



## ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ (RATIO AND PROPORTION)

### 6.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ତୁମେମାନେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଅନେକ ବସ୍ତୁ ବା ପଦାର୍ଥର ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସୁଛ । ସାଧାରଣତଃ ଏକ ପ୍ରକାରର ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ଗୁଣାତ୍ମକ (Quality) କିମ୍ବା ପରିମାଣାତ୍ମକ (Quantity) ଭାବରେ ତୁଳନା କରିଥାଅ । ଏକ ଜାତୀୟ ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ପରିମାଣ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସାଧାରଣତଃ କେତେ କମ୍ ବା ବେଶୀ କେତେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିଥାଅ । କମ୍ ବା ବେଶୀ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବଡ଼ରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟାର ଫେଡ଼ାଣ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିବା ବେଳେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁଳନା କରିଥାଅ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେମାନେ ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଜାଣିଛ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅନୁପାତ, ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଟିଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

### 6.2. ଅନୁପାତ (Ratio) :

ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକର ତୁଳନାତ୍ମକ ଅର୍ଥରେ ଅନୁପାତ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ତୁଳନା କରିବାକୁ ହେଲେ ତୁଳନୀୟ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଜାତୀୟ ବା ଏକ ପ୍ରକାରର ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

**ସଂଜ୍ଞା :** ଦୁଇଟି ରାଶିକୁ ତୁଳନା କଲେ, ପ୍ରଥମ ରାଶି ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର କେତେ ଗୁଣ ବା କେତେ ଅଂଶ, ଏହା ଯେଉଁ ରାଶି ବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ ହୁଏ, ତାହାକୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ (Ratio) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର, ଏହି ସମଜାତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ତୁଳନା କଲେ ଦେଖାଯାଏ ଯେ, 30 ମିଟର, 6 ମିଟରର 5 ଗୁଣ । ତେଣୁ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି  $\frac{30}{6}$  ବା 5:1 ।

ଏଠାରେ ଅନୁପାତଟି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା ।

ପୁନଶ୍ଚ 25 ପଇସା, 1 ଟଙ୍କା ବା 100 ପଇସାର  $\frac{25}{100}$  ବା  $\frac{1}{4}$

∴ 25 ପଇସା ଓ 1 ଟଙ୍କା ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି  $\frac{25}{100}$  ବା 1:4

ମନେକରାଯାଉ; ଗୋଟିଏ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶିତ ରାଶି ଦୁଇଟି a ଓ b ଅଟେ । a ରାଶି ସହ b ରାଶି ଅନୁପାତକୁ a:b ବା  $\frac{a}{b}$  ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । (a:b କୁ a ଅନୁପାତ b ବା a is to b ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।)

**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :**  $a:b$  କୁ ବିକଳ୍ପ ଭାବେ  $\frac{a}{b}$  ଦ୍ଵାରା ପ୍ରକାଶ କରାଗଲେ ମଧ୍ୟ ଏଠାରେ ବୁଝିବାକୁ ହେବ ଯେ,  $a$  କୁ  $b$  ଦ୍ଵାରା ଭାଗ କରାଯାଉ ନାହିଁ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

ମନେକର ଜଣେ ଲୋକକୁ ପାଣିରେ 100 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରିଥିବା ଏକ ଗ୍ଲାସ୍ ମୃଦୁପାନୀୟ ପିଇବାକୁ ଦିଆଗଲା । ଏହାକୁ ପିଇବା ସମୟରେ ତା'ର ହୃଦ୍ଘାତରେ ମୃତ୍ୟୁ ହୋଇଗଲା । କିନ୍ତୁ କିଛି ଲୋକ ଏହି ମୃତ୍ୟୁ ବିଷୟକୁ ପାନୀୟ ସେବନ ଦୁର୍ଘଟଣା ହୋଇପାରେ ବୋଲି ସନ୍ଦେହ କରି ପୋଲିସ୍‌ରେ ଏତଲା ଦେଲେ । ଫଳରେ ଏହି ପାନୀୟର ଏକ ନମୁନା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପାଇଁ ଡାକ୍ତରଙ୍କୁ ଦିଆଗଲା ।

ପରୀକ୍ଷା ପରେ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ ପାନୀୟ ପଦାର୍ଥରେ ବିଷ ନାହିଁ । ଯଦି ନମୁନାରେ 50 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରି ଥିବ, ତେବେ ମିଶ୍ରି ଓ ବିଷର ଅନୁପାତ 50:0 ହେବ ।

