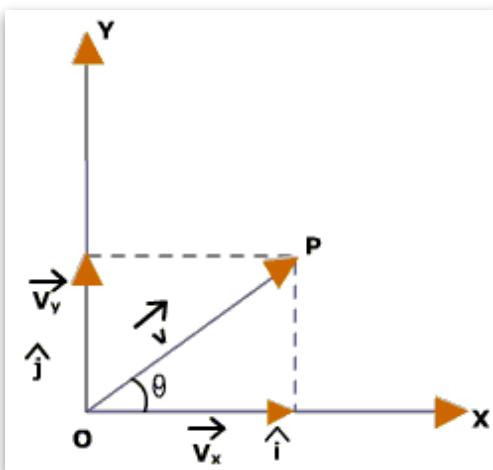


# T.O. HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS



1. Notación	3
2. Sistema de unidades	5
2.1 Análisis dimensional	6
3. Magnitudes escalares	7
4. Magnitudes vectoriales	8
4.1 Representación de la orientación de un vector	9
4.2 Suma vectores	11
4.3 Resta de vectores	12
4.4 Producto escalar	13
4.5 Producto vectorial	13
5. Cálculo diferencial	16
5.1 Derivadas de polinomios	16
5.2 Derivadas de funciones trigonométricas	16
5.3 Propiedades	17
6. Trigonometría	18
6.1 Concepto de radian	18
6.2 Funciones trigonométricas	19
6.3 Representación gráfica de funciones trigonométricas	20
6.4 Fórmulas trigonométricas	21
7. Geometría	22
7.1 Figuras geométricas	22

---

7.2 Gráficas y ecuaciones	22
<b>EJERCICIOS</b>	<b>24</b>
Análisis dimensional	24
Representación de vectores	24
Suma y resta de vectores	25
Producto escalar	25
Producto vectorial	26
Derivadas	26
Gráficas	26

# 1. Notación

A lo largo del curso vamos a utilizar algunos símbolos que nos resultaran de especial utilidad.

## Definición de incremento ( $\Delta$ )

$\Delta$  se lee incremento y se pone al lado del símbolo de la magnitud a la que incrementa. Por ejemplo cuando un cuerpo se mueve desde una posición inicial ( $x_{inicial}$ ) a otra final ( $x_{final}$ ) el incremento de la posición se representa:

$$\Delta x = x_{final} - x_{inicial}$$

Tal y como se muestre en el siguiente ejemplo, este símbolo matemático se puede emplear sobre cualquier magnitud.

**Ejemplo:** Un recipiente de agua se calienta durante 5 minutos. Inicialmente se encuentra a una temperatura de 20 °C y después de calentarla su temperatura es de 33 °C. ¿Cuál es el incremento de la temperatura del agua?

Matemáticamente el incremento en la temperatura del agua se representa:

$$\Delta T = T_{final} - T_{inicial} = 33^{\circ}\text{C} - 20^{\circ}\text{C} = 13^{\circ}\text{C}$$

## Alfabeto griego

Es muy común utilizar el alfabeto griego para designar algunas magnitudes físicas:

### El Alfabeto Griego:

Alfa	$\alpha$	Nu	$\nu$
Beta	$\beta$	Xi	$\xi$
Gamma	$\gamma$	Ómicron	$\omicron$
Delta	$\delta$	Pi	$\pi$
Épsilon	$\varepsilon$	Ro	$\rho$
Zeta	$\zeta$	Sigma	$\sigma$
Eta	$\eta$	Tau	$\tau$
Teta	$\theta$	Ypsilon	$\upsilon$
Iota	$\imath$	Fi	$\phi$
Kappa	$\kappa$	Ji	$\chi$
Lambda	$\lambda$	Psi	$\psi$
Mu	$\mu$	Omega	$\omega$

## **Símbolos del lenguaje matemático**

En la siguiente tabla se muestran algunos símbolos matemáticos que utilizaremos a lo largo del curso:

=	es igual a, equivale a
≠	no es igual a, es distinto de
≈	es aproximadamente igual a
∝ ~	es proporcional a
>	es mayor que
<	es menor que
$\Delta x$	variación de $x$ , incremento de $x$
$\Delta x \rightarrow 0$	incremento de $x$ tiende a cero
$ x $	valor absoluto de $x$ , magnitud de $x$ (siempre positiva)
$\sum_{i=1}^n x_i$	suma de todas las cantidades $x$ cuyo ordinal se sitúa entre 1 y $n$
$\frac{dx}{dt}$	derivada de $x$ con respecto a $t$
$\int$	integral
$\int_a^b$	integral definida entre $a$ y $b$
$\Rightarrow$	implica que, se desprende que

## 2. Sistema de unidades

Tanto la Física como la Química son ciencias experimentales que emplean el método científico para descubrir las leyes que rigen los fenómenos naturales. La medida constituye una parte esencial del método experimental. En este proceso se trata de determinar el valor de determinadas **magnitudes**. Para medir una magnitud necesitamos compararla con un patrón de medida. Una **unidad** es el patrón de medida de una determinada magnitud.

### Magnitudes fundamentales

Existe un sistema de unidades que es utilizado internacionalmente. Se trata de un sistema de siete unidades, con estas unidades o combinaciones de las mismas podemos caracterizar la medida de cualquier magnitud. Se denomina **sistema internacional de unidades (SI)**:

Magnitud	Nombre	Símbolo	Símbolo dimensional
Longitud	Metro	m	L
Masa	Kilogramo	Kg	M
Tiempo	Segundo	s	T
Intensidad eléctrica	Amperio	A	I
Intensidad luminosa	Candela	cd	J
Temperatura	Kelvin	K	$\theta$
Cantidad de sustancia	mol	mol	N

### Magnitudes derivadas

Son aquellas magnitudes que se expresan en función de las magnitudes fundamentales. Por ejemplo: área, velocidad, fuerza, trabajo.

