НИУ ИТМО

Отчет по лабораторной работе №5

“Фурритрация Фурри через Фурье”

Выполнил:

Проворов Николай Дмитриевич, R3238

Преподаватель:

Перегудин А. А.

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1. Непрерывное и дискретное преобразование Фурье

Для начала ура ура опять старая добрая волна:

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1, |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, |t| > \frac{1}{2} \end{cases} \tag{1}$$

Я если честно больше не хочу делать ее график, потому что мы его 100 раз видели, он такой типо -

$$\_\_\_\_\_|^{-}|\_\_\_\_\_ \tag{2}$$

Дааа, красиво.

Ладно, вот настоящий:

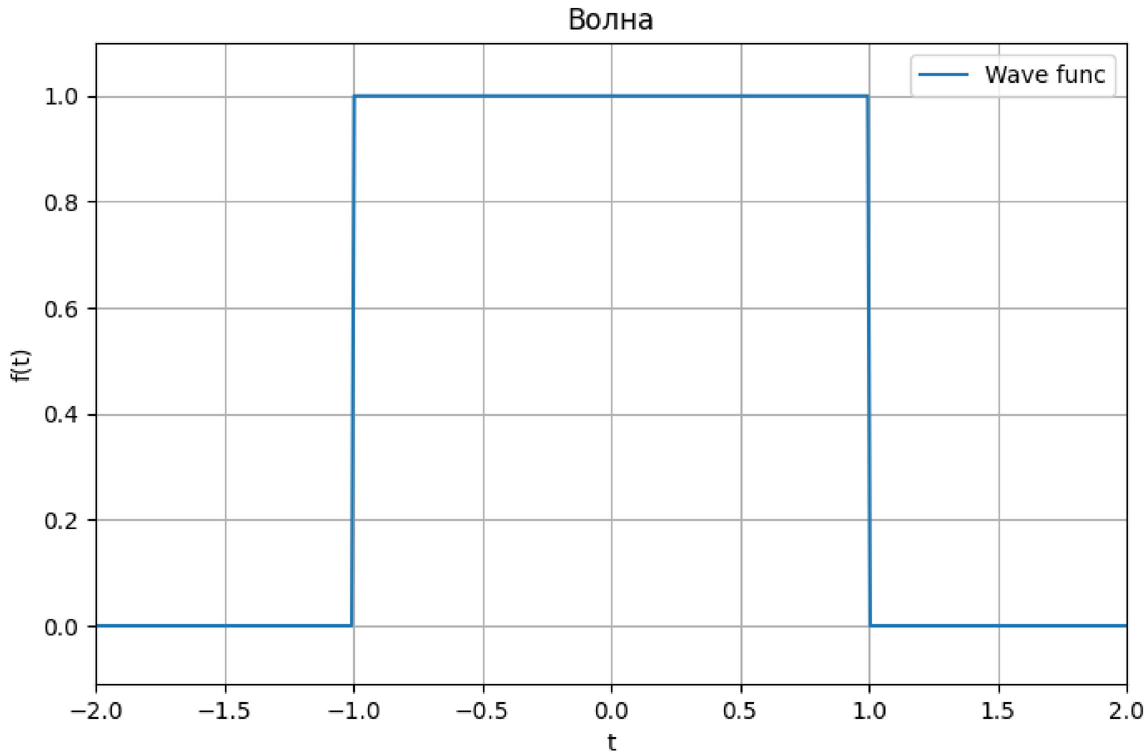

Рис. 1: График волны

1.1. Истинный Фурье - образ.

Ну придумали, аналитически, да где это видано. А у меня в работе и видано:

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i \nu t} dt = \frac{e^{\pi i \nu} - e^{\pi i \nu}}{-2\pi i \nu} = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} = sinc(\pi\nu) \tag{3}$$

Ну и график, без него никуда:

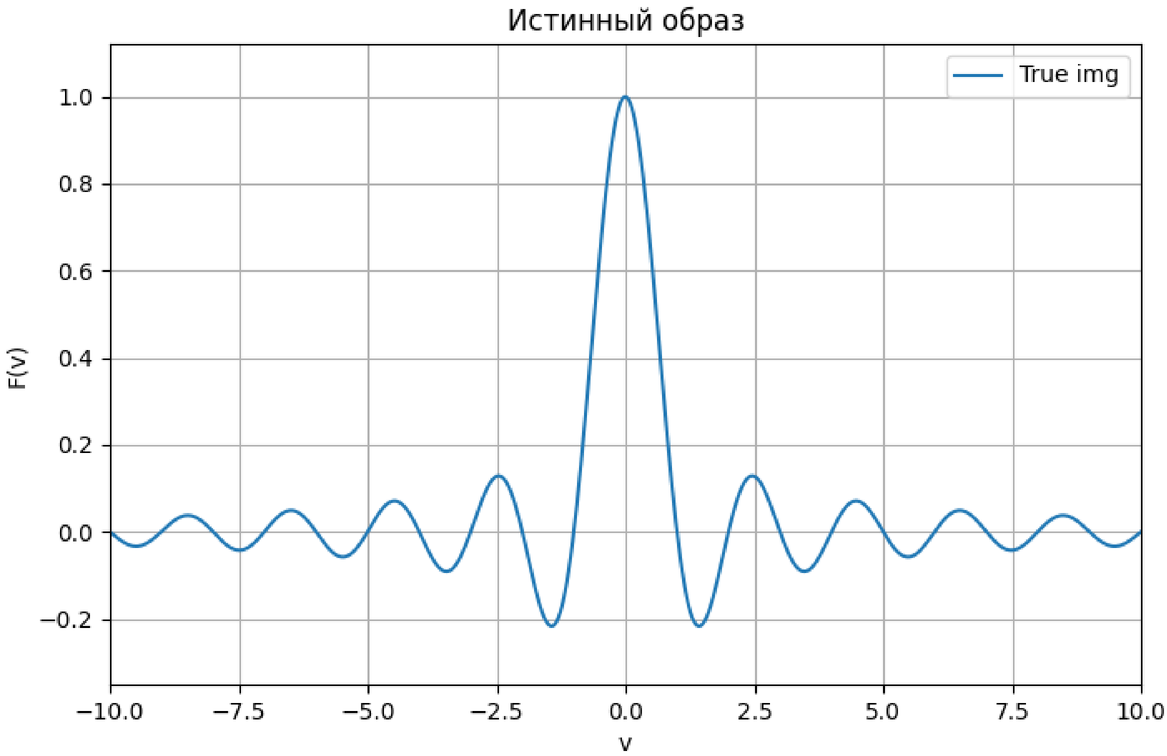

Рис. 2: График истинного Фурье - образа

1.2. Численное интегрирование.

Ну, для начала надо воспользоваться численным методом интегрирования. Ну, так как оно численно, а то есть не по бесконечному промежутку, то возьмем первый отрезок $[-20; 20]$.

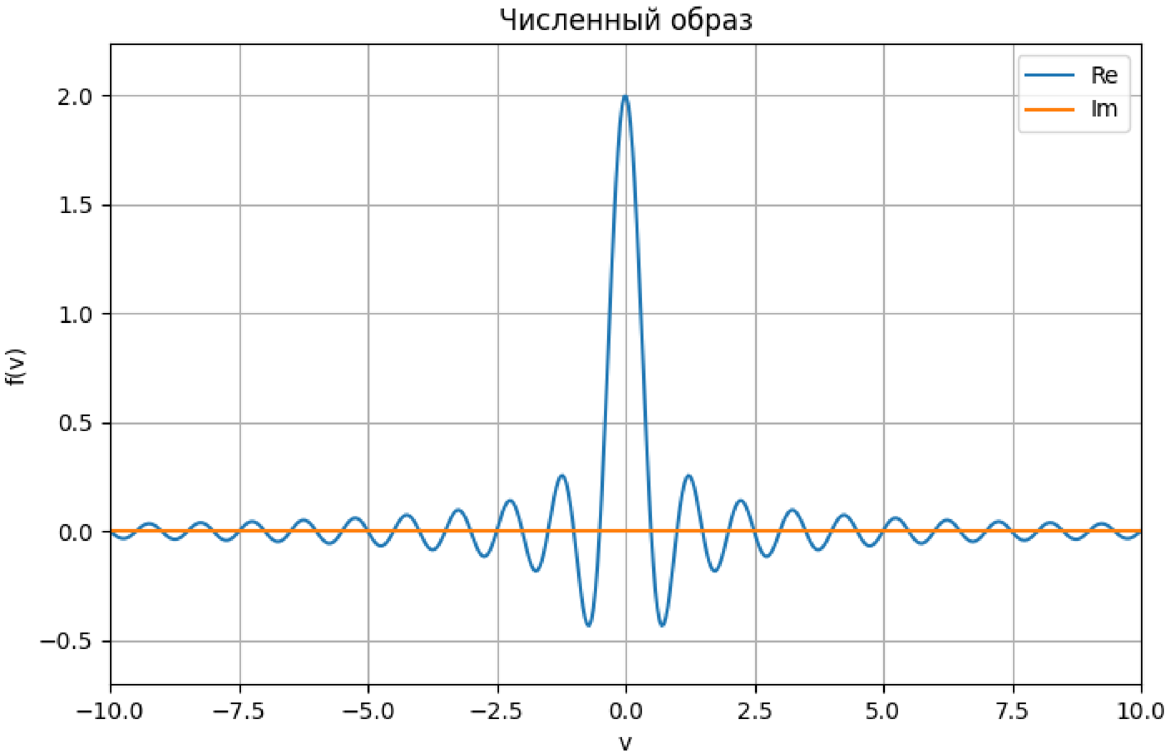

Рис. 3: График численного Фурье - образа

Они совпадают, можно идти дальше

1.3. Восстановление волны.

