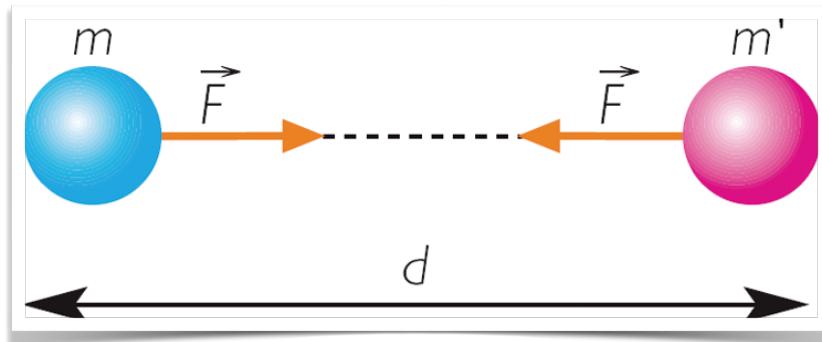


T.3. FUERZA GRAVITATORIA



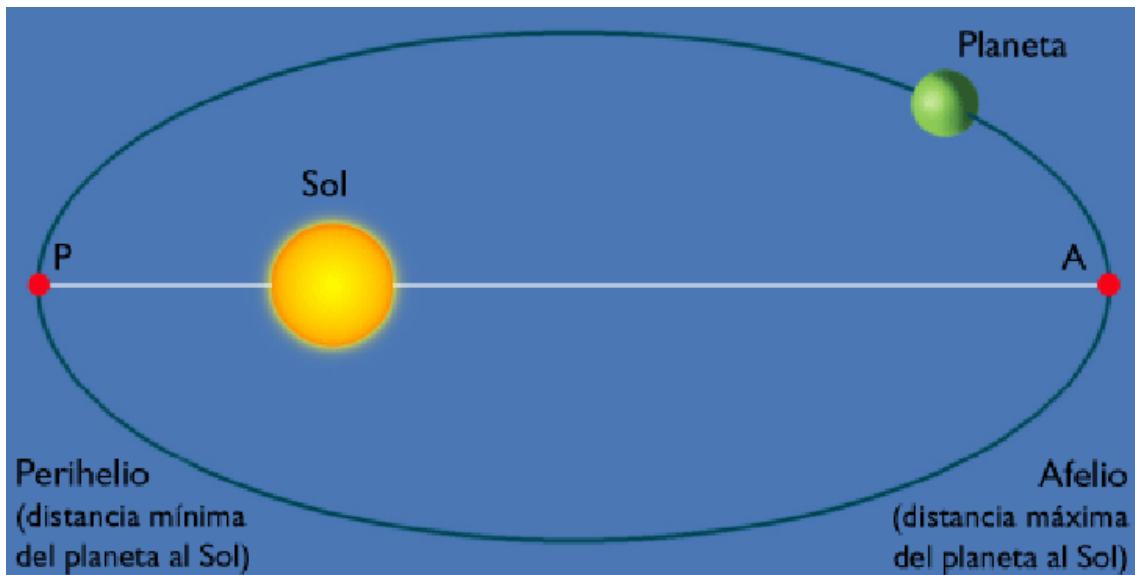
1. Leyes de Kepler	2
2. Fuerza gravitatoria	4
2.1 La gran síntesis newtoniana	4
2.2 Ley de gravitación universal	4
3. Características de la fuerza gravitatoria	6
4. Consecuencias de la ley de gravitación universal	7
4.1 El peso	7
4.2 Deducción del valor de la aceleración de la gravedad en un planeta	7
4.3 Valor de la aceleración de la gravedad en distintos astros	9
4.4 Cuerpos en órbita circular	9
CUESTIONES TEÓRICAS	12
Leyes de Kepler	12
Fuerza gravitatoria (peso)	12
Cuerpos en órbita circular	12
PROBLEMAS	13
Fuerza gravitatoria (peso)	13
Cuerpos en órbita circular	14

1. Leyes de Kepler

El astrónomo alemán Johannes Kepler (1571-1630) llevo a cabo una serie de estudios que le permitieron conocer las leyes matemáticas que describen el movimiento de los planetas. Para ello, datos precisos de observaciones de las posiciones de Marte. Se dio cuenta de que las posiciones de la órbita de Marte cuadraban de una forma muy precisa si suponía su órbita era elíptica. De este modo Kepler enunció sus **tres leyes del movimiento planetario**:

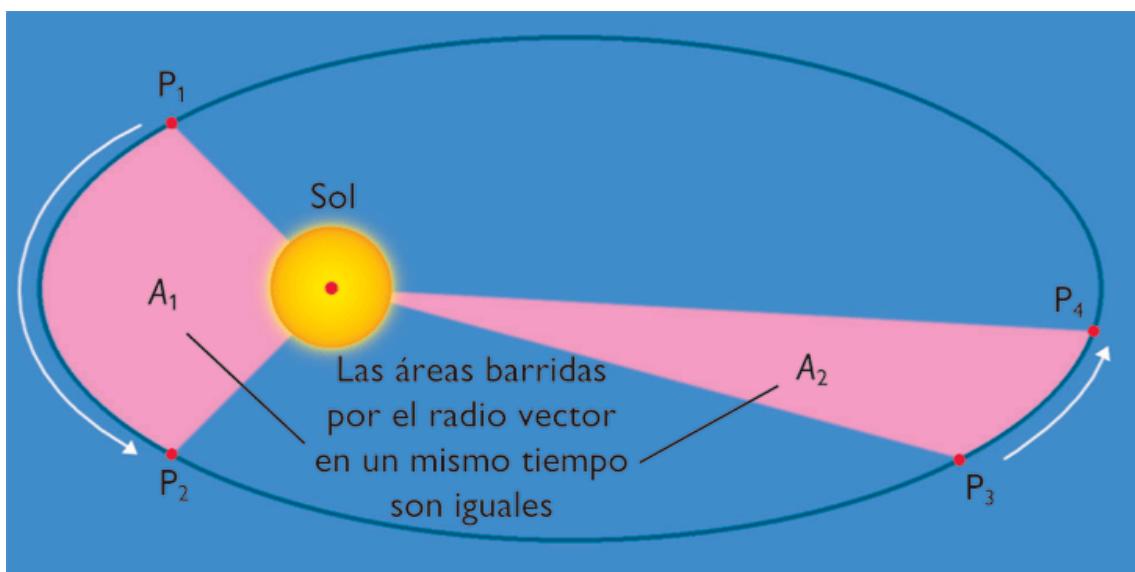
Primera ley de Kepler

Los planetas giran alrededor del Sol siguiendo una trayectoria elíptica. El Sol se sitúa en uno de los focos de la elipse.



Segunda ley de Kepler

Los planetas se mueven con velocidad areolar constante. Es decir, la línea recta trazada desde el Sol hasta un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales.



Tercera ley de Kepler

El cuadrado de los períodos de la órbita de los planetas es proporcional al cubo de la distancia promedio al Sol

Matemáticamente esta ley se expresa:

$$\frac{T^2}{d^3} = \text{cte}$$

donde d es la distancia media al Sol y T es el periodo de la órbita.

2. Fuerza gravitatoria

2.1 La gran síntesis newtoniana

Las leyes de Kepler se limitan a describir el movimiento de los planetas alrededor del Sol pero ¿qué es lo que produce este movimiento? Dicha cuestión fue abordada y resuelta por uno de los científicos más importantes de la historia, Isaac Newton (1642-1727).

Newton describió matemáticamente, por primera vez en la historia, una de las interacciones fundamentales de la naturaleza, **la interacción gravitatoria** y demostró que las leyes que rigen el movimiento de los astros en el cielo son exactamente las mismas que provocan los movimientos de caída libre de los objetos en las proximidades de la superficie terrestre:

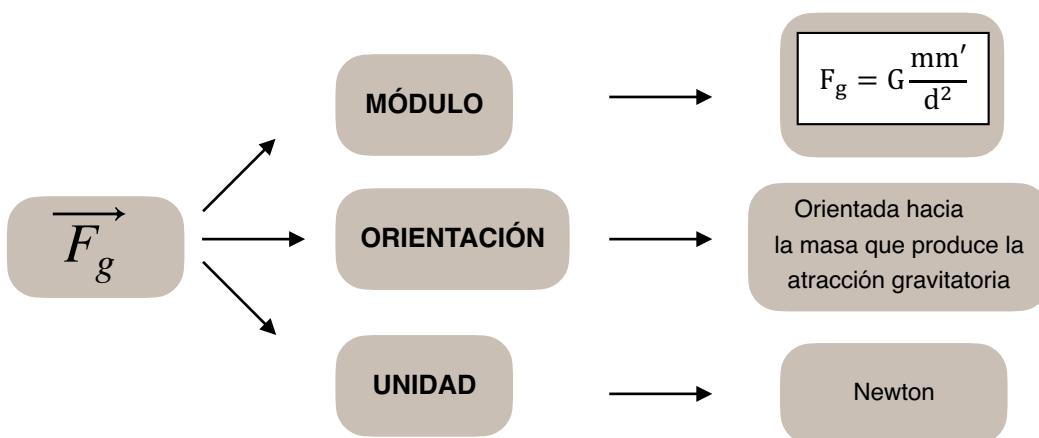
- El movimiento de los planetas alrededor del Sol está provocado por la fuerza de atracción gravitatoria que hace que los planetas giren en torno a él.
- El movimiento de caída libre de los cuerpos en las proximidades de la superficie terrestre está provocado por la atracción gravitatoria que ejerce la Tierra sobre los cuerpos.

Este descubrimiento fue totalmente revolucionario para la época ya que Newton logró romper la barrera que existía entre el cielo y la Tierra descubriendo que todos los objetos que tienen masa se atraen con una fuerza que tiene unas características determinadas. Por este motivo, a la ley que describe la fuerza descubierta por Newton se la conoce como **ley de gravitación universal**, ya que se aplica a todos los cuerpos con masa del universo ya estén en la Tierra o en el cielo. Antes de su formulación se creía que la interacción entre cuerpos celestes era diferente de la interacción entre cuerpos terrestres.

2.2 Ley de gravitación universal

La ley de gravitación universal se enuncia de la siguiente manera:

Todos los cuerpos del Universo se atraen mutuamente con una fuerza (F) que es directamente proporcional al producto de sus masas (m y m') e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia (d) que separa sus centros.



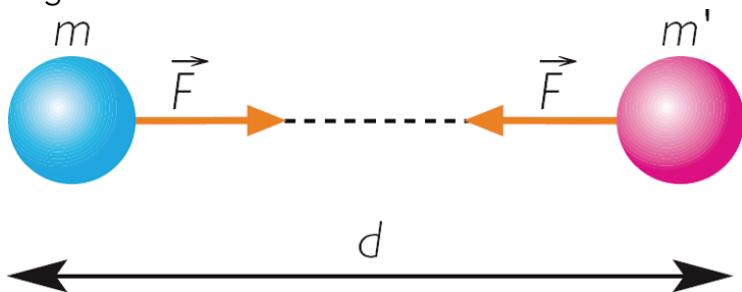
El módulo de la fuerza gravitatoria matemáticamente se expresa con la siguiente fórmula:

$$F_g = G \frac{mm'}{d^2}$$

donde G es la constante de gravitación universal y su valor en el sistema internacional es:

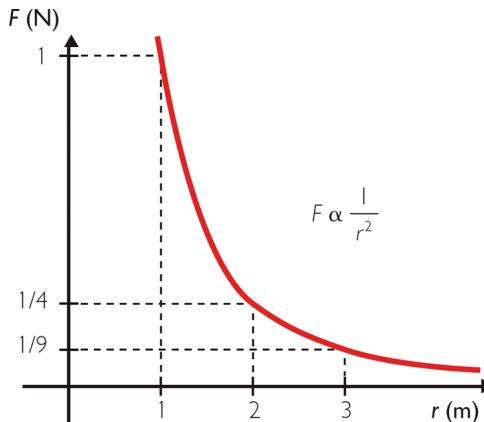
$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$

La fuerza de atracción gravitatoria es una magnitud vectorial. Su módulo viene determinado por la fórmula anterior. Su punto de aplicación es el centro de gravedad del cuerpo. Su dirección coincide con la línea que une los dos cuerpos y su sentido es de uno hacia otro tal y como se muestra en la figura:

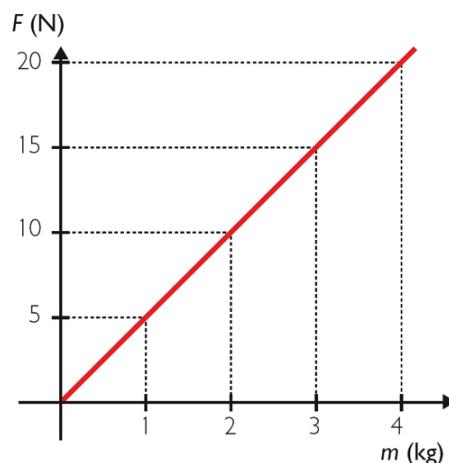


3. Características de la fuerza gravitatoria

1. Es **universal** porque afecta a todos los cuerpos con masa (sean manzanas o planetas).
2. Es siempre de **naturaleza atractiva**. Dos masas nunca se pueden repeler.
3. Su módulo es **inversamente proporcional al cuadrado de la distancia** que separa las masas (d^2). A medida que separamos las dos masas la intensidad de la fuerza disminuye tal y como se muestra en la figura:



4. Su módulo es **directamente proporcional al producto de las masas**. En la siguiente figura se muestra el aumento de la intensidad de la fuerza gravitatoria al variar una de las masas que interactúan:



5. Su intensidad es **independiente del medio en el que se encuentran las masas** que se atraen. Esto quiere decir que la intensidad gravitatoria con la que se atraen dos partículas en el aire es la misma que en el vacío, el agua, etc.

6. De las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza, la fuerza gravitatoria es la **más débil**. Si se compara con la fuerza eléctrica, por ejemplo, esta es 10^{36} veces más intensa.

4. Consecuencias de la ley de gravitación universal

4.1 El peso

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria que un planeta (o satélite) ejerce sobre un cuerpo que se encuentra muy cerca de su superficie.

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Es **importante que entendamos** que el **peso es la fuerza gravitatoria en un contexto muy concreto** que se caracteriza por:

-Una de las dos masas que se atraen es muchísimo mayor que la del otro cuerpo.

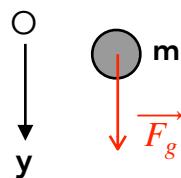
-El cuerpo que es atraído por el planeta se encuentra muy cerca de su superficie.

Fuera del contexto anterior hablamos de fuerza gravitatoria y no de peso.

4.2 Deducción del valor de la aceleración de la gravedad en un planeta

Para deducir el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta vamos a aplicar la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal.

Vamos a analizar lo que le sucede a un cuerpo en caída libre cerca de la superficie de un planeta tal y como se muestra en la siguiente figura:



Ahora aplicamos la segunda ley de Newton al objeto de masas m que se encuentra en caída libre:

$$\sum F = ma$$

Sobre el objeto solo actúa la fuerza gravitatoria:

$$F_g = ma$$

Por otra parte sabemos que la ley de gravitación universal cuando interaccionan el cuerpo considerado (m) y el planeta (M) es:

$$F_g = G \frac{mM}{d^2}$$

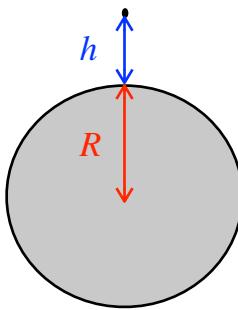
Donde d representa la distancia del cuerpo al centro del planeta. Esta distancia la podemos representar como la suma de dos factores:

R : El radio del planeta.

h : La altura del objeto sobre su superficie.

De forma que obtenemos:

$$d = R + h$$



En la situación que planteamos el objeto se encuentra cerca de la superficie del planeta. En estas condiciones el radio del planeta es mucho mayor que la altura del objeto sobre la superficie ($R \gg h$). De forma que :

$$d = R + h \approx R$$

En estas condiciones la expresión de la fuerza gravitatoria queda:

$$F_g = G \frac{mM}{R^2}$$

Sustituimos esta expresión en la segunda ley de Newton obteniendo:

$$G \frac{mM}{R^2} = ma$$

Podemos despejar la aceleración de la expresión anterior obteniendo:

$$a = G \frac{M}{R^2}$$

A esta aceleración es a la que se le llama aceleración de la gravedad. Se la representa normalmente con la letra g :

$$g = G \frac{M}{R^2}$$

Vemos que la aceleración de la gravedad nos queda en función de parámetros constantes como la **masa y el radio del planeta**.

