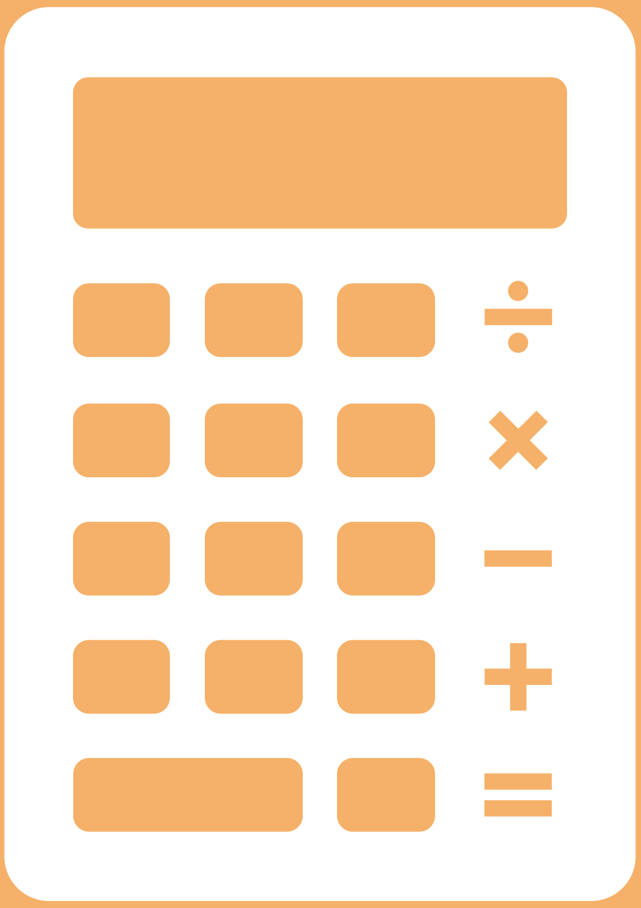
Hephaestus Academy



Matemática Discreta
Lógica Formal

SUMÁRIO

Lógica Formal - Parte I

Proposições e Conectivos

1. CONCEITO DE PROPOSIÇÕES

Proposição é todo conjunto de palavras ou símbolos que exprimem um pensamento de sentido completo.

As proposições transmitem pensamentos, isto é, afirmam fatos ou exprimem juízos que formamos a respeito de determinados entes.

Exemplos de proposições:

a) A Lua é um satélite da Terra

b) Belo Horizonte é a capital de Minas Gerais

c) $\pi > 2$

A lógica matemática tem como regras fundamentais do pensamento os dois seguintes princípios:

1) PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.
2) PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO: Toda preposição ou é verdadeira ou é falsa, isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro.

Em virtude deste princípio, diz-se que a Lógica Matemática é uma Lógica bivalente. Por exemplo, as três proposições acima são todas verdadeiras, mas são falsas as três proposições abaixo:

a) Cristóvão Colombo descobriu o Brasil

b) Camões escreveu A Odisseia

c) O número π é racional

Assim, as proposições são expressões a respeito das quais tem sentido dizer que são verdadeiras ou falsas.

2. VALORES LÓGICOS DAS PROPOSIÇÕES.

Chama-se valor lógico de uma proposição a verdade se a proposição é verdadeira e a falsidade se a proposição é falsa.

Os valores lógicos verdade e falsidade são abreviados com V e F, respectivamente. Dessa forma, os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam que:

“Toda proposição tem um, e um só, dos valores V, F”.

Consideremos os exemplos de proposições:

a) O óleo é menos denso que a água

b) A Terra é o centro do sistema solar

A proposição a tem como valor lógico a verdade (V) e a proposição b tem como valor lógico a falsidade (F).

3. TIPOS DE PROPOSIÇÕES.

As proposições podem ser classificadas em simples ou atômicas e compostas ou moleculares.

A proposição simples ou atômica é aquela que não contém nenhuma outra proposição como parte integrante de si mesma.

Normalmente são designadas pelas letras minúsculas p, q, r, s, … , chamadas letras proposicionais.

Vejamos os exemplos abaixo de proposições atômicas:

p : Cláudio é careca

q : Afonso é alto

r : O número 25 é quadrado perfeito

A proposição composta ou molecular é aquela formada pela combinação de duas ou mais proposições.

Normalmente são designadas pelas letras maiúsculas P, Q, R, S, … , também chamadas de letras proposicionais.

Vejamos os exemplos abaixo de proposições moleculares:

P : Cláudio é careca e Afonso é alto

Q : Cláudio é careca ou Afonso é alto

R : Se 25 é ímpar, então 24 é par

4. CONECTIVOS

Conectivos são palavras que se usam para formar novas proposições a partir de outras.

Vejamos os seguintes exemplos de proposições compostas:

P : O número 6 é par e o numero 8 é cubo perfeito

Q : O triângulo ABC é escaleno ou isósceles

R : Não está frio

S : Se Diogo é engenheiro, então sabe Matemática

T : O triângulo ABC é equilátero se, e somente se, é equiângulo

São conectivos usuais em Lógica Matemática as palavras:

"e" , "ou" , "não", "se … então … " e "… se, e somente se, … "

Exercícios I - Valor lógico

1. Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) O número 17 é primo (V)

b) Fortaleza é a capital da Bahia (F)

c) Tiradentes morreu afogado (F)

d) $(6 + 9)^2 = 6^2 + 9^2$ (V)

e) $-1 < -8$ (F)

f) 0,131313 … é uma dízima periódica simples (V)

g) Um triângulo escaleno tem todos os lado iguais (F)

h) Todo número divisível por 5 termina por 5 (F)

i) $\sqrt{81} = 9$ (V)

j) O produto de dois números ímpares é um numero ímpar (F)

Lógica Formal - Parte II

Operações Lógicas sobre Proposições

Quando pensamos, realizamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. As operações lógicas obedecem a regras de cálculo, denominado cálculo proposicional, semelhante ao da matemática sobre números. Iremos estudar a seguir as operações lógicas fundamentais.

