Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia – CCET
Curso de Ciências da Computação
Disciplina: Álgebra Linear

UNIDADE I - Sistemas Lineares

Referência Principal:

LEON, S. J. **Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

Sistemas Lineares

- Sistemas de equações lineares são amplamente usados em ciências exatas e engenharia

- Formalmente, uma equação linear a *n* incógnitas é uma equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Sistemas Lineares

- No caso geral, um sistema linear de *m* equações em *n* incógnitas é um sistema da forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

- Sistemas no formato acima são denominados sistemas lineares *m* x *n*

Sistemas Lineares

- Exemplos:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- A solução de um sistema linear *m* x *n* é a *n*-upla ordenada de números que satisfaz todas as equações do sistema:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Sistemas Lineares

- Questão: Qual *n*-upla satisfaz cada sistema abaixo?

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Questão: Qual *n*-upla satisfaz cada sistema abaixo?

$$\textbf{(a)}\quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 5 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\textbf{(b)}\quad \begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (1) + 2 \cdot (2) &= 5 \\ 2 \cdot (1) + 3 \cdot (2) &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \cdot (2) - 1 \cdot (0) + 1 \cdot (0) &= 2 \\ 2 \cdot (2) + 1 \cdot (0) - 1 \cdot (0) &= 4 \end{aligned}$$

solução: par ordenado (1, 2)

solução: terno ordenado (2, α, α)

Sistemas Lineares

- Classificação de sistemas lineares:

    1. Sistema consistente: possui pelo menos uma solução
    2. Sistema inconsistente: não possui solução

- Questão: Qual a classificação do sistema abaixo?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

- O conjunto de todas as soluções é chamado de conjunto solução

Sistemas Lineares

- Classificação de sistemas lineares:

    1. Sistema consistente: possui pelo menos uma solução
    2. Sistema inconsistente: não possui solução

- Questão: Qual a classificação do sistema abaixo? (Sistema inconsistente!)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 1 \\ x_1 \qquad &= 4 \end{aligned}$$

- O conjunto de todas as soluções é chamado de conjunto solução

Sistemas Lineares

- Interpretação geométrica:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- Questão: Qual o conjunto solução de cada sistema acima?

Sistemas Lineares

- Interpretação geométrica:

$$\text{(i)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned} \qquad \text{(ii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}\quad \begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- Questão: Qual o conjunto solução de cada sistema acima?

(i) conjunto unitário {(2,0)} (ii) conjunto vazio {} (iii) conjunto $\{(2 - \alpha, \alpha) \mid \alpha$ é um número real$\}$

Sistemas Lineares

- Interpretação geométrica:

(i) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 - x_2 &= 2 \end{aligned}$$

(ii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 + x_2 &= 1 \end{aligned}$$

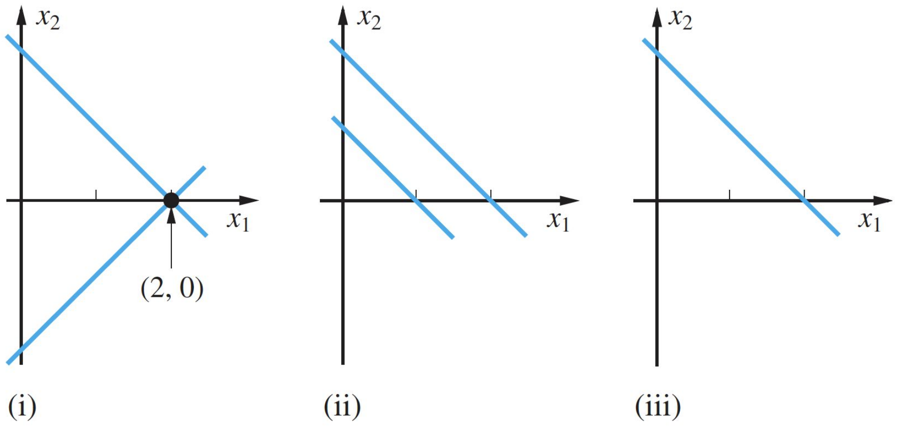
(iii) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ -x_1 - x_2 &= -2 \end{aligned}$$

- Questão: Qual o conjunto solução de cada sistema acima?