Посмотрим насколько точно удастся восстановить волну по ее численно-интегрированному Фурье - образу.

Довольно точно.

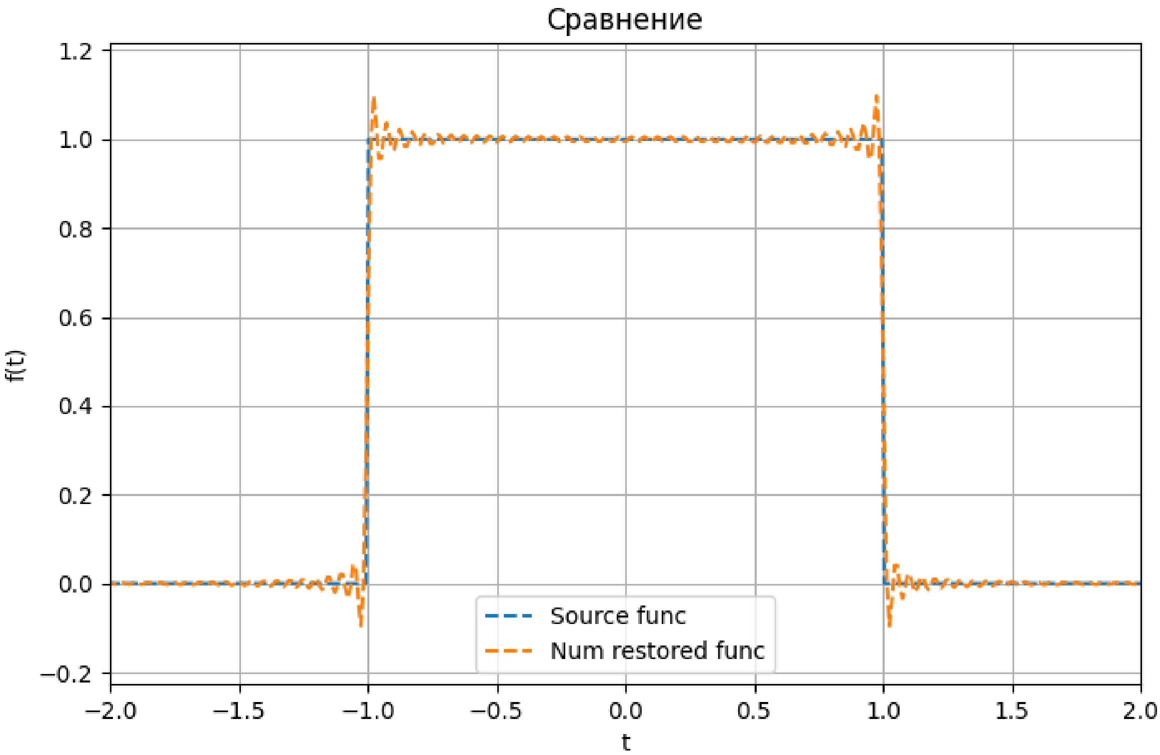

Рис. 4: Сравнение восстановленной волны и исходной

1.3.1. Влияние величины шага и размера промежутка

Рассмотрим другой промежуток интегрирования: 50.

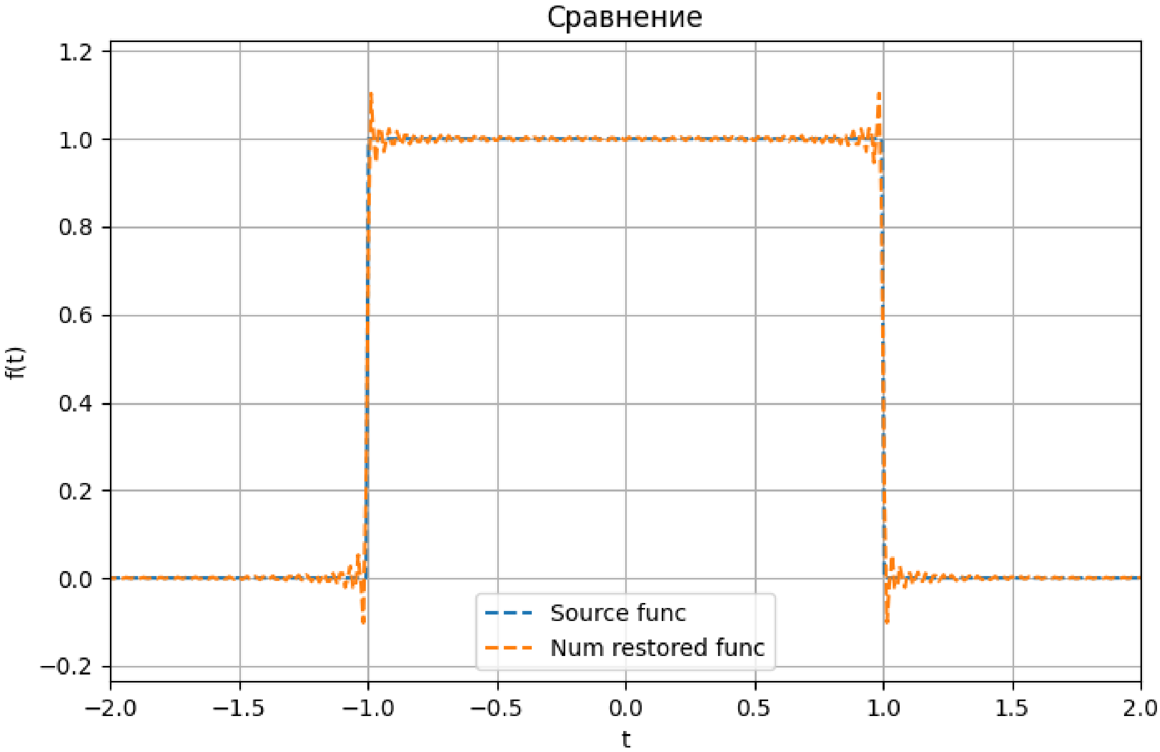

Рис. 5: Сравнение восстановленной волны и исходной

Еще посмотрим на влияние шага интегрирования: вместо 1000 возьмем 5000.