ଅନୁପାତର ଅର୍ଥ ହରଣ ନୁହେଁ । ଏହା ସୂଚାଉଛି କି ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକରେ  $a$  ଭାଗ ଥିଲେ ଅନ୍ୟଟି  $b$  ଭାଗ ହେବ ।

ଅନୁପାତ  $a:b$  ରେ  $a$  ପ୍ରଥମ ପଦ ଏବଂ  $b$  ଦ୍ଵିତୀୟ ପଦ । ଏଠାରେ  $a$  ଓ  $b$  ଦୁଇଟି ପଦ ବା ରାଶି ।  $a$  ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ପୂର୍ବ ପଦ (antecedent) ଓ  $b$  ଦ୍ଵିତୀୟ ପଦକୁ ଉତ୍ତର ପଦ (consequent) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି  $\frac{a}{b} = \frac{2}{5}$  ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 2; ଉତ୍ତରପଦ 5 । ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 2, ଯାହା ଦ୍ଵିତୀୟ ରାଶି 5ର  $\frac{2}{5}$  ଅଂଶ ।

ସେହିପରି ଯଦି  $\frac{a}{b} = \frac{5}{2}$  ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 5; ଉତ୍ତରପଦ 2 ।

ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 5, ଯାହା ଦ୍ଵିତୀୟ ରାଶି 2ର  $\frac{5}{2}$  ଗୁଣ ।

ଯଦି ଦୁଇଜଣଙ୍କ ପାଖରେ 30 ଟଙ୍କା ଓ 42 ଟଙ୍କା ଥାଏ, ତେବେ ତାଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ  $\frac{30 \text{ ଟଙ୍କା}}{42 \text{ ଟଙ୍କା}}$   
 $= \frac{30}{42}$  । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର,  $\frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$  । ଏଥିରୁ ବୁଝିବା ଯେ, ପ୍ରଥମ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 5 ଗୁଣ ହେଲେ, ଦ୍ଵିତୀୟ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 7 ଗୁଣ ହେବ ।

**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - (i) :** 4 କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ଓ 9 କିଲୋଗ୍ରାମ୍‌ର ଅନୁପାତ, 4 ଟନ୍ ଓ 9 ଟନ୍ ର ଅନୁପାତ, 4 ଲିଟର ଓ 9 ଲିଟର ଅନୁପାତ 4:9 ।

(ii) କୌଣସି ଅନୁପାତରେ ପୂର୍ବ ଓ ଉତ୍ତର ରାଶିଦ୍ଵୟକୁ ଯଦି ସମାନ ଅଶୂନ୍ୟ (Non-Zero) ରାଶିଦ୍ଵାରା ଗୁଣନ ବା ହରଣ କରାଯାଏ, ତାହାହେଲେ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିବ ।

(iii) ଅନୁପାତ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରାଶି ବା ଏକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ଵାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୁଏ । ଏହା ଏକକ ନିରେପେକ୍ଷ (Independent of unit) ରାଶି ।

## 6.2.1 ବିଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ : (Different type of ratios)

**ବର୍ଗାନୁପାତ (Duplicate Ratio) :**

$\frac{a^2}{b^2}$  କୁ  $\frac{a}{b}$  ର ବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ଵରୂପ,  $\frac{2}{3}$ ର ବର୍ଗାନୁପାତ  $\frac{4}{9}$

### ଘନାନୁପାତ (Triplicate Ratio) :

$\frac{a^3}{b^3}$  କୁ  $\frac{a}{b}$  ର ଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,  $\frac{2}{3}$  ର ଘନାନୁପାତ  $\frac{8}{27}$

ଘନାନୁପାତଟି ହେଉଛି  $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b}$  ।

### ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କିମ୍ବା ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତ (Subduplicate Ratio) :

$\frac{a^2}{b^2}$  ବା  $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$  କୁ  $\frac{a}{b}$  ଅନୁପାତରେ ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,  $\frac{2}{3}$  ଓ  $\frac{4}{5}$  ଯଥାକ୍ରମେ  $\frac{4}{9}$  ଓ  $\frac{16}{25}$  ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