(i) conjunto unitário {(2,0)}

(ii) conjunto vazio {}

(iii) conjunto {(2 – α, α) | α é um número real}



Sistemas Lineares

- Definição de sistemas equivalentes:

> Dois sistemas de equações envolvendo as mesmas variáveis são ditos equivalentes se tiverem o mesmo conjunto solução.

- Exemplos:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ 4x_1 + x_2 &= 6 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} 4x_1 + x_2 &= 6 \\ 3x_1 - x_2 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n &= b_j \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n &= b_i \\ (a_{j1} + \alpha a_{i1})x_1 + \cdots + (a_{jn} + \alpha a_{in})x_n &= b_j + \alpha b_i \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Sistemas equivalentes são importantes para obter um sistema de fácil resolução

- **Operações sobre linhas** para obtenção de sistemas equivalentes:

1. Troca na ordem das equações

2. Multiplicação de ambos os lados da equação por um número real não nulo

3. Soma de um múltiplo de uma equação a outra equação

Sistemas Lineares

- Definição de sistema *n* x *n* estritamente triangular equivalente:

> Um sistema é dito estar na forma triangular estrita se na *k*-ésima equação os coeficientes das primeiras $k - 1$ variáveis são todos nulos e o coeficiente de x_k é diferente de zero ($k = 1, 2, ..., n$).

- Exemplo:

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

- Sistemas na forma triangular estrita são de fácil resolução

Sistemas Lineares

- Como sistemas na forma triangular são simples, podemos usar operações sobre linhas para obtê-los:
    1. Troca na ordem das equações
    2. Multiplicação de ambos os lados da equação por um número real não nulo
    3. Soma de um múltiplo de uma equação a outra equação

- Questão 01) Obtenha uma forma triangular para o sistema abaixo e forneça seu conjunto solução.

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\
3x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\
2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Solução:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \phantom{-\tfrac{1}{7}}x_3 &= 3 \\ -7x_2 - \phantom{-\tfrac{1}{7}}6x_3 &= -10 \\ -\tfrac{1}{7}x_3 &= -\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

$$x_3 = 4, \qquad x_2 = -2, \qquad x_1 = 3$$

Sistemas Lineares

- Uso de matriz para representar sistemas lineares

- Questão: Mas o que é uma matriz?

- É oportuno representar um sistema linear como uma matriz aumentada:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Sistemas Lineares

- Uso de matriz para representar sistemas lineares

- Questão: Mas o que é uma matriz? (Um arranjo retangular de números!)

- É oportuno representar um sistema linear como uma matriz aumentada:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\left(\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)
$$

Sistemas Lineares

- Assim, podemos realizar **operações sobre linhas** diretamente na matriz aumentada para obtenção de sistemas equivalentes:

1. Troca na ordem das linhas (equações)
2. Multiplicação de uma linha por um número real não nulo
3. Substituir uma linha por sua soma a um múltiplo de outra linha

$$
\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\quad\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\left[\begin{array}{ccc|c}
a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & & & \vdots \\
a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right]
$$

Sistemas Lineares

- Estratégia usando pivô: linha pivô e elemento pivô (primeiro elemento não nulo da linha pivô)

- Exemplo:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{-7} & \mathbf{-6} & \mathbf{-10} \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \end{array}\right]$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -7x_2 - 6x_3 &= -10 \\ -\tfrac{1}{7}x_3 &= -\tfrac{4}{7} \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Estratégia usando pivô: linha pivô e elemento pivô (primeiro elemento não nulo da linha pivô)

passo 1

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \\ x & x & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right)$$

passo 2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right)$$

passo 3

$$\left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} x & x & x & x & x \\ 0 & x & x & x & x \\ 0 & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & x & x \end{array}\right)$$

- Essa estratégia falhará se em qualquer etapa todos os candidatos a pivô forem nulos

- Para contornar isso, é preciso analisar o sistema linear por outros procedimentos

Sistemas Lineares

- Questão 02) Obtenha uma forma triangular para o sistema abaixo **usando a matriz aumentada** e forneça seu conjunto solução.

