Multiple Random Variables

BNN nhiều chiều (Đa biến ngẫu nhiên)

Đặng Thanh Hải (Ph.D)
School of Engineering and Technology, VNUH
Homepage: uet.vnu.edu.vn/~hai.dang
Email: haidt82@yahoo.com

Acknowledgement

Hayder Radha

Associate Professor

Michigan State University

Department of Electrical & Computer Engineering

Multiple Random Variables

Các BNN đa chiều

- A random variable X(s) is a mapping from an "outcome" s (of a random experiment with sample space S) to a **vector** $x=(x_1, x_2, \ldots)$ of real numbers: Một BNN X(x) là một ánh xạ từ một "kết quả" s (của một thí nghiệm ngẫu nhiên có không gian mẫu S) tới 1 vector x=(x1, x2, ...) các số thực

$$X(s): \underbrace{S}_{\text{Domain}} \rightarrow \underbrace{S_X}_{\text{Range}} \subset R^n$$

Miền giá trị

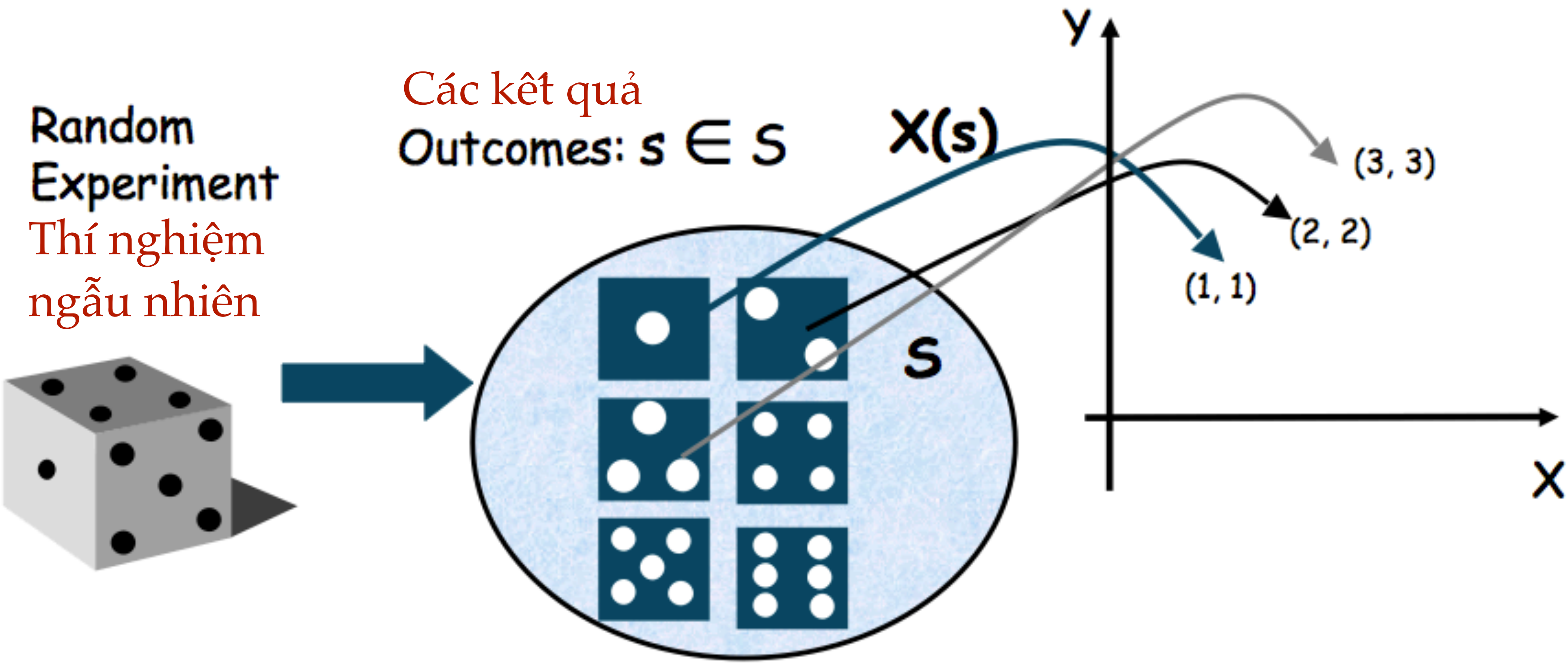
Random Variable

Các BNN đa chiều

- A random vector $X(s): S \rightarrow S_X \subset R^2$; $X=(X, Y)$
  Một vector ngẫu nhiên