Las fórmulas dimensionales de las magnitudes derivadas son las siguientes:

Fórmulas Dimensionales Básicas					
	Magnitud	Fórmula Dimensional	Unidad	Símbolo	Definición
1	Área	$L^2$	metro cuadrado	$m^2$	
2	Volumen	$L^3$	metro cúbico	$m^3$	
3	Densidad	$ML^{-3}$	kilogramo por metro cúbico	$kg/m^3$	
4	Velocidad	$LT^{-1}$	metro por segundo	$m/s$	
5	Aceleración	$LT^{-2}$	metro por segundo cuadrado	$m/s^2$	
6	Fuerza	$MLT^{-2}$	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
7	Trabajo	$ML^2T^{-2}$	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$
8	Energía	$ML^2T^{-2}$	joule	J	$kg \cdot m^2/s^2$
9	Potencia	$ML^2T^{-3}$	watt	W	$J/s$
10	Presión	$ML^{-1}T^{-2}$	pascal	Pa	$N/m^2$
11	Período	$T$	segundo	s	
12	Frecuencia	$T^{-1}$	hercio	Hz	$1/s$
13	Velocidad angular	$T^{-1}$	radianes por segundo	$rad/s$	
14	Caudal	$L^3T^{-1}$	metro cúbico por segundo	$m^3/s$	
15	Carga eléctrica	$IT$	coulomb	C	A.s
16	Aceleración angular	$T^{-2}$	radianes por segundo cuadrado	$rad/s^2$	

## 2.1 Análisis dimensional

Podemos analizar dimensionalmente una ecuación con un doble propósito:

1. Para **comprobar si una ecuación es correcta** ya que una ecuación debe tener las mismas dimensiones a ambos lados de la igualdad. Esto nos permita evitar errores.

**Ejemplo:** ¿Comprobar cuales de las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas?

$$s = at; s = \frac{1}{2}vt^2; s = \frac{1}{2}at^2$$

Para todas ellas el primer término tiene como ecuación dimensional

$$[s] = [L]$$

Veamos las dimensiones del segundo término en cada caso:

$$[at] = [L T^{-2} T] = [L T^{-1}]$$

$$\left[\frac{1}{2}vt^2\right] = [L T^{-1} T^2] = [L T]$$

$$\left[\frac{1}{2}at^2\right] = [L T^{-2} T^2] = [L]$$

Vemos como la única ecuación correcta es la última. Las otras no tienen sentido físico.

2. Puede servirnos para determinar las unidades de una magnitud determinada.

**Ejemplo:** Obtener las unidades de la magnitud fuerza en el sistema internacional

La fuerza es una magnitud derivada. Según la segunda ley de Newton  $F=ma$ . La ecuación de dimensión es:

$$[F] = [MLT^{-2}]$$

Esto quiere decir que las unidades de la fuerza son kg por metros dividido entre segundo al cuadrado. Eso es lo que se denomina Newton.

### 3. Magnitudes escalares

Son aquellas magnitudes que quedan perfectamente descritas mediante un número y una unidad. Ejemplos de estas magnitudes son: *la masa, temperatura, energía, tiempo, longitud, etc.*

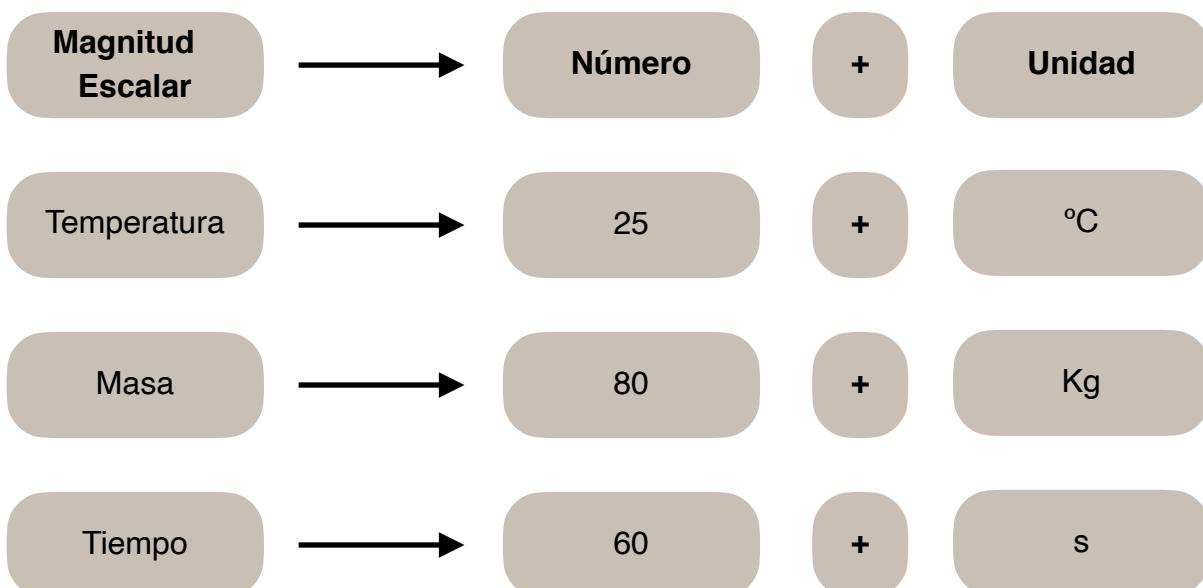
Matemáticamente nos referiremos a las **unidades** de una magnitud física mediante corchetes ( $[]$ ). Por ejemplo, si decimos que la unidad del tiempo ( $t$ ) es el segundo ( $s$ ), matemáticamente esto se expresa de la siguiente forma:

$$[t] = s$$

Si decimos que la masa ( $m$ ) se mide en kilogramos ( $kg$ ), matemáticamente se expresaría:

$$[m] = kg$$

Cualquier magnitud escalar se compone de un número y una unidad tal y como se muestra en los siguientes ejemplos:



Los ejemplos anteriores quedarían de la siguiente forma:

$$T = 25^{\circ}C$$

$$M = 80 \text{ kg}$$

$$t = 60 \text{ s}$$

## 4. Magnitudes vectoriales

Son aquellas magnitudes que para ser descritas necesitan además de un número y una unidad, la dirección y el sentido que tienen. Ejemplos de estas magnitudes son: la velocidad, aceleración, fuerza, campo gravitatorio, campo eléctrico, campo magnético, etc. Las magnitudes vectoriales se representan mediante unas herramientas matemáticas llamadas **vectores**. Las magnitudes vectoriales se representan colocando una flecha sobre la letra que designa su módulo. Por ejemplo, el vector fuerza se representa con  $\vec{F}$ , mientras que el vector aceleración se representa con  $\vec{a}$ .