1. CONJUNÇÃO

Chama-se conjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p e q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando as duas proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a conjunção de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: “p ^ q”, que lê-se “p e q”.

Vejamos a seguir a tabela verdade da conjunção “p ^ q”:

p	q	p ^ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Vejamos alguns exemplos:

1º - “O Brasil é um país rico e grande”.

p - O Brasil é rico (V)

q - O Brasil é grande (V)

p ^ q : O Brasil é um país rico e grande (V)

V(p ^ q) = V(p) ^ V(q) = V ^ V = V

2º - “O céu é azul e a terra é plana”

p - O céu é azul (V)

q - A terra é plana (F)

p ^ q : O céu é azul e a terra é plana (F) V(p ^ q) = V(p) ^ V(q) = V ^ F = F

3º - “Luiz é médico e artista”

p - Luiz é médico (F)

q - Luiz é artista (V)

p ^ q : Luiz é médico e artista (F) V(p ^ q) = V(p) ^ V(q) = F ^ V = F

4º - “O presidente é honesto e inteligente”

p - O presidente é honesto (F)

q - O presidente é inteligente (F)

p ^ q : O presidente é honesto e inteligente (F) V(p ^ q) = V(p) ^ V(q) = F ^ F = F

2. DISJUNÇÃO

Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “p e q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.

Para representar simbolicamente a disjunção de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: "p V q”, que lê-se “p ou q”.

Vejamos a seguir a tabela verdade da disjunção "p V q”:

p	q	p V q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Vejamos alguns exemplos:

1º - “Rosseau é francês ou filósofo”

p - Rosseau é francês (V)

q - Rosseau é filósofo (V)

p V q : Rosseau é francês ou filósofo (V) V(p V q) = V(p) V V(q) = V V V = V

2º - “Camões escreveu Os Lusíadas ou Odisseia”

p - Camões escreveu Os Lusíadas (V)

q - Camões escreveu Odisseia (F)

p V q : Camões escreveu Os Lusíadas ou Odisseia (V) V(p V q) = V(p) V V(q) = V V F = V

3º - “O sol gira em torno da terra ou a terra gira em torno do sol”

p - O sol gira em torno da terra (F)

q - A terra gira em torno do sol (V)

p V q : O sol gira em torno da terra ou a terra gira em torno do sol (V) V(p V q) = V(p) V V(q) = F V V = V

4º - “Roma é a capital da Rússia ou dos Estados Unidos da America”

p - Roma é a capital da Rússia (F)

q - Roma é a capital dos Estados Unidos da America (F)

p V q : Roma é a capital da Rússia ou dos Estados Unidos da America (F) V(p V q) = V(p) V V(q) = F V F = F

3. NEGAÇÃO

Chama-se a negação de uma proposição p a proposição representada por "não p", cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e falsidade (F) quando p é verdadeira. Desta forma, "não p" tem sempre o valor oposto de p.

Para representar simbolicamente a negação de p, utilizamos as seguintes notações: "~ p" ou " ¬ p", que lê-se "não p". As duas formas são validas.

Vejamos a seguir a tabela verdade da negação de p:

p	~ p
V	F
F	V

Vejamos alguns exemplos:

a) p : O Sol é uma estrela

~ p : O Sol não é uma estrela

b) p : Otávio é cientista

~ p : Não é verdade que Otávio é cientista

c) p : Renata é confusa

~ p : É falso que Renata é confusa

4. CONDICIONAL - IMPLICAÇÃO

Chama-se proposição condicional ou implicação uma proposição representada por "se p então q", cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeiro e q é falso e a verdade (V) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a implicação de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: "p → q", que também se lê das seguintes maneiras.

(i) p é condição suficiente para q

(ii) q é condição necessária para p

Vejamos a seguir a tabela verdade da implicação "p → q":

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Vejamos alguns exemplos:

a) “Se a média de Ana é maior que sete, então Ana será aprovada”

p : “Se a média de Ana é maior que sete” (V)

q : "então Ana será aprovada” (V)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow V = V$

b) “Se a média de Ana é maior que sete, então Ana não será aprovada”

p : “Se a média de Ana é maior que sete” (V)

q : "então Ana não será aprovada” (F)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = V \rightarrow F = F$

c) “Se a média de Ana é menor que sete, então Ana não será aprovada”

p : “Se a média de Ana é menor que sete” (F)

q : "então Ana não será aprovada” (V)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow V = V$

d) “Se a média de Ana é menor que sete, então Ana será aprovada”

p : “Se a média de Ana é menor que sete” (F)

q : "então Ana será aprovada” (F)

$p \rightarrow q$: $V(p \rightarrow q) = V(p) \rightarrow V(q) = F \rightarrow F = F$

5. BICONDICIONAL - BI-IMPLICAÇÃO

Chama-se proposição bicondicional ou bi-implicacão, uma proposição representada por “p se, e somente se, q”, cujo o valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.