Random Experiment
Thí nghiệm ngẫu nhiên

Các kết quả
Outcomes: $s \in S$



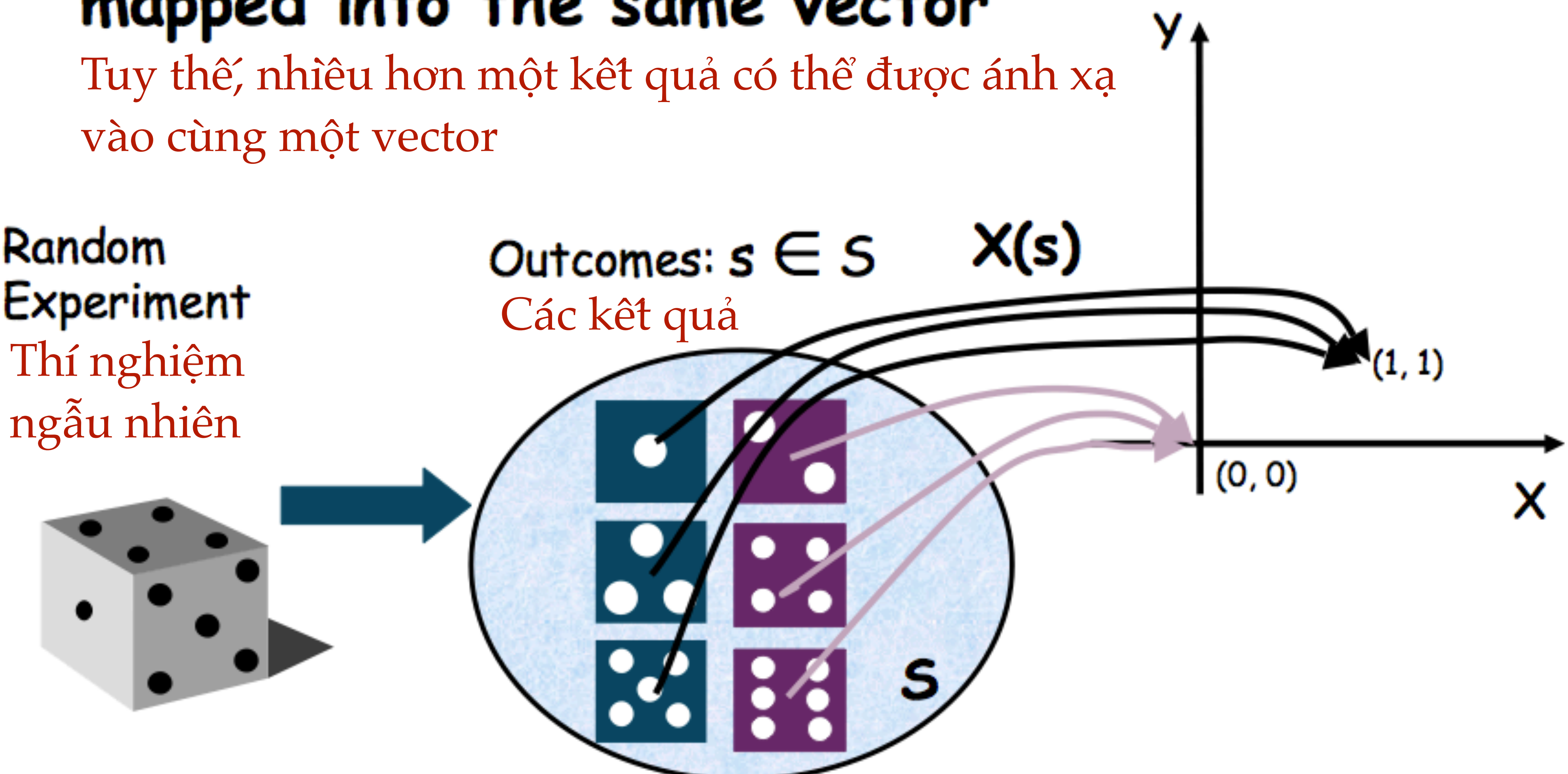
Các BNN đa chiều

Multiple Random Variables

Mỗi một kết quả được ánh xạ vào một vector đơn

- Each outcome is mapped into a single vector
- However, more than one outcome can be mapped into the same vector

  Tuy thế, nhiều hơn một kết quả có thể được ánh xạ vào cùng một vector



Cumulative Distribution Function (cdf)

Hàm phân bố tích luỹ (cdf)

- cdf $F_{XY}(a, b)$ of the joint random variables X and Y is defined as the probability of the event $\{ \{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\} \}$:

cdf đồng thời FXY(a, b) của 2 BNN X và Y được định nghĩa như là xác suất của sự kiến { ....}

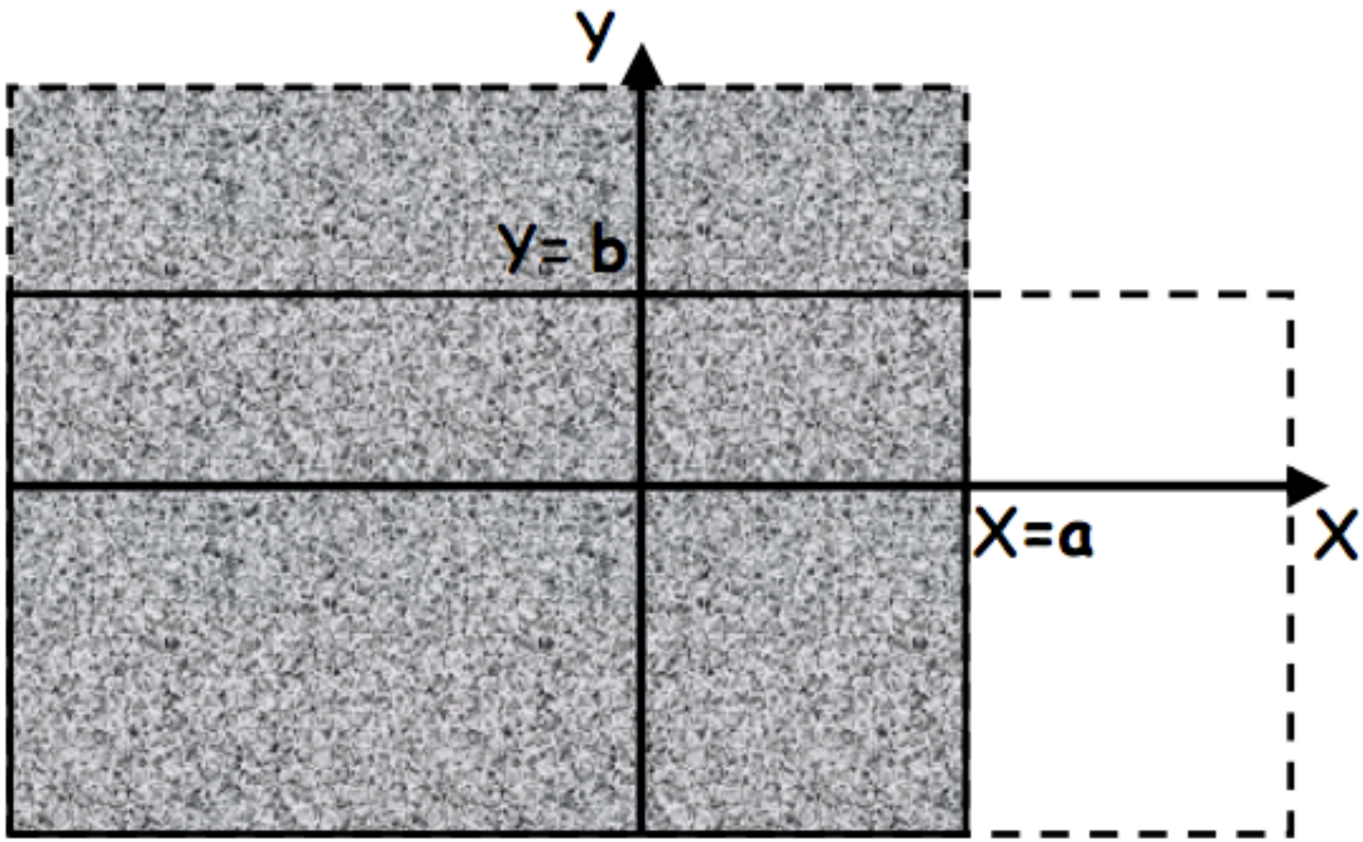
$$F_{XY}(a, b) = P[\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}]$$