### Características de un vector

Un vector es un segmento orientado con las siguientes características:

- Punto de aplicación**: es el punto donde se sitúa el vector.
- Módulo**: es el valor numérico de la magnitud que representa el vector y se indica mediante la longitud del vector.
- Orientación**: Viene dada por la **dirección** (recta en la que está situado el vector) y el **sentido** que indica hacia donde señala el vector. En una misma dirección existen dos sentidos posibles. Gráficamente los vectores se representan con flechas:



A continuación se muestran algunos ejemplos de magnitudes vectoriales:

Magnitud Vectorial	→	Número	+	Orientación	+	Unidad
Velocidad	→	10	+	$\vec{i}$	+	m/s
Aceleración	→	15	+	$\vec{j}$	+	m/s <sup>2</sup>
Fuerza	→	100	+	$\vec{i} + \vec{j}$	+	N

Los ejemplos anteriores quedarían de la siguiente forma:

$$\vec{v} = 10 \vec{i} \text{ m/s}$$

$$\vec{a} = 15 \vec{j} \text{ m/s}^2$$

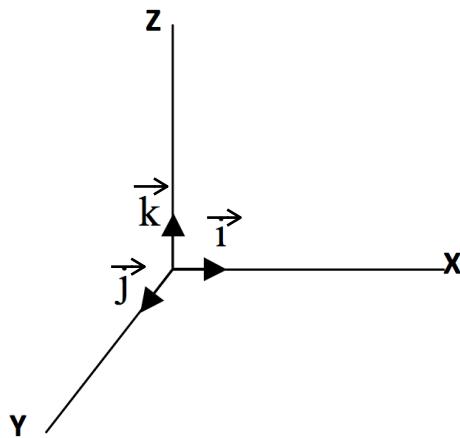
$$\vec{F} = 100 (\vec{i} + \vec{j}) \text{ N}$$

Los vectores  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  indican las direcciones en el espacio de los ejes X e Y.

## 4.1 Representación de la orientación de un vector

Para poder representar la orientación de un vector utilizamos una base ortonormal:

Conjunto de vectores unitarios  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  que forman  $90^\circ$  entre si



Como se puede ver:

$\vec{i}$ : determina la orientación positiva del eje x.

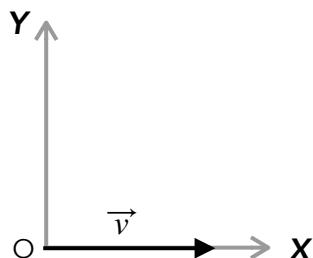
$\vec{j}$ : determina la orientación positiva del eje y.

$\vec{k}$ : determina la orientación positiva del eje z.

### Vector sobre eje

**Ejemplo:** Representa numéricamente y gráficamente una velocidad de 4 m/s orientada en el sentido positivo del eje X.

Representamos la velocidad:



Numericamente tendríamos:

$$\vec{v} \quad \left| \begin{array}{l} (\text{X}) v_x = 4 \text{ m/s} \\ (\text{Y}) v_y = 0 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

En notación vectorial tendríamos:

$$\vec{v} = 10 \text{ m/s } \vec{i}$$

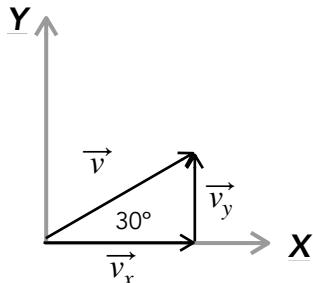
El módulo del vector sería:

$$|\vec{v}| = 10 \text{ m/s}$$

## Vector fuera de eje

**Ejemplo:** Representa numéricamente y gráficamente una velocidad de 4 m/s que forma un ángulo de 30° con el eje X.

Representamos la velocidad:



En este caso tendremos que calcular que **parte del vector que actúa sobre el eje X** ( $\vec{v}_x$ ) y que **parte de la fuerza actúa sobre el eje Y** ( $\vec{v}_y$ ). Para ello tendremos que utilizar las definiciones de seno y coseno:

$$\cos 30 = \frac{v_x}{v} \rightarrow v_x = v \cos 30$$

$$\sin 30 = \frac{v_y}{v} \rightarrow v_y = v \sin 30$$

Tendríamos:

$$\left| \begin{array}{l} \vec{v} \\ \text{(X)} v_x = v \cos 30 = 4 \cos 30 \text{ m/s} \\ \text{(Y)} v_y = v \sin 30 = 4 \sin 30 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

En notación vectorial tendríamos:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= (\vec{v}_x + \vec{v}_y) = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j}) \\ \vec{v} &= (4 \cos 30 \vec{i} + 4 \sin 30 \vec{j}) \text{ m/s} \end{aligned}$$

Reorganizando obtenemos:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{\text{módulo}}{\text{orientación}} \times \frac{\text{m/s}}{\text{unidad}}} \quad \vec{v} = 4 \times (\cos 30 \vec{i} + \sin 30 \vec{j}) \text{ m/s}$$

## Módulo de un vector

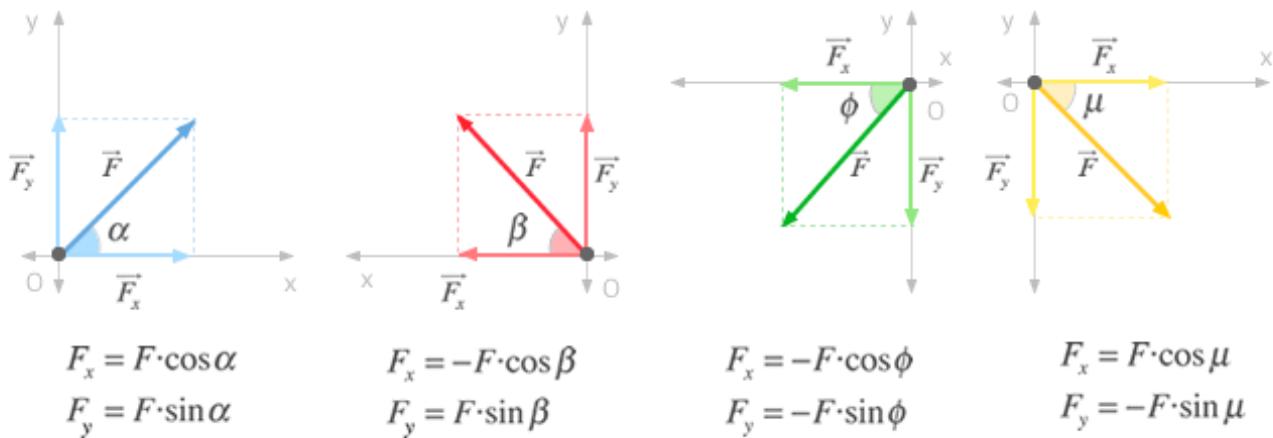
**Ejemplo:** Calcula el módulo de la siguiente velocidad:  $\vec{v} = 5\vec{i} - 5\vec{j}$