Para representar simbolicamente a bi-implicação de duas proposições p e q, utilizamos a seguinte notação: “$p \leftrightarrow q$”, que também se lê de uma das seguintes maneiras:

(i) p é condição necessária e suficiente para q

(ii) q é condição necessária e suficiente para p

Vejamos a seguir a tabela verdade para a bicondicional “$p \leftrightarrow q$”:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Vejamos alguns exemplos:

a) “Frida será uma artista renomada se e somente se suas obras forem famosas”

(p) “Frida será uma artista renomada” (V)

(q) "se suas obras forem famosas” (V)

$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow V = V$

b) “Frida será uma artista renomada se e somente se suas obras forem desconhecidas”

(p) “Frida será uma artista renomada” (V)

(q) "se suas obras forem desconhecidas” (F)

$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = V \leftrightarrow F = F$

c) “Frida será uma artista anônima se e somente se suas obras forem famosas”

(p) “Frida será uma artista anônima” (F)

(q) "se suas obras forem famosas” (V)

$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow V = F$

d) “Frida será uma artista anônima se e somente se suas obras forem desconhecidas”

(p) “Frida será uma artista anônima” (F)

(q) "se suas obras forem desconhecidas” (F)

$p \leftrightarrow q : V(p \leftrightarrow q) = V(p) \leftrightarrow V(q) = F \leftrightarrow F = V$

Exercícios II - Operações Lógicas sobre Proposições

1. Sejam as proposições p: Está frio e q: Está chovendo. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $\sim p$ = Não está frio

b) $p \wedge q$ = Está frio e está chovendo

c) $p \vee q$ = Está frio ou está chovendo

d) $q \leftrightarrow p$ = Está chovendo se, e somente se, está frio

e) $p \rightarrow \sim q$ = Se está frio, então não está chovendo

f) $p \vee \sim q$ = Está frio ou não está chovendo

g) $\sim p \wedge \sim q$ = Não está frio e não está chovendo

h) $p \leftrightarrow \sim q$ = Está frio se, e somente se, não esta chovendo

i) $p \wedge \sim q \rightarrow p$ = Se está frio e não está chovendo, então está frio

2. Sejam as proposições p: João é gaúcho e q: Jaime é paulista. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) $\sim (p \wedge \sim q)$ = Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista

b) $\sim \sim p$ = Não é verdade que João não é gaúcho

c) $\sim (\sim p \vee \sim q)$ = Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista

d) $p \rightarrow \sim q$ = Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista

e) $\sim p \leftrightarrow \sim p$ = João não é gaúcho se, e somente se, Jaime não é paulista

f) $\sim (\sim q \rightarrow p)$ = Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho

3. Sejam as proposições p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Marcos é alto e elegante = $p \wedge q$

b) Marcos é alto, mas não é elegante = $p \wedge \sim q$

c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante = $\sim (\sim p \vee q)$

d) Marcos não é nem alto e nem elegante = $\sim p \wedge \sim q$

e) Marcos é alto ou é baixo e elegante = $p \vee (\sim p \wedge q)$

f) É false que Marcos é baixo ou que é elegante = $\sim (\sim p \vee \sim q)$

4. Sejam as proposições p: Sueli é rica e q: Sueli é feliz. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Sueli é pobre, mas feliz = $\sim p \wedge q$

b) Sueli é rica ou infeliz = $p \vee \sim q$

c) Sueli é pobre e infeliz = $\sim p \wedge \sim q$

d) Sueli é pobre ou rica, mas é infeliz = $(\sim p \vee q) \wedge \sim q$

Lógica Formal - Parte III

Construção de Tabelas-Verdade

1. TABELA VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Dadas várias proposições simples p, q, r, …, podemos combiná-las pelos conectivos lógicos:

$$\sim,\ \wedge\ ,\ V,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

e construir proposições compostas, tais como:

$$P(p,\ q) = \sim p\ V\ (p \rightarrow q)$$

$$Q(p,\ q) = (p \leftrightarrow \sim q) \wedge q$$

$$R(p,\ q,\ r) = (p \rightarrow \sim q\ V\ r) \wedge (q\ V\ (p \leftrightarrow\ \sim r)$$

Então, com o emprego das tabelas-verdade das operações lógicas fundamentais:

$$\sim p,\ p \wedge q,\ p\ V\ q,\ p \rightarrow q,\ p \leftrightarrow q$$

Podemos construir a tabela-verdade de qualquer proposição composta dada. A tabela-verdade mostrará os casos em que a proposição composta será verdadeira (V) ou falsa (F), de acordo com a combinação dos valores lógicos das proposições simples componentes.

2. NÚMERO DE LINHAS DE UMA TABELA-VERDADE

O número de linhas em uma tabela verdade de uma proposição composta dependerá diretamente do número proposições simples que a compõem, de acordo com o seguinte teorema:

A tabela-verdade de uma proposição composta com n proposições simples componentes contém 2^n linhas.

3. CONSTRUÇÃO DA TABELA-VERDADE DE UMA PROPOSIÇÃO COMPOSTA

Para a construção prática da tabela-verdade de uma proposição composta devemos primeiro contar o número de proposições simples que a ela possui. Se a proposição composta possui n proposições simples: p_1, p_2, p_3,… , p_n, então a tabela-verdade irá conter 2^n linhas. Posto isto, à 1ª proposição simples p_1 atribuem-se $2^n / 2 = 2^{n-1}$ valores V seguidos de 2^{n-1} valores F; à 2ª proposição simples p_2 atribuem-se $2^n / 4 = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de 2^{n-2} valores F, seguidos de 2^{n-2} valores V, seguidos, finalmente, de 2^{n-2} valores F; e assim por diante. De modo genérico, a k-ésima proposição simples p_k ($k \leq n$) atribuem-se alternadamente $2^n / 2^k = 2^{n-k}$ valores V seguidos de igual número de valores F.