### ଉପଘନାନୁପାତ କିମ୍ବା ଘନମୂଳାନୁପାତ (Sub-Triplicate Ratio) :

$\frac{a^3}{b^3}$  ବା  $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$  କୁ  $\frac{a}{b}$  ଅନୁପାତର ଉପଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,  $\frac{2}{3}$  ଓ  $\frac{5}{6}$  ଯଥାକ୍ରମେ  $\frac{8}{27}$  ଓ  $\frac{125}{216}$  ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

### ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ (Inverse Ratio) :

କୌଣସି ଅନୁପାତର ପୂର୍ବପଦ ଓ ଉତ୍ତର ପଦକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉତ୍ତରପଦ ଓ ପୂର୍ବପଦ କରିଦେଲେ, ଯେଉଁ ନୂତନ ଅନୁପାତଟି ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ତାହାକୁ ସେହି ଅନୁପାତର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,  $\frac{2}{3}$  ଓ  $\frac{4}{5}$  ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ  $\frac{3}{2}$  ଓ  $\frac{5}{4}$  ହେବ ।

### ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ (Compound Ratio) :

ଅନୁପାତ ଗୁଡ଼ିକ ଯଦି  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$  ..... ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ ହେବ,  $\frac{ace.....}{bdf.....}$

$15 : 2, 3:4, 13:9$  ଓ  $5:26$  ର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ  $= \frac{15 \times 3 \times 13 \times 5}{2 \times 4 \times 9 \times 26} = \frac{25}{16}$

### 6.3 : ସମାନୁପାତ (Proportion) :

ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଅନୁପାତର ସମାନତାକୁ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତ ।

ଏହି ସମାନୁପାତକୁ  $a:b :: c:d$  ବା  $a:b = c:d$  ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ ରାଶି ଚାରୋଟି **a,b,c,d** ସମାନୁପାତୀ (Proportional) ବା ସମାନୁପାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସମାନୁପାତରେ a,b,c,d କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପ୍ରଥମ, ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦ ବା ରାଶି କୁହାଯାଏ । a ଓ d କୁ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି (extremes) ଏବଂ b ଓ c କୁ ମଧ୍ୟରାଶି (means) କୁହାଯାଏ । d ରାଶିକୁ a, b ଓ c ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ (Fourth proportional) କୁହାଯାଏ ।

a, b, c ଓ d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,  $a : b = c : d$  ହେବ ।

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc \quad [bd \text{ ଦ୍ଵାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ଵକୁ ଗୁଣାଗଲା}]$$

$\therefore$  ପ୍ରାକ୍ତରାଶି ଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶି ଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ

ଅର୍ଥାତ୍ ଚାରିଗୋଟି ରାଶି ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରାକ୍ତ ରାଶିଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ, ମଧ୍ୟରାଶିଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।

**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :** ଯଦି  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$  ହୁଏ, ତାହାହେଲେ,  $a, b, c, d, e, f \dots$  ରାଶିମାନ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

### 6.3.1 : କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ (Continued Proportion) :

ସମଜାତୀୟ ତିନିଗୋଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ଵିତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ, ଯଦି ଦ୍ଵିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ, ସେ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ କୁହାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  । ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଅନୁପାତର ଉଭୟ ରାଶି, ଦ୍ଵିତୀୟ ଅନୁପାତର ପୂର୍ବ ରାଶି ସହିତ ସମାନ ଅଟେ ।

$a:b :: b:c$  ଗୋଟିଏ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ । ଏଠାରେ  $b$  କୁ  $a$  ଓ  $c$  ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ (mean proportional) ଓ  $c$  କୁ  $a$  ଓ  $b$  ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ (third proportional) କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ଚାରିଗୋଟି ବା ତତୋଧିକ ରାଶିକୁ ନେଇ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇପାରିବ ।

$a, b, c, d \dots$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \dots$

$a, b, c$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ  $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$  (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ଵକୁ  $bc$  ଦ୍ଵାରା ଗୁଣନ କଲେ)

$\therefore$  ପ୍ରାକ୍ତରାଶି ଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ ।

ଅର୍ଥାତ୍ (ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ)<sup>2</sup> = ପ୍ରାକ୍ତରାଶି ଦ୍ଵୟର ଗୁଣଫଳ ।

**ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ :**  $a, b, c, d$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ ସର୍ବଦା ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

$$\text{ଅର୍ଥାତ୍ } \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

କିନ୍ତୁ  $a, b, c, d$  ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନହୋଇପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ଵରୂପ 5, 10, 7, 14 ସମାନୁପାତୀ, ମାତ୍ର କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନୁହଁନ୍ତି ।