$$\forall \ -\infty \leq a \leq +\infty \quad \text{and} \quad -\infty \leq b \leq +\infty$$

The joint cdf F_{XY}

cdf đông thời FXY

$$F_{XY}(a, b) = P[\{X \leq a\} \cap \{Y \leq b\}]$$



Properties of joint cdf F_{XY}

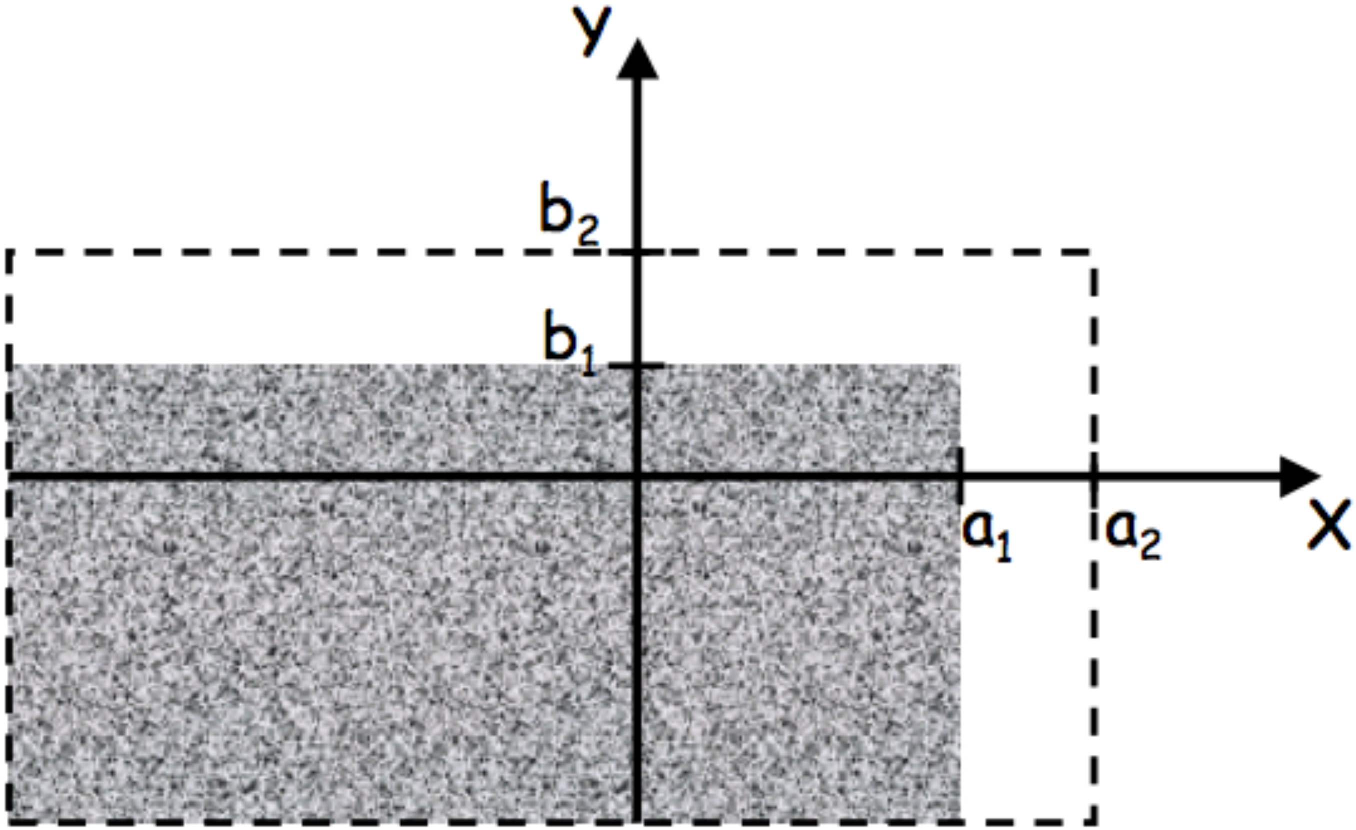
Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- If $a_1 \leq a_2$ and $b_1 \leq b_2 \Rightarrow F_{XY}(a_1, b_1) \leq F_{XY}(a_2, b_2)$