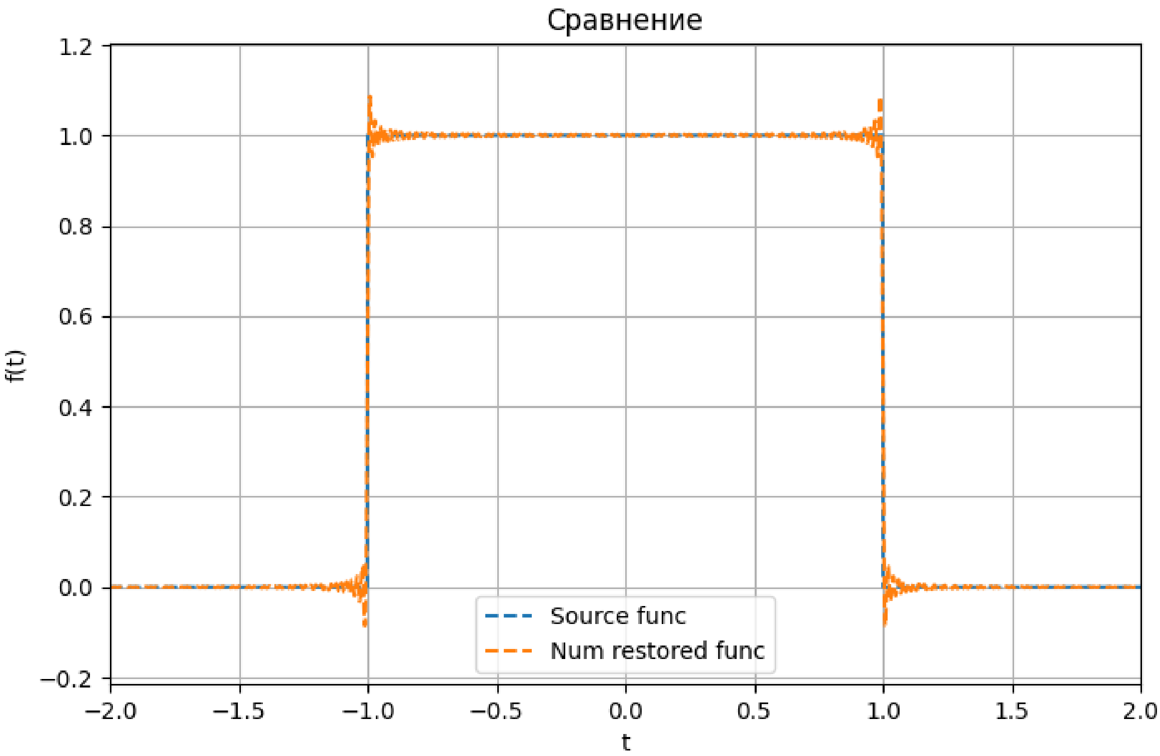

Рис. 6: Сравнение восстановленной волны и исходной

После этого можно немного порассуждать. Мы можем заметить, что при увеличении промежутка интегрирования функция восстанавливается лучше, что немного странно. Что касается шага интегрирования, то при увеличении шага восстановление волны становится лучше, что вполне логично.

1.4. Дискретное преобразование Фурье (использование DFT)

Для начала посмотрим как считается FFT в бибилиотеке numpy

$$A(k) = \sum_{m=0}^{n-1} a(m) e^{2\pi i \frac{mk}{n}} \tag{4}$$

А обратное:

$$a(m) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} A(k) e^{2\pi i \frac{mk}{n}} \tag{5}$$

К унитарному приведено параметром, так что все ок.

1.4.1. Найденный образ и восстановленная функция.

Посмотрим на образ и восстановленную функцию.

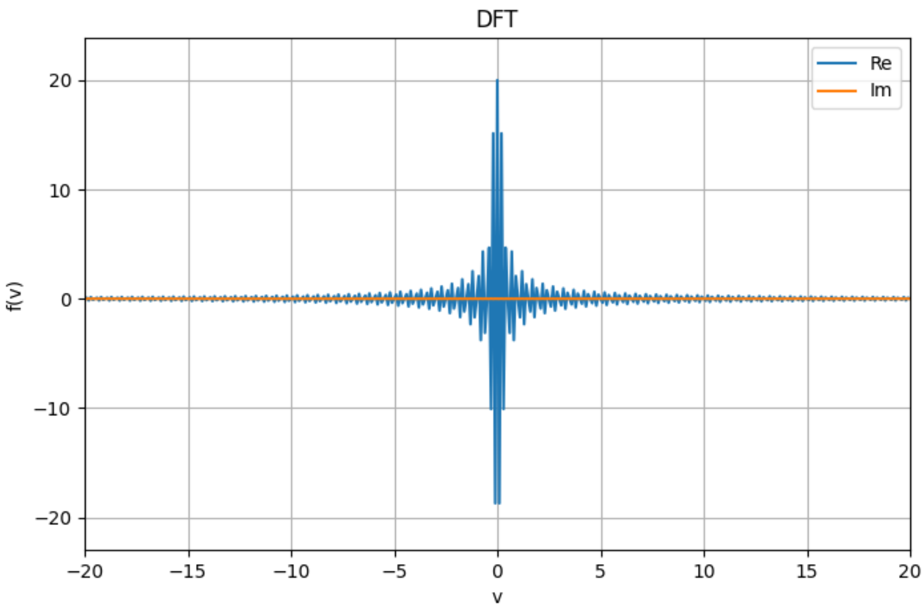

Рис. 7: Образ функции

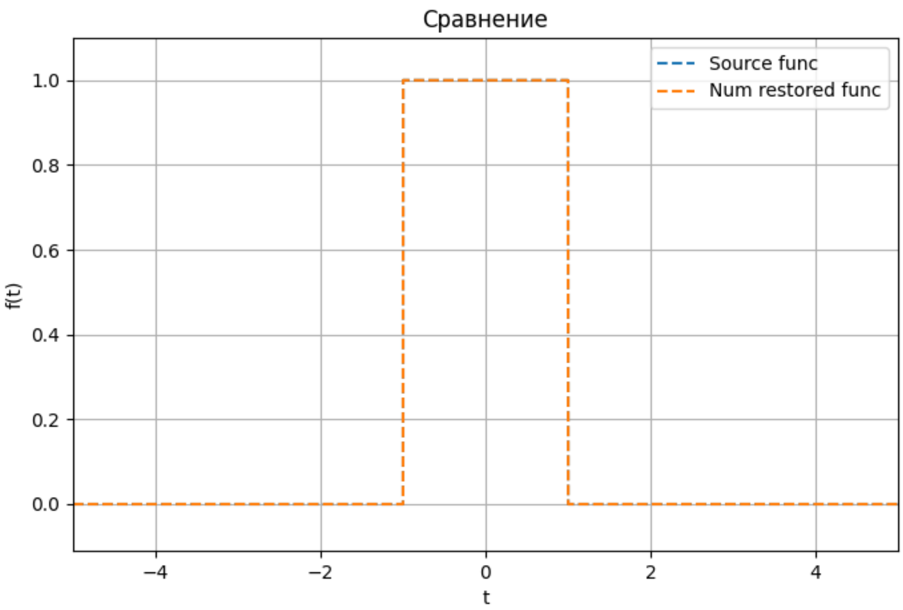

Рис. 8: Сравнение восстановленной функции и исходной

Выглядит очень прикольно, да и время тратится значительно меньше. КРУТО!

1.5. Приближение непрерывного с помощью DFT

Что же было не так в прошлом пункте? Вам, как, я думаю, и мне, не понравился образ, полученный в результате DFT. Он явно не похож на истинный. Но что же нам делать?

Давайте попробуем дискретизировать преобразование Фурье. Для этого введем 2 параметра: $t_d = m\triangle t + t_0, \upsilon_d = k\triangle \upsilon$. Они нужны для того чтобы ввести дискретное время и частоту. Посмотрим что получится:

$$\hat{f}(\upsilon) = \sum_{m=0}^{N-1} f(t_d)e^{-2\pi i \upsilon}\triangle t = \triangle t e^{-2\pi i \upsilon_d t_0} F(t_d), \text{ где } F(t_d) - \text{DFT образ} \tag{6}$$

Получается, что для получания образа надо умножить на $\triangle t e^{-2\pi i \upsilon_d t_0}$ DFT образ. Посмотрим на результат:

А восстановленная функция соответственно (рис. 10.):

Получается, все получилось.