Vejamos o exemplo a seguir:

1) Construção da tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim (p \wedge \sim q)$$

Primeiro passo: Forma-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segundo passo: Forma-se a coluna para ~ q:

p	q	~ q
V	V	F
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Terceiro passo: Forma-se a coluna para p ^ ~ q:

p	q	~ q	p ^ ~ q
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Quarto passo: Forma-se a coluna para ~ (p ^ ~ q):

p	q	~ q	p ^ ~ q	~ (p ^ ~ q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V

Para a construção das tabelas-verdade é imprescindível ter em mente os resultados das possíveis combinações de valores lógicos de cada conectivo lógico, como o conectivo de negação (~), conjunção (^), disjunção (V), condicional (→) e bicondicional (↔).

Vejamos o mais um exemplo:

2) Construção da tabela-verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim (p \wedge q) \vee \sim (q \leftrightarrow p)$$

Primeiro passo: Forma-se primeiro as colunas correspondentes às duas proposições simples componentes p e q:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Segunda passo: Forma-se a coluna para p ^ q:

p	q	p ^ q
V	V	v
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Terceiro passo: Forma-se a coluna para q ↔ p:

p	q	p ^ q	q ↔ p
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Quarto passo: Forma-se a coluna para ~(p ^ q):

p	q	p ^ q	q ↔ p	~(p ^ q)
V	V	V	V	F
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	V	V

Quarto passo: Forma-se a coluna para ~(p ↔ q):

p	q	p ^ q	q ↔ p	~(p ^ q)	~(p ↔ q)
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	V
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	V	F

Quinto passo: Forma-se a coluna para ~ (p ^ q) V ~ (q ↔ p):

p	q	p ^ q	q ↔ p	~(p ^ q)	~(p ↔ q)	~(p ^ q) V ~(p ↔ q)
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V

Exercícios III - Construção da Tabela-Verdade

1. Construa as tabelas-verdade das seguintes proposições: ~, ^ , V, →, ↔

   a) ~ (p V ~ q)
   b) ~ (p → ~ q)
   c) p ^ q → p V q
   d) ~ p → (q → p)
   e) (p → q) → p ^ q
   f) q ↔ ~ q ^ p
   g) (p ↔ ~ q) ↔ q → p
   h) (p ↔ ~ q) → ~ p ^ q

Lógica Formal - Parte IV

Tautologias, Contradições e Contingências

1. TAUTOLOGIA

Uma tautologia é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre verdade (V), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Na coluna de saída da tabela-verdade de uma tautologia, ocorre sempre o valor lógico V (verdade). Assim, se $P(p_1, p_2, …, p_n)$ é uma tautologia, seu valor lógico é V independente dos valores lógicos das proposições simples $p_1, p_2, …, p_n$.

Uma tautologia é também chamada de proposição tautológica ou proposição logicamente verdadeira.

A afirmação "hoje é sábado ou não é sábado" é um exemple de tautologia. Pois não há dúvidas de que seja verdadeira sempre, não importando qual dia seja hoje.

Vejamos o exemplo a seguir:

a) A proposição ~ (p ^ ~ p) é uma tautologia, como pode ser visto em sua tabela-verdade.

p	~ p	p ^ ~ p	~ (p ^ ~ p)
V	F	F	V
F	V	F	V

Observe que, na ultima coluna qual chamamos de coluna de saída da tabela verdade de ~ (p ^ ~ p), só há o valor lógico V (verdade). Esse exemplo ilustra o princípio da não-contradição, apresentado anteriormente, e significa que a afirmação "uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa" é verdadeira.

b) A coluna de saída da tabela-verdade de p V ~ p só apresenta valor lógico V (verdade).

p	~ p	p V ~ p
V	F	V
F	V	V

Logo, p V ~ p é uma tautologia. Veja que esse exemplo ilustra o princípio do terceiro excluído, o qual corresponde dizer que a afirmação "uma proposição ou é verdadeira ou é falsa" é necessariamente verdadeira.

2. CONTRADIÇÃO

Uma contradição é uma proposição composta cujo valor lógico é sempre falsidade (F), independente dos valores lógicos das proposições simples que a compõem.

Uma contradição também é chamada proposição contraválida ou proposição logicamente falsa.

Na coluna de saída da tabela verdade de uma contradição, ocorre sempre o valor lógico F (falsidade). Assim, o valor lógico de uma contradição $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ é F, independente dos valores lógicos das proposições simples $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$.

A afirmação "hoje é sábado e hoje não é sábado" é contraválida, pois seu valor lógico é evidentemente falso, não importando qual dia seja hoje.

Vejamos alguns exemplos a seguir:

a) a proposição $p \wedge \sim p$ é uma contradição, conforme se vê por sua tabela-verdade.

p	~ p	p ^ ~ p
V	F	F
F	V	F

Como pode-se notar, a coluna de saída da tabela-verdade de $p \wedge \sim p$ só encerra o valor lógico (falsidade). Esse exemplo ilustra o principio da não contradição, segundo o qual a afirmação "uma proposição não pode ser simultaneamente verdadeira e falsa" é necessariamente verdadeira.

b) A proposição $p \leftrightarrow \sim p$ é contraválida. Vejamos sua tabela verdade:

p	~ p	p ↔ ~ p
V	F	F
F	V	F

Note que a última coluna da tabela-verdade de $p \leftrightarrow \sim p$ só apresenta o valor lógico F (falsidade).

