ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ

QEKV1Y

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି

(COORDINATE GEOMETRY)

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଇଂରାଜୀରେ ଜ୍ୟାମିତିକୁ Geometry କୁହାଯାଏ । Geometry ଶବ୍ଦଟି ଦୁଇଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଶବ୍ଦ, ଯଥା "geo" ଓ "metrein" ରୁ ସୃଷ୍ଟି । ପ୍ରଥମଟିର ଅର୍ଥ 'ପୃଥିବୀ' ଓ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର ଅର୍ଥ 'ପରିମାପ' । ଜ୍ୟାମିତି ଅତ୍ୟନ୍ତ ପୁରାତନ ଶାସ୍ତ୍ର । ଗ୍ରୀସ୍ ଦେଶର ଗଣିତଜ୍ଞ ମାନଙ୍କ ଅବଦାନ ହେତୁ ଜ୍ୟାମିତି ବିଷୟଟି ପରିପୃଷ୍ଟ ହୋଇପାରିଥିଲା । **ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ Thales** ଜ୍ୟାମିତର ପ୍ରଥମ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ; ଯାହାର କଥନଟି 'ଏକ ବୃତ୍ତ ତାର ବ୍ୟାସଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୋଇଥାଏ ।' **ପିଥାଗୋରାସ୍ (Pythagoras)** ଓ ତାଙ୍କ ଗଣିତଜ୍ଞ ବନ୍ଧୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ଉପପାଦ୍ୟ ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା । ପରେ ଇଜିପ୍‌ଟର ମହାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଇୟୁକ୍ଲିଡ୍ (Euclid)** ଜ୍ୟାମିତିର ଉପପାଦ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ରିତ କରି ତେରଖଣ୍ଡି ପୁସ୍ତକରେ (Elements) ବିଭକ୍ତ କରି ଜ୍ୟାମିତି ସଂପର୍କିତ ତଥ୍ୟ ରଚନା କରିଥିଲେ । ପ୍ରାୟ 2500 ବର୍ଷ ତଳର ଇୟୁକ୍ଲିଡ଼ିୟ ଜ୍ୟାମିତି ଏବେ ମଧ୍ୟ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାରେ ଏକ ପ୍ରଧାନ ଅଙ୍ଗ ଭାବେ ରହିଛି । ଇଉକ୍ଲିଡ଼ିୟ ଜ୍ୟାମିତି ଓ ବୀଜଗଣିତ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ପୃଥକ ବିଷୟ; ମାତ୍ର ସପ୍ତଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ **Rene Descartes (1596 – 1650)** ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ ନୂତନ ଧାରଣାକୁ ଆଧାର କରି **ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି (Coordinate Geometry)** ବା **ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତି (Analytical Geometry)** ଜନ୍ମଲାଭ କଲା ଓ ଏଥିରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚର୍ଚ୍ଚାରେ ବୀଜଗଣିତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଲାଭ କଲା । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ଉପରେ Rene Descartes ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ପ୍ରଥମ ପୁସ୍ତକ 1637 ରେ ପ୍ରକାଶ ଲାଭ କରିଥିଲା ।

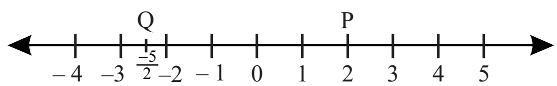
ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ମୂଖ୍ୟ ସୋପାନ ହେଲା, ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର **କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (Ordered Pair)** ରୂପେ ଓ ଶୂନ୍ୟରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ତିନିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର **କ୍ରମିତ ତ୍ରୟୀ (Ordered triad)** ରୂପେ ସୂଚିତ କରିବା । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟ ବା ଧାରଣା ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିଥାଏ । ଅଧିକାଂଶ ଉପପାଦ୍ୟ ଯାହା ଇଉକ୍ଲିଡ଼ିୟ ପଦ୍ଧତିରେ ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥାଏ, ସେଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିକୁ **Newton ଓ Leibnitz** ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ **କଳନ ଶାସ୍ତ୍ର (Calculus)** ର ଭିତ୍ତିଭୂମି ରୂପେ ମଧ୍ୟ ବିଚାର କରାଯାଇଥାଏ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଆଲୋଚନା ବେଳେ କିପରି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ତାହା ଆଲୋଚିତ ହୋଇଥିଲା । ସରଳରେଖାର କେବଳ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଥିବା ହେତୁ ଏହା **ଏକ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ (One dimensional)** । ସୁତରାଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଓ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂପର୍କିତ କରାଯାଇଥାଏ । ଏଥି ପାଇଁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଓ R (ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍) ସଦୃଶ । ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{X'X} \sim R$ । (ଚିତ୍ର 5.2 ଦେଖ)

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମର ଆଲୋଚନାର ବିଷୟ ବସ୍ତୁ ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି (Plane co-ordinate geometry) । ଯେ କୌଣସି ସମତଳ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍; ଏହା ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ । ସମତଳରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ଏଥିପାଇଁ ଅନୁସୃତ ଉପାୟମାନ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଭଲ ଭାବରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

5.2 ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁ (Points on a plane) :

ସରଳରେଖା ଏକ ମାତ୍ରା (dimension) ବିଶିଷ୍ଟ । ସୁତରାଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯଥେଷ୍ଟ । ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର **ସ୍ଥାନାଙ୍କ** (Coordinate) କୁହାଯାଏ । ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଏକ ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଇପାରେ ।

