Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET
Curso de Ciências da Computação
Disciplina: Álgebra Linear

UNIDADE II - Matrizes

Referência Principal:

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

Matrizes

- Alguém lembra o que é uma matriz?

Matrizes

- Alguém lembra o que é uma matriz?
- Matriz é um arranjo retangular de números (escalares).

Matrizes

- Alguém lembra o que é uma matriz?
- Matriz é um arranjo retangular de números (escalares).
- Iremos considerar no momento apenas números reais.

Matrizes

- Genericamente, temos:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Vetores: Um caso especial de matriz é a que possui apenas uma linha ou apenas uma coluna

$$\vec{\mathbf{x}} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \qquad\qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Notação:

matriz
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

vetor linha
$$\vec{\mathbf{a}}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) \qquad i = 1, \ldots, m$$

vetor coluna
$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \qquad j = 1, \ldots, n$$

Matrizes

- Notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{a}}_1 \\ \vec{\mathbf{a}}_2 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{a}}_m \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Notação:

$$B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_r) = \begin{pmatrix} \vec{\mathbf{b}}_1 \\ \vec{\mathbf{b}}_2 \\ \vdots \\ \vec{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix}$$

Matrizes

- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\mathbf{a}}_1 = (3,\ 2,\ 5), \quad \vec{\mathbf{a}}_2 = (-1,\ 8,\ 4)$$

Matrizes

- Igualdade:

Definição Duas matrizes $m \times n$ A e B são ditas **iguais** se $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e j.

Matrizes

- Multiplicação por escalar:

Definição A é uma matriz e α um escalar, então αA é a matriz $m \times n$ cujo elemento (i, j) é αa_{ij}.

Por exemplo, se

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

então

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 6 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Adição:

Definição Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são ambas matrizes $m \times n$, então a **soma** $A + B$ é a matriz $m \times n$ cujo elemento (i, j) é $a_{ij} + b_{ij}$ para cada par ordenado (i, j).

Por exemplo

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Matrizes

- Subtração: pode ser vista como um “tipo de adição”

Se definirmos $A - B$ como $A + (-1)B$, então $A - B$ é formada subtraindo-se cada elemento de B do elemento correspondente de A. Então,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 2-4 & 4-5 \\ 3-2 & 1-3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Matrizes

- Matriz nula: A matriz nula, denotada por *O*, tem todos os elementos iguais a zero

  Propriedade:

$$A + O = O + A = A$$

Matrizes

- Inversa aditiva:

$$-A = (-1)A$$

Propriedade:

$$A + (-1)A = O = (-1)A + A$$

Matrizes

- Questão)

  Com os conceitos que vimos até agora, como você usaria a notação matricial para representar o seguinte sistema linear?

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Matrizes

- Questão)

  Com os conceitos que vimos até agora, como você usaria a notação matricial para representar o seguinte sistema linear?

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Iremos representá-lo no seguinte formato: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

- A definição da multiplicação é motivada pela aplicação em sistemas lineares

- Sistema de uma equação linear a uma incógnita:

$$ax = b$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

$$ax = b \tag{2}$$

Geralmente pensamos em a, x e b como escalares; entretanto, eles poderiam ser tratados como matrizes 1×1. Nosso objetivo agora é generalizar a equação (2) de modo a representar um sistema linear $m \times n$ por uma simples equação matricial da forma

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

onde A é uma matriz $m \times n$, $\mathbf{x}$ é um vetor de incógnitas em $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{b}$ está em $\mathbb{R}^m$.