Aceleración de la gravedad en la Tierra

En el caso de la Tierra sabemos que $M=5'98 \times 10^{24}$ kg y $R=6'37 \times 10^3$ m. Sustituyendo estos valores obtenemos el valor conocido de la aceleración de la gravedad:

$$g = 6'67 \times 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2} \left(\frac{5'98 \times 10^{24} kg}{(6'37 \times 10^3 m)^2} \right) = 9'8 \frac{N}{kg} = 9'8 m/s^2$$

Todos los cuerpos que se encuentran cerca de la superficie terrestre caen con la misma aceleración.

4.3 Valor de la aceleración de la gravedad en distintos astros

En el ejemplo anterior hemos calculado el valor de la gravedad en la superficie de la Tierra. Si sustituimos los valores de la masa y el radio de la Tierra por los valores de otros astros obtenemos distintas aceleraciones de la gravedad tal y como se muestra en la siguiente tabla:

Planeta	Aceleración de la Gravedad (m/s ²)	Valor relativo respecto a la Tierra
Marte	3'72	0'379
Júpiter	26'39	2'69
Venus	8'85	0'902
Saturno	11'67	1'19

Ejemplo: Calcula el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Luna sabiendo que su radio es de 1740×10^3 m y su masa es de $7'2 \times 10^{22}$ kg.

Utilizando la fórmula de la aceleración de la gravedad en la superficie de un astro:

$$g = G \frac{M}{R^2} = 6'67 \times 10^{-11} N \frac{m^2}{kg^2} \left(\frac{7'2 \times 10^{22} kg}{(1740 \times 10^3 m)^2} \right) = 1'6 \text{ m/s}^2$$

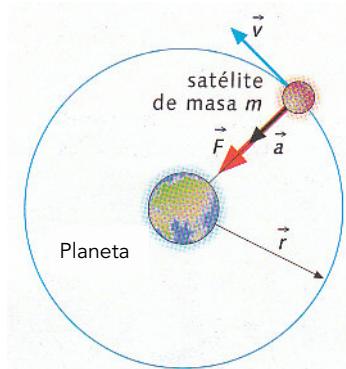
La aceleración de la gravedad es seis veces menor que en la Tierra.

4.4 Cuerpos en órbita circular

La fuerza gravitatoria es la responsable de que los astros celestes orbiten unos alrededor de otros. Para el estudio de este tipo de movimientos vamos a suponer que el astro de menor masa (m) órbita en torno al de mayor masa (M) realizando un Movimiento Circular Uniforme (MCU). Esto implica:

1. La trayectoria de la órbita es circular.
2. El módulo de la velocidad del satélite es constante.
3. Existe una aceleración centrípeta constante (consecuencia de 1 y 2).

La siguiente figura muestra el movimiento orbital de un satélite en torno a un planeta. Como se puede ver en cada punto de la trayectoria la fuerza gravitatoria apunta al centro del planeta. Esta fuerza comunica al satélite una aceleración centrípeta que modifica la orientación de la velocidad orbital del satélite.



Velocidad orbital (v_o)

Es la velocidad que debe tener un planeta, satélite (natural o artificial) o similar a una distancia determinada para que su órbita sea estable.

Para calcular la velocidad orbital aplicamos la segunda ley de Newton al cuerpo que orbita:

$$\sum F = ma \rightarrow F_g = ma_c$$

Sustituimos la expresión de la fuerza gravitatoria:

$$G \frac{mM}{d^2} = ma_c$$

Sustituimos el valor de la aceleración centrípeta:

$$G \frac{mM}{d^2} = m \frac{v_o^2}{d}$$

Despejamos la velocidad orbital del satélite:

$$v_o = \sqrt{\frac{GM}{d}}$$

Recordemos que el radio de la órbita (d) lo podemos poner en función del radio del planeta (R) y la altura del satélite sobre el mismo (h).

$$d = R + h$$

Periodo orbital (T)

Tiempo que debe transcurrir para el cuerpo que órbita complete una órbita

Para calcular el periodo hacemos uso de la definición de velocidad:

$$v_o = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

Si aplicamos la definición anterior para una vuelta completa del cuerpo que órbita tenemos que el espacio recorrido coincide con el perímetro ($2\pi d$) de la circunferencia descrita mientras que el tiempo que tarda en recorrerlo es el periodo (T).

$$v_o = \frac{2\pi d}{T}$$

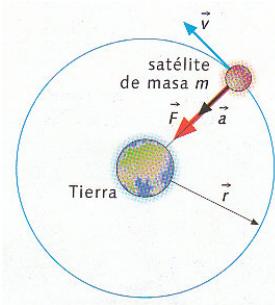
Despejando finalmente obtenemos:

$$T = \frac{2\pi d}{v_o}$$

Ejemplo: Deducir la velocidad y el periodo orbital de la Luna.

