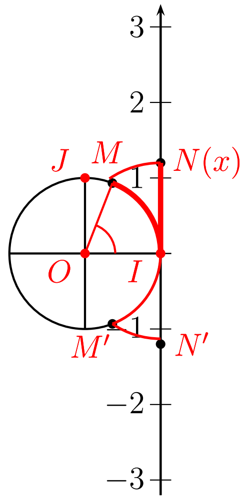
Chapitre 4

Angles orientés et trigonométrie

1 Angles géométriques

Définition 4.1
Cercle trigonométrique Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, le ***cercle trigonométrique*** *est le cercle de centre O et de rayon 1.* □



Dans un repère orthonormal $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$, soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et (d) la droite tangente en I à $\mathcal{C}$.
On considère sur cette droite un repère $(I;\overrightarrow{OJ})$.
À tout nombre réel x on fait correspondre le point N d'abscisse x dans le repère $(I;\overrightarrow{OJ})$ de (d).
On enroule la droite (d) autour du cercle $\mathcal{C}$, on obtient ainsi un point M unique du cercle trigonométrique.

Définition 4.2
Angle géométrique Une ***mesure en radian de l'angle*** $\widehat{IOM}$ *est la mesure de l'arc* $\widehat{IM}$ *donc la valeur absolue du nombre x précédent.* □

2 Angles orientés

Définition 4.3
Orientation Soit $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ un repère du plan. Sur le cercle trigonométrique, deux sens de parcours sont possibles, l'un est dit direct, l'autre indirect.

On choisira pour sens de direct le sens inverse des aiguilles d'une montre, le plan est alors dit orienté. □

Définition 4.4
Angles orientés Une ***mesure en radian de l'angle orienté*** $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$ *est le nombre x.*

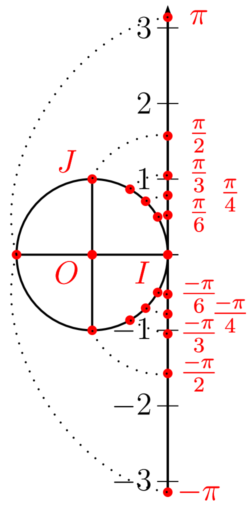
Chaque point du cercle trigonométrique est repéré par un unique réel de l'intervalle $]-\pi;\pi]$.

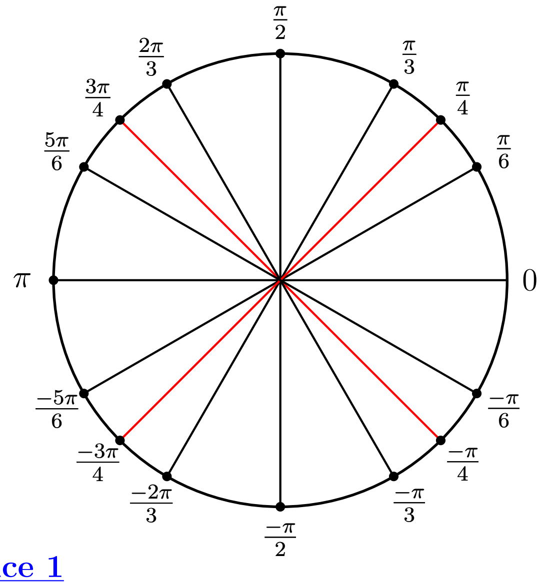
$x+2k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$ est l'ensemble des mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM}\right)$.

Définition 4.5
Premières valeurs Pour les valeurs :

$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$-\frac{-\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$

□

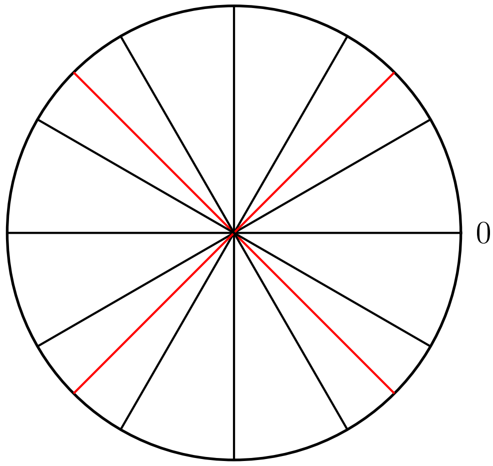




Exercice 1

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

$-\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{3\pi}{4}$	12π	$\dfrac{9\pi}{2}$
$\dfrac{\pi}{12}$	15π	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{13\pi}{3}$



Exercice 2

Placer sur le cercle trigonométrique les points correspondant à

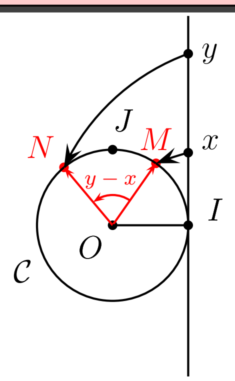
$\dfrac{4\pi}{3}$	-21π	$-\dfrac{9\pi}{4}$	$\dfrac{23\pi}{6}$
$-\dfrac{17\pi}{3}$	$-\dfrac{17\pi}{6}$	$-\dfrac{121\pi}{2}$	2014π

3 Angles orientés de vecteurs

a) Mesure d'un angle orienté

Définition 4.6
Un couple de vecteurs non nuls définit un angle orienté que l'on note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. □

Si M et N sont 2 points du cercle trigonométrique, M repéré par x ; N repéré par y.
Alors l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$ a pour mesure $y - x$.