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

Exemplo: Seja a equação com várias incógnitas dada por

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$$

Se fizermos: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ $\quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

E definirmos o produto ***Ax*** como:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

Então:

$$A\mathbf{x} = 4$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

- Seja um sistema linear com *n* incógnitas na forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

- Se definirmos

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad A\mathbf{x} = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$$

Então o sistema linear pode ser escrito como:

$$A\mathbf{x} = b$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

Exemplo: Sejam *A* e ***x*** dados conforme

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$A\mathbf{x} = 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 + 4 \cdot (-2) = -3$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

Caso Geral: Seja o sistema genérico abaixo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Vamos fazer

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

Caso Geral: Seja o sistema genérico abaixo

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Vamos fazer

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

e definir $A\mathbf{x}$ como

$$
A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}
$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Motivação**

Caso Geral: Seja o sistema genérico abaixo

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Vamos fazer

$$
A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}
$$

e definir *Ax* como

$$
A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}
$$

então o sistema na equação (3) pode ser representado por:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Definição formal:

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times r$, então o produto $AB = C = (c_{ij})$ é a matriz $m \times r$ cujos elementos são definidos por

$$c_{ij} = \vec{\mathbf{a}}_i \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Definição formal:

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times r$, então o produto $AB = C = (c_{ij})$ é a matriz $m \times r$ cujos elementos são definidos por

$$c_{ij} = \vec{\mathbf{a}}_i \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

- Só é possível multiplicar uma matriz *A* por uma matriz *B* se o número de colunas de *A* é igual ao número de linhas de *B*

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Exemplo: produto AB

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

então:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 & \mathbf{3} \\ 4 & 1 & \mathbf{6} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\cdot(-2) - 2\cdot 4 & 3\cdot 1 - 2\cdot 1 & 3\cdot 3 - 2\cdot 6 \\ 2\cdot(-2) + 4\cdot 4 & 2\cdot 1 + 4\cdot 1 & \mathbf{2\cdot 3 + 4\cdot 6} \\ 1\cdot(-2) - 3\cdot 4 & 1\cdot 1 - 3\cdot 1 & 1\cdot 3 - 3\cdot 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & \mathbf{30} \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Exemplo: produto BA

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

então:

$$\begin{aligned} BA &= \begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Exemplo: produto BA

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

então:

$$BA = \begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}$$

- Questão: Qual a conclusão que tiramos desse slide e do anterior?

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Exemplo: produto BA

Se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

então:

$$BA = \begin{bmatrix} -2\cdot 3 + 1\cdot 2 + 3\cdot 1 & -2\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3 + 1\cdot 2 + 6\cdot 1 & 4\cdot(-2) + 1\cdot 4 + 6\cdot(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}$$

- Questão: Qual a conclusão que tiramos desse slide e do anterior?
- Resposta: A multiplicação de matrizes não é comutativa.

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Questão: Qual o resultado do produto AB?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Questão: Qual o resultado do produto AB?
- Resposta: impossível realizar essa multiplicação.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Questão: Qual o resultado do produto AB?
- Resposta: impossível realizar essa multiplicação.

- Questão: Qual o resultado do produto BA?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Questão: Qual o resultado do produto AB?
- Resposta: impossível realizar essa multiplicação.

- Questão: Qual o resultado do produto BA?

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 17 & 26 \\ 15 & 24 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes: **Definição**

- Definição formal:

Se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$ e $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times r$, então o produto $AB = C = (c_{ij})$ é a matriz $m \times r$ cujos elementos são definidos por

$$c_{ij} = \vec{\mathbf{a}}_i \mathbf{b}_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes:

- Questão) Encontre AB e BA. São iguais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Multiplicação de matrizes:

- Questão : Encontre AB e BA. São iguais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA.$$

Matrizes

- Transposta de uma matriz A:

- É uma matriz A^T cujas linhas são as colunas da matriz original *A.*

- Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Matrizes

- Transposta de uma matriz A:

Definição A **transposta** de uma matriz $m \times n$ A é a matriz $n \times m$ B definida por

$$b_{ji} = a_{ij} \tag{8}$$

para $j = 1, \ldots, n$ e $i = 1, \ldots, m$. A transposta de A é denotada como A^T.

Matrizes

- Matriz simétrica:

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **simétrica** se $A^T = A$.