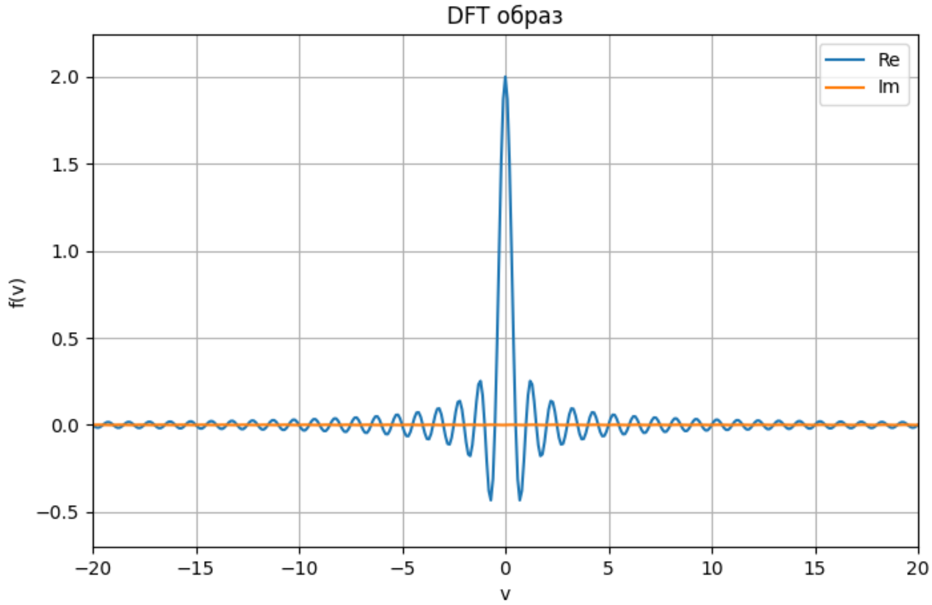

Рис. 9: Истинный образ функции с помощью DFT

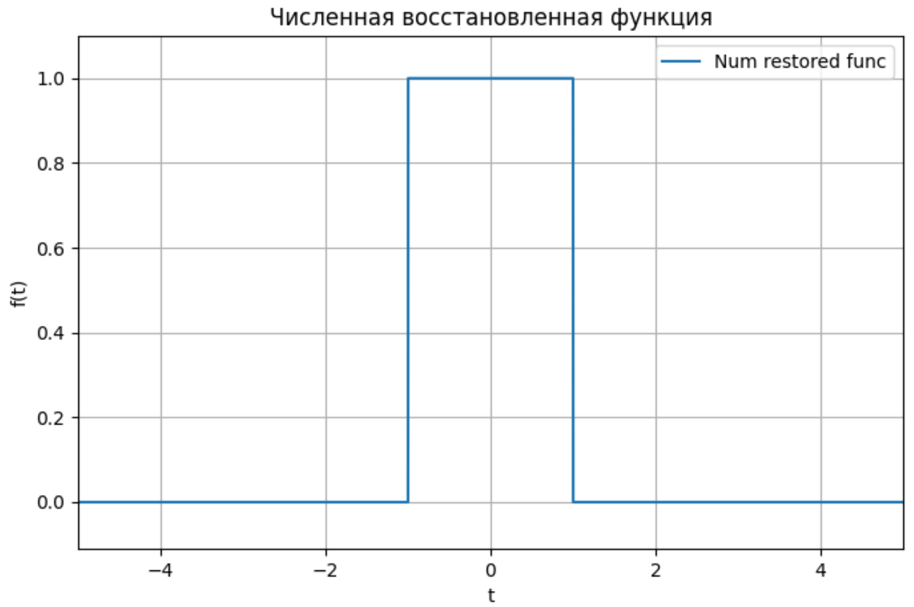

Рис. 10: Восстановленная функция

1.6. Влияние шага и размера промежутка

2. Сэмплирование

Зададим функцию

$$f(t) = \sin(2\pi x + 1) + \sin(0.5\pi x + 4) \tag{7}$$

2.1. Сэмплирование синусов

Построим непрерывный график:

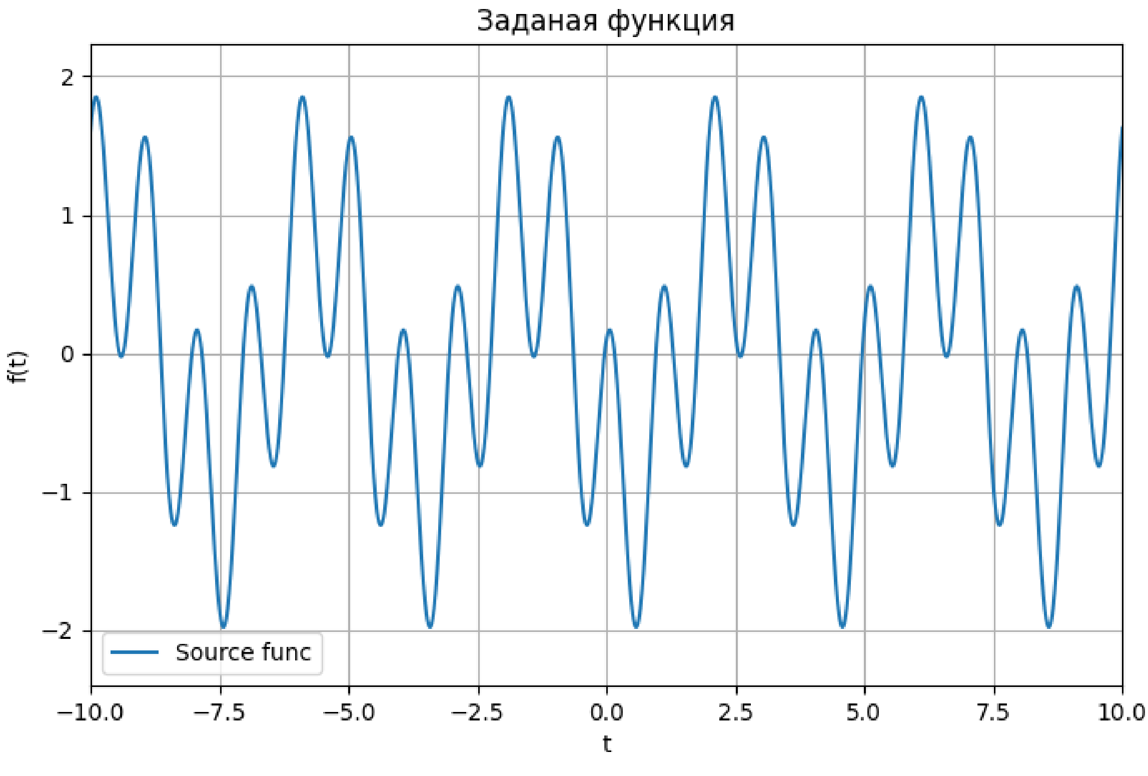

Рис. 11: График исходной функции

Теперь сэмплированный вариант с шагом $\triangle t = \frac{1}{16}$

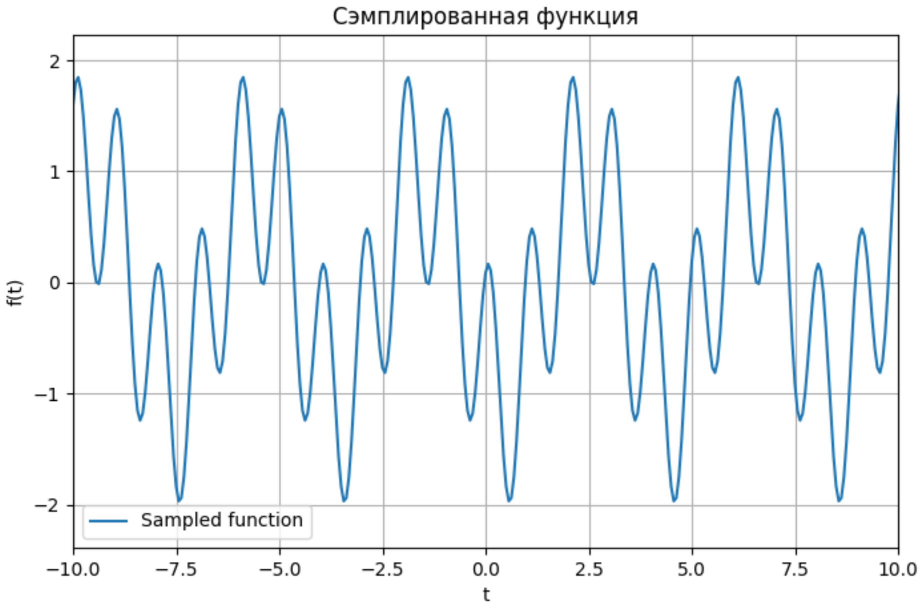

Рис. 12: График сэмплированной функции

А вот результат их наложения:

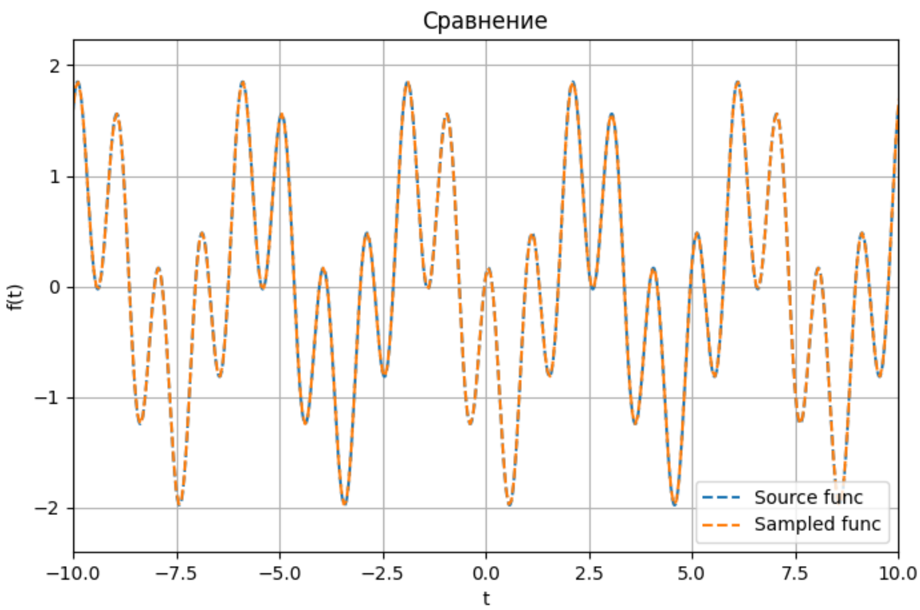

Рис. 13: Сравнение исходной и сэмплированной функций

2.1.1. Восстановление.