### 6.4 ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା :

କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତକୁ ନେଇ, ସେଥିରୁ ଆମେ ଆଉ କେତୋଟି ପ୍ରାମାଣିକ ନୂତନ ଅନୁପାତ ସିଦ୍ଧ କରିପାରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଅନୁପାତର ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବୋଲି ବିବେଚିତ ହୁଏ । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ବିଶେଷ ଉପଯୋଗିତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନାମକରଣ କରାଯାଇଛି ।

**1. ବ୍ୟସ୍ତାନୁପାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Invertendo) :**  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow bc = ad$

$\Rightarrow \frac{bc}{ac} = \frac{ad}{ac}$  (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ  $ac$  ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)  $\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

2. ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Alternendo) :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$\Rightarrow \frac{ad}{cd} = \frac{bc}{cd}$  (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ  $cd$  ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ)  $\Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

3. ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo) :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$  (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 1 ଯୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

4. ବିଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1$  (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 1 ବିଯୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

5. ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo and Dividendo) :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$  (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) ..... (1)

ପୁନଶ୍ଚ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$  (ବିଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) ..... (2)

(1) କୁ (2) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ,  $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

6. ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Addendo) :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

ପ୍ରମାଣ :  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$  (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)  $\Rightarrow \frac{a+c}{c} = \frac{b+d}{d}$  (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$  (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)

କିନ୍ତୁ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  ତେଣୁ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$  (ପ୍ରମାଣିତ)

$$\text{ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots}$$

$$\text{ପ୍ରମାଣ : ମନେକର } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = k$$

$$a = bk, c = dk, e = fk, \dots \text{ ଲେଖାଯାଏ ।}$$

$$\therefore \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{bk+dk+fk+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{k(b+d+f+\dots)}{b+d+f+\dots} = k$$

$$\text{ତେଣୁ } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots = \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} \quad (\text{ପ୍ରମାଣିତ})$$

**ଉଦାହରଣ - 1 :**

(i) 7, 13 ଓ 14 ର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii)  $a^3 - b^3 + ab(a-b)$ ,  $a^2 - b^2$  ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ କେତେ ?

(iii)  $a-b$  ଓ  $4(a-b)$  ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

**ସମାଧାନ :** (i) ମନେକରାଯାଉ ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି  $x$

$$\Rightarrow 7:13 = 14 : x$$

$$\Rightarrow \frac{7}{13} = \frac{14}{x} \Rightarrow 7x = 13 \times 14 \Rightarrow x = 26$$

$$\therefore \text{ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି } 26 \text{ ।}$$

(ଉତ୍ତର)

(ii) ମନେକର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି  $x$

$$\text{ତେଣୁ } a^3 - b^3 + ab(a-b) : a^2 - b^2 = a^2 - b^2 : x$$

$$\Rightarrow \frac{a^3 - b^3 + ab(a-b)}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 - b^2}{x}$$

$$\Rightarrow x[(a-b)(a^2 + ab + b^2) + ab(a-b)] = (a^2 - b^2)^2$$

$$\Rightarrow x(a-b)(a^2 + 2ab + b^2) = [(a+b)(a-b)]^2$$

$$\Rightarrow x(a-b)(a+b)^2 = (a+b)^2(a-b)^2$$

$$\Rightarrow x(a-b) = (a-b)^2 \Rightarrow x = a - b$$

$$\therefore \text{ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି } (a-b) \text{ ।}$$

(ଉତ୍ତର)

(iii) ମନେକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ  $x$

$$\therefore \text{ପ୍ରାକ୍ତରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ} = \text{ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ}$$

$$\therefore (a-b) \times 4(a-b) = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4(a-b)^2 = [\pm 2(a-b)]^2$$

$$\Rightarrow x = \pm 2(a-b)$$

$$\therefore \text{ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି } 2(a-b) \text{ ବା } 2(b-a) \text{ ।}$$

(ଉତ୍ତର)

### ଉଦାହରଣ - 2 :

$x:y = 2:3$  ହେଲେ,  $5x-2y : x+3y$  ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ :  $x:y = 2:3$  (ଦିଆ)

$$5x-2y : x+3y = \frac{5x-2y}{x+3y} = \frac{\frac{5x}{y}-2}{\frac{x}{y}+3} \quad (\text{ହର ଓ ଲବକୁ } y \text{ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ})$$

$$= \frac{5\left(\frac{2}{3}\right)-2}{\left(\frac{2}{3}\right)+3} = \frac{10-6}{2+9} = \frac{4}{11}$$

$$= 5x-2y : x+3y = 4:11 \quad (\text{ଉତ୍ତର})$$

### ଉଦାହରଣ 3 :

$a, b, c, d$  ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ  $a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2$  ।