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Questão

Dada a matriz *A* genérica abaixo, encontre $(A^T)^T$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Transposta de uma matriz: Regras algébricas

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A + B)^T = A^T + B^T$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Matrizes

- Combinação linear

Definição

Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Matrizes

- Combinação linear

Definição Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

Matrizes

- Combinação linear

Definição Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Combinação linear

Definição

Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Combinação linear

Definição

Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Matrizes

- Combinação linear

Definição

Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Ou seja?

Matrizes

- Combinação linear

Definição Se $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ são vetores em $\mathbb{R}^m$ e $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são escalares, então uma soma da forma

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_n\mathbf{a}_n$$

é dita uma **combinação linear** dos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$.

- Questão: O que dizer sobre a equação abaixo?

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

Ou seja? O produto ***Ax*** é uma combinação linear dos vetores coluna de *A*.

Matrizes

- Álgebra matricial: Teorema

1. $A + B = B + A$

2. $(A + B) + C = A + (B + C)$

3. $(AB)C = A(BC)$

4. $A(B + C) = AB + AC$

5. $(A + B)C = AC + BC$

6. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

7. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

8. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

9. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Matrizes

- Álgebra matricial

Notação: $$A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ vezes}}$$

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Assim, temos

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AAA = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matriz Identidade

- Representada por: $$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- Tem esse nome porque age como uma identidade em Álgebra Matricial:

$$IA = AI = A$$

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Matrizes

- Matriz Identidade: Formalmente…

Definição A **matriz identidade** $n \times n$ é a matriz $I = (\delta_{ij})$, onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Matrizes

- Matriz Inversa:

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.

Matrizes

- Matriz Inversa

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.

- Quantas inversas uma matriz pode ter?

Matrizes

- Matriz Inversa

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.

- Quantas inversas uma matriz pode ter? Uma ou nenhuma!

Matrizes

- Matriz Inversa

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.

- Quantas inversas uma matriz pode ter? Uma ou nenhuma!

Vamos provar: Se B e C são ambas inversas de A, então:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Matrizes

- Matriz Inversa

Definição Uma matriz A $n \times n$ é dita **não singular** ou **inversível** se existe uma matriz B tal que $AB = BA = I$. A matriz é dita o **inverso multiplicativo** de A.

- Quantas inversas uma matriz pode ter? Uma ou nenhuma!

Vamos provar: Se *B* e *C* são ambas inversas de *A*, então:

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

Notação: A^{-1}

Matrizes

- Matriz Inversa

- Exemplo: As matrizes abaixo são inversas uma da outra?

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Matrizes

- Matriz Inversa

- Exemplo: As matrizes abaixo são inversas uma da outra?

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matriz Inversa

- Exemplo: As matrizes abaixo são inversas uma da outra?

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matriz Inversa

- Exemplo: As matrizes abaixo são inversas uma da outra?

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resposta: Sim!

Matrizes

- Matriz Inversa

Definição

Uma matriz $n \times n$ é dita **singular** se não tem um inverso multiplicativo.

Nota

Somente matrizes quadradas têm inversos multiplicativos. Não se devem usar os termos *singular* e *não singular* ao se referir a matrizes não quadradas.

Matrizes

- Matriz Inversa

Teorema 1.4.2 Se A e B são matrizes não singulares, então AB também é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Matrizes

- Matriz Inversa

Teorema 1.4.2 Se A e B são matrizes não singulares, então AB também é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Demonstração:

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

Matrizes

- Questão) Mostre que a matriz abaixo não tem inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Questão) Mostre que a matriz abaixo não tem inversa.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se *B* é uma matriz 2 x 2 qualquer, temos

$$BA = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & 0 \end{bmatrix}$$

, que não pode ser *I* .

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

Tipo 1: Matriz obtida trocando a ordem de duas linhas da matriz identidade *I*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tipo 2: Matriz obtida multiplicando-se uma linha da matriz identidade *I* por uma constante não nula

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Tipo 3: Matriz obtida de *I* somando-se o múltiplo de uma linha da matriz a uma outra linha

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

- Questão: Alguém tem algum palpite da utilidade desse tipo de matriz?