Um princípio bem útil na determinação de tautologias e contradições é o Princípio da Substituição, o que nos diz o seguinte:

"Seja $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ uma tautologia (contradição) qualquer. Se substituirmos as proposições $P(p_1, p_2, \dots, p_n)$ por outras proposições quaisquer (simples ou compostas) $q_1, q_2, \dots, q_n$, então a nova proposição $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$ que se obtém também é uma tautologia (contradição)".

A demonstração do Princípio da Substituição é imediata e segue do fato que o valor lógico de uma tautologia é sempre V (verdade) e de uma contradição é sempre F (falsidade), quaisquer que sejam os valores lógicos de suas proposições componentes, ou seja, ser uma tautologia ou uma contradição depende apenas de como as componentes estão relacionadas, não dependendo de serem estas componentes verdadeiras ou falsas.

Como aplicação do Princípio da Substituição, a proposição (r → ~ s) V ~ (r → ~ s) é tautológica, pois é obtida da proposição, p V ~ p do exemplo b) da seção de Tautologia, por substituição da proposição p por r → ~ s. A Inserção de parêntesis é para garantir que a proposição obtida continue sendo a disjunção de uma proposição com sua negação.

3. CONTINGÊNCIAS

Uma contingência é uma proposição composta em cuja tabela-verdade ocorrem, na coluna de saída, os valores lógicos V (verdade) e F (falsidade).

Uma contingência é também chamada proposição contingente ou proposição indeterminada.

Na ultima coluna da tabela-verdade de uma contingência, devem ocorrer os valores lógicos V e F, cada um pelo menos uma vez.

Vejamos o exemplo a seguir:

a) A proposição p V q → p ^ q é uma contingência, conforme pode ser visto em sua tabela-verdade.

p	q	p V q	p ^ q	p V q → p ^ q
V	V	V	V	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Perceba que a última coluna da tabela-verdade de p V q → p ^ q apresenta valores lógicos V (verdade) e F (falsidade).

Exercícios IV - Tautologias, Contradições e Contingências

1. Determine se as seguintes proposições são tautológicas, contradições ou contingências utilizando a tabela-verdade:

a) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

b) $p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$

c) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim q$

d) $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

e) $\sim p \wedge r \rightarrow q \vee \sim r$

f) $p \rightarrow r \leftrightarrow q \vee \sim r$

Lógica Formal - Parte V

Implicação lógica e Equivalência lógica

1. PROPOSIÇÕES INDEPENDENTES E DEPENDENTES

Para uma melhor compreensão do assunto, é necessário entendermos algumas definições introdutórias. Vejamos sobre proposições independentes e dependentes.

Duas proposições são ditas independentes quando, em suas tabelas-verdade, ocorrem todas as quatro alternativas VV, VF, FV e FF. Do contrário, ou seja, quando nas tabelas-verdade de duas proposições não ocorre pelo menos uma das quatro alternativas VV, VF, FV e FF, dizemos que elas são dependentes. Quando duas proposições são dependentes, dizemos ainda que existe uma relação entre elas.

Como podemos ver na tabela-verdade a seguir, as proposições $\sim p$ e $p \leftrightarrow q$ são dependentes, pois ocorrem as quatro alternativas: FV na primeira linha, FF na segunda linha, VF na terceira linha e VV na quarta linha.

p	q	~p	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V

As proposições p e $q \rightarrow p$ são dependentes, como pode ser visto de suas tabelas verdades.

É possível perceber que ocorre na VV nas linhas 1 e 2, FV na linha 4 e FF na linha 3, mas não ocorres a alternativa VF. Portanto, existe uma relação entre as proposições p e $q \rightarrow p$.

p	q	$q \rightarrow p$
V	V	V
V	F	V
F	V	F
F	F	V

Uma relação entre proposições em que não ocorre exatamente uma das alternativas VV, VF, FV, FF é dita uma relação simples, enquanto que uma relação em que não ocorrem exatamente duas das alternativas é uma relação composta.

2. IMPLICAÇÕES LÓGICAS

Dizemos que uma proposição P implica (ou implica logicamente) uma proposição Q, e representamos $P \Rightarrow Q$, quando, em suas tabelas-verdade, quando, em suas tabelas-verdade, não ocorre VF (nessa ordem) numa mesma linha.

Outras formas equivalente de dizer que P implica Q ($P \Rightarrow Q$) são:

- $P \Rightarrow Q$ quando Q é verdadeira (V) todas as vezes que P for verdadeira (V).

- $P \Rightarrow Q$ quando não ocorre P e Q com valores lógicos simultâneos, respectivamente, V e F.

Vejamos o exemplo a seguir, das tabelas-verdade das proposições $p \wedge q$ e de $p \leftrightarrow q$. Note que, sempre que $p \wedge q$ é verdadeira (V), $p \leftrightarrow q$ é também verdadeira:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	V

Portanto, não ocorre a alternativa VF (nessa ordem) nas tabelas-verdade de $p \wedge q$ e $p \leftrightarrow q$. Logo, $p \wedge q$ implica $p \leftrightarrow q$ ou, simbolicamente, $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$.

O teorema (1) seguinte diz que toda proposição implica uma tautologia e somente uma contradição implica uma contradição.