Попробуем восстановить функцию после применения интерполяционной формулы. Ее вид:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} f(t_n) sinc(2Bt - t_n) \tag{8}$$

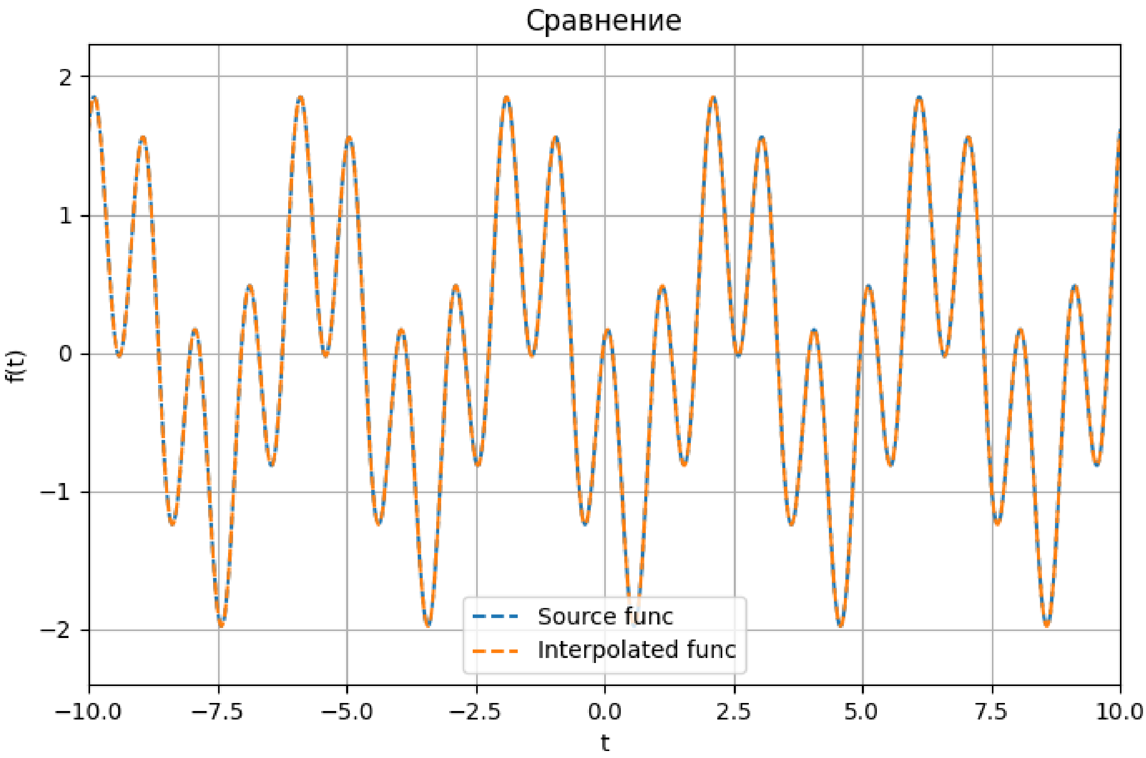

Рис. 14: Сравнение исходной и восстановленной функций

Ну полулось неплохо. B в данном случае был равен 8.

2.1.2. Влияние шага дискретизации

Посмотрим на влияние шага дискретизации на восстановление функции. Выберем шаг $\triangle t = \frac{1}{8}$, $B = 2$

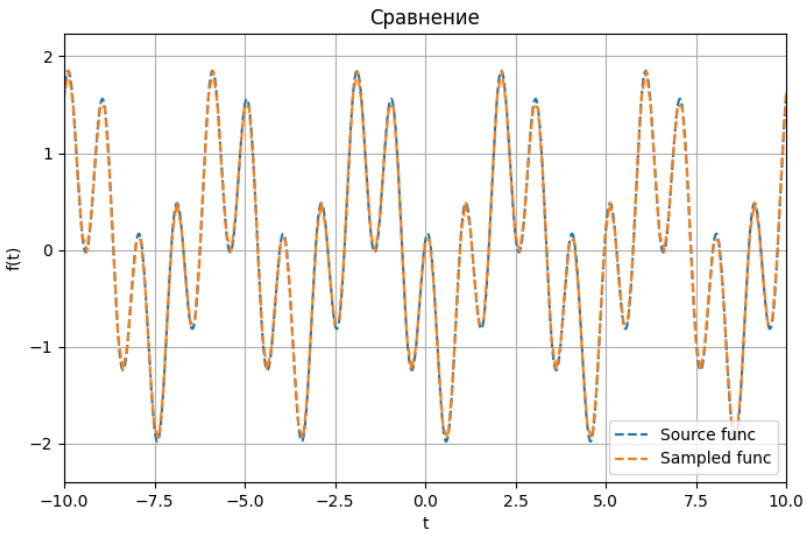

Рис. 15: Сравнение исходной и сэмплированной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{8}$

Восстановленная функция будет иметь вид:

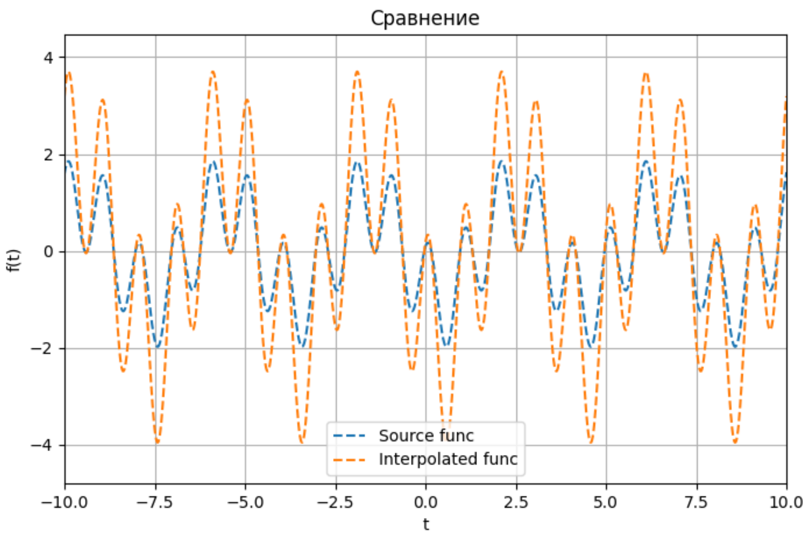

Рис. 16: Сравнение исходной и восстановленной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{8}$

Плоховато, давайте попробуем поменять частоту дискретизации. Пусть $\triangle t = \frac{1}{4}$

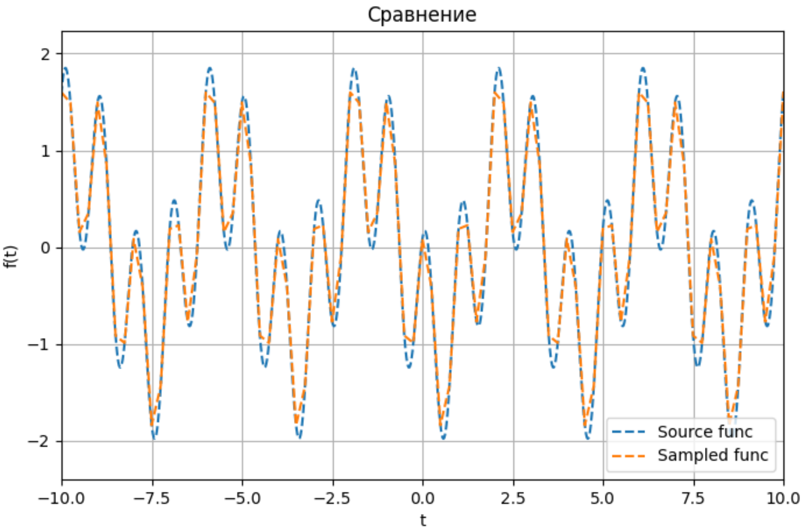

Рис. 17: Сравнение исходной и сэмплированной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{4}$