ସମାଧାନ :  $a, b, c, d$  ସମାନୁପାତୀ

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad (\text{ମନେକରାଯାଉ}) \Rightarrow a = bk \text{ ଓ } c = dk$$

$$\text{ବାମପକ୍ଷ} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{(bk)^2}{b^2} = \frac{b^2 k^2}{b^2} = k^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{(bk)^2 + (dk)^2}{b^2 + d^2} = \frac{k^2(b^2 + d^2)}{b^2 + d^2} = k^2 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(1) \text{ ଓ } (2) \quad \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$$

$$\therefore a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2 \quad (\text{ପ୍ରମାଣିତ})$$

### ଉଦାହରଣ - 4 :

$a, b$  ଓ  $c$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ  $(a+b+c)(a-b+c) = a^2 + b^2 + c^2$  ।

ସମାଧାନ :  $a, b, c$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ । ତେଣୁ  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$

$$\begin{aligned} \text{ବାମପକ୍ଷ } (a+b+c)(a-b+c) &= [(a+c)+b][(a+c)-b] \\ &= (a+c)^2 - b^2 = a^2 + 2ac + c^2 - b^2 \\ &= a^2 + 2b^2 + c^2 - b^2 \quad (\because ac = b^2) \\ &= a^2 + b^2 + c^2 \quad \text{ବାମପକ୍ଷ} = \text{ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ} \quad (\text{ପ୍ରମାଣିତ}) \end{aligned}$$

### ଉଦାହରଣ - 5 :

$x+5y : x-5y = 4:7$  ହେଲେ  $3x+5y : 3x-5y$  ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

$$\text{ସମାଧାନ : } \frac{x+5y}{x-5y} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{(x+5y)+(x-5y)}{(x+5y)-(x-5y)} = \frac{4+7}{4-7} \quad (\text{ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା})$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{10y} = \frac{11}{-3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-55}{3} \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{3}{5} \left( \frac{-55}{3} \right) \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{(-11)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{(-11)+1}{(-11)-1} \text{ (ଯୋଗାତ୍ମକ ପ୍ରକ୍ରିୟା)} \Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore 3x + 5y : 3x - 5y = 5:6 \quad (\text{ଉତ୍ତର})$$

**ଉଦାହରଣ - 6 :**

$a, b, c, d, e, f$  ସମାନ୍ୱୟୀତ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd + ef)^2$

**ସମାଧାନ :**  $a, b, c, d, e, f$  ସମାନ୍ୱୟୀତ, ତେଣୁ  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$  (ମନେକର)

$$\therefore a = bk, c = dk, e = fk$$

$$\begin{aligned} \text{ବାମପକ୍ଷ} &= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (b^2k^2+ d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2) \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) = k^2(b^2+ d^2+f^2)^2 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ} &= (ab + cd+ ef)^2 = (bkb +dkd+fkf)^2 = (b^2k +d^2k+f^2k)^2 \\ &= k^2(b^2+d^2+f^2)^2 \quad \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$(1) \text{ ଓ } (2) \text{ ରୁ } (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd+ ef)^2 \quad (\text{ପ୍ରମାଣିତ})$$

**ଉଦାହରଣ - 7 :**

ଅର୍ପିତା ଓ ନନ୍ଦିତାଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସର ଅନୁପାତ 9 : 7 । 4 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 4 : 3 ଥିଲା । ତେବେ 4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ?

**ସମାଧାନ :** ମନେକର ଅର୍ପିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ  $9x$  ବର୍ଷ ଓ ନନ୍ଦିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ  $7x$  ବର୍ଷ ।

ଚାରିବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ଯଥାକ୍ରମେ  $(9x-4)$  ବର୍ଷ ଓ  $(7x-4)$  ବର୍ଷ ଥିଲା ।

$$\text{ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ } \frac{9x-4}{7x-4} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 27x-12 = 28x-16 \Rightarrow x = 4$$

ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ହେବ  $(9x+4)$  ବର୍ଷ ଓ  $(7x+4)$  ବର୍ଷ ।

$$\frac{9x + 4}{7x + 4} = \frac{9(4) + 4}{7(4) + 4} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$$

$\therefore$  4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 5 : 4 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