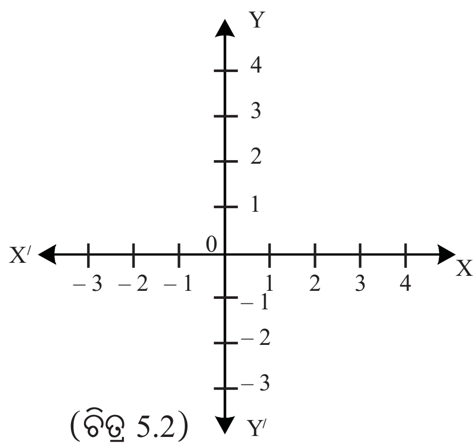


(ଚିତ୍ର 5.1)

ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 2 । ସେହିପରି Q କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\frac{-5}{2}$ ।

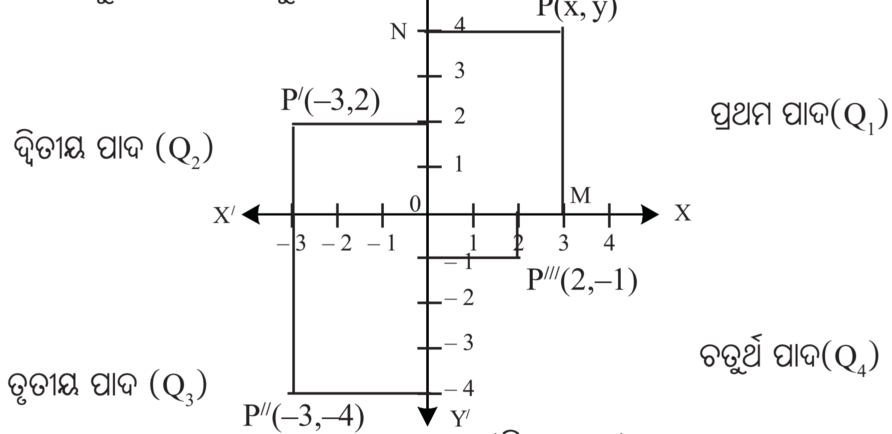
ମାତ୍ର ଲେଖ କାଗଜର ସମତଳ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P କୁ କିପରି ସୂଚାଯାଇ ପାରିବ ? ଲେଖକାଗଜର ସମତଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଉଭୟେ ଥା'ନ୍ତି । ସୁତରାଂ ସମତଳ ଦୁଇ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ । ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁ P ର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ପାଇଁ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ଭାବେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'Y}$ ନେବା । $\overleftrightarrow{X'X}$ କୁ x- ଅକ୍ଷ ଓ $\overleftrightarrow{Y'Y}$ କୁ y- ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।

ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । $\overrightarrow{OX}$ ଓ $\overrightarrow{OX'}$ ଯଥାକ୍ରମେ x- ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗ ଓ ଋଣ ଦିଗ ଏବଂ $\overrightarrow{OY}$ ଓ $\overrightarrow{OY'}$ ଯଥାକ୍ରମେ y- ଅକ୍ଷର ଧନ ଦିଗ ଓ ଋଣ ଦିଗ ଅଟନ୍ତି । O ବିନ୍ଦୁଟିକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) କୁହାଯାଏ । ସାଧାରଣତଃ x- ଅକ୍ଷ ଆନୁଭୂମିକ (Horizontal) ଓ y- ଅକ୍ଷ ଉଲ୍ଲମ୍ବ (Vertical) ଭାବେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ । (x- ଓ y- ଅକ୍ଷକୁ ଆୟତୀୟ ଅକ୍ଷ (Rectangular axes) ଏବଂ ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଆୟତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Rectangular co-ordinate) କୁହଯାଏ; କାରଣ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।)



(ଚିତ୍ର 5.2)

ମନେକର P ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ x- ଓ y- ଅକ୍ଷକୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ ।



(ଚିତ୍ର – 5.3)

M ଓ N ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ହେଲେ ସମତଳରେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟକୁ କ୍ରମିତ ଯୋଡି (x, y) ଭାବେ ଲେଖାଯାଏ । **(x, y) କ୍ରମିତ ଯୋଡିକୁ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Coordinates) କୁହାଯାଏ । x କୁ x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବା ଭୁଜ (abscissa) ଓ y କୁ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବା କୋଟି (ordinate) କୁହାଯାଏ ।** P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) କୁ ମଧ୍ୟ P (x, y) ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3, 4), $P^{/}$ ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (-3, 2), $P^{//}$ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–3, –4) ଓ $P^{///}$ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (2, -1) ।

x ଓ y - ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସମତଳଟି ଚାରିଗୋଟି **ପାଦ** (Quadrant) ରେ ବିଭାଜିତ ହୁଏ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ନ ହୋଇ ସମତଳରେ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ ଏହା ଏହି ଚାରିଗୋଟି ପାଦରୁ କୌଣସି ଗୋଟିକରେ ରହିବ । ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ପାଦଗୁଡ଼ିକରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ(x, y)ର ରୂପରେଖକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ପ୍ରଥମ ପାଦରେ $x > 0, y > 0$, ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ $x < 0, y > 0$,