  Nếu ..... và .... =>

  i.e. F_{XY} is a non-decreasing function

  Nghĩa là. Fxy là một hàm không giảm

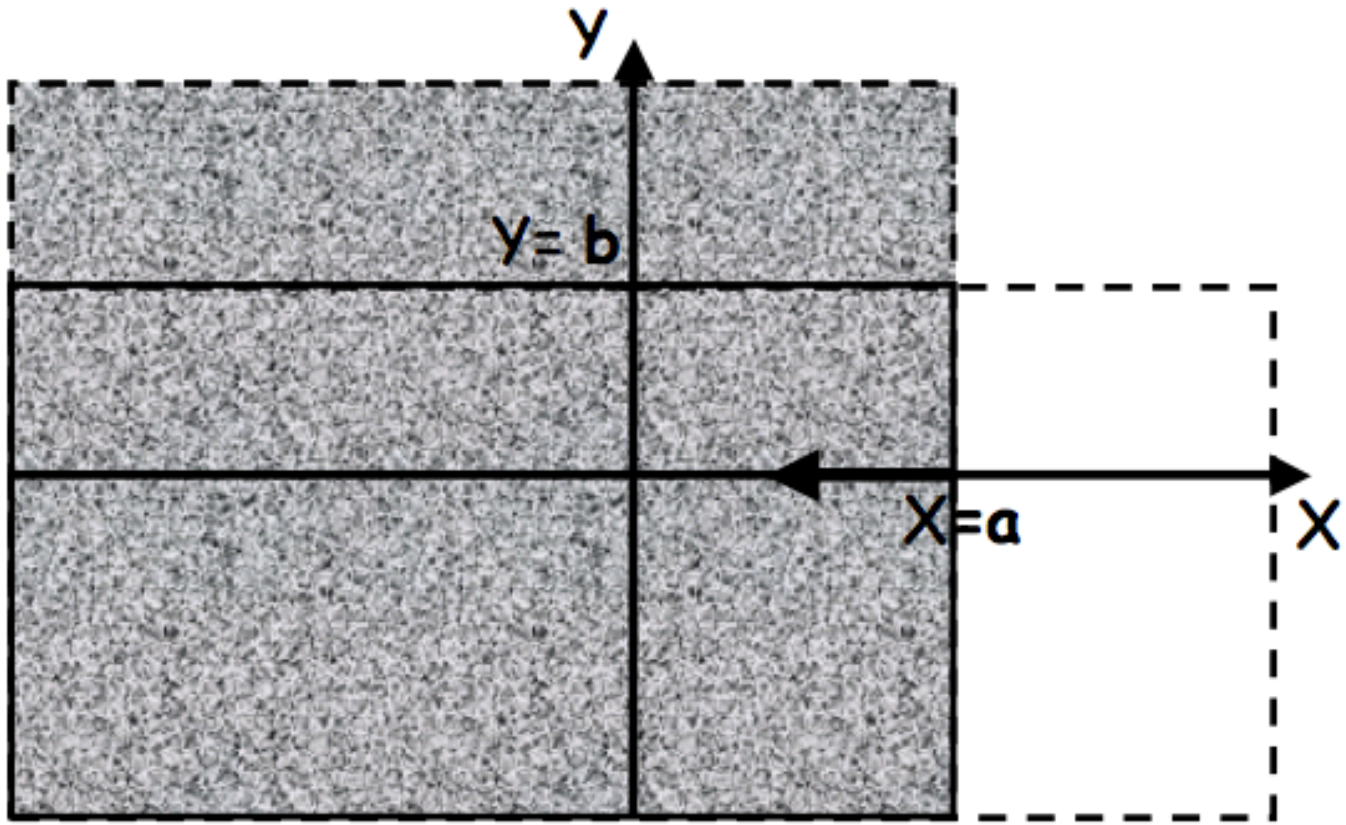


Properties of joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $0 \le F_{XY}(a, b) \le 1$