**ଉଦାହରଣ - 8 :**

7000 ଟଙ୍କାକୁ A, B ଓ C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଆ ଯେ A ଓ B, B ଓ C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3 ଓ 3 : 4 ହେବ ।

**ସମାଧାନ :** ମନେକର A, B, C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ  $a, b, c$  ।



$$\text{ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ } \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \text{ ଓ } \frac{b}{c} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} \text{ ଓ } \frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{8} = \frac{b}{12} \text{ ଓ } \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$$

$$\therefore \frac{a}{8} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = k \text{ (ମନେକରାଯାଉ)}$$

$$\therefore a = 8k, b = 12k, c = 15k \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ } a + b + c = 7000 \Rightarrow 8k + 12k + 15k = 7000$$

$$\Rightarrow 35k = 7000 \quad \therefore k = 200$$

k ର ଏହି ମାନକୁ (1) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$$a = 1600, \quad b = 2400, \quad c = 3000$$

$\therefore$  A, B, C ର ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ 1600 ଟଙ୍କା, 2400 ଟଙ୍କା ଓ 3000 ଟଙ୍କା । (ଉତ୍ତର)

### ଉଦାହରଣ - 9 :

ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 3 : 1, 5 : 3 ଓ 7 : 5 ଅଟେ । ପ୍ରତି ଶ୍ରେଣୀରେ ଯଦି ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ଆସାନ୍ତି ତେବେ, ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

**ସମାଧାନ :** ମନେକର ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା  $3x$  ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା  $x$

$$\therefore \text{ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା } = 3x + x = 4x$$

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା  $5y$  ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା  $3y$

$$\text{ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା } = 5y + 3y = 8y$$

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା  $7z$  ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା  $5z$

$$\text{ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା } = 7z + 5z = 12z$$

$$\text{ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ } 4x = 8y = 12z$$

$$\therefore \frac{4x}{24} = \frac{8y}{24} = \frac{12z}{24} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = k \text{ (ମନେକରାଯାଉ)}$$

$$\therefore x = 6k, \quad y = 3k, \quad z = 2k$$

$$\text{ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା } = x + 3y + 5z \text{ ଏବଂ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା } = 3x + 5y + 7z$$

$$\text{ତେଣୁ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ } = \frac{x + 3y + 5z}{3x + 5y + 7z}$$

$$= \frac{6k + 3(3k) + 5(2k)}{3(6k) + 5(3k) + 7(2k)} = \frac{6k + 9k + 10k}{18k + 15k + 14k} = \frac{25k}{47k} = \frac{25}{47}$$

$\therefore$  ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 25:47 । (ଉତ୍ତର)

## ଉଦାହରଣ - 10 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 2:1 ଓ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 4:3 ଅଟେ । ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ କେତେ ?

**ସମାଧାନ :** ମନେକର ପ୍ରଥମ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ =  $2x$  ଓ ପ୍ରସ୍ଥ =  $x$  ଏବଂ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ =  $4y$  ପ୍ରସ୍ଥ =  $3y$

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ =  $2x \cdot x = 2x^2$  ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ =  $4y \cdot 3y = 12y^2$

$$\text{ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ } \frac{2x^2}{12y^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$$

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା =  $2(2x+x) = 6x$  ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା =  $2(4y+3y) = 14y$

$$\text{ତେଣୁ ପରିସୀମା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ} = \frac{6x}{14y} = \frac{6}{14} \times \frac{2}{1} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$$

$\therefore$  କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ 6 : 7 (ଉତ୍ତର)

## ଅନୁଶୀଳନ-6

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i)  $a:b=3:4$ ,  $b:c=5:6$ ,  $c:d=11:9$  ହେଲେ,  $a:d=...$  (65:84, 30:40, 55:72, 45 : 63)

(ii)  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{2}{5}$  ହେଲେ,  $\frac{a}{d} = ...$   $\left(\frac{4}{25}, \frac{5}{2}, \frac{8}{125}, \frac{2}{25}\right)$

(iii)  $p:q :: r:s$  ହେଲେ,  $p:r = ...$  ( $q:s$ ,  $s:q$ ,  $p:s$ ,  $q:r$ )

(iv)  $a:b=2:3$  ହେଲେ,  $(4a+b) : (2a+3b) = ...$  (3:5, 5:8, 7:9, 11:13)

(v)  $2x=3y=4z$  ହେଲେ,  $x:y:z = ...$  (2:3:4, 6:4:3, 2:3:4, 4:3:2)