ତୃତୀୟ ପାଦରେ $x < 0, y < 0$ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପାଦରେ $x > 0, y < 0$ ।

ସୂଚନା : ଚାରିଗୋଟି ପାଦକୁ Q_1, Q_2, Q_3 ଓ Q_4 ଭାବେ ଲେଖି ସେଟ୍ ଲିଖନର ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀ ମାଧ୍ୟମରେ ସୂଚାଇଲେ

$Q_1 = \{ (x, y) : x > 0, y > 0 \}$, $Q_2 = \{ (x, y) : x < 0, y > 0 \}$

$Q_3 = \{ (x, y) : x < 0, y < 0 \}$ ଓ $Q_4 = \{ (x, y) : x > 0, y < 0 \}$

5.2.1 ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinate of points on axes) :

(i) x- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ଏବଂ $x \in R$ । ଏପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ x – ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $\therefore$ x ଅକ୍ଷ = $\{ (x, y) \mid x \in R, y = 0 \}$ ଅଥବା x - ଅକ୍ଷ = $\{(x, 0) : x \in R \}$

(ii) y- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ଏବଂ $y \in R$ । ଏପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ y – ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $\therefore$ y ଅକ୍ଷ = $\{ (x, y) \mid x = 0, y \in R\}$ ଅଥବା y - ଅକ୍ଷ = $\{(0, y) : y \in R \}$

(iii) ମୂଳବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 0) । (ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ)

ମନେରଖ : $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup \{(x, 0) : x \in R\} \cup \{(0, y) : y \in R\} = R^2$ ଅଥବା R x R

5.2.2 xy - ସମତଳ (xy - plane) :

ଯେଉଁ ସମତଳଟିରେ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ (x ଓ y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ସେହି ସମତଳକୁ xy- ସମତଳ କୁହାଯାଏ । xy- ସମତଳର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି $R \times R = R^2 = \{(x,y) | x, y \in R\}$ ।
ଯେଉଁଠାରେ R x R କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ସେଟ୍ । xy- ସମତଳଟିକୁ ମଧ୍ୟ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian Plane)** ବା R^2 – ସମତଳ କୁହାଯାଏ ।

x- ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ନିଆଯାଇଥିବା ହେତୁ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) କୁ ମଧ୍ୟ **ଆୟତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (rectangular coordinates)** କୁହାଯାଏ ।

5.2.3 ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ (Half Plane) :

x- ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱାରା xy- ସମତଳଟି ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ ଯଥା : ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : y > 0, x \in R\}$ ଅଥବା $Q_1 \cup Q_2$ ଓ ଅଧଃ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : y < 0, x \in R\}$ $Q_3 \cup Q_4$ ରେ ବିଭାଜିତ ହୁଏ । ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷ, xy ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ ଯଥା : ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : x > 0, y \in R\}$ ଅଥବା $Q_1 \cup Q_4$ ଓ ବାମ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : x < 0, y \in R\}$ ଅଥବା $Q_2 \cup Q_3$ ରେ ବିଭାଜିତ କରିଥାଏ ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

(i) ବିନ୍ଦୁ P(2,3), Q_1 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($P \in Q_1$) (ii) ବିନ୍ଦୁ Q(–2,3), Q_2 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($Q \in Q_2$)

(iii) ବିନ୍ଦୁ R(–2,–3), Q_3 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($R \in Q_3$) (iv) ବିନ୍ଦୁ S(2,–3), Q_4 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($S \in Q_4$)

(v) ବିନ୍ଦୁ M(2,0); x ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ (vi) ବିନ୍ଦୁ N(0,3), y - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 5 (a)

1. ଭୁଲ୍ ଥିଲେ ଠିକ୍ କର ।

(i) ମୂଳ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 0) (ii) ପ୍ରଥମ ପାଦ(Q_1) ଉପରିସ୍ଥ(x,y)ରେ $x > 0, y < 0$

(iii) ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦ(Q_2) ଉପରିସ୍ଥ (x,y) ରେ $x<0, y<0$ (iv) ତୃତୀୟ ପାଦ (Q_3) ଉପରିସ୍ଥ(x,y)ରେ $x<0, y<0$

(v) ଚତୁର୍ଥ ପାଦ (Q_4) ଉପରିସ୍ଥ (x,y)ରେ $x> 0, y>0$ (vi) x- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, y)

(vii) y- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, 0) (viii) $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 = R^2$

(ix) R^2 ର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $Q_1 \cup Q_2$ (x) R^2 ର ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $Q_1 \cup Q_2$

(xi) (-3, -2) ବିନ୍ଦୁଟି ତୃତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ । (xii) (1.2, -1) ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(xiii) $(-0.5, \sqrt{2})$ ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ । (xiv) (x, y) = (-2, 3) ହେଲେ, $x = -2$ ଓ $y = 3$

2. ସମତଳରେ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଲେଖ କାଗଜ ଉପରେ ଦତ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନଟ କର । (ଲେଖ କାଗଜରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅକ୍ଷରେ 1 ସେ.ମି ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 1 ଏକକ ନିଅ ।)

(i) $P_1(2, 2)$ (ii) $P_2(-3, 2)$ (iii) $P_3(2, -3)$ (iv) $P_4(-4, -4)$

(v) $P_5(-3, 4)$ (vi) $P_6(0, 3)$ (vii) $P_7(3, 0)$ (viii) $P_8(0, -4)$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ର ମାତ୍ରା କେତେ ?