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\
2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Questão 02) Obtenha uma forma triangular para o sistema abaixo **usando a matriz aumentada** e forneça seu conjunto solução.

$$
\begin{aligned}
x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\
2x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -1 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 3
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & -3 & -2 & -13 \\
0 & 0 & 0 & -1 & -2
\end{array}\right)
$$

solução: $(2, -1, 3, 2)$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1
\end{array}\right]
\Rightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\
0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0
\end{array}\right]
\Rightarrow
\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3
\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -4 \\
0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 &= -3
\end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 1:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right]$$

sistema sem solução (inconsistente) !!!

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -4$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = -3$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 2 (sistema linear com solução diferente do sistema no Exemplo 1)

$$
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
-1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
-2 & -2 & 0 & 0 & 3 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \\
1 & 1 & 2 & 2 & 4 & 4
\end{array}\right)
\Longrightarrow
\left(\begin{array}{ccccc|c}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

Sistema com solução (i.e., consistente) : qualquer 5-upla que satisfaça as equações abaixo simultaneamente

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 1 \\
x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\
x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 2 (sistema linear com solução diferente do sistema no Exemplo 1)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ \ x_5 &= 1 \\ x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Variáveis principais: x_1 x_3 x_5

Variáveis livres: x_2 x_4

Passando as variáveis livres para o segundo membro:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + \ \ x_5 &= 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_5 &= -x_4 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 2 (sistema linear com solução diferente do sistema no Exemplo 1)

Questão: Qual a solução do sistema?

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + \quad x_5 &= 1 - x_2 - x_4 \\ x_3 + 2x_5 &= -x_4 \\ x_5 &= 3 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

  - Exemplo 2 (sistema linear com solução diferente do sistema no Exemplo 1)

Questão: Qual a solução do sistema?

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_3 + \quad x_5 &= 1 - x_2 - x_4 \\
x_3 + 2x_5 &= -x_4 \\
x_5 &= 3
\end{aligned}
$$

O sistema acima é dito estar na forma **linha degrau.**

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Definição Uma matriz é dita na **forma linha degrau**

(i) Se o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
(ii) Se a linha k não consiste inteiramente de zeros, o número de zeros iniciais na linha $k + 1$ é maior que o número de zeros iniciais da linha k.
(iii) Se há linhas cujos elementos são todos nulos, elas estão abaixo das linhas contendo elementos não nulos.

- Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Definição O processo de usar as operações sobre linhas I, II e III para transformar um sistema linear em um cuja matriz aumentada está na forma linha degrau é chamado de **eliminação gaussiana.**

I. Troca na ordem das linhas (equações)
II. Multiplicação de uma linha por um número real não nulo
III. Substituir uma linha por sua soma a um múltiplo de outra linha

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão: Imagine que você simplificou a matriz aumentada de um sistema linear e obteve uma linha abaixo. Quantas soluções tem o sistema linear correspondente?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão:

Imagine que você simplificou a matriz aumentada de um sistema linear e obteve uma linha abaixo. Quantas soluções tem o sistema linear correspondente?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Resposta : nenhuma solução!

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Sistemas sobredeterminados: sistemas com mais equações que incógnitas

Exemplos:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão: E como solucionar sistemas sobredeterminados?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão: E como solucionar sistemas sobredeterminados?

Resposta: Da mesma forma que viemos fazendo até aqui, i.e., usando **Eliminação de Gauss.**

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão: E como solucionar sistemas sobredeterminados?

Resposta: Da mesma forma que viemos fazendo até aqui, i.e., usando **Eliminação de Gauss.**

Questão: Alguém lembra o que é Eliminação de Gauss?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

Questão: E como solucionar sistemas sobredeterminados?