Obtendríamos el módulo aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} v^2 &= v_x^2 + v_y^2 \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 7,07 \text{ m/s} \end{aligned}$$

## Vector en los distintos cuadrantes

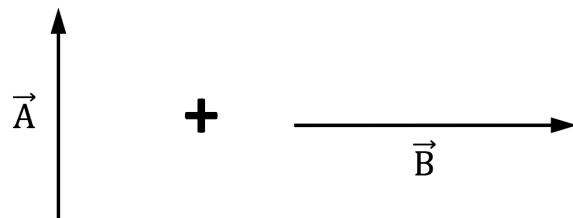
Si imaginamos fuerzas con distintas orientaciones tendremos distintos signos de las componentes dependiendo de la orientación del vector tal y como se muestra en la siguiente figura:



## 4.2 Suma vectores

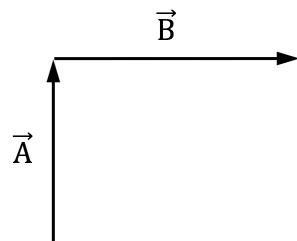
### Suma geométrica

Supongamos que queremos sumar los siguientes vectores perpendiculares (i.e dos velocidades):

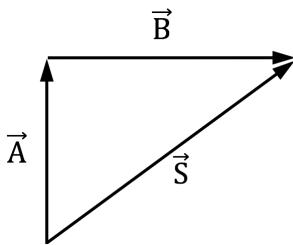


La suma de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  es otro vector  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$  obtenido de la siguiente forma:

1) Ponemos  $\vec{B}$  a continuación de  $\vec{A}$  haciendo coincidir el origen de  $\vec{B}$  con el extremo de  $\vec{A}$ .



2) Unimos el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$  obteniendo el vector suma ( $\vec{S}$ ) tal y como se muestra:



## Cálculo analítico

Analíticamente para sumar vectores se suman sus componentes:

$$\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\vec{i} + (A_y + B_y)\vec{j} + (A_z + B_z)\vec{k}$$

**Ejemplo:** Se aplican dos fuerzas sobre un objeto que vienen dadas por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_1 = 10\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = -5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

La fuerza resultante vendría dada por la suma de las dos anteriores:

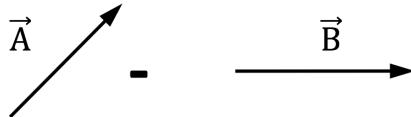
$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (10\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}) + (-5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{S} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = (10 - 5)\vec{i} + (5 + 3)\vec{j} + (-1 + 4)\vec{k} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + 3\vec{k}$$

## 4.3 Resta de vectores

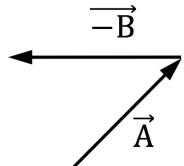
### Resta geométrica

Supongamos que queremos restar los siguientes vectores:

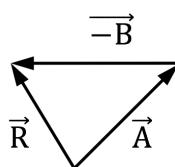


Para dibujar la diferencia de dos vectores  $\vec{A} - \vec{B}$  seguimos los siguientes pasos:

1) Ponemos  $-\vec{B}$  a continuación de  $\vec{A}$  haciendo coincidir el origen de  $-\vec{B}$  con el extremo de  $\vec{A}$ .



2) Unimos el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $-\vec{B}$  obteniendo el vector resta ( $\vec{R}$ ) tal y como se muestra:



## Cálculo analítico

Analíticamente para restar vectores se restan sus componentes:

$$\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = (A_x - B_x)\vec{i} + (A_y - B_y)\vec{j} + (A_z - B_z)\vec{k}$$

**Ejemplo:** Tenemos las siguientes fuerzas:

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= 10\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k} \\ \vec{F}_2 &= -5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}\end{aligned}$$

Calcula la fuerza resultante de restar las fuerzas anteriores.

La fuerza resultante vendría dada por la suma de las dos anteriores:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (10\vec{i} + 5\vec{j} - 1\vec{k}) - (-5\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k})$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 - \vec{F}_2 = (10 + 5)\vec{i} + (5 - 3)\vec{j} + (-1 - 4)\vec{k} = 15\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$$

## 4.4 Producto escalar

El producto escalar de dos vectores es un número (i.e. escalar) analíticamente se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \times B_x) + (A_y \times B_y) + (A_z \times B_z)$$

También se puede calcular de esta forma:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \times |\vec{B}| \times \cos \alpha$$

Donde  $\alpha$  es el ángulo que forman los dos vectores. De la definición anterior se infiere que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero ( $\cos 90 = 0$ ) mientras que adquiere su valor máximo cuando son paralelos.

**Ejemplo:** Calcula el producto escalar de  $\vec{A} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$  por  $\vec{B} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Aplicamos la definición de producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3 \times -2) + (0 \times 3) + (4 \times 0) = -6$$

## 4.5 Producto vectorial

El producto vectorial entre dos vectores ( $\vec{A} \times \vec{B}$ ) da como resultado otro vector ( $\vec{C}$ ) cuya dirección es perpendicular a los dos vectores y su sentido sería igual al avance de un sacacorchos al girar de  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  por el camino más corto.