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

- Questão: Alguém tem algum palpite da utilidade desse tipo de matriz?

- Resposta: Elas nos permitirão resolver sistemas lineares em termos de multiplicação de matrizes (em vez de ficar realizando operações sobre linhas)

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

Tipo 1: Matriz obtida trocando a ordem de duas linhas da matriz identidade *I*

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efeito de sua multiplicação sobre uma matriz *A:*

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A E_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

Tipo 2: Matriz obtida multiplicando-se uma linha da matriz identidade *I* por uma constante não nula

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Efeito de sua multiplicação sobre uma matriz *A:*

$$E_2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AE_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Elementares: Há 3 tipos

Tipo 3: Matriz obtida de *I* somando-se o múltiplo de uma linha da matriz a uma outra linha

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efeito de sua multiplicação sobre uma matriz *A:*

$$E_3 A = \begin{bmatrix} a_{11} + 3a_{31} & a_{12} + 3a_{32} & a_{13} + 3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A E_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11} + a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21} + a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31} + a_{33} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Elementares:

Teorema 1.5.1 Se E é uma matriz elementar, então E é não singular e E^{-1} é uma matriz elementar do mesmo tipo.

Definição Uma matriz B é **equivalente linha** de uma matriz A se existe uma sequência finita E_1, E_2, ..., E_k de matrizes elementares tais que

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

Corolário 1.5.3 O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de n equações lineares a n incógnitas tem uma única solução se e somente se A é não singular.

Matrizes

- Matrizes Elementares:

- Uma utilidade importante das matrizes elementares é permitir calcular a inversa
- Exemplo:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Obtemos sua inversa fazendo:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{array}\right]$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Muitas vezes é útil pensar em matrizes compostas por submatrizes
- Exemplos:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c|c} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{array}\right] = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$$

$$AB = A(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3) = (A\mathbf{b}_1, A\mathbf{b}_2, A\mathbf{b}_3)$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Multiplicação em blocos

Caso 1: $$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Multiplicação em blocos

Caso 1: $$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Multiplicação em blocos

Caso 1: $$A\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB_1 & AB_2 \end{pmatrix}$$

Caso 2: $$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{pmatrix}$$

Caso 3: $$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Multiplicação em blocos

Caso 1: $$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$$

Caso 3: $$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

Caso 4: $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

Passou algum detalhe não observado?

- Multiplicação em blocos

Caso 1: $$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \end{bmatrix}$$

Caso 3: $$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2$$

Caso 4: $$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

Passou algum detalhe não observado?
Sim. Qual?

- Multiplicação em blocos

Caso 1:

$$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Caso 2:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1 B \\ A_2 B \end{bmatrix}$$

Caso 3:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2$$

Caso 4:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

Passou algum detalhe não observado?
Sim. Qual? As dimensões das matrizes!

- Multiplicação em blocos

Caso 1:

$$A\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB_1 & AB_2 \end{bmatrix}$$

Caso 2:

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} A_1B \\ A_2B \end{bmatrix}$$

Caso 3:

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2$$

Caso 4:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} \end{bmatrix}$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Questão) Particione a matriz *A* em quatro blocos e realize a multiplicação em blocos entre *A* e *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Questão) Particione a matriz *A* em quatro blocos e realize a multiplicação em blocos entre *A* e *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

- Opção 1:

$$\text{(i)} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 4 & 5 \\ \hline 10 & 9 & 6 & 7 \\ 18 & 15 & 10 & 12 \end{array}\right]$$

Matrizes

- Matrizes Particionadas:

- Questão) Particione a matriz *A* em quatro blocos e realize a multiplicação em blocos entre *A* e *B*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

\- Opção 2:

$$\text{(ii)} \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 8 & 6 & 4 & 5 \\ 10 & 9 & 6 & 7 \\ \hline 18 & 15 & 10 & 12 \end{array}\right]$$

Matrizes

Resolver as questões do Capítulo 1 do livro-texto.

Fim da Unidade II