(vi)  $x:y=2:5$ ,  $y:z=3:4$  ହେଲେ,  $x:y:z = ...$  (20:15:6, 6:15:20, 2:5:3, 5:3:4)

(vii)  $3:(k+2) :: 5:(k+4)$  ହେଲେ,  $k = ...$  (2,4,1,6)

2. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତ ଗୁଡ଼ିକ ଠିକ୍ ବା ଭୁଲ୍ ଦର୍ଶାଅ ।

(i)  $a, b, c, d$  ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii)  $a, b, c, d$  ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(iii) କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀରେ ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବେ ।

(iv) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଚତୁର୍ଥର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ଘନାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

- (v) ତିନୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।
- (vi) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟର ଅନୁପାତ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।
- (vii)  $a, b, c$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,  $a+2, b+2, c+2$  ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।
- (viii) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।
3. ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
- (i) 5, 7, 15 (ii) 0.1, 0.01, 0.001
- (iii)  $a, a^2b, a^2b^2$  (iv)  $a^2 - b^2, a+b, a-b$
- (v)  $a^2+5a+6, 3a+6, 4a+12$  (vi)  $a^3 - b^3, a^4+a^2b^2+b^4, a-b$
4. ଦତ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
- (i) 9, 15 (ii)  $a^2b, ab^2$
- (iii)  $x^2 - y^2, x+y$  (iv)  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}, \sqrt{a^2+b^2}$
5. ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
- (i) 9, 25 (ii)  $4a^2b, 9bc^2$  (iii)  $(a-b)(a+b)^3, (a+b)(a-b)^3$
6. (i)  $(2+a)$  ଓ  $(5+a)$  ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ  $(3+a)$  ହେଲେ,  $a$  ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
- (ii)  $(23-x), (28-x)$  ଓ  $(19-x)$  ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,  $x$  ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।
- (iii)  $a$  ଓ  $c$  ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ  $b$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ  $a^2+b^2$  ଓ  $b^2+c^2$  ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ  $ab+bc$  ହେବେ ।
- (iv) ଯଦି  $b, a$  ଓ  $c$  ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $(ab+bc+ca)^3 = abc(a+b+c)^3$
7. (i) 1, 7, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?
- (ii) 6, 14, 18 ଓ 38 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେତେ ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ /
- (iii) 5, 9, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିଯୋଗ କଲେ, ବିଯୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?
- (iv) 14, 17, 34 ଓ 42 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିଯୋଗ କଲେ, ବିଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?
8. (i)  $a:b = 2:3$  ହେଲେ,  $(3a+4b) : (4a+5b)$  ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।
- (ii)  $a:b = 3:4$  ହେଲେ,  $(6a+5b) : (5a+4b)$  ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) 581 କୁ  $a, b, c$  ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ଭାଗକରି ଯେପରି  $4a=5b=7c$  ହେବ ।

(iv)  $6x+5y : 6x-5y = 3:2$  ହେଲେ,  $2x+3y : 2x-3y$  ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(v)  $(a-b) : (a+b) = 1:5$  ହେଲେ,  $a^2-b^2 : a^2+b^2$  ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

9.  $a, b, c, d$  ସମାନ୍ତୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

$$(i) pa+qc : pb+qd = ma+nc : mb+nd \quad (ii) 3a+4b : 3c+4d = \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$$

$$(iii) b^2 : d^2 = a^2 + b^2 : c^2 + d^2 \quad (iv) a^2 + b^2 : c^2 + d^2 = b^2 + d^2 : a^2 + c^2$$

10.  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$(i) \frac{ac}{bd} = \frac{a^2 - 3c^2 + 5e^2}{b^2 - 3d^2 + 5f^2}$$

$$(ii) \frac{ace}{bdf} = \frac{a^3 + c^3 + e^3}{b^3 + d^3 + f^3}$$

$$(iii) \frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2} = \frac{a^3}{b^2} + \frac{c^3}{d^2} + \frac{e^3}{f^2}$$

$$(iv) \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{4a-6c-9e}{4b-6d-9f}$$

$$(v) (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$$

11.  $a, b, c$  କ୍ରମିକ ସମାନ୍ତୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$(i) a:c = a^2 : b^2$$