(ii) xy - ସମତଳର ମାତ୍ରା କେତେ ?

(iii) ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି କେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା ?

(iv) xy - ସମତଳ କୁ x - ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ କେତେଗୋଟି ପାଦରେ ବିଭକ୍ତ କରନ୍ତି ?

(v) $\overleftrightarrow{X'X}$ ଅକ୍ଷ ର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ କେଉଁଟି ?

(vi) $\overleftrightarrow{Y'Y}$ ଅକ୍ଷ ର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ କେଉଁଟି ?

(vii) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚର୍ଚ୍ଚା ପାଇଁ ଗଣିତର କେଉଁ ଶାଖାଟିର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ ଥାଏ ?

(viii) P(5,4) ବିନ୍ଦୁର x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ y - ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

4. $A(0, y), B(7,0), C(-2,5), D(3,-4)$ ଏବଂ $E(-1, 1)$ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ବା ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ କେଉଁ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅଥବା କେଉଁ କେଉଁ ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ ଲେଖ ।

5. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $x > 0,\ y > 0$ ହେଲେ, $p(x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) $x < 0,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(iii) $x > 0,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(-x, y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(iv) $x \in R,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(x, y)$ .... ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(v) $x < 0,\ y \in R$ ହେଲେ, $p(x, y)$ .... ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(vi) $x > 0,\ y > 0$ ହେଲେ, $p(-x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

5.3 ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ (Equation of a line) :

ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଫଳନର ଅନେକଗୁଡ଼ିଏ ଧର୍ମ ଜାଣିହୁଏ । ସହ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ । ଏସବୁ ବିଷୟ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବା ଦୁଇଟି ଚଳରାଶି x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର xy - ସମତଳରେ କିପରି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ?

x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ (ଯାହାକୁ ମଧ୍ୟ ସରଳ (Linear) ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ) ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ (general form) $\mathbf{ax + by + c = 0}$ **....... (1)**

ଏଠାରେ a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗ (coefficient) ଓ c ଧ୍ରୁବକ ରାଶି (constant) ଅଟନ୍ତି । ଏଗୁଡିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା; କିନ୍ତୁ a ଓ b ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି । ଚଳରାଶି x ଓ y ରୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱାଧୀନ ଓ ଅନ୍ୟଟି ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ । ସାଧାରଣତଃ ଆମ ଆଲୋଚନାରେ ଚଳରାଶି x କୁ ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ରୂପେ ବିଚାର କରାଯିବ ଓ ଅନ୍ୟ ଚଳରାଶି y (ସାପେକ୍ଷ ଚଳ)ର ମୂଲ୍ୟ (1) ସମୀକରଣରୁ ଲବ୍ଧ ହେବ । କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ ଏପରି ଭାବେ ଲବ୍ଧବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ ଆମକୁ ଯେଉଁ ଲେଖଚିତ୍ର (graph) ମିଳିବ ତାହାକୁ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ସମୀକରଣ (1) x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ରଟି କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖା (L) ହେବ । ବସ୍ତୁତଃ ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ (1) ଓ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର L (ଯାହାକି ଏକ ସରଳରେଖା) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ । ଅନ୍ୟ ଭାଷାରେ କହିଲେ ସରଳରେଖା L, ସମୀକରଣ (1) ର ଏକ ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପର ପରିପ୍ରକାଶ ।

ସମୀକରଣ (1) ରେ ଥିବା ସହଗ ଓ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି a, b ଓ c ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମକୁ xy- ସମତଳରେ ବିଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ମିଳିବ । ଏହି ସରଳରେଖାମାନଙ୍କ ବର୍ଗୀକରଣ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତିନିଗୋଟି ଶ୍ରେଣୀରେ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

(i) $a = 0$ ଓ $b \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $y = k_1$ ଯେଉଁଠାରେ $k_1 = (-\frac{c}{b})$

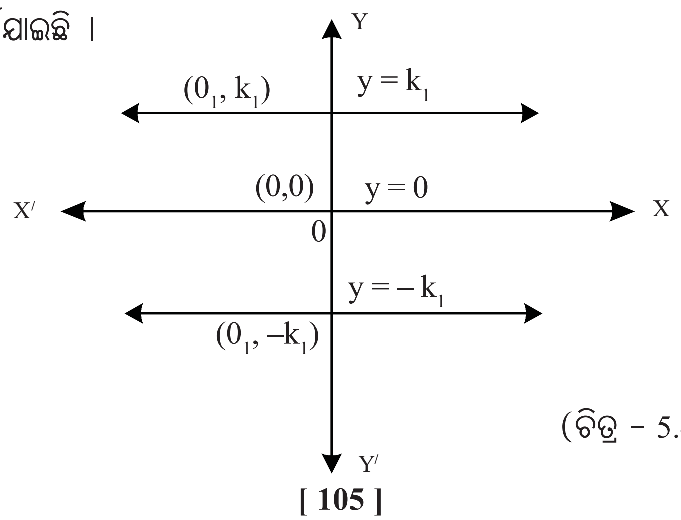
(ii) $b = 0$ ଓ $a \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $x = k_2$ ଯେଉଁଠାରେ $k_2 = (-\frac{c}{a})$