### Expresión analítica

El producto escalar se puede expresar mediante un determinante de tercer orden:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

Desarrollando los determinantes anteriores obtenemos:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - B_y A_z) \vec{i} - (A_x B_z - B_x A_z) \vec{j} + (A_x B_y - B_x A_y) \vec{k}$$

### Características

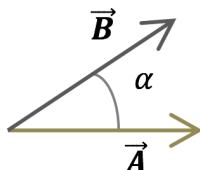
El producto vectorial da como resultado otro vector que tiene las siguientes características:

#### -Módulo

Su módulo es igual a:

$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \alpha$$

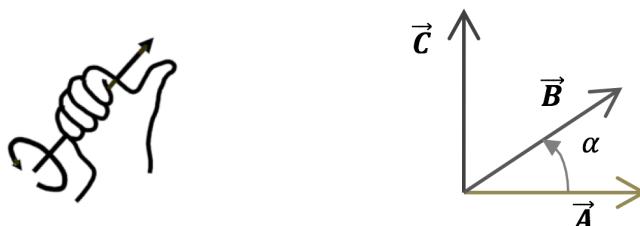
Donde  $\alpha$  es el ángulo que forman  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$



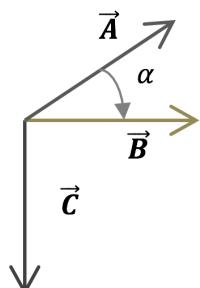
Según lo anterior el producto vectorial de dos vectores paralelos ( $\sin(0) = 0$ ) es siempre cero.

#### -Orientación:

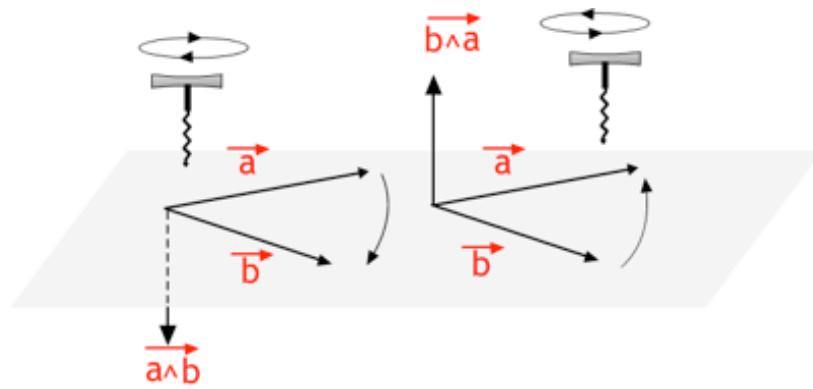
Es simultáneamente perpendicular a  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Para hallar el sentido dentro de esa dirección utilizamos la regla del sacacorchos o de la mano derecha. El sentido lo da el avance de un sacacorchos que gira de  $\vec{A}$  a  $\vec{B}$  por el camino más corto:



Si tuviéramos la siguiente situación el producto vectorial quedaría:



También se utiliza para averiguar la orientación la *regla del sacacorchos*:



## 5. Cálculo diferencial

El cálculo diferencial es una parte del cálculo infinitesimal y del análisis matemático que estudia cómo cambian las funciones continuas según sus variables cambian de estado

La derivada de una función es una razón de cambio instantánea. La derivada de una función matemática mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en un cierto intervalo infinitamente pequeño. La derivada de una función  $y(x)$  se expresa como  $y'(x)$  o  $dy/dx$ . Para escribir la derivada hacemos uso del concepto de límite:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

Podemos entender la derivada como un valor medio de la función cuando los intervalos que utilizamos para calcularlos se hacen muy pequeños.

### 5.1 Derivadas de polinomios

$$y = kx^m \rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = mkx^{m-1}$$

#### Ejemplos

$$y = x^4 \quad y' = 4 \cdot x^3$$

$$y = -x^7 \quad y' = -7 \cdot x^6$$

$$y = x^{42} \quad y' = 42 \cdot x^{41}$$

$$y = x^3 + x \quad y' = 3 \cdot x^2 + 1$$

$$y = x^5 - x^3 \quad y' = 5 \cdot x^4 - 3 \cdot x^2$$

### 5.2 Derivadas de funciones trigonométricas

$$\begin{aligned} y(x) &= \sin(f(x)) \rightarrow y'(x) = \cos(f(x))f'(x) \\ y(x) &= \cos(f(x)) \rightarrow y'(x) = -\sin(f(x))f'(x) \end{aligned}$$

#### Ejemplos

$$y = x + \sin x \quad y' = 1 + \cos x$$

$$y = x^3 - \cos x \quad y' = 3 \cdot x^2 + \sin x$$

## 5.3 Propiedades

-Derivada de la suma de dos funciones

$$\frac{d(y+z)}{dx} = \frac{dy}{dx} + \frac{dz}{dx}$$

-Derivada del producto de dos funciones

$$\frac{d(y \times z)}{dx} = \frac{dy}{dx} \times z + y \times \frac{dz}{dx}$$

**Ejemplo** Calcula la derivada del siguiente polinomio  $y(x)=2x^3 + 5x^2 + 6x$

Utilizando la fórmula de la derivada de un polinomio obtenemos para cada uno de los sumandos lo siguiente:

$$k=2 \text{ y } m=3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 2 \times 3x^2 = 6x^2$$

$$k=5 \text{ y } m=2 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 5 \times 2x^1 = 10x$$

$$k=6 \text{ y } m=1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = 6 \times 1x^0 = 6$$

Finalmente obtenemos que la derivada es la suma de todos los términos:

$$y'(x) = 6x^2 + 10x + 6$$

## 6. Trigonometría

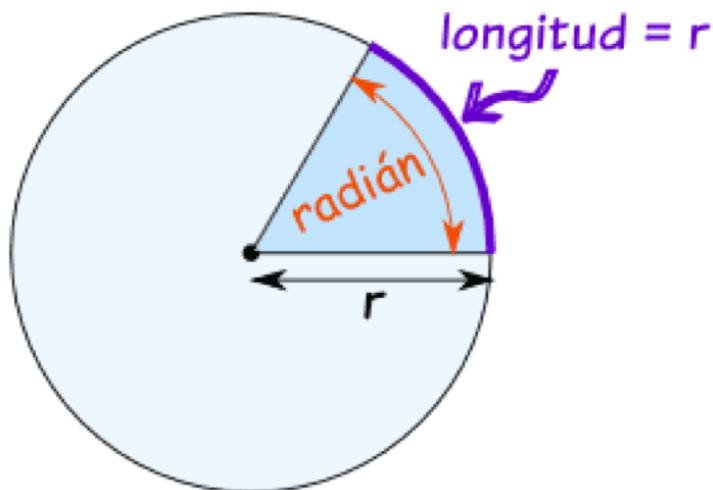
La trigonometría es una rama de la matemática cuyo significado etimológico es 'la medición de los triángulos'

La trigonometría resulta de especial importancia para poder trabajar con vectores y resolver muchos problemas de Física.