Восстановленная функция будет иметь вид:

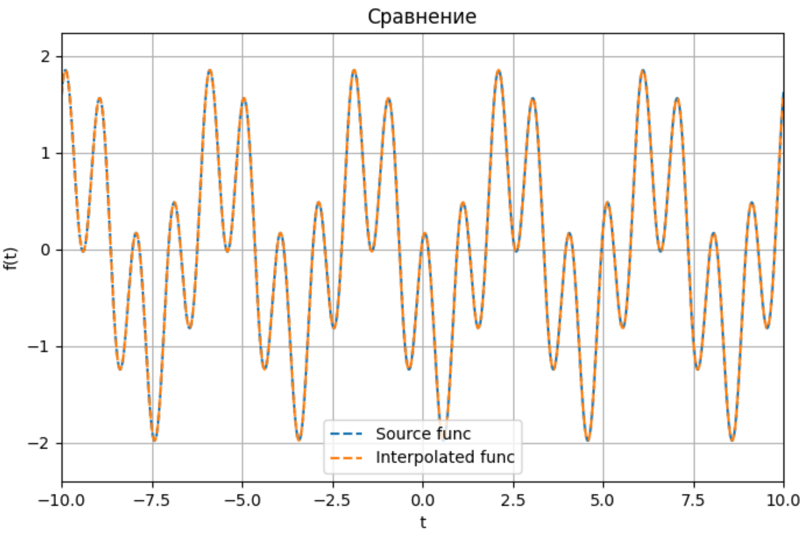

Рис. 18: Сравнение исходной и восстановленной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{4}$

Получилось отлично. Для чистоты эксперимента, попробуем выбрать $\triangle t = \frac{1}{8},\ B = 4$

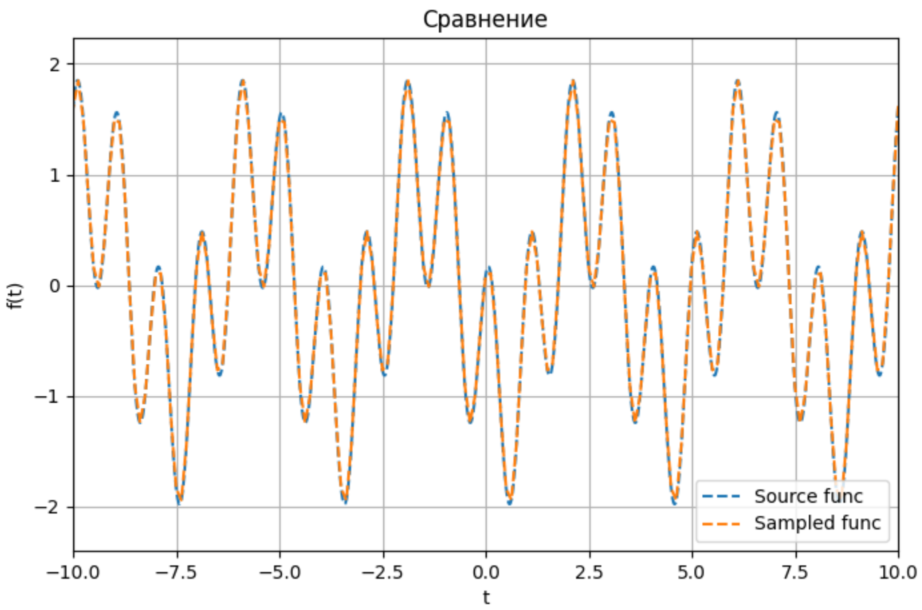

Рис. 19: Сравнение исходной и сэмплированной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{8},\ B = 4$

Восстановленная функция будет иметь вид:

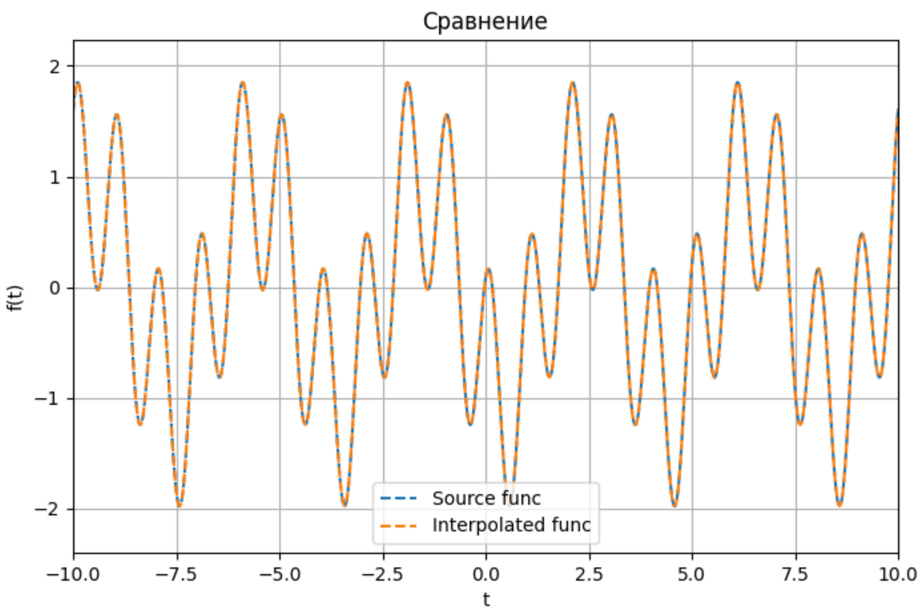

Рис. 20: Сравнение исходной и восстановленной функций с шагом $\triangle t = \frac{1}{8},\ B = 4$

Снова отличный результат. Хммм, с чем же это связано? может заметить что параметр B влияет на качество восстановления функции. Шаг дискретизации должен быть меньше, чем $\frac{1}{2}B$. Этот же вывод мы почерпнули из теоремы Найквиста-Шеннона-Котельникова.

2.2. Сэмплирование sinus cardinalis

Настало время синус кардиналис. Зададимся параметром $b = 5$ и функцией:

$$f(t) = sinc(bt) \tag{9}$$

Посмотрим на изначальный график так, как будто мы его никогда не видели:

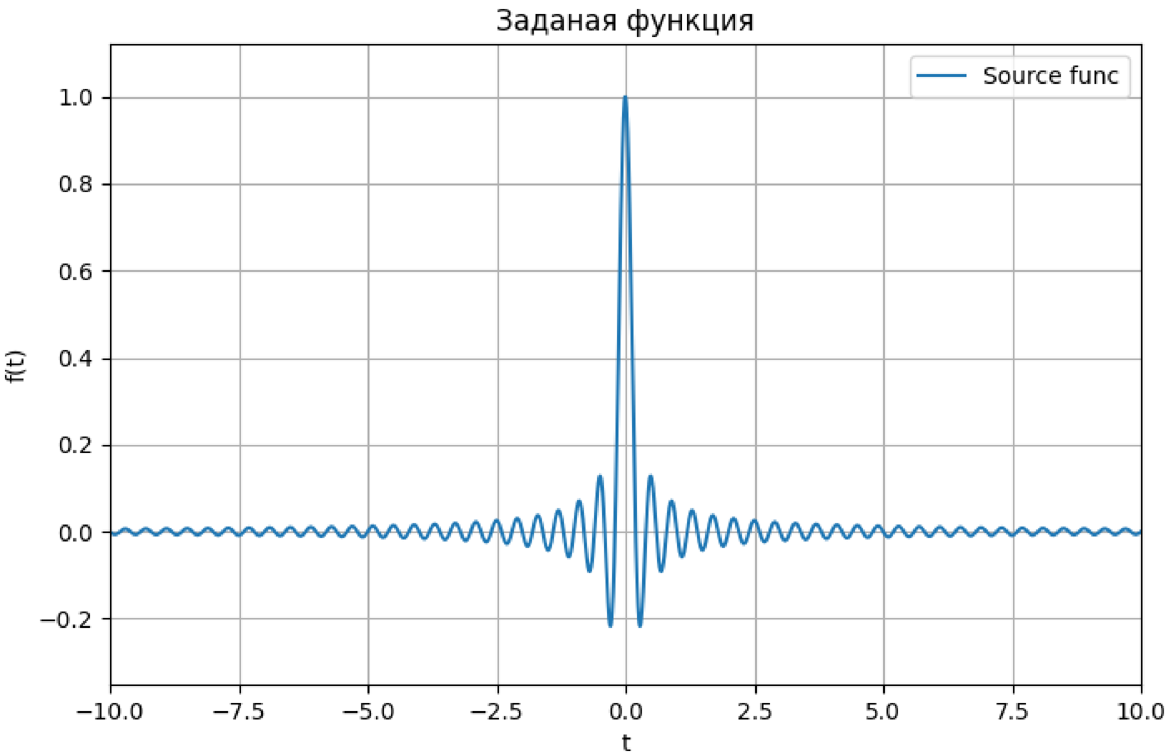

Рис. 21: График исходной функции

2.2.1. Сэмплирование синус кардиналис

Построим сравнительный график с шагом $\triangle t = \frac{1}{8}$:

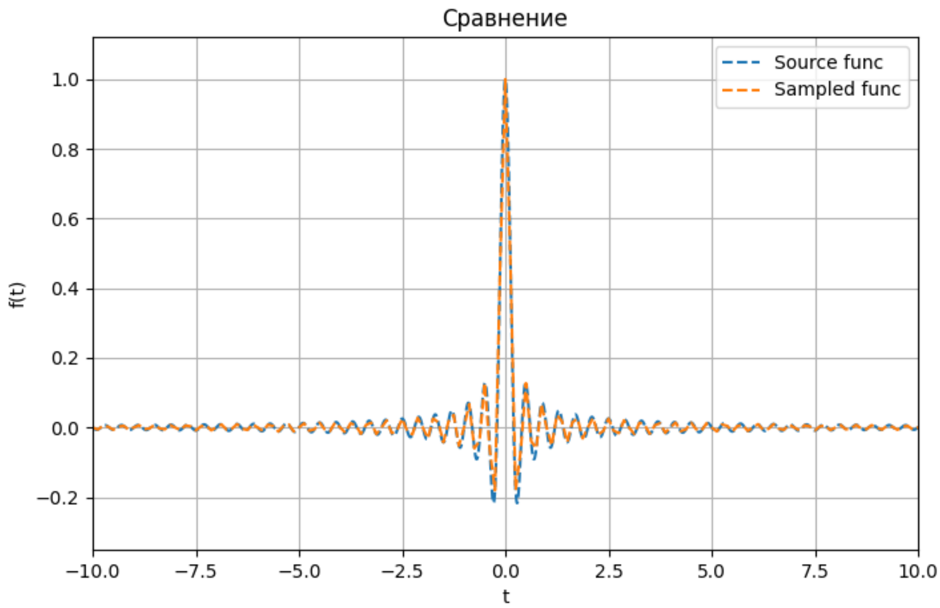

Рис. 22: Сравнение исходной и сэмплированной функций

Восстановленная функция:

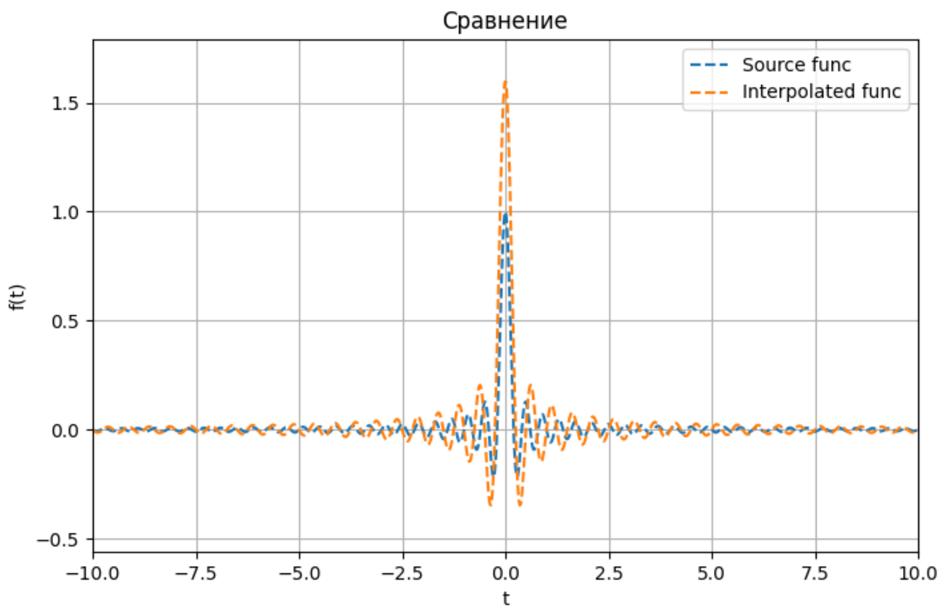

Рис. 23: Сравнение исходной и восстановленной функций

Ну, в целом, пойдет. Попробуем увеличить шаг дискретизации до $\triangle t = \frac{1}{4}$

Построим сравнительный график с шагом $\triangle t = \frac{1}{4}$:

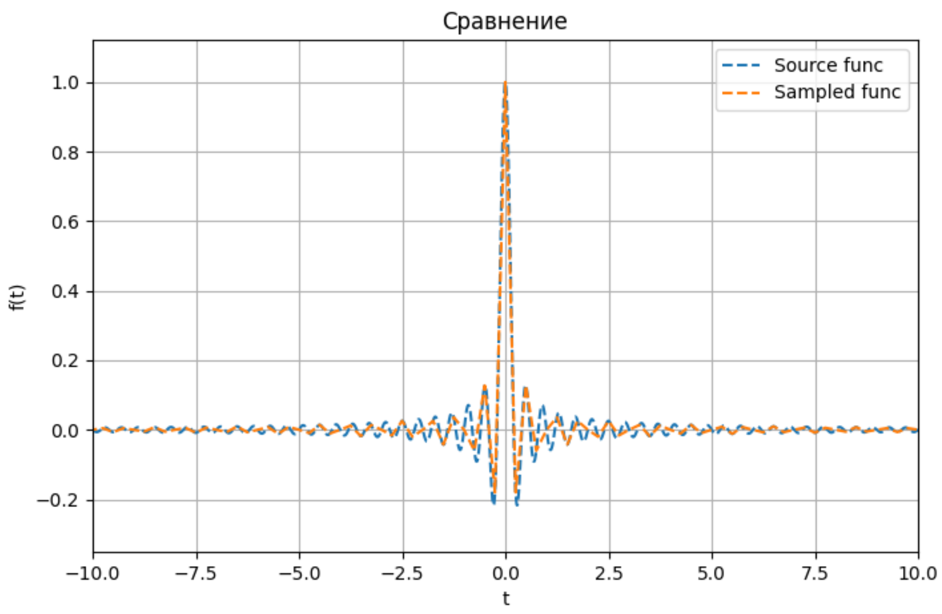

Рис. 24: Сравнение исходной и сэмплированной функций

Восстановленная функция:

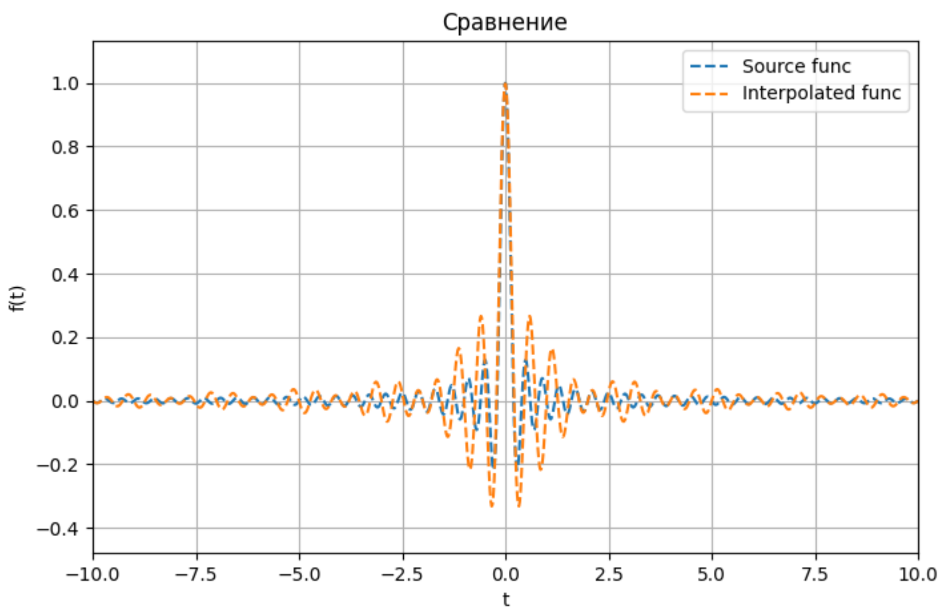

Рис. 25: Сравнение исходной и восстановленной функций

Видно, что пошло хуже.