(iii) $a \neq 0$ ଓ $b \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $y = mx + c$ ଯେଉଁଠାରେ $m = (-\frac{a}{b})$

କାରଣ $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b})$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମୀକରଣ (1) ରେ ଥିବା ସହଗ ଓ ଧ୍ରୁବକ ରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ନିଆଯାଇ ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସରଳରେଖା L ଟି କିପରି ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପରିସ୍ଥିତି (i) : $y = k_1$ ସମୀକରଣ xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖାକୁ ସୂଚାଏ; ଯାହା x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । $y = k_1$ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ k_1 ଏକକ ଦୂରରେ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି $k_1 = 0$ ତେବେ ସମୀକରଣଟି x- ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $k_1 > 0$ ହେଲେ ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷର (ଉପରପାର୍ଶ୍ୱକୁ) ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ-ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଓ $k_1 < 0$ ହେଲେ $y = k_1$ ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷର (ତଳକୁ) ଅଧଃ-ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

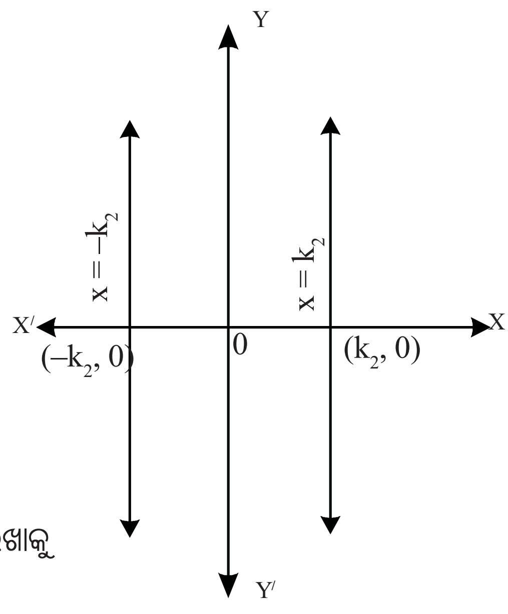


(ଚିତ୍ର - 5.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (a) $y = k_1, (k_1 > 0, k_1 < 0$ ଓ $k_1 = 0)$ ଏ ସମସ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା (Horizontal lines) କୁହାଯାଏ ।

(b) $y = 0$ ସମୀକରଣଟି x- ଅକ୍ଷକୁ ସୂଚାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି (ii): $x = k_2$ ସମୀକରଣ xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖାକୁ ସୂଚାଏ ଓ ଏହା y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏହି ସରଳରେଖାଟି $(k_2,y), (y\in R)$ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ । $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ k_2 ଦୂରରେ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି $k_2 = 0$ ତେବେ ସମୀକରଣଟି y- ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $k_2 > 0$ ହେଲେ $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି y- ଅକ୍ଷର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବା ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଓ $k_2 < 0$ ହେଲେ $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି y ଅକ୍ଷର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ବା ବାମ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । ଏହା ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



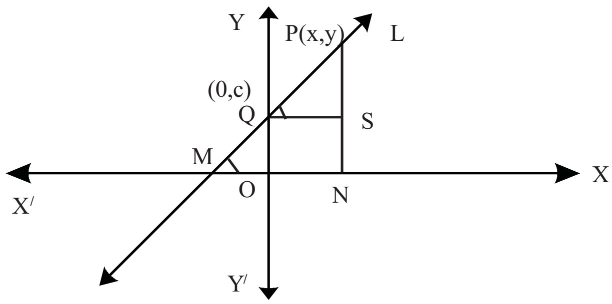
(ଚିତ୍ର - 5.5)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (c) **:** $x = k_2, (k_2 > 0, k_2 < 0$ ଓ $k_2 = 0)$ ଏ ସମସ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖା (Vertical lines) କୁହାଯାଏ ।

(d) $x = 0$ ସମୀକରଣଟି y- ଅକ୍ଷକୁ ସୂଚାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି (iii) : ପ୍ରଥମେ ଆଲୋଚିତ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି (i) ଓ (ii) ରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଲେଖଚିତ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ ଆନୁଭୂମିକ ଓ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପରିସ୍ଥିତି (iii) ରେ xy ସମତଳରେ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସରଳରେଖା ଓ ଏହା ଚିତ୍ର 5.6 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ସମୀକରଣ (1) ର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ $y = mx + c$ .... (2)

ପ୍ରମାଣ : L ରେଖା y – ଅକ୍ଷକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ଏବଂ x – ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ θ^0 ପରିମାଣର କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁ ।



(ଚିତ୍ର - 5.6)

ଏଠାରେ P (x , y), L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । P ବିନ୍ଦୁରୁ x ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{PN}$ ଓ $\overline{QS} \perp \overline{PN}$ ହେଉ । $OQ = c$ ହେଲେ Q ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,c) ହେବ ।

L ସରଳରେଖା ଘଣ୍ଟା କଣ୍ଟାର ଘୂର୍ଣ୍ଣର ବିପରୀତ ଦିଗରେ x- ଅକ୍ଷର ଧନ ଦିଗ ସହ ସୃଷ୍ଟି କରୁଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ θ କୁ L ସରଳରେଖାର ଆନତି (angle of inclination) କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ L ରେଖାଟି ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ହେତୁ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ।