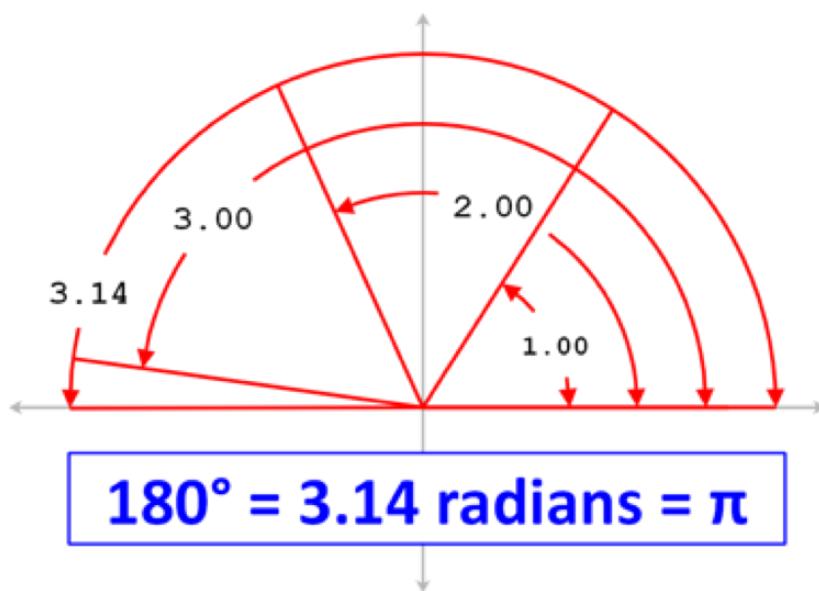
### 6.1 Concepto de radian

El **radián** es la unidad de ángulo en el sistema internacional de unidades.

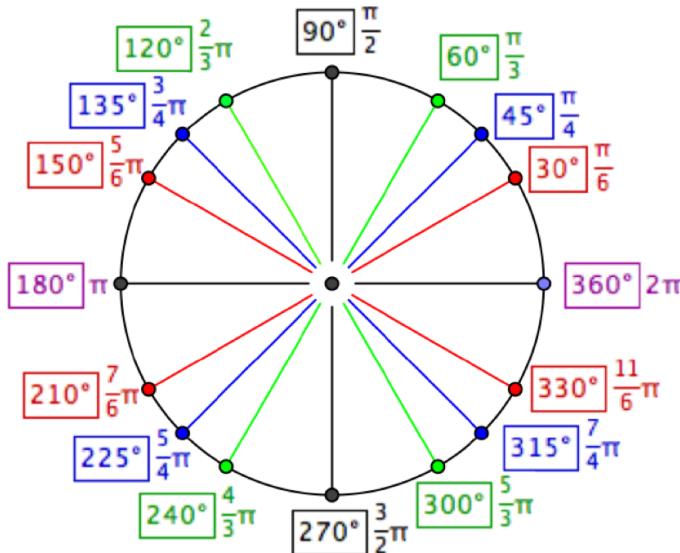
Representa el ángulo central en una circunferencia y abarca un arco cuya longitud es igual a la del radio. Su símbolo es **rad**.



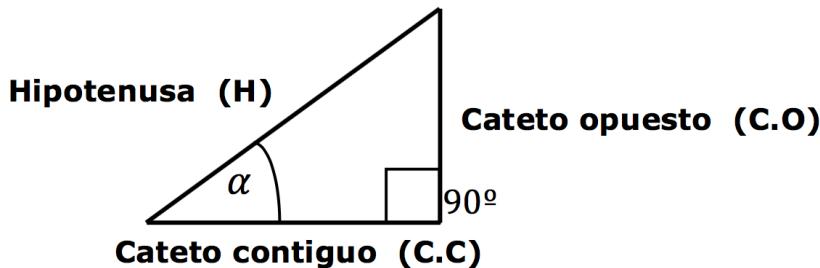
Con la definición anterior se cumple:



Normalmente estamos acostumbrados a trabajar con grados sexagesimales. Un **grado sexagesimal** es el ángulo central subtendido por un arco cuya longitud es igual a 1/360 de la circunferencia. En la siguiente figura se puede ver la relación que hay entre los grados sexagesimales y radianes:



## 6.2 Funciones trigonométricas



$$\sin \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\text{C. O.}}{\text{H}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto Contiguo}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{\text{C. C.}}{\text{H}}$$

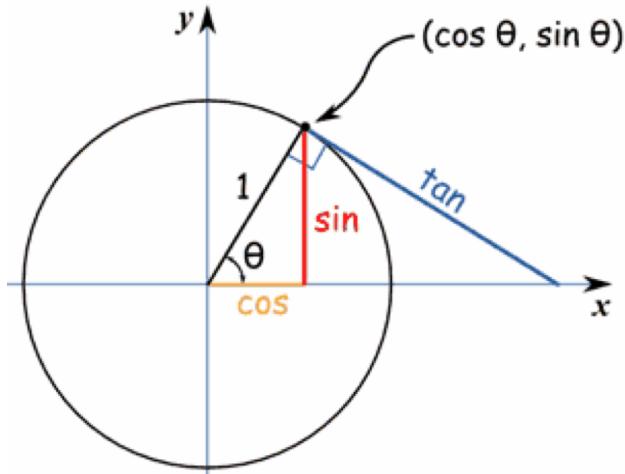
$$\tan \alpha = \frac{\text{Cateto Opuesto}}{\text{Cateto Contiguo}} = \frac{\text{C. O.}}{\text{C. C.}}$$