2.2.2. Фурье-образ синус кардиналис и восстановленного сигнала

Для шага дискретизации $\triangle t = \frac{1}{8}$:

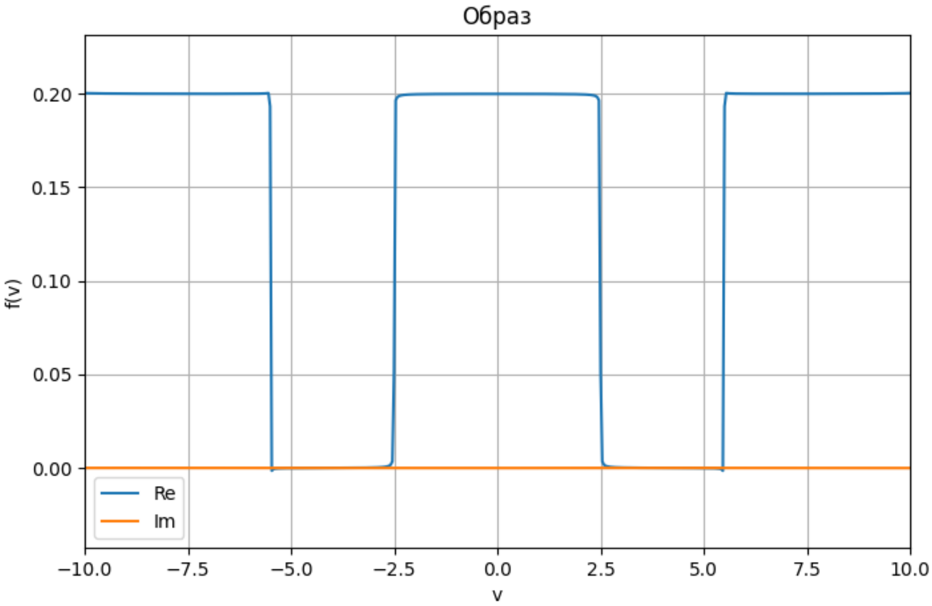

Рис. 26: Фурье-образ исходного синус кардиналис

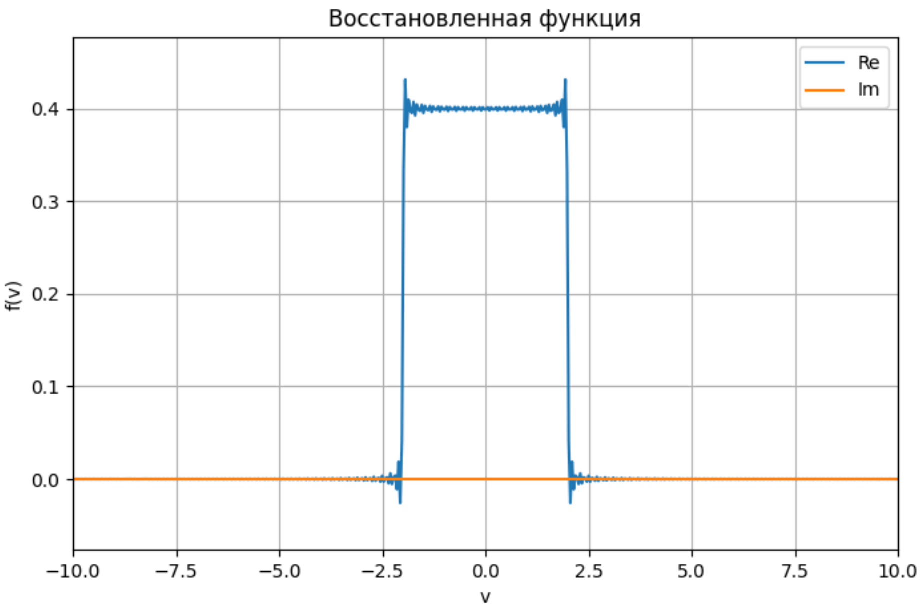

Рис. 27: Фурье-образ восстановленного синус кардиналис

Для шага дискретизации $\triangle t = \frac{1}{4}$:

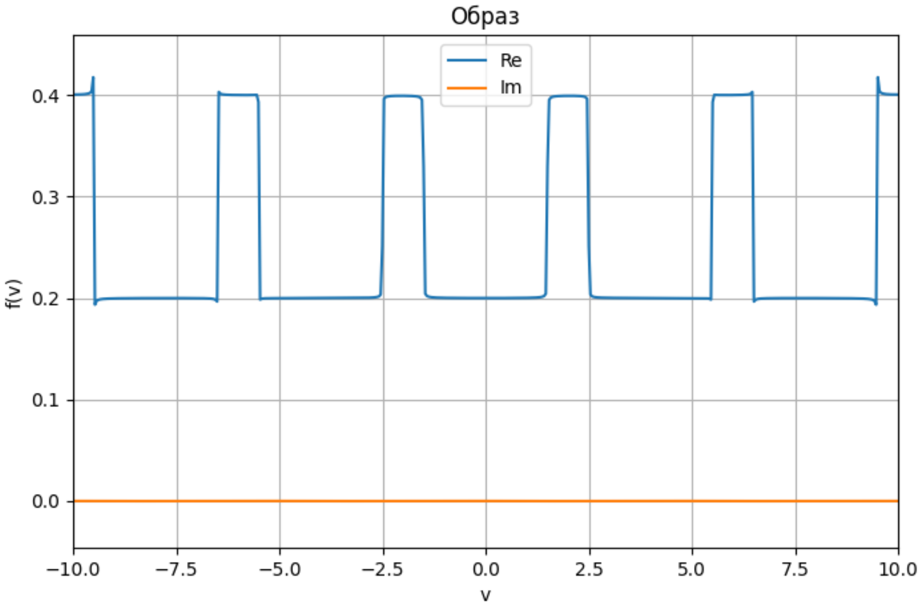

Рис. 28: Фурье-образ исходного синус кардиналис

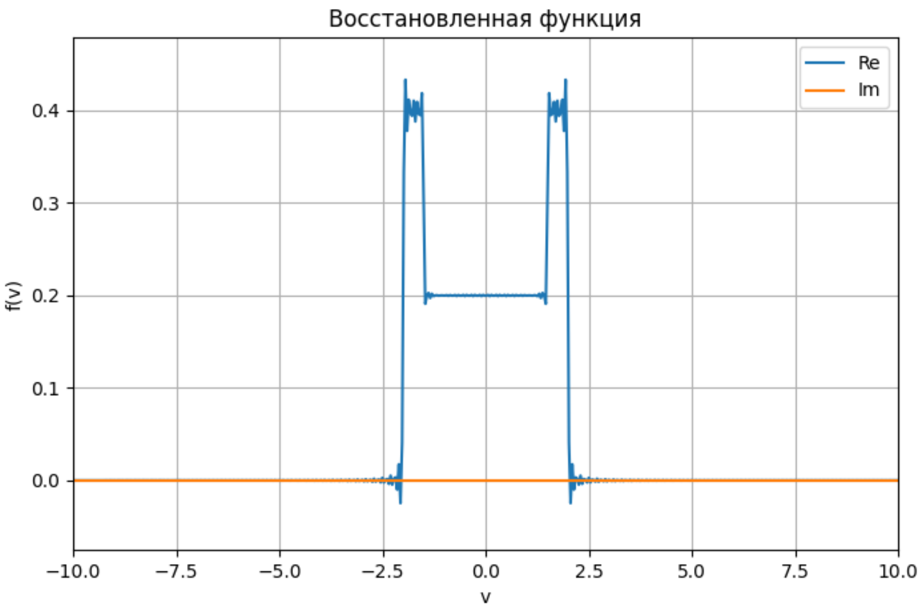

Рис. 29: Фурье-образ восстановленного синус кардиналис

2.2.3. Выводы

Лучше всего функция восстанавливается когда шаг дискретизации меньше, чем $\frac{1}{2}B$. С образом тоже все нормально. Мы знаем, что образ синус кардиналиса - прямоугольная волна. Она и получилась. Правда из сэмплированной образ получается периодическим, тк функция дискретная. Но в целом, все нормально.