



## **7529. Teoría de Algoritmos I**

### **Trabajo Práctico 3**

Ferreyra, Oscar, *Padrón Nro. 89563*  
fferreyra38@gmail.com

Martin, Débora, *Padrón Nro. 90934*  
demartin@fi.uba.ar

Eisner, Ariel, *Padrón Nro. 90697*  
aeeisnerg@gmail.com

2do. Cuatrimestre de 2016

# Índice

|  |          |
|--|----------|
| <b>1. Clases de complejidad</b>                                  | <b>2</b> |
| 1.1. Ciclos con peso negativo en un grafo Hamiltoniano . . . . . | 2        |
| 1.2. Ciclos de peso nulo en un grafo Hamiltoniano . . . . .      | 2        |
| 1.3. Tareas con ganancia igual a un $k$ dado . . . . .           | 2        |
| 1.4. Tareas con ganancia mayor a un $k$ dado . . . . .           | 3        |
| <b>2. Algoritmos de aproximación</b>                             | <b>3</b> |
| 2.1. El problema del viajante de comercio . . . . .              | 3        |
| 2.2. El problema de la mochila . . . . .                         | 3        |

# 1. Clases de complejidad

## 1.1. Ciclos con peso negativo en un grafo Hamiltoniano

Para la resolución de este problema se propone la utilización del Algoritmo de Floyd Warshall para encontrar el camino mínimo entre todos los vértices del grafo. Sobre la matriz resultante se analizan los números de la diagonal de la matriz de caminos. En caso de ser negativos, sabemos que pertenece a un ciclo negativo. Este algoritmo corre en tiempo  $O(V^3)$ , siendo  $V$  la cantidad de vértices del grafo.

```
FloydWarshall() {  
  Armar la matriz de adyacencia F  
  for( k from 1 to n )  
    for( i from 1 to n )  
      for( j from 1 to n )  
        F[i,j]=min(F[i,j], F[i,k] + F[k,j])  
      end for j  
    end for i  
  end for k  
  
  for( i from 1 to n )  
    if( F[i,i] < 0 then )  
      print "Ciclo negativo"  
      break  
    end if  
  end for i  
}
```

## 1.2. Ciclos de peso nulo en un grafo Hamiltoniano

Este problema es NP-Completo.

Primero, dado un ciclo simple en el grafo  $G$ , podemos determinar si la suma de los pesos de sus vértices en tiempo polinomial, luego el problema de encontrar un ciclo de peso 0 es NP.

Luego, reducimos el problema de la suma de subconjuntos a este problema. Este problema es: dado un conjunto de enteros, ¿existe algún subconjunto cuya suma sea exactamente cero? A continuación describimos el algoritmo de resolución de dicho problema:

Consideramos un conjunto de enteros  $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ . Construimos un digrafo ponderado  $G$  con  $2n$  vértices, para el cual cada elemento  $a_i$  corresponde con dos vértices  $v_i$  y  $u_i$

```
for each  $v_i$   
  agregar una arista de  $v_i$  en  $u_i$  con peso  $a_i$  y agregar aristas de cada vértice  $v_j$  en él con peso 0.  
for each  $u_i$   
  agregar aristas de éste vértice  $u_i$  a cada uno de los  $v_j$  con peso 0.  
if (encontramos un ciclo de peso 0 en  $G$ ) then  
  todos los pesos desde  $v_j$  hasta  $u_j$  a lo largo del ciclo deben ser cero.  
if (obtenemos un subconjunto  $S_0 \subseteq S$  cuya sumatoria da 0)  
  construimos un ciclo tomando todas las aristas  $(v_j, u_j)$  correspondientes al elemento en  $S_0$  y conectamos  
  sus aristas a través de las aristas de peso cero, y finalmente obtenemos un ciclo de peso 0.
```

Por lo tanto, el problema es al menos tan difícil como el de suma de subconjuntos. Dado que éste es un problema NP-Completo, el problema de los ciclos de peso 0 también lo es.

## 1.3. Tareas con ganancia igual a un $k$ dado

Utilizamos otra vez el problema de la suma de subconjuntos. Podemos reducir este problema a un subconjunto del mismo, pero en este caso la suma es el  $k$  dado.

Por lo tanto, podemos decir que el problema es NP-Completo.

Supongamos que

$$\text{sumaDeSubconjuntos} \leq_p \text{programacionConDeadlinesYGanancias}$$

Partiendo de esto, vemos que dada una instancia del problema de suma de subconjuntos  $X = (x[1..n], t)$ ; donde,  $x[i]$  es el conjunto de números y  $t$  es el resultado de la suma del subconjunto, es posible construir en tiempo polinomial una instancia de nuestro problema de programación con deadlines y ganancias de la siguiente manera:

$$Y = (x[1..n], d[1..n], x[1..n], t), \forall i \in d[i] = t$$

Otra vez, dado que el problema de suma de subconjuntos es NP-Completo, y el problema de programación con deadlines y ganancias mayores a un  $k$  dado es al menos tan difícil como este, queda demostrado que es un problema NP-Completo.