$$\lim_{a \to -\infty} F_{XY}(a,b)$$

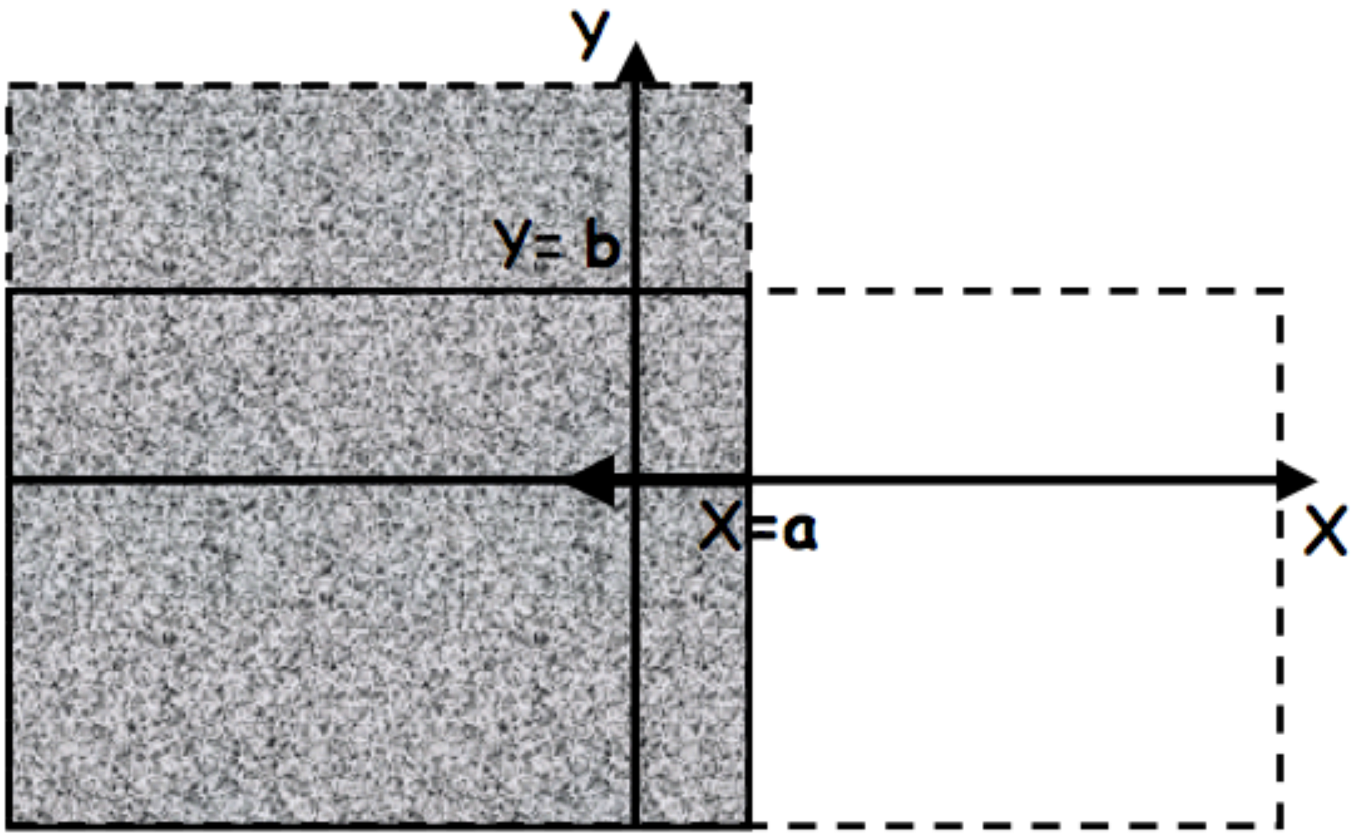


Properties of joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đông thời FXY

- $0 \leq F_{XY}(a, b) \leq 1$

$$\lim_{a \to -\infty} F_{XY}(a,b)$$

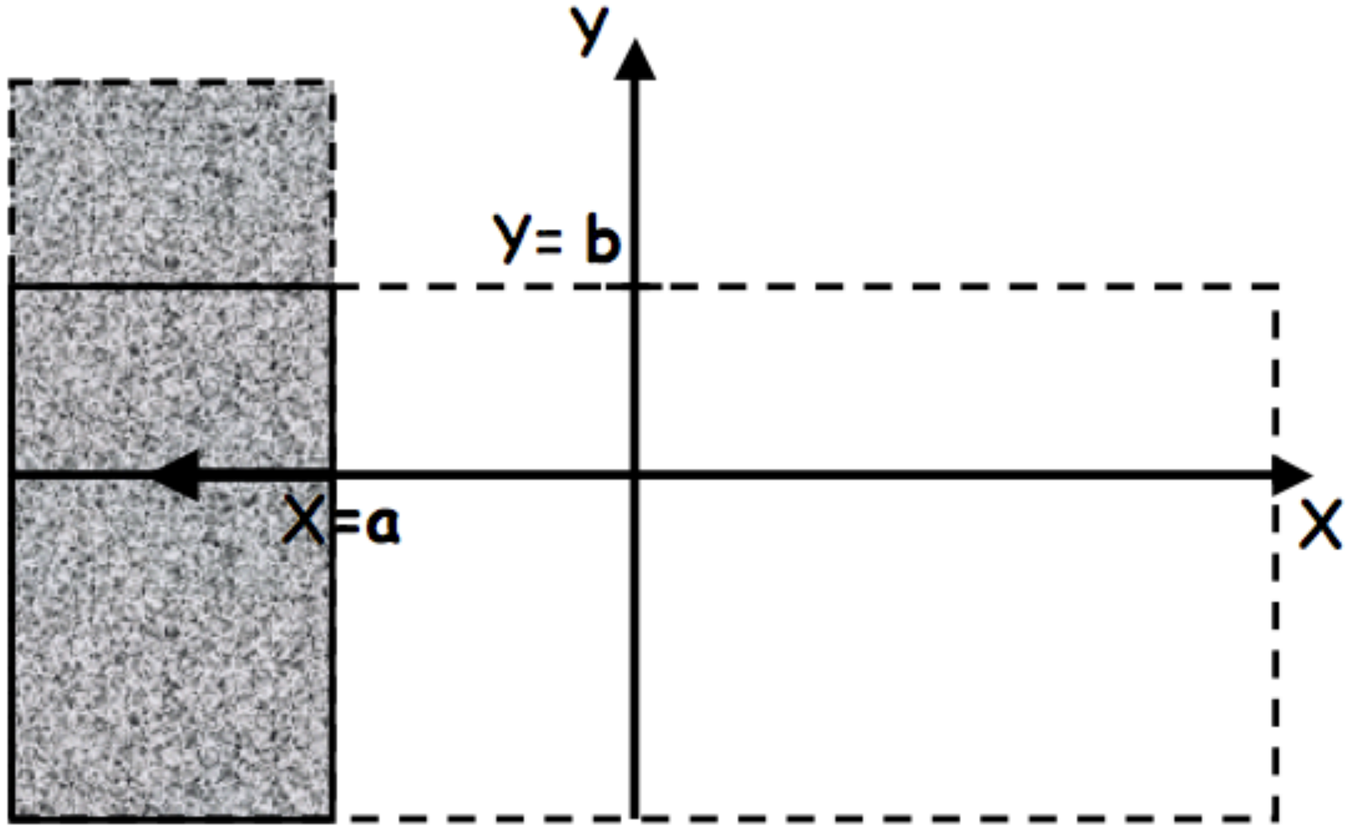


Properties of joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $0 \leq F_{XY}(a, b) \leq 1$