"A proposição P implica a proposição Q, isto é, $P \Rightarrow Q$ se, e somente se, a condicional $P \rightarrow Q$ é uma tautologia".

Portanto, toda implicação corresponde a uma condicional tautológica, e vice-versa. Mediante o Princípio da Substituição, visto anteriormente, uma consequência do Teorema 1 é o seguinte corolário:

Sejam $p_1, p_2, \dots p_n$ proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \dots p_n) \Rightarrow Q(p_1, p_2, \dots p_n)$, então temos também $P(p'_1, p'_2, \dots p'_n) \Rightarrow Q(p'_1, p'_2, \dots p'_n)$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas $p'_1, p'_2, \dots p'_n$

O Corolário garante que, ao substituirmos as proposições simples componentes em uma implicação por outras proposições quaisquer, ainda teremos uma implicação.

Podemos notar facilmente que a relação de implicação goza das seguintes propriedades:

1. Reflexiva: $P \Rightarrow P$

2. Transitiva: Se $P \Rightarrow Q$ e $Q \Rightarrow R$, então $P \Rightarrow R$

3. EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

Dizemos que uma proposição P é equivalente (ou logicamente equivalente) a uma proposição Q, e representaremos por P ⇔ Q, quando, em suas tabelas-verdade, não ocorrem VF e nem FV numa mesma linha.

Outra forma de dizer que P é equivalente a Q (P ⇔ Q) é

- P ⇔ Q Quando as tabelas-verdade de P e Q são idênticas.

Vejamos o exemplo a seguir, onde as proposições ~~p e p são equivalentes, desse modo, toda proposição é equivalente à sua dupla negação. De fato, basta verificar que as tabelas-verdade de ~~p e de p são idênticas:

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

Portanto, simbolicamente, temos ~~p ⇔ p, chamada Regra da Dupla Negação.

Vejamos mais um exemplo, onde as proposições p → q e ~p V q são equivalentes, ou seja, uma condicional é equivalente à disjunção da negação do antecedente com o seu consequente. Simbolicamente, p → q ⇔ ~p V q. Esse fato pode ser comprovado verificando-se que as tabelas-verdade p → q e ~p V q são idênticas.

p	q	~p	p → q	~p V q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

O teorema (2) seguinte estabelece uma relação entre a equivalência lógica e certa proposição bicondicional.

“A proposição P equivale à proposição Q, isto é, P ⇔ Q se, e somente se, a bicondicional P ↔ Q for uma tautologia.”

Portanto, toda equivalência corresponde a uma bicondicional tautológica, e vice-versa. Mediante o Princípio da Substituição, visto anteriormente, uma consequência do Teorema 2 é o seguinte corolário:

Sejam p_1, p_2, … p_n proposições simples dadas. Se $P(p_1, p_2, \ldots p_n) \Leftrightarrow Q(p_1, p_2, \ldots p_n)$, então temos também $P(p'_1, p'_2, \ldots p'_n) \Leftrightarrow Q(p'_1, p'_2, \ldots p'_n)$ quaisquer que sejam as proposições simples ou compostas p'_1, p'_2, … p'_n.

Este corolário garante que, ao substituirmos as proposições simples componentes em uma equivalência por outras proposições quaisquer, ainda teremos uma equivalência.

Podemos notar facilmente que a relação de equivalência goza das seguintes propriedades:

1. Reflexiva: $P \Leftrightarrow P$
2. Simétrica: Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$
3. Transitiva: Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Exercícios V - Implicações e Equivalências

1. Usando tabela-verdade, prove que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.
2. Verifique, usando tabela-verdade, se a proposição $p \leftrightarrow \neg q$ implica ou não a proposição $\neg p \rightarrow \neg q$.
3. Usando tabela-verdade, mostre a equivalência $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$, a qual é chamada Regra de Absorção.
4. Verifique, usando tabela-verdade, que a proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente à conjunção das duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, ou seja, mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são equivalentes.

Lógica Formal - Parte VI

Refutação por Redução ao absurdo

1. REDUÇÃO AO ABSURDO

Método de Refutação é baseado em uma técnica de prova, chamada de prova por redução ao absurdo, que consiste no seguinte procedimento:

- Admite-se inicialmente que as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa em alguma atribuição de valores de verdade para as letras sentenciais;
- O argumento será válido se, em qualquer tentativa de explicitar essa tal atribuição um absurdo for gerado, isto é, se uma mesma sentença assumir tanto valor V como valor F

Vejamos o exemplo a seguir:

- Quando Diego completar 18 anos, ele terá que se alistar nas forças armadas.
- Se Diego se alistar nas forças armadas, ele terá de mudar de cidade.
- Logo, Diego completa 18 anos somente se mudar de cidade.

A conclusão pode ser reescrita da seguinte forma:

- Se Diego completar 18 anos, então Diego deverá mudar de cidade.

Então temos as seguintes sentenças atômicas:

- p : Diego completa 18 anos.
- q : Diego terá que se alistar nas forças armadas.
- r : Diego deverá mudar de cidade.

Ao representarmos de forma simbólica, os argumentos ficam assim:

Premissas:

$p \rightarrow q$
$q \rightarrow r$

Conclusão:

$p \rightarrow r$

Então, primeiramente devemos assumir que as premissas são todas verdadeiras e a conclusão é falsa.