P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ହେଲେ ON = x ଓ NP = y । PSQ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ରେ $m\angle PQS = \theta$ ($\because$ $m\angle PMN = \theta$) ଏବଂ PS = PN – NS = PN – OQ = y – c ଓ QS = ON = x ।

$$\text{PSQ}\ \Delta \text{ ରେ} \qquad \tan\theta = \frac{PS}{QS} = \frac{y-c}{x}$$

$$\Rightarrow x\tan\theta = y - c$$

$$\Rightarrow y = (\tan\theta)\,x + c \Rightarrow y = mx + c \text{ (ଯେଉଁଠାରେ } m = \tan\theta)$$

$$\Rightarrow y = mx + c \qquad \text{.......}(2)$$

ସୁତରାଂ L ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x,y) ନେଲେ x ଓ y ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ (2) ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଏଠାରେ ସରଳରେଖା L ର ସ୍ଲୋପ୍ (Slope) ଓ y ଛେଦାଂଶ (y- intercept) ଯଥାକ୍ରମେ m ଓ c ।

ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ : ସରଳରେଖା L ମୂଳବିନ୍ଦୁ O(0, 0) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଥିଲେ ଏହାର ସମୀକରଣ (2), x = 0 ଓ y = 0 ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଅତଏବ $y = mx + c \Rightarrow 0 = m \times 0 + c \Rightarrow c = 0$

ସୁତରାଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା (y- ଅକ୍ଷକୁ ଛାଡ଼ି) ର ସମୀକରଣ y = mx ହେବ ।

ମନେରଖ : ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ନିରର୍ଥକ କାରଣ $\theta = 90^0$ ହେଲେ ସ୍ଲୋପ୍ $\tan\theta$ ନିରର୍ଥକ ହେବ । L ସରଳରେଖାଟି ଆନୁଭୂମିକ ହୋଇଥିଲେ ଏହାର ଆନତି $\theta = 0^0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସ୍ଲୋପ୍ $\tan\theta = 0$ ହେବ ।

ସରଳରେଖା L ର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ସମୀକରଣ(2) ଦ୍ୱାରା ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା L ଉପରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଓ $P_2(x_2, y_2)$ ଦୁଇ ଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overleftrightarrow{P_1P_2} = L$ । ଏଠାରେ y = mx + c ସମୀକରଣଟି (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

$\therefore\ y_1 = mx_1 + c$ .... (i) ଏବଂ $y_2 = mx_2 + c$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ c କୁ ଅପସାରଣ କଲେ ପାଇବା : $m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$

$\Rightarrow m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ଅଥବା $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ = $\dfrac{\text{y- ସ୍ଥାନାଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର}}{\text{x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର}}$

ଉଦାହରଣ - 1 : $3x - 2y + 6 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ y = mx + c ରୂପରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ସ୍ଲୋପ୍ m ଓ y- ଛେଦାଂଶ c ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $3x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$ ଓ ଏହା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର y = mx + c ରୂପ । ଏଠାରେ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ (m) = $\frac{3}{2}$, y- ଛେଦାଂଶ (c) = 3 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : (i) P_1 (3,0), (ii) P_2(2, 1), (iii) P_3(0,4) ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡ଼ିକ $4x+3y - 12 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ x = 3, y = 0 ଲେଖିଲେ $4 \times (3) + 3 \times 0 - 12 = 0$ ଅଟେ ।

ଅତଏବ x = 3, y = 0 ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉଥିବାରୁ P_1 (3,0) ବିନ୍ଦୁଟି $4x + 3y - 12 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ $x = 2, y = 1$ ଲେଖିଲେ $4 \times 2 + 3 \times 1 - 12 = -1 \neq 0$;

ସୁତରାଂ $P_2(2, 1)$ ବିନ୍ଦୁଟି ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ନୁହେଁ ।

(iii) ପୁନଶ୍ଚ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ $x = 0, y = 4$ ଲେଖିଲେ $4 \times 0 + 3 \times 4 - 12 = 0$

ଅତଏବ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁଟି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଅଛି । ସୁତରାଂ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁଟି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ।

$\therefore P_1 (3,0)$ ଓ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 3 : $P_1 (7,8)$ ଓ $P_2 (-3,2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 7, y_1 = 8$ ଏବଂ $x_2 = -3, y_2 = 2$ ।

ଅତଏବ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ର ସ୍ଲୋପ୍ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{2-8}{-3-7} = \dfrac{-6}{-10} = \dfrac{3}{5}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟିକୁ ଲେଖ ।

(ii) x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ରଟିର ସ୍ୱରୂପ କ'ଣ ହେବ ?

(iii) x - ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣଟି ଲେଖ ।

(iv) y - ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣଟି ଲେଖ।

(v) (3, 0) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିକୁ ଲେଖ ।

(vi) (0, –2) ବିନ୍ଦୁଦେଇ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିକୁ ଲେଖ ।

(vii) ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିର ବ୍ୟାପକ ରୂପକୁ ଲେଖ ।

(viii) (2, 3) ବିନ୍ଦୁ, $2x + 3y + 6 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବ କି ?

(ix) (1, –1) ବିନ୍ଦୁ, $3x + 4y+1 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବ କି ?