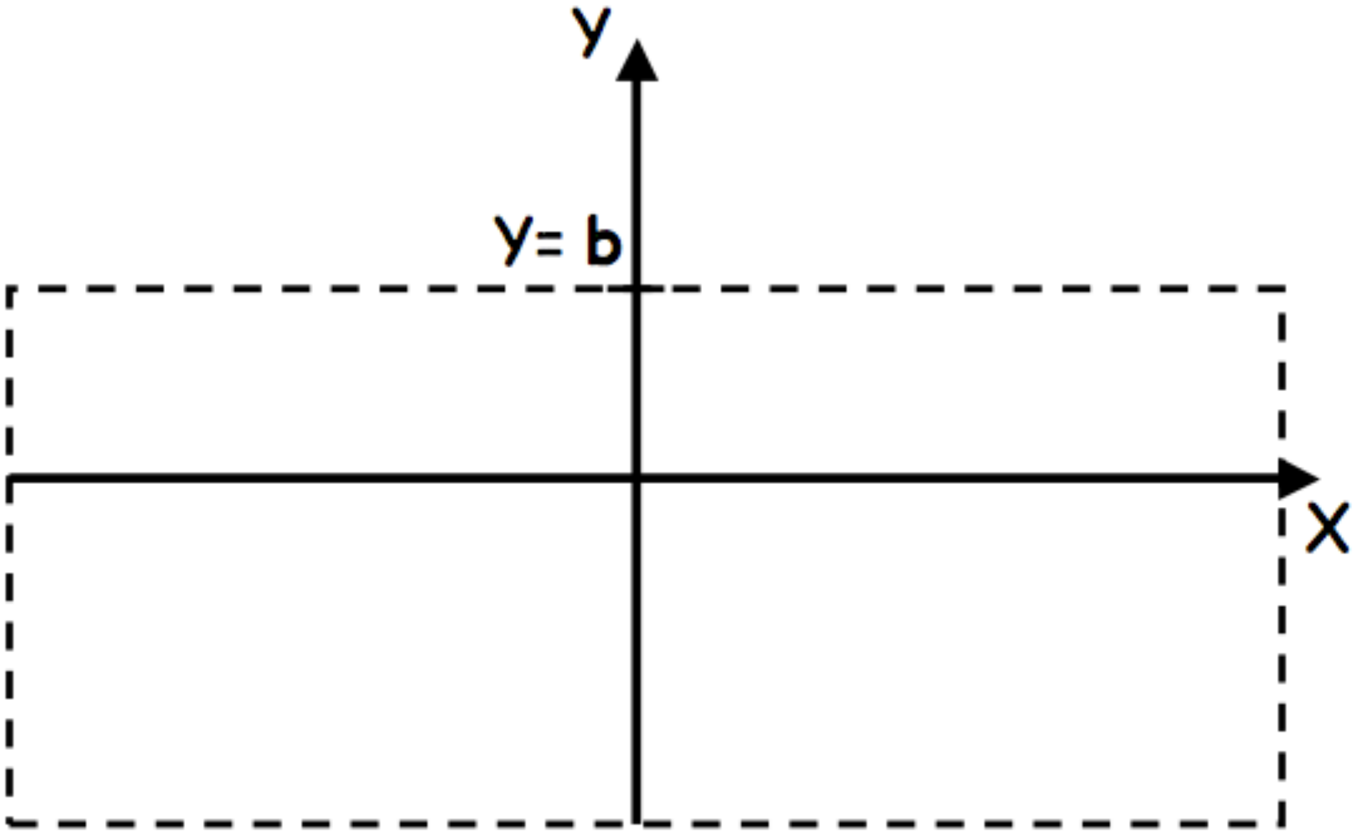
$$\lim_{a \to -\infty} F_{XY}(a,b)$$



Properties of the joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

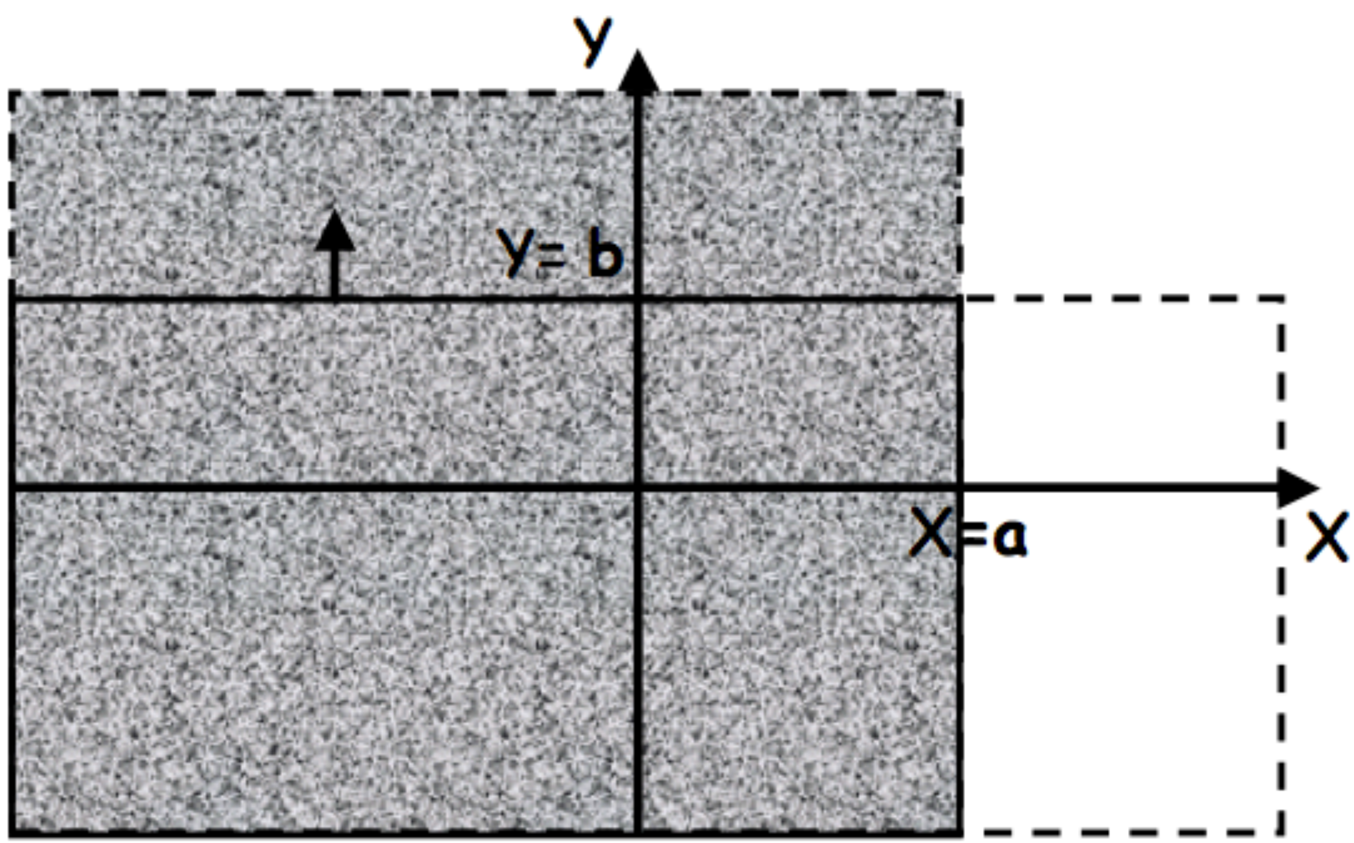
$$\boxed{\lim_{a \to -\infty} F_{XY}(a,b) = \lim_{b \to -\infty} F_{XY}(a,b) = 0}$$