Tout angle orienté (comme tout arc orienté) a une infinité de mesures. Si α est l'une de ces mesures alors les autres s'écrivent $\alpha + 2k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$.

On note $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Ou bien $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \alpha \quad [2\pi]$ *Lire α modulo 2π*

La seule mesure dans $]-\pi;\pi[$ est la mesure principale.

b) Relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ $\quad (\vec{u},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{w}) \quad [2\pi]$
Conséquences : pour tous vecteurs non nul $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

i) $(\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u}) \quad [2\pi]$
ii) $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$
iii) $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$
iv) $(-\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$

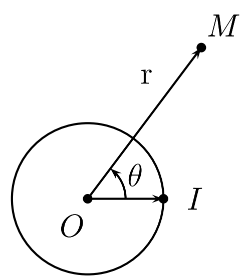
Dém.:
i) $(\vec{u},\vec{u}) = 0 \iff (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},\vec{u}) = 0 \iff (\vec{u},\vec{v}) = -(\vec{v},\vec{u}) \quad [2\pi]$
ii) $(\vec{u},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = (\vec{u},\vec{v}) + \pi \quad [2\pi]$
iii) $(-\vec{u},\vec{v}) = (\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$
iv) $(-\vec{u},-\vec{v}) = (-\vec{u},\vec{u}) + (\vec{u},\vec{v}) + (\vec{v},-\vec{v}) = \pi + (\vec{u},\vec{v}) + \pi = (\vec{u},\vec{v}) + 2\pi = (\vec{u},\vec{v}) \quad [2\pi]$

4 Repérage polaire

a) Définition

O est un point du plan, $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ est un vecteur unitaire.

Définition 4.7
Soit M un point du plan distinct de O. Tout couple $(r;\theta)$ avec $r > 0$ tel que $OM = r$ et $(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}) = \theta$ est un couple de coordonnées polaires du point M dans le repère $(O;\overrightarrow{OI})$ □



Vocabulaire

- O s'appelle le pôle
- La demi droite de $[Ox)$ l'axe polaire.
- r est le rayon polaire du point M.
- θ est l'un de ses angles polaires.

Remarque : Si (r,θ) est un couple de coordonnées polaire du point M alors tout couple $(r,\theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$ est aussi un couple de coordonnées du point M

Un repère polaire étant choisi, à tout couple de coordonnées polaires correspond un point et un seul du plan

b) Passage des coordonnées polaire aux coordonnées rectangulaires

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère orthonormé direct
Si un point M distinct de O a pour coordonnées $(x;y)$ dans ce repère et pour coordonnées polaires $(r;\theta)$ dans le repère polaire $(0,\overrightarrow{OI})$, alors :
$r = \sqrt{x^2+^2}, \qquad x = r\cos(\theta) \qquad y = r\sin(\theta)$

5 Formule de trigonométrie

a) Formules d'addition

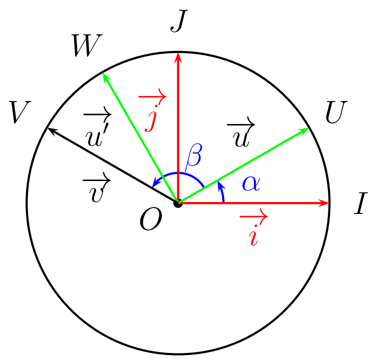
Propriété 4.1
angles associés

$\bullet \cos^2 x + \sin^2 x = 1$	$\bullet \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	
$\bullet \cos(-x) = \cos(x)$	$\bullet \sin(-x) = -\sin(x)$	*Angles opposés*
$\bullet \cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\bullet \sin(\pi - x) = \sin(x)$	*Angles supplémentaires*
$\bullet \cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\bullet \sin(\pi + x) = -\sin(x)$	
$\bullet \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$	$\bullet \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$	*Angles complémentaires*
$\bullet \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$	$\bullet \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$	*Angles complémentaires*

Propriété 4.2
Formules d'addition

- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

Dém.:
On considère les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{u'}$ tel que $(\vec{i}\,;\vec{u}) = \alpha; (\vec{u}\,;\vec{v}) = \beta; (\vec{u}\,;\vec{u'}) = (\vec{i}\,;\vec{j}) = \dfrac{\pi}{2}$



D'après la relation de Chasles $(\vec{i}, \vec{v}) = \alpha + \beta$

D'après la propriété du repérage polaire : $\begin{cases} \vec{u}\cos\alpha\,\vec{i}\,\sin\alpha\,\vec{j}\,et\,\vec{v}\cos\beta\,\vec{u}\,\sin\beta\,\vec{u'} \\ \vec{u'}\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{i}\,\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{j} = \sin\alpha\,\vec{i}\,\cos\alpha\,\vec{j} \end{cases}$

on obtient donc $\vec{v}\cos\beta\left(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}\right) + \sin\beta\left(\sin\alpha\,\vec{i}\,\cos\alpha\,\vec{j}\right)$

$$\vec{v} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)\,\vec{i} + (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)\,\vec{j}$$

or $(\vec{i}, \vec{v}) = \alpha + \beta$ donc on a $\vec{v}\cos(\alpha+\beta)\,\vec{i}\,\sin(\alpha+\beta)$

Propriété 4.3
Pour tous réels a, on a :

- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = \cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$
- $\sin 2a = 2\sin a \cos a$