Premissas:

$p \rightarrow q$ V
$q \rightarrow r$ V

Conclusão:

$p \rightarrow r$ F

Então agora, devemos analisar cada uma das sentenças atômicas. Assim, para que a conclusão seja FALSA (F), é necessário que p seja VERDADEIRO (V) e q seja FALSO (F), seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, V → F = F:

Premissas:

$p \rightarrow q$ V
$q \rightarrow r$ V

Conclusão:

$p^{V} \rightarrow r^{F}$ F

Assumindo-se que r é FALSO (F), então na proposição q→r é necessário que q também seja FALSO (F), pois é a única forma para a proposição q→r resultar em VERDADEIRO (V), seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, F → F = V:

Premissas:

$p \rightarrow q$ V
$q \rightarrow r^{F}$ V

Conclusão:

$p^{V} \rightarrow r^{F}$ F

Assumindo-se que q é FALSO (F), então na proposição p→q é necessário que p também seja FALSO (F), pois é a única forma para a proposição p→q resultar em VERDADEIRO (V), seguindo as regras da tabela verdade dos conectivos lógicos de implicação, F → F = V, então é exatamente aí que encontramos nossa prova por redução ao absurdo, pois a implicação p→q na verdade resulta em FALSO (F),

V → F = F:

Premissas:

$p^{V} \rightarrow q^{F}$ V
$q^{F} \rightarrow r^{F}$ V

Conclusão:

$p^{V} \rightarrow r^{F}$ F

Devemos nos recordar do princípio da não contradição:

“Princípio na Não-contradição: uma sentença não pode ser verdadeira e falsa em uma mesma atribuição de valores para as letras sentenciais”

Não podendo existir uma atribuição de valores para as letras sentenciais na qual as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Portanto, o argumento é válido.

Exercícios VI - Refutação por redução ao absurdo

1. Determine se as seguintes formas de argumentos são válidas ou inválidas utilizando o método de refutação por redução ao absurdo:

a)
$$\begin{array}{c} r \rightarrow \; p \vee q \\ \neg\, p \\ \hline r \rightarrow q \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{c} p \wedge q \;\rightarrow r \\ p \wedge \;\neg\, r \\ \hline \neg\, q \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{c} p \vee q \;\rightarrow t \\ \neg\, q \rightarrow r \\ \hline (p \wedge \neg\, r) \;\rightarrow t \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{c} r \\ p \rightarrow \;\neg\,(q \vee s) \\ \hline \neg\, p \vee \;(\neg\, q \wedge r) \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{c} \neg\, t \rightarrow r \\ q \wedge t \rightarrow \;\neg\, p \\ \hline p \rightarrow \; q \wedge r \end{array}$$

f)
$$\begin{array}{c} p \rightarrow \;(q \rightarrow r) \\ p \vee s \\ \neg\, r \\ \hline q \rightarrow s \end{array}$$

Gabarito

Valor lógico

1. Determine o valor lógico (V ou F) de cada uma das seguintes proposições:

a) O número 17 é primo (V)

b) Fortaleza é a capital da Bahia (F)

c) Tiradentes morreu afogado (F)

d) $(6 + 9)^2 = 6^2 + 9^2$ (V)

e) $-1 < -8$ (F)

f) 0,131313 … é uma dízima periódica simples (V)

g) Um triângulo escaleno tem todos os lado iguais (F)

h) Todo número divisível por 5 termina por 5 (F)

i) $\sqrt{81} = 9$ (V)

j) O produto de dois números ímpares é um numero ímpar (F)

Operações Lógicas sobre Proposições

1. Sejam as proposições p: Está frio e q: Está chovendo. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) ~ p = Não está frio

b) p ^ q = Está frio e está chovendo

c) p V q = Está frio ou está chovendo

d) q ↔ p = Está chovendo se, e somente se, está frio

e) p → ~ q = Se está frio, então não está chovendo

f) p V ~ q = Está frio ou não está chovendo

g) ~ p ^ ~ q = Não está frio e não está chovendo

h) p ↔ ~ q = Está frio se, e somente se, não esta chovendo

i) p ^ ~ q → p = Se está frio e não está chovendo, então está frio

2. Sejam as proposições p: João é gaúcho e q: Jaime é paulista. Traduza para a linguagem corrente as seguintes proposições:

a) ~ (p ^ ~ q) = Não é verdade que João é gaúcho e Jaime não é paulista

b) ~ ~ p = Não é verdade que João não é gaúcho

c) ~ (~ p V ~ q) = Não é verdade que João não é gaúcho ou que Jaime não é paulista

d) p → ~ q = Se João é gaúcho, então Jaime não é paulista

e) ~ p ↔ ~ p = João não é gaúcho se, e somente se, Jaime não é paulista

f) ~ (~ q → p) = Não é verdade que, se Jaime não é paulista, então João é gaúcho

3. Sejam as proposições p: Marcos é alto e q: Marcos é elegante. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Marcos é alto e elegante = p ^ q

b) Marcos é alto, mas não é elegante = p ^ ~ q

c) Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante = ~ (~ p V q)

d) Marcos não é nem alto e nem elegante = ~ p ^ ~ q

e) Marcos é alto ou é baixo e elegante = p V (~ p ^ q)

f) É false que Marcos é baixo ou que é elegante = ~ (~ p V ~ q)