#### 1.4. Tareas con ganancia mayor a un $k$ dado

Esta es una versión extendida del problema explyado en el punto anterior. La demostración es muy similar, pero debemos tener en cuenta que ahora podemos revisar una cantidad mayor de valores, es decir, todos los que cumplen la condición de ser mayores al  $k$  dado.

## 2. Algoritmos de aproximación

### 2.1. El problema del viajante de comercio

Para implementar la solución aproximada a este problema se utilizó el algoritmo de Prim para calcular el árbol de tendido mínimo. La complejidad de dicho algoritmo depende de las operaciones de una cola de prioridad que contiene los vertices, de las iteraciones que se realizan sobre todas las aristas de cada vértice. Se tomará  $|V|$  como la cantidad de vértices del grafo y  $|A|$  como la cantidad de aristas. Las operaciones más importantes de la cola de prioridad son  $O(\log |V|)$  cada una, excepto el contains que es  $O(|V|)$ . Por otro lado el ciclo principal es  $O(|V|^2 * |A|)$  porque recorre para cada vertice, sus aristas, y verifica si su arista adyacente está en la cola de prioridad. El mencionado sería el peor caso, pero a medida que va avanzando la ejecución, la cola se va vaciando y el contains pasa a ser insignificante. Por último, se agregan todos los vertices y las aristas pertenecientes al árbol en un nuevo grafo. Esta operación es  $O(|A| \log |A|)$ , en el peor caso que sería que todas las aristas del grafo original debieran ser agregadas al nuevo grafo. Pero en la mayoría de los casos será mucho menor y dependerá de la cantidad de aristas del árbol.

Además del algoritmo de Prim, luego se busca el preorder del árbol de tendido mínimo. Este recorre todos los vértices del grafo por lo que es  $O(|V|)$ .

Los tiempos de ejecución fueron llamativamente inferiores a los obtenidos por programación dinámica, aunque las soluciones obtenidas no resultaron siempre iguales a las anteriores. A continuación se muestran dichos tiempos de ejecución. Es de notar que en esta ocasión sí fue posible realizar la corrida para grafos con mayor cantidad de vertices.

| Cantidad de ciudades | Tiempo de ejecución (seg) |
|----------------------|---------------------------|
| 15                   | $4,86 * 10^{-3}$          |
| 17                   | $5,74 * 10^{-3}$          |
| 19                   | $8,82 * 10^{-3}$          |
| 21                   | $6,35 * 10^{-3}$          |
| 23                   | $6,15 * 10^{-3}$          |
| 48                   | $13,4 * 10^{-3}$          |

Cuadro 1: Tiempo en función de la cantidad de ciudades para la aproximación por el árbol de tendido mínimo

### 2.2. El problema de la mochila

Se refactorizó el algoritmo utilizado en la primera parte, agregando la ecuación de recurrencia indicada en el enunciado. El algoritmo la ecuación de recurrencia indicada en el enunciado.

Este algoritmo se ejecuta en  $O(n * sumaValores)$  siendo  $n$  el numero de elementos a introducir en la mochila, y sumaValores la suma de los valores (no pesos) de todos los objetos. A priori parece peor que el anterior, pero la ventaja de este algoritmo frente al anterior es que permite disminuir la cantidad de valores a calcular, haciendo menos costosa su ejecución.

A continuación se muestra una tabla con los tiempos de ejecución del algoritmo con algunos de los archivos de prueba.

| Archivo de prueba  | Tiempo de ejecución (seg) |
|--------------------|---------------------------|
| knapPI.11.50.1000  | 0,138287280               |
| knapPI.12.50.1000  | 0,080562404               |
| knapPI.13.50.1000  | 0,083951296               |
| knapPI.14.50.1000  | 0,075953632               |
| knapPI.15.50.1000  | 0,103165037               |
| knapPI.16.50.1000  | 0,101494485               |
| knapPI.11.200.1000 | 1,145706132               |
| knapPI.12.200.1000 | 0,859632826               |
| knapPI.13.200.1000 | 0,971113896               |
| knapPI.14.200.1000 | 1,076139513               |
| knapPI.15.200.1000 | 0,761086035               |
| knapPI.16.200.1000 | 1,348929039               |
| knapPI.11.500.1000 | 5,400308580               |
| knapPI.12.500.1000 | 4,315799133               |
| knapPI.13.500.1000 | 4,253145449               |
| knapPI.14.500.1000 | 9,521136486               |
| knapPI.15.500.1000 | 4,433933508               |

Cuadro 2: Tiempo en función de la cantidad de paquetes y el tamaño de la mochila

Para instancias más grandes no era posible llevar a cabo las pruebas con la máquina con la que disponíamos.