(x) $x = 0$ ଓ $y = 0$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ ।

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାମାନଙ୍କୁ $y = mx + c$ ରୂପରେ ଲେଖି m ଓ c ନିରୂପଣ କର ।

(i) $2x + 4y - 7 = 0$ (ii) $x - 2y + 5 = 0$ (iii) $3x - 4y = 0$

3. $x - 2y + 5 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) (1, 3), (ii) (2, 4), (iii) (2,5), (iv) –1, 2), (v) (7, –6), (vi) (–3, 1)

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ P_1 ଓ P_2 ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $P_1(1, 2)$ ଓ $P_2(2, 3)$ (ii) $P_1(-1, 2)$ ଓ $P_2(5, 7)$

(iii) $P_1(-2, -3)$ ଓ $P_2(-4, -5)$ (iv) $P_1(2, -4)$ ଓ $P_2(0, 6)$

(v) $P_1(0, 0)$ ଓ $P_2(1, 1)$ (vi) $P_1(0, 0)$ ଓ $P_2(-1, 1)$

5.4 ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର (Graph of the Linear equation in two variables) :

$ax+by+c=0$ ଓ $y=mx+c$ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଲେଖକାଗଜରେ x - ଓ y - ଆୟତୀୟ ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସହାୟତାରେ ଚାରି କିମ୍ବା ପାଞ୍ଚଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି) ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଲେଖ କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ । ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୋଗ କଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଲେଖଚିତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖା ହୁଏ । ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକରେ ବିଶଦ୍ ଭାବେ ବୁଝାଇ ଦିଆଯାଇଛି । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ଏକ ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 4 : $x=2$ ଓ $y=3$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଏ ଦୁଇଟି ଲେଖଚିତ୍ର ପରସ୍ପରକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ତାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $x=2$ .... (i) ଓ $y=3$ .... (ii)

ଦୁଇଟି ଯାକ ସମୀକରଣ ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲ ଗଠନ କରି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ ସ୍ଥିର କରିବା ପ୍ରଥମ ସୋପାନ ଅଟେ ।

ଟେବୁଲ - 1 (ସମୀକରଣ (i) ପାଇଁ)

x	2	2	2	2
y	–1	0	1	2

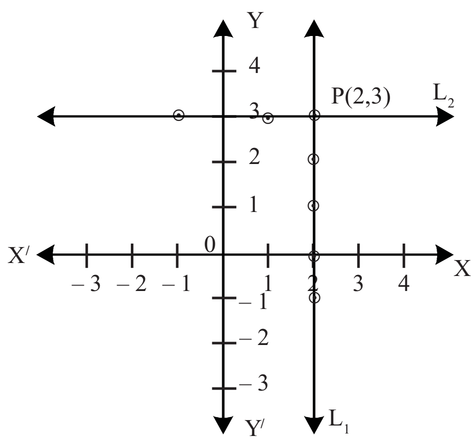
ଟେବୁଲ -2 (ସମୀକରଣ (ii) ପାଇଁ)

x	–1	0	1	2
y	3	3	3	3

ସୂଚନା : (i) $x=2$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଡାହାଣକୁ 2 ଏକକ ଦୂରରେ y - ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

(ii) $y=3$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଉପରକୁ 3 ଏକକ ଦୂରରେ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇ xy - ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନଟି ହେଲା ଲେଖ କାଗଜରେ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ଏକକ (1 ସେ.ମି. = 1 ଏକକ) ନେଇ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରିବା ଓ ଟେବୁଲରେ (x,y) କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପନ କରିବା ।



$L_1 = \{(x, y) \mid x = 2, y \in R\}$

$L_2 = \{(x, y) \mid x \in R, y = 3\}$

$L_1 \cap L_2 = \{P\}$

(ଚିତ୍ର – 5.7)

ତୃତୀୟ ସୋପାନଟି ହେଲା ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲ ସାହାଯ୍ୟରେ ସଂଯୋଗ କଲେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ପାଇବା।

ସରଳରେଖା L_1 [ସମୀକରଣ (i)] ଓ L_2 [ସମୀକରଣ (ii)] ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କଟି P(2,3)

ବି.ଦ୍ର. : xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 : $2x - 3y - 6 = 0$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $2x - 3y - 6 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ $y = mx + c$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ

$y = \frac{2}{3}x - 2$ .... (i) (ଏଠାରେ 'x' କୁ ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ (Independent variable) ଏବଂ y କୁ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ (dependent variable) କୁହାଯାଏ ।)

ସମୀକରଣ (i) ରୁ $x = 0 \Rightarrow y = -2$, $x = 3 \Rightarrow y = 0$,

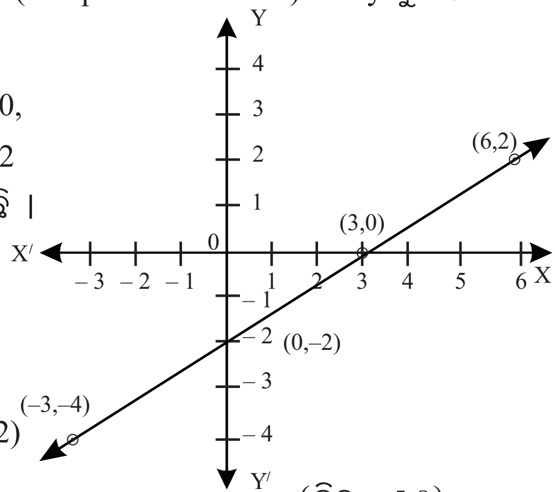
$x = -3 \Rightarrow y = -4$ ଓ $x = 6 \Rightarrow y = 2$