Resposta: Da mesma forma que viemos fazendo até aqui, i.e., usando **Eliminação de Gauss.**

Questão: Alguém lembra o que é Eliminação de Gauss?

Definição

O processo de usar as operações sobre linhas I, II e III para transformar um sistema linear em um cuja matriz aumentada está na forma linha degrau é chamado de **eliminação gaussiana.**

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo para resolvermos juntos:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo para resolvermos juntos:

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo:

(a) $$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Qual a solução desse sistema linear?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Qual a solução desse sistema linear?

Dica 1. Se o sistema tivesse apenas as duas primeiras linhas, a solução seria:

(2, -1)

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Qual a solução desse sistema linear?

Resposta: sistema inconsistente (sem solução). Observe a última linha:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

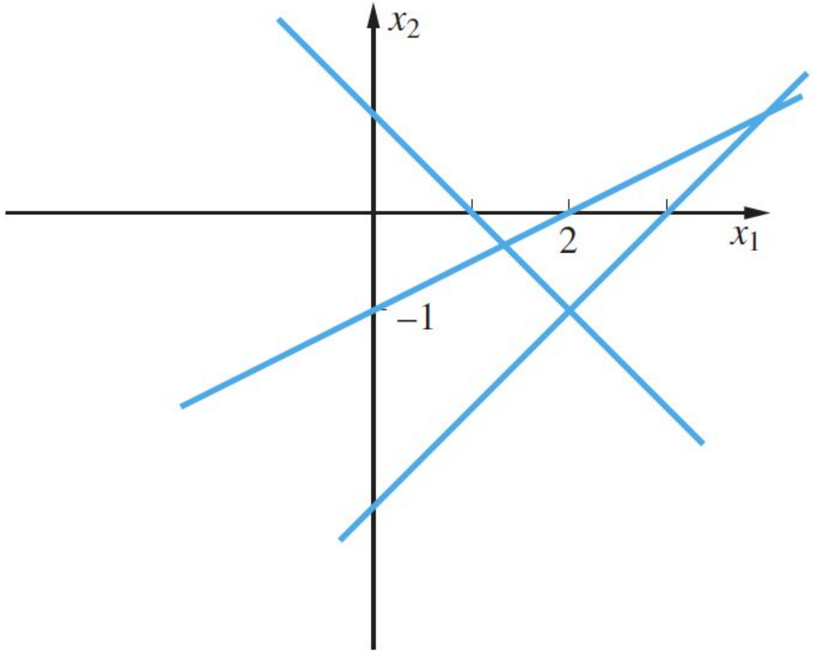
Qual a interpretação geométrica para esse sistema sem solução?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

Exemplo:



(a)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ -x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Qual a interpretação geométrica para esse sistema sem solução?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

- Questão 01): Resolva o sistema sobredeterminado abaixo.

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas sobredeterminados:

- Questão 01): Resolva o sistema sobredeterminado abaixo.

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Solução única: (1/10, – 3/10, 3/2). Observe que a última linha só tem zeros!!!

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?
  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?
  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?
  Resposta: Porque haverá variáveis livres.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?

  Resposta: Porque haverá variáveis livres.
- Exemplo: Qual a solução do sistema abaixo?

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?

  Resposta: Porque haverá variáveis livres.
- Exemplo: Qual a solução do sistema abaixo?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?

  Resposta: Porque haverá variáveis livres.
- Exemplo: Qual a solução do sistema abaixo? Sistema sem solução! Por quê?

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Questão: E pelo contrário, o que é um sistema subdeterminado?

  Resposta: são sistemas com menos equações que incógnitas.
- Questão : É possível ele ser consistente e determinado?

  Resposta: Não. Se houver solução, serão infinitas.
- Questão : Por que serão infinitas soluções?