Properties of the joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

$$\lim_{b \to \infty} F_{XY}(a,b) = P[\{X \leq a\} \cap \{Y \leq \infty\}]$$

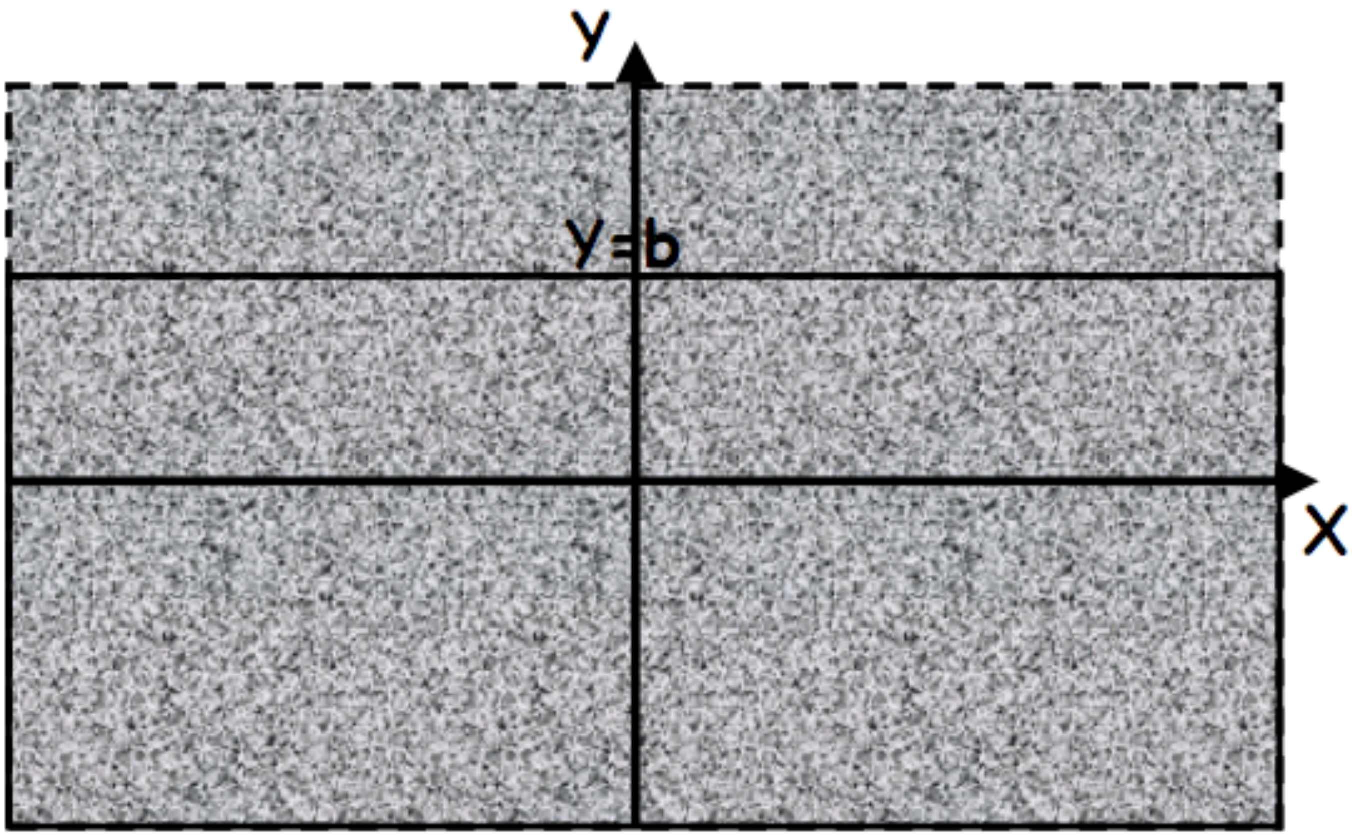


Properties of the joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

$$\lim_{a\to\infty} F_{XY}(a,b) = P[\{Y \le b\}]$$

$$\boxed{\lim_{a\to\infty} F_{XY}(a,b) = F_Y(b)}$$



Properties of the joint cdf F_{XY}

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $F_X(a)$ and $F_Y(b)$ are the <u>marginal</u> cdf functions of the joint random variables X and Y Fx(a) và Fy(b) là các hàm cdf biên của phân bố đồng thời giữa BNN X và Y