Datos: Masa de la Tierra : $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg; distancia de la Tierra a la Luna: $r = 3.84 \times 10^5$ km.

Sabemos que la Luna gira alrededor de la Tierra describiendo un MCU. La fuerza que hace posible ese movimiento es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce la Luna sobre la Tierra. Esta fuerza modifica en cada instante la velocidad de la Luna haciendo que describa una trayectoria circular.



Aplicamos la segunda ley de Newton a la Luna teniendo en cuenta que sobre la Luna solo actúa la fuerza gravitatoria:

$$F = ma \rightarrow F_g = ma$$

Sustituimos la fuerza de la gravedad:

$$G \frac{mM}{r^2} = ma$$

Sabemos que en un MCU la única aceleración que actúa es la centrípeta ya que el módulo de la velocidad es constante. Sustituyendo la expresión de la aceleración centrípeta:

$$G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

Despejando la velocidad obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 1019 \text{ m/s}$$

Hallamos el periodo de una forma muy sencilla. Sabemos que por definición la velocidad es:

$$v = \frac{\text{espacio}}{\text{tiempo}}$$

Si aplicamos la definición anterior para una vuelta completa de la Luna alrededor de la Tierra tenemos que es el espacio recorrido es el perímetro de la circunferencia ($2\pi r$) y el tiempo es exactamente el periodo (T). Sustituyendo en la fórmula anterior:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = 2'37 \times 10^6 \text{ s} = 27'4 \text{ días}$$

CUESTIONES TEÓRICAS

Leyes de Kepler

1. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: El planeta más cercano al Sol tiene el período de revolución más corto.
2. Indica razonadamente la veracidad de las siguientes leyes:
 - a) La Tierra describe una órbita circular alrededor del Sol.
 - b) Todos los planetas se mueven con la misma velocidad alrededor del Sol.
 - c) El planeta Tierra se mueve con velocidad lineal constante sobre el Sol.
 - d) El cociente entre el periodo de un planeta y su distancia al Sol es constante.
3. Corrige las incorrecciones de las leyes:
 - a) Todos los planetas se mueven alrededor del Sol siguiendo órbitas circulares. El Sol está en el centro de la circunferencia.
 - b) Los planetas se mueven con diferente velocidad areolar debido a que la línea que une en cada momento el planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos diferentes.
 - c) Los planetas más alejados del Sol se mueven más deprisa y, por tanto, tardan menos tiempo en dar una vuelta completa.

Fuerza gravitatoria (peso)

4. Indica que características corresponden al peso y cuales a la masa:
 - a) Cantidad de materia que posee un cuerpo.
 - b) No depende del lugar en el que está situado el cuerpo.
 - c) Fuerza con la que la Tierra atrae a los cuerpos.
 - d) Es una magnitud escalar.
 - e) Se mide en kg m/s^2 .
5. ¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra pesarías la mitad que en la superficie? ¿Habrá cambiado tu masa?

Cuerpos en órbita circular

6. En una órbita circular, ¿qué relación hay entre la fuerza centrípeta y la fuerza de la gravedad?
7. ¿Qué le ocurriría a un satélite si desapareciera la fuerza de la gravedad que lo mantiene en órbita? Dibujar la trayectoria.

