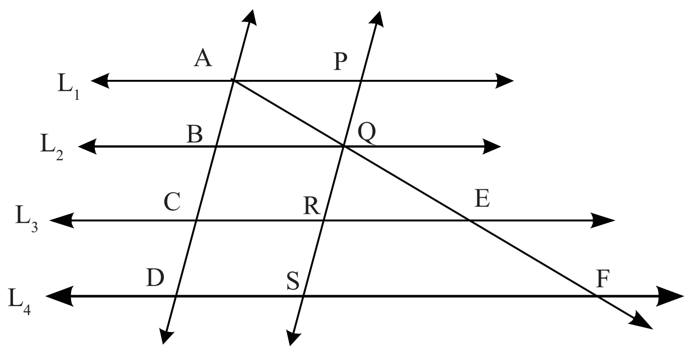
(i) AQ = ... = ...

(ii) PQ = $\frac{1}{3}$ (...)

(iii) EF = $\frac{1}{3}$ (...)

(iv) BQ = $\frac{1}{2}$ (...)

(v) RF = $\frac{1}{2}$ (....)



ଚିତ୍ର 3.27

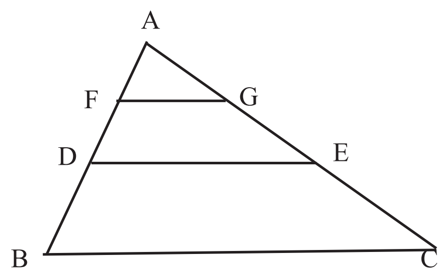
(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଭୁଲ ଓ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଚିହ୍ନାଅ।

(i) AQ = $\frac{1}{2}$ AE, (ii) BQ = $\frac{1}{2}$ DF,

(iii) AF =2AQ, (iv) AP = DS,

(v) RE = $\frac{1}{2}$ SF, (vi) 3QE = AF

2. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.28 ରେ $\overline{FG} \parallel \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ଏବଂ $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D, $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ F ହେଲେ, ନିମ୍ନ ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର।



(ଚିତ୍ର 3.28)

(i) AG:GE (ii) AG:GC (iii) GE:EC (iv) AG:AC (v) GE:AC (vi) EC:AC

3. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(a) ଗୋଟିଏ ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁ ମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜ ଟି.... ହେବ।

(b) ଗୋଟିଏ ଆୟତଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି... ହେବ।

(c) ଗୋଟିଏ ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ...... ହେବ।

(d) କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରୁଥିବା ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁକୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ...... ହେବ।

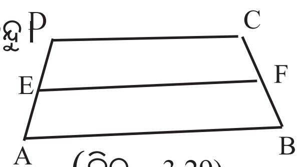
(e) ଗୋଟିଏ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ..... ହେବ।

(ଖ) ବିଭାଗ

4. ଏକ ସମବାହୁ Δ ABCର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ D, E, ଓ F ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, ΔDEF ସମବାହୁ।

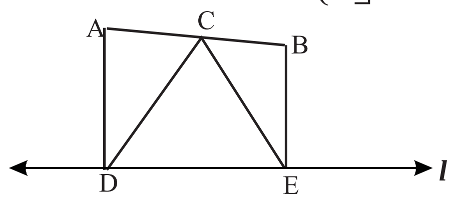
5. ଗୋଟିଏ ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ଯୋଗକଲେ, ଯେଉଁ ଚାରିଗୋଟି ତ୍ରିଭୁଜ ଉତ୍ପନ୍ନ ହୁଏ, ସେମାନେ ସର୍ବସମ।

6. ଚିତ୍ର 3.29ରେ ABCD ଏକ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍। $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$, E, $\overline{AD}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ ହେଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, F, $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ।



(ଚିତ୍ର 3.29)

7. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.30ରେ $\overline{AD} \perp l$ ଏବଂ $\overline{BE} \perp l$, C, $\overline{AB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ହେଲେ CD = CE ।



(ଚିତ୍ର 3.30)

(ଗ) ବିଭାଗ

8. Δ ABC ରେ M ଓ N $\overline{AB}$ ବାହୁକୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରନ୍ତି। $\overline{MP}$ ଓ $\overline{NQ}$ ପ୍ରତ୍ୟେକେ $\overline{BC}$ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସେମାନେ $\overline{AC}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକରନ୍ତି। ପ୍ରମାଣକରଯେ, P ଏବଂ Q, $\overline{AC}$ କୁ ସମତ୍ରିଖଣ୍ଡ କରିବେ।

9. Δ ABC ରେ M, P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ ଓ $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଏବଂ $\overline{PQ}$ ଓ $\overline{AM}$ ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ R । ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AR = RM, PR = RQ

10. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ X ଓ Y ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{AD}$ ଓ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ। $\overline{CX}$ ଓ $\overline{AY}$, $\overline{BD}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ P ଓ Q ରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, DP = PQ = QB ।

11. Δ ABC ରେ $\overline{AM}$ ମଧ୍ୟମାର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ R । $\overrightarrow{BR}$ ଓ $\overline{AC}$ ପରସ୍ପରକୁ S ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ପ୍ରମାଣ କରଯେ, $AS = \frac{1}{3} AC$

12. ABCD ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ରରେ $\overline{BC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P । $\overrightarrow{DP}$ ଓ $\overrightarrow{AB}$ ପରସ୍ପରକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦକଲେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ, AQ = 2AB ।

13. Δ ABC ରେ $\overline{CM}$, $\overline{AB}$ କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ ଓ $\overline{BQ}$, $\overline{CM}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡ କରେ। Q, $\overline{AC}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, AQ = 2QC

14. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର ଦୁଇ ଅସମାନ୍ତର ବାହୁର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟକୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ସମଷ୍ଟିର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।

15. Δ ABC ରେ $\angle$B ସମକୋଣ। $\overline{AC}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ P ହେଲେ ଦର୍ଶାଅଯେ, PA = PB = PC ।

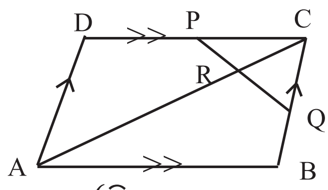
16. ଗୋଟିଏ ଟ୍ରାପିଜିୟମ୍‌ର କର୍ଣ୍ଣଦ୍ୱୟର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କୁ ଯୋଗକରୁଥିବା ରେଖାଖଣ୍ଡ, ସମାନ୍ତର ବାହୁମାନଙ୍କ ସହ ସମାନ୍ତର ଏବଂ ସମାନ୍ତର ବାହୁଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନ୍ତର ର ଅର୍ଦ୍ଧେକ।

17. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, କୌଣସି ଚତୁର୍ଭୁଜର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ସାମାନ୍ତରିକ ଚିତ୍ର।

18. ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, ଆୟତଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ଏକ ରମ୍ବସ ହେବ ।

19. ପ୍ରମାଣକର ଯେ, ବର୍ଗଚିତ୍ରର ବାହୁମାନଙ୍କର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ପର୍ଯ୍ୟାୟକ୍ରମେ ଯୋଗକଲେ, ଉତ୍ପନ୍ନ ଚତୁର୍ଭୁଜଟି ବର୍ଗଚିତ୍ର ହେବ।

20. ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ର 3.31 ରେ P ଓ Q ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{CD}$ ଓ $\overline{CB}$ ର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\overline{PQ}$, $\overline{AC}$ କର୍ଣ୍ଣକୁ R ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଥିଲେ, ଦର୍ଶାଅଯେ, 4CR = AC ।



(ଚିତ୍ର 3.31)