4. Sejam as proposições p: Sueli é rica e q: Sueli é feliz. Traduza para a linguagem simbólica as seguintes proposições:

a) Sueli é pobre, mas feliz = ~ p ^ q

b) Sueli é rica ou infeliz = p V ~ q

c) Sueli é pobre e infeliz = ~ p ^ ~ q

d) Sueli é pobre ou rica, mas é infeliz = (~ p V q) ^ ~ q

Construção da Tabela-Verdade

1. Construa as tabelas-verdade das seguintes proposições:

a) ~ (p V ~ q)

p	q	~ q	p V ~ q	~ (p V ~ q)
V	V	F	V	F
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F

b) ~ (p → ~ q)

p	q	~ q	p → ~ q	~ (p → ~ q)
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	F

c) p ^ q → p V q

p	q	p ^ q	p V q	p ^ q → p V q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

d) ~ p → (q → p)

p	q	~ p	q → p	~ p → (q → p)
V	V	F	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

e) (p → q) → p ^ q

p	q	p → q	p ^ q	(p → q) → p ^ q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F

f) q ↔ ~ q ^ p

p	q	~ q	~ q ^ p	(p → q) → p ^ q
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	F	F	F
F	F	V	F	V

g) (p ↔ ~ q) ↔ q → p

p	q	~ q	p ↔ ~ q	q → p	(p ↔ ~ q) ↔ q → p
V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F

h) (p ↔ ~ q) → ~ p ^ q

p	q	~ p	~ q	p ↔ ~ q	~ p ^ q	(p ↔ ~ q) → ~ p ^ q
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V

Tautologias, Contradições e Contingências

1. Determine se as seguintes proposições são tautológicas, contradições ou contingências utilizando a tabela-verdade:

a) $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$

R: Tautologia

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
V	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

b) $p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$

R: Tautologia

p	q	r	$\sim q$	$p \wedge r$	$\sim q \vee r$	$p \wedge r \rightarrow \sim q \vee r$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

c) $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim q$

R: Contradição

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \sim q$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

d) $\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$

R: Contradição

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \wedge (p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	F	F

e) ~ p ^ r → q V ~ r

R: Contingência

p	q	r	~ p	~ r	~ p ^ r	q V ~ r	~ p ^ r → q V ~ r
V	V	V	F	F	F	V	V
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V

f) p → r ↔ q V ~ r

R: Contingência

p	q	r	~ r	p → r	q V ~ r	p → r ↔ q V ~ r
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V

Implicações e Equivalências

1. Usando tabela-verdade, prove que $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Portanto, a condicional $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico V. Logo, a proposição $p \wedge q$ implica $p \vee q$ ou, simbolicamente, $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$.

2. Verifique, usando tabela-verdade, se a proposição $p \leftrightarrow \neg q$ implica ou não a proposição $\neg p \rightarrow \neg q$.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da condicional $(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$(p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$
V	V	F	F	F	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	V	V

Portanto, a condicional $(p \leftrightarrow \neg q) \rightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$ não é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre o valor lógico F. Logo, a proposição $p \leftrightarrow \sim q$ não implica $\sim p \rightarrow \sim q$.

3. Usando tabela-verdade, mostre a equivalência $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$, a qual é chamada Regra de Absorção.

Solução:

Vamos construir a tabela-verdade da bicondicional $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$.

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Portanto, a bicondicional $p \rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p \rightarrow q$ é tautológica, pois, na coluna de saída de sua tabela-verdade, ocorre somente o valor lógico V. Logo, as proposições $p \rightarrow p \wedge q$ e $p \rightarrow q$ são equivalentes, ou seja, ocorre $p \rightarrow p \wedge q \Leftrightarrow p \rightarrow q$.

4. Verifique, usando tabela-verdade, que a proposição $p \leftrightarrow q$ é equivalente à conjunção das duas condicionais $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$, ou seja, mostre que $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são equivalentes.

Solução:

Vamos construir as tabelas-verdade das proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V

Portanto, as tabelas-verdade de $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são idênticas. Logo, as proposições $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ são equivalentes ou, simbolicamente, $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Refutação por redução ao absurdo

1. Determine se as seguintes formas de argumentos são válidas ou inválidas utilizando o método de refutação por redução ao absurdo:

a)
$$\begin{array}{c} r \rightarrow p \vee q \\ \neg p \\ \hline r \rightarrow q \end{array}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

b)
$$\begin{array}{c} p \wedge q \rightarrow r \\ p \wedge \neg r \\ \hline \neg q \end{array}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

c)
$$\begin{array}{c} p \vee q \rightarrow t \\ \neg q \rightarrow r \\ \hline (p \wedge \neg r) \rightarrow t \end{array}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

d)
$$\begin{array}{c} r \\ p \rightarrow \neg (q \vee s) \\ \hline \neg p \vee (\neg q \wedge r) \end{array}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

e)
$$\begin{array}{c} \neg t \rightarrow r \\ q \wedge t \rightarrow \neg p \\ \hline p \rightarrow q \wedge r \end{array}$$

R: Inválido, pois não ocorreu um absurdo.

f)

$$\begin{array}{c} p \to (q \to r) \\ p \vee s \\ \neg\, r \\ \hline q \to s \end{array}$$

R: Válido, pois ocorreu um absurdo.

Hephaestus Academy

Matemática Discreta

Lógica Formal

Este conteúdo foi desenvolvido usando as seguintes referências bibliográficas :

- De Alencar Filho, José. Introdução à Lógica Matemática. São Paulo: Nobel, 2002.

- Gêvane Muniz Cunha, Francisco; Kléo de Sousa Castro, Jânio. Matemática Discreta. Fortaleza: UAB/IFCE, 2017.

- Fusverk, Renata. Matemática Discreta - Conteúdos Didáticos. São José dos Campos, 2020