PROBLEMAS

Fuerza gravitatoria (peso)

1. Calcula la fuerza con que la Tierra atrae una manzana de 200 g situada en un árbol.
 - a) ¿Con que fuerza atrae la manzana a la Tierra?
 - b) ¿Con que aceleración caerá la manzana? ¿Y la Tierra?Datos: Masa de la Tierra= $5'98 \times 10^{24}$ kg; Radio de la Tierra=6400 km.
2. Calcula el peso de una persona de 60 kg en:
 - a) La superficie de la Tierra.
 - b) La cima del Everest.
 - c) Un punto situado a una altura de 3000 km sobre la Tierra.
 - d) La superficie de la Luna ($g_{luna} = g_{tierra}/6$)
3. Marte es el planeta elegido por los escritores de ciencia ficción como sitio más favorable del Sistema Solar para ser habitado por el ser humano.
 - a) ¿Cuál será la aceleración de la gravedad en Marte?
 - b) ¿Cómo te sentirás: más ligero o más pesado?
 - c) ¿Cuál sería tu peso en Marte?Datos: Masa de Marte: $=6'4 \times 10^{23}$ kg; diámetro=6780 km.
4. Observa la tabla de datos.

Planeta	$g(m/s^2)$
Mercurio	2'65
Venus	8'50
Tierra	9'81
Marte	3'72
Júpiter	25'89
Saturno	11'48
Urano	9'03

 - a) Calcula tu peso en cada uno de los planetas.
 - b) Calcula la velocidad con la llega un cuerpo que se deja caer desde una altura de 1 m a la superficie de cada planeta.
5. El peso de una persona en la Tierra es de 500 N, y en Júpiter, de 1321 N.
 - a) ¿Cuál será su masa?
 - b) ¿Cuál será la gravedad en Júpiter?
 - c) ¿Qué masa tendría que tener en Júpiter para que pesase lo mismo que en la Tierra?

Cuerpos en órbita circular

6. Un satélite artificial de media tonelada gira en órbita circular alrededor de la Tierra a 2630 km con una velocidad de 6500 m/s.

a) Realiza un dibujo representando la situación planteada en el problema en el que se indique el sistema de referencia (con su origen y sentido positivo) y las fuerzas que actúan sobre el satélite.

b) Plantea la segunda ley de Newton desarrollando las expresiones analíticas de las fuerzas que actúan.

c) Calcula la fuerza que mantiene en órbita al satélite.

d) Calcula la aceleración centrípeta.

Datos: $G=6,67 \times 10^{-11} \text{ N}(\text{m}^2/\text{kg}^2)$; Masa de la Tierra= $5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$; Radio de la Tierra=6370 km

Sol: c) $2462,1 \text{ N}$; d) $4,7 \text{ m/s}^2$.

7. El periodo de rotación de la Luna es de 27,3 días y la distancia que la separa de la Tierra es de $3,8 \times 10^8 \text{ m}$.

a) Realiza un dibujo representando la situación planteada en el problema en el que se indique el sistema de referencia (con su origen y sentido positivo) y las fuerzas que actúan sobre el satélite.

b) Plantea la segunda ley de Newton desarrollando las expresiones analíticas de las fuerzas que actúan.

c) Calcula la aceleración centrípeta.

Datos: Masa de la Tierra : $M=5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $G=6,67 \times 10^{-11} (\text{N} \times \text{m}^2)/\text{kg}^2$.

Sol: $6353,7 \text{ m/s}^2$

8. Un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra y se encuentra a una distancia de 10000 km del centro terrestre.

a) Realiza un dibujo representando la situación planteada en el problema en el que se indique el sistema de referencia (con su origen y sentido positivo) y las fuerzas que actúan sobre el satélite.

b) Plantea la segunda ley de Newton desarrollando las expresiones analíticas de las fuerzas que actúan.

c) Calcula la velocidad orbital.

Datos: Masa de la Tierra : $M=5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, $G=6,67 \times 10^{-11} (\text{N} \times \text{m}^2)/\text{kg}^2$.

Sol: 4936 m/s

9. Un satélite artificial que describe una órbita circular alrededor de la Tierra cada 98 minutos a una altura de 500 km sobre la superficie terrestre.

a) Realiza un dibujo representando la situación planteada en el problema en el que se indique el sistema de referencia (con su origen y sentido positivo) y las fuerzas que actúan sobre el satélite.

b) Plantea la segunda ley de Newton desarrollando las expresiones analíticas de las fuerzas que actúan.

c) Calcula la velocidad orbital.

Datos: $G=6.67 \times 10^{-11} \text{ N}(\text{m}^2/\text{kg}^2)$; Masa de la Tierra= $5.98 \times 10^{24} \text{ kg}$; Radio de la Tierra=6370 km

Sol: 7337 m/s