$$(ii) a:c = (a^2 + b^2) : (b^2 + c^2)$$

$$(iii) (a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$$

$$(iv) 2a + 3b : 3a + 2b = 2b + 3c : 3b + 2c$$

12.  $a, b, c, d$  କ୍ରମିକ ସମାନ୍ତୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$(i) (b+c)(b+d) = (c+a)(c+d)$$

$$(ii) \frac{a}{c} = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{b^2 - c^2 + d^2}$$

$$(iii) \frac{ab+cd}{ab-cd} = \frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$$

$$(iv) a-b \text{ ଓ } c-d \text{ ର ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତୁପାତୀ } b-c$$

$$(v) a^2 - b^2 \text{ ଓ } c^2 - d^2 \text{ ର ମଧ୍ୟ ସମାନ୍ତୁପାତୀ } b^2 - c^2$$

$$(vi) (b-c)^2 + (c-a)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2$$

13. (i)  $x = \frac{2ab}{a+b}$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $\frac{x+a}{x-a} + \frac{x+b}{x-b} = 2$  ।

(ii)  $x = \frac{6ab}{a+b}$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $\frac{x+3a}{x-3a} + \frac{x+3b}{x-3b} = 2$  ।

(iii)  $x = \frac{8ab}{a+b}$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $\frac{x+4a}{x-4a} + \frac{x+4b}{x-4b} = 2$  ।

14. (i)  $x+y, y+z, x-y, y-z$  ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,  
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $x, y, z$  କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।
- (ii)  $\frac{x}{b+c} = \frac{y}{c+a} = \frac{z}{a+b}$  ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$
- (iii)  $\frac{x}{b^2 + bc + c^2} = \frac{y}{c^2 + ca + a^2} = \frac{z}{a^2 + ab + b^2}$  ହେଲେ,  
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,  $(b-c)x + (c-a)y + (a-b)z = 0$
15. ସ୍ଥିତି, ସୃଷ୍ଟି ଠାରୁ ଦୁଇ ବର୍ଷ ବଡ଼ । ଦଶ ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସୃଷ୍ଟି ଓ ସ୍ଥିତିର ବୟସର ଅନୁପାତ 1 : 2 ଥିଲା । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ କେତେ ?
16. ଚାରି ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଅନିଲ୍ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର ବୟସର ଅନୁପାତ 3 : 5 ଥିଲା । ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ଏହି ଅନୁପାତ 5 : 7 ହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ କାହାର ବୟସ କେତେ ?
17. 1400 ଜଣ ଛାତ୍ରଥିବା ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଶିକ୍ଷକ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 35 : 2 ଅଟେ । ଆଉ ଅଧିକ କେତେ ଜଣ ଶିକ୍ଷକ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଯୋଗଦେଲେ, ଏହି ଅନୁପାତ 25 : 2 ହେବ ?
18. 60 ଲିଟର ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 2 : 1 । ସେଥିରେ ଆଉ କେତେ ଲିଟର ଜଳ ମିଶାଇଲେ, ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 8 : 5 ହେବ ?
19. A ଓ B ଆୟର ଅନୁପାତ 3 : 2 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 5 : 3 ଅଟେ । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ 1500 ଟଙ୍କା ସଞ୍ଚୟ କରୁଥିବେ, ତେବେ B ର ଆୟ କେତେ ?
20. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 3 : 4 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 15 : 17 ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଏବଂ 25 : 42 ର ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 51 : 112 ହେବ ।
- (ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 7 : 6 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 125 : 343 ର ଘନମୂଳାନୁପାତ ଏବଂ 35 : 36 ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 1 : 1 ହେବ ।
21. 120 ଟଙ୍କାକୁ A, B, C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଅ ଯେପରି, ସେମାନେ ପାଉଥିବା ଟଙ୍କାରୁ ଯଥାକ୍ରମେ 15 ଟଙ୍କା, 10 ଟଙ୍କା ଓ 5 ଟଙ୍କା କମାଇ ଦେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଅବଶିଷ୍ଟ ଟଙ୍କା 2, 3, 4 ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।
22. ତିନି ଶ୍ରେଣୀ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3, 3 : 7 ଓ 7 : 8 ଅଟେ । ଶ୍ରେଣୀ ତିନୋଟିରେ ସମାନ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ପିଲା ପଢୁଥିଲେ ତେବେ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
23. ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ସମାଧାନ କର ।

(i)  $\frac{\sqrt{3x} + \sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x} - \sqrt{2x+1}} = 5$     (ii)  $\frac{\sqrt{3x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+1}} = 4$     (iii)  $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = b$