  Resposta: Porque haverá variáveis livres.
- Exemplo: Qual a solução do sistema abaixo? Sistema sem solução! Por quê? Note a última linha da matriz final.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas subdeterminados:

- Questão 02): Resolva o sistema subdeterminado abaixo.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau

- Solucionando sistemas subdeterminados:

- Questão 02): Resolva o sistema subdeterminado abaixo.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 3\\
x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2
\end{aligned}
$$

Solução!

$$(1-\alpha-\beta, \alpha, \beta, 2, -1)$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 - x_2 - x_3\\
x_4 &= 2\\
x_5 &= -1
\end{aligned}
$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Na questão anterior, podemos continuar simplificando a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 1 - x_2 - x_3 \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= -1 \end{aligned}$$

- Esse método é chamado de redução de Gauss-Jordan
- Passamos a olhar não apenas para os 1's iniciais em cada **linha**, mas também o deixamos como sendo o único elemento diferente de zero na **coluna**.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Definição

> Uma matriz é dita na **forma linha degrau reduzida** se
>
> **(i)** A matriz está na forma linha degrau.
> **(ii)** O primeiro elemento não nulo em cada linha é o único elemento não nulo em sua coluna.

Definição

> Uma matriz é dita na **forma linha degrau**
>
> **(i)** Se o primeiro elemento não nulo em cada linha não nula é 1.
> **(ii)** Se a linha k não consiste inteiramente de zeros, o número de zeros iniciais na linha $k + 1$ é maior que o número de zeros iniciais da linha k.
> **(iii)** Se há linhas cujos elementos são todos nulos, elas estão abaixo das linhas contendo elementos não nulos.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Quais matrizes abaixo estão na forma linha degrau reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Quais matrizes abaixo estão na forma linha degrau reduzida?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Resposta: Todas!

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Exemplo de resolução de sistema usando o método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-4} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Questão: Qual a solução do sistema?

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

Exemplo de resolução de sistema usando o método de Gauss-Jordan:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ 3 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{-4} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ 0 & 1 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \end{array}\right]$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & -2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

Questão: Qual a solução do sistema?

Resposta: Fazendo $x_4 = \alpha$ (variável livre), temos $(\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$.

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

- Sistema homogêneos: são sistemas em que as constantes no segundo membro são zero.

- O exemplo anterior é um sistema homogêneo:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

- Sistema homogêneos: são sistemas em que as constantes no segundo membro são zero.

- O exemplo anterior é um sistema homogêneo:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\
2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

- Sistemas homogêneos são sempre consistentes:

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

- Sistema homogêneos: são sistemas em que as constantes no segundo membro são zero.

- O exemplo anterior é um sistema homogêneo:

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 - \ \ x_3 + 3x_4 &= 0 \\
3x_1 + x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 &= 0 \\
2x_1 - x_2 - 2x_3 - \ \ x_4 &= 0
\end{aligned}
$$

- Sistemas homogêneos são sempre consistentes: a solução trivial é (0, 0, 0, 0).

Sistemas Lineares

- Forma linha degrau reduzida

- Sistema homogêneos: são sistemas em que as constantes no segundo membro são zero.

- O exemplo anterior é um sistema homogêneo:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 &= 0 \end{aligned}$$

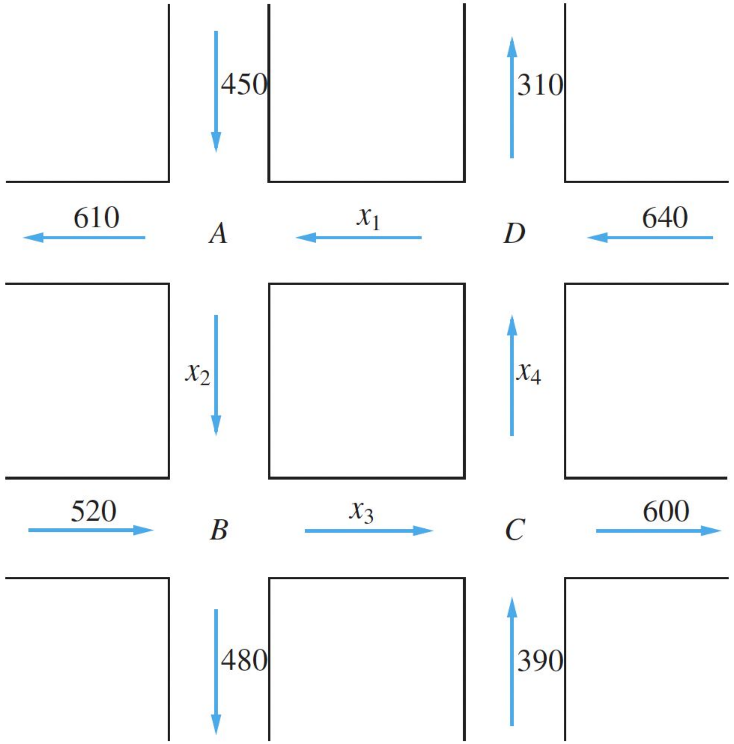
- Sistemas homogêneos são sempre consistentes: a solução trivial é (0, 0, 0, 0).