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲଟି ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଛି ।

ଟେବୁଲ 3

x	–3	0	3	6
y	– 4	–2	0	2

∴ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ : (–3, –4), (0, –2), (3,0) ଏବଂ (6,2)



(ଚିତ୍ର - 5.8)

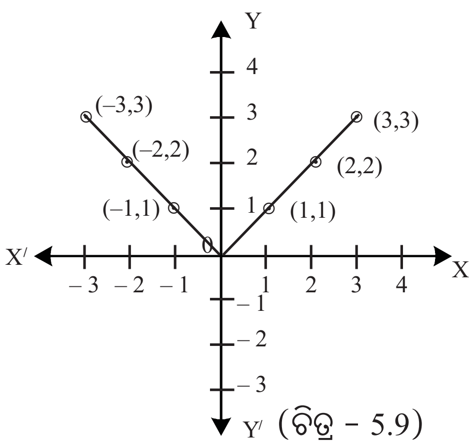
ଉଦାହରଣ- 6 : $y = |x|$ ର ଲେଖଚିତ୍ର $-3 \le x \le 3$ ପାଇଁ ଅଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ $|x|$ ର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ଜଣା ଯେ, $|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

ସୁତରାଂ $0 \le x \le 3$ ରେ ସମୀକରଣଟି $y = x$ ଓ $-3 \le x \le 0$ ରେ ସମୀକରଣଟି $y = -x$ । ଅତଏବ ଏଠାରେ $|x|$ ର ଦୁଇଟି ଶାଖା ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ଟେବୁଲ କରି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

x	–1	–2	–3
y	1	2	3

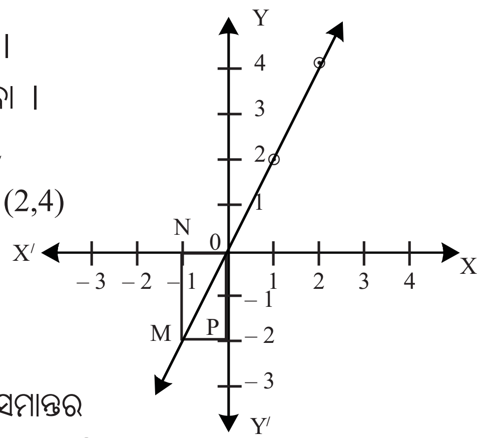


(ଚିତ୍ର - 5.9)

ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି (0,0) (1,1) (2,2), (3,3),(–1, 1), (–2, 2) ଓ (–3, 3) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଲେଖଚିତ୍ରଟି ମିଳିବ ।

ଉଦାହରଣ -7 : $y = 2x$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ଲେଖଚିତ୍ରରୁ y ର ମାନ –2 ପାଇଁ x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।



(ଚିତ୍ର - 5.10)

ସମାଧାନ : $y = 2x$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ସମୀକରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $x = 0$ ପାଇଁ $y = 0$, $x = 1$ ପାଇଁ $y = 2$

ଏବଂ $x = 2$ ପାଇଁ $y = 4$ $\therefore$ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ (0,0),(1,2) ଓ (2,4)

(x- ଅକ୍ଷ ଓ y- ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ଏହା ଉପରେ 1 ସେ.ମି. = 1 ଏକକ ନେଇ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର)

ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକ ସରଳରେଖା ହେବ ।

y- ଅକ୍ଷରେ –2 ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରେ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ରେଖା ଲେଖଚିତ୍ର L କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । M ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{MN}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । x- ଅକ୍ଷରେ 'N' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–1) ହେବ ।

$\therefore$ y ର ମାନ –2 ପାଇଁ x ର ମାନ –1 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (c)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଲେଖଚିତ୍ର ଗୁଡ଼ିକ ଅଙ୍କନ କର ।

   (i) $x = 4$ (ii) $y = 5$ (iii) $x = -5$ (iv) $y = -4$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

   (i) $y = x$ (ii) $y + x = 0$ (iii) $2y = 3x$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

   (i) $x + y - 2 = 0$ (ii) $x + y + 2 = 0$ (iii) $2x + y - 2 = 0$
   (iv) $x + 2y - 3 = 0$ (v) $3x + 2y - 5 = 0$ (vi) $x - y + 2 = 0$

4. ଦତ୍ତ ଟେବୁଲର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଲେଖଚିତ୍ରରୁ a ଓ b ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

x	1	2	5	–1	b
y	3	1	–5	a	–3

5. $2x + 3y - 6 = 0$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟକୁ ଏହା କେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. $y = |x|$ ର ଲେଖଚିତ୍ର $-5 \le x \le 3$ ପାଇଁ ଅଙ୍କନ କର ।
7. $x = \pm 3$, $y = \pm 4$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଚାରିଗୋଟି ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କ ପାରସ୍ପରିକ ଛେଦ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।
8. $5x - 3y = 1$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, P(2,3) ବିନ୍ଦୁଟି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।
9. $x - 3y = 4$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଦତ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର, ଯେତେବେଳେ (i) $y = -1$ ଏବଂ (ii) $x = -2$
10. $x = 2y - 1$ ଏବଂ $3y = x$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।