### Valores funciones trigonométricas por cuadrantes

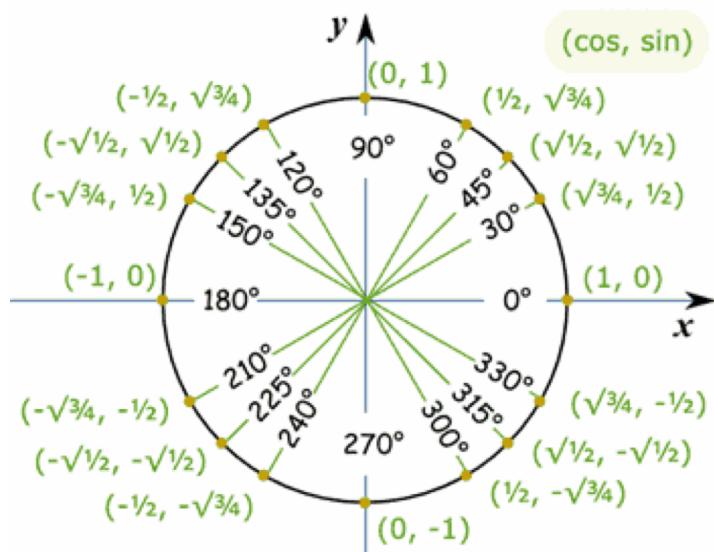
Resulta muy útil saber los valores de las funciones trigonométricas en los distintos cuadrantes.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente	
0°	0 rad	0	1	0
90°	$\frac{\pi}{2}$ rad	1	0	No esta definido
180°	$\pi$ rad	0	-1	0
270°	$\frac{3\pi}{2}$ rad	-1	0	No esta definido
360°	$2\pi$ rad	0	1	0

Si dibujamos una circunferencia de radio unidad podemos representar gráficamente las funciones trigonométricas de la siguiente forma:



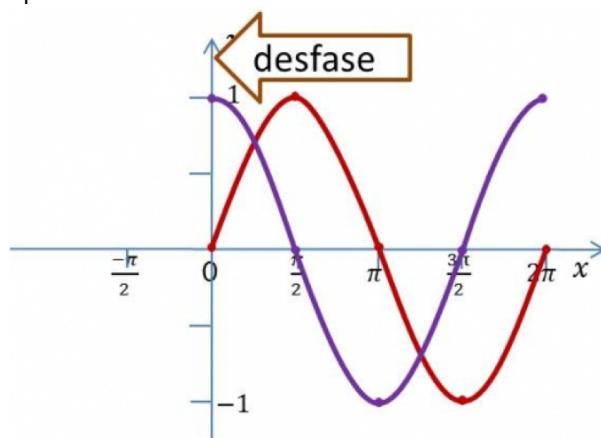
En la siguiente gráfica representamos los valores del coseno y el seno para diferentes ángulos:



## 6.3 Representación gráfica de funciones trigonométricas

Si representamos el seno y el coseno en realidad vemos que ambas funciones son la misma con un desfase de  $\frac{\pi}{2}$ . Ambas funciones son periódicas con un periodo y oscilan entre los valores 1 y -1.

En la siguiente figura representamos el seno y el coseno. El coseno tiene valor 1 cuando el ángulo vale cero mientras que el seno tiene valor 0.



---

## 6.4 Fórmulas trigonométricas

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + \pi/2)$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \beta \cos \alpha + \cos \beta \sin \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \beta \cos \alpha - \sin \beta \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin S + \sin D = 2 \sin [(S + D)/2] \cos [(S - D)/2]$$

## 7. Geometría

Parte de las matemáticas que estudia la extensión, la forma de medirla, las relaciones entre puntos, líneas, ángulos, planos y figuras, y la manera cómo se miden.

### 7.1 Figuras geométricas

Vamos a destacar las siguientes expresiones que van a ser utilizadas a lo largo del curso:

Longitud de una circunferencia:  $L = 2\pi r$

Área de un círculo:  $A = \pi r^2$

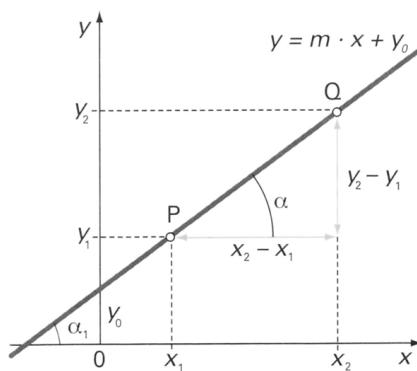
Área de un rectángulo:  $A = \text{base} \times \text{altura}$

Área de un triángulo:  $A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$

### 7.2 Gráficas y ecuaciones

- **Recta**

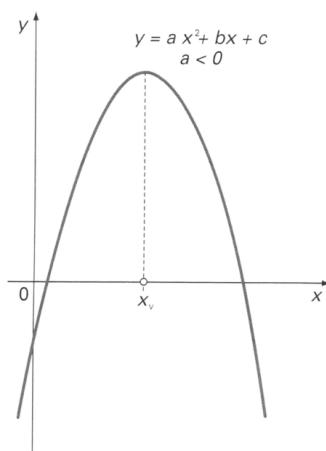
La ecuación de una recta es:  $y = mx + y_0$  donde  $m$  es la pendiente de la recta e  $y_0$  es el punto de la recta con el eje Y.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- **Parábola**

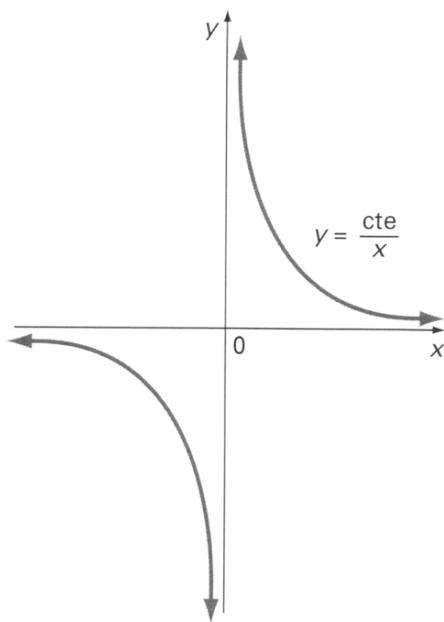
La ecuación de una parábola se corresponde con:  $y = ax^2 + bx + c$