No exemplo SUBDETERMINADO anterior, temos $x_4 = \alpha$ (variável livre) e $(\alpha, -\alpha, \alpha, \alpha)$.

Sistemas Lineares

- Questão 01)

  Considere o cruzamento de vias na figura abaixo. O fluxo de carros que entra em uma interseção é igual ao fluxo que sai da interseção, ou seja,

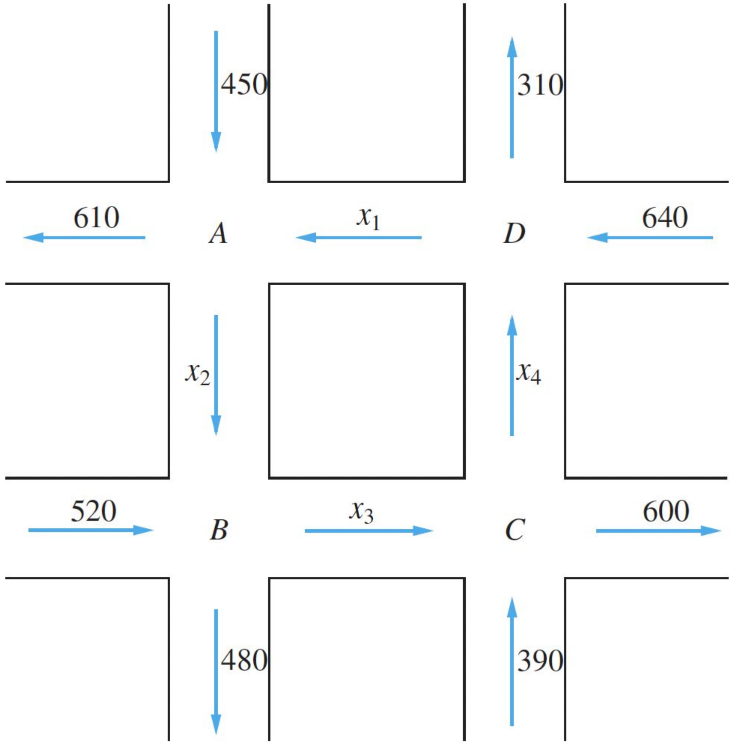


Quantos carros cada x_k representa?

Sistemas Lineares

- Questão 01)

  Considere o cruzamento de vias na figura abaixo. O fluxo de carros que entra em uma interseção é igual ao fluxo que sai da interseção, ou seja,



$$x_1 + 450 = x_2 + 610$$

$$x_2 + 520 = x_3 + 480$$

$$x_3 + 390 = x_4 + 600$$

$$x_4 + 640 = x_1 + 310$$

Quantos carros cada x_k representa?

Sistemas Lineares

- Questão 01)

Solução:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A quarta componente é uma variável livre. Se, por exemplo, $x_4 = 200$, teremos:

$$x_1 = x_4 + 330 = 530$$
$$x_2 = x_4 + 170 = 370$$
$$x_3 = x_4 + 210 = 410$$

Sistemas Lineares

- Exercícios de fixação

Resolver os exercícios do Capítulo 1 do livro-texto:

Seções 1.1 e 1.2.

Fim da Unidade I