---

- **Hipérbola**

La ecuación de una hipérbola se corresponde con  $y = \frac{cte}{x}$



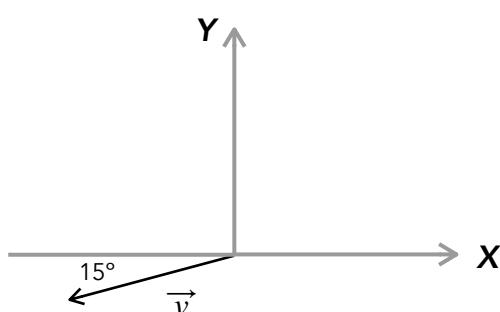
# EJERCICIOS

## Análisis dimensional

1. Comprueba que las siguientes ecuaciones son homogéneas:  
a)  $v=v_0+at$       b)  $x=(1/2)at^2$     c)  $v=gt$       d)  $x=x_0-vt$     e)  $y=v_0t - 1/2gt^2$
2. Deducir si las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas:  
a)  $W = \frac{1}{2}mv^2$       b)  $W = mgh^2$       c)  $W = F\Delta x \cos \alpha$
3. Si  $F$ : fuerza,  $a$ : longitud, encontrar las dimensiones de  $Z$ , sabiendo que  $Z = F \cdot a^2$
4. Determinar las dimensiones de la constante de gravitación universal ( $G$ ) sabiendo que:  
$$G = \frac{(fuerza)(longitud)^2}{(masa)^2}$$
5. Hallar las dimensiones de  $K$ , sabiendo que  $P$ : presión,  $V$ : volumen, y que la siguiente ecuación es dimensionalmente correcta:  
$$K = PV + Q$$

## Representación de vectores

6. Un objeto se mueve con una velocidad de 15 m/s formando  $30^\circ$  con el eje X. Calcula la expresión vectorial de la velocidad.  $\vec{v} = (13\vec{i} + 7,5\vec{j}) \text{ m/s}$
7. Un objeto se mueve con una velocidad de 10 m/s tal y como se muestra en la siguiente figura:

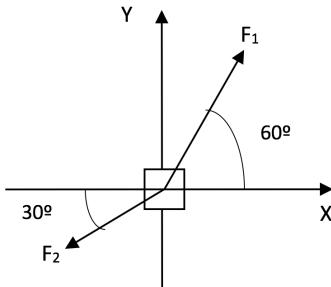


Calcula la expresión vectorial de la velocidad

8. Tenemos la siguiente velocidad:  $\vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) \text{ m/s}$ . Determina su módulo y el ángulo que forma con el eje X. **Sol:** 5 m/s;  $53,13^\circ$

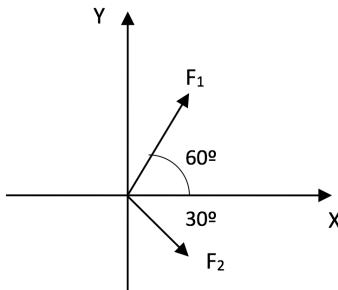
## Suma y resta de vectores

9. a) Calcula la fuerza resultante de sumar las dos fuerzas que se muestran en la figura ( $F_1 = 10\text{N}$  y  $F_2 = 5\text{N}$ ):



- b) ¿Qué ángulo forma la fuerza resultante con el eje X?

10. a) Calcula la fuerza resultante de sumar las dos fuerzas que se muestran en la figura ( $F_1 = 4\text{N}$  y  $F_2 = 2\text{N}$ ):



- b) ¿Qué ángulo forma la fuerza resultante con el eje x?

11. Dado el siguiente sistema de vectores:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \quad \vec{b} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \quad \vec{c} = 5\vec{i}$$

Calcula la resultante y su módulo. **Sol:**  $\vec{R} = 4\vec{i} - 3\vec{j}; |\vec{R}| = 5$

## Producto escalar

12. Dados los vectores  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ ;  $\vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$ ;  $\vec{c} = 7\vec{j} + 4\vec{k}$ . Calcula:

a) El vector  $\vec{v} = 2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

b) Los módulos de  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  y  $\vec{v}$

c) El producto escalar.

Sol: a)  $\vec{v} = 12\vec{i} + 7\vec{j} - 6\vec{k}$ ; b) 6,16; 7,21; 7,42; 15,13; c) 80

13. Calcula el producto escalar de los vectores  $\vec{a} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  y  $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  y determina el ángulo que forman. **Sol:** -9; 114,2°

---

14. Calcula el producto escalar de los vectores  $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  y  $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$  y determina el ángulo que forman. **Sol:** -3; 95'9°

15. Dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  tienen módulos 5 y 8 respectivamente. Si el ángulo que forman es de 60° ¿Cuánto vale su producto escalar? **Sol:** 20

16. Determina el ángulo que forman y el producto escalar de los siguientes vectores:  
 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  y  $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$  **Sol:** -3; 95,9°.

## Producto vectorial

17. Determina el producto vectorial de los siguientes vectores:  $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$  y  $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

18. Determina el producto vectorial de los siguientes vectores:  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$  y  $\vec{b} = 6\vec{i} - 4\vec{j}$

## Derivadas

19. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a)  $y(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

b)  $y(x) = 3x^4 - 2x^2 + x$

c)  $y(x) = \cos(x)$

d)  $y(x) = \sin(3x)$

20. La ecuación de movimiento de una piedra que ha sido lanzada desde el suelo con cierto ángulo viene dada por:

$$\overrightarrow{r(t)} = (4,3t)\vec{i} + (15 + 2,5t - 4,9t^2)\vec{j}$$

Las distancias se expresan en metros y el tiempo en segundos:

a) Sabiendo que la velocidad es la derivada de la posición respecto al tiempo, calcula la velocidad en el instante  $t=1$ s.

b) Sabiendo que la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, calcula la aceleración de la piedra en cualquier instante.

**Sol:** a)  $\overrightarrow{r(t)} = (4,3\vec{i} - 7,3\vec{j})m/s$ ; b)  $a = -9,8 m/s^2$

## Gráficas

21. El movimiento de un juguete de cuerda es el siguiente:

x(cm)	0	2	4	6	8	10
t(s)	0	1	2	3	4	5

Representa la gráfica y calcula la pendiente de la recta.

**Sol:** 2 cm/s

---

22. La ecuación de movimiento de un muñeco que oscila en un muelle colgado en el techo es la siguiente

$$y = 10\sin(\pi t)$$

Las distancias se expresan en centímetros y el tiempo, en segundos. Represéntala en un diagrama y-t.