$$\boxed{\lim_{b\to\infty} F_{XY}(a,b) = F_X(a)}$$

$$\boxed{\lim_{a\to\infty} F_{XY}(a,b) = F_Y(b)}$$

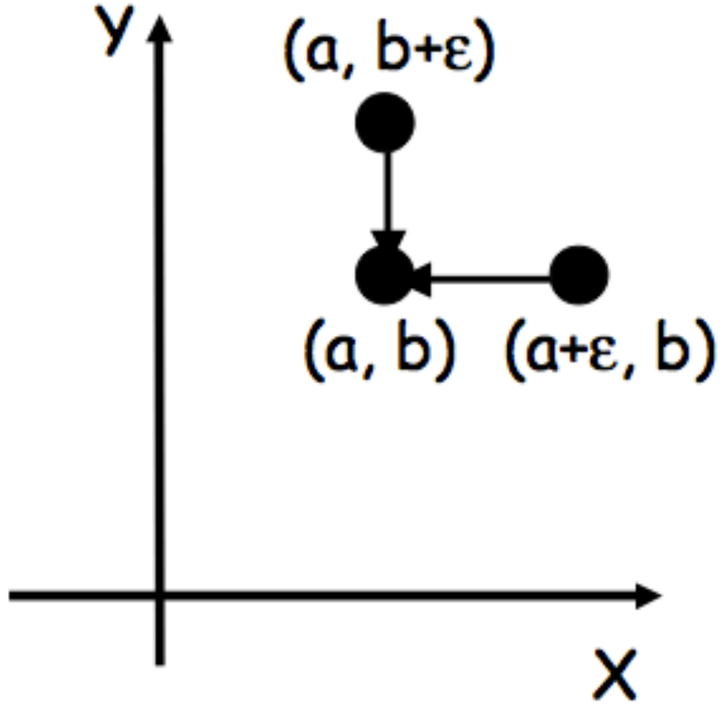
(Dis)Continuity Properties of cdf

Tính (không) liên tục của cdf đồng thời FXY

- **For any positive ε:** Với bất kỳ số nguyên dương ...:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{XY}(a+\varepsilon, b) = F_{XY}(a^{+}, b)$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_{XY}(a, b+\varepsilon) = F_{XY}(a, b^{+})$$



F_{XY} is "continuous from the right and from the top"

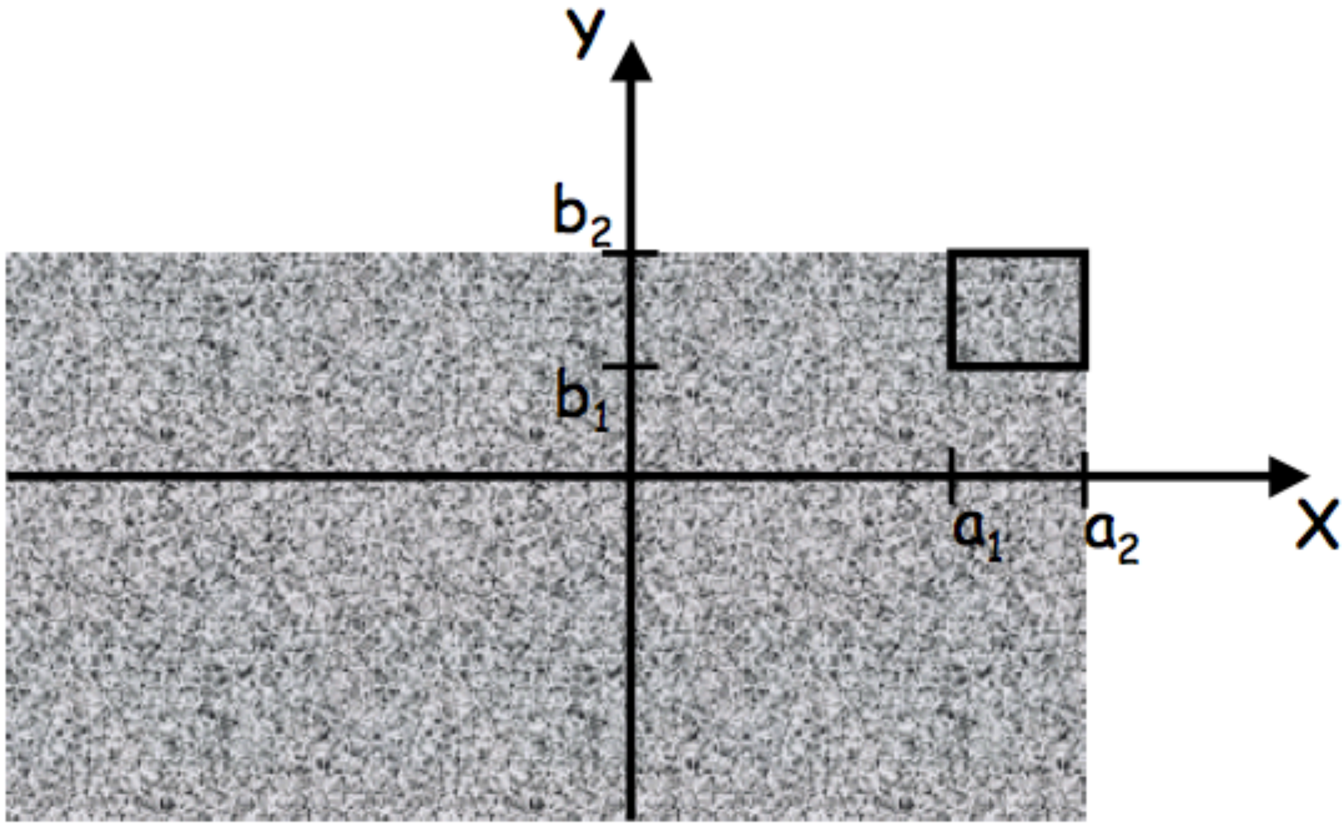
Fxy liên tục từ bên phải và từ trên xuống

Properties of the joint cdf

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $P[\{a_1 < x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$

  $= F_{XY}(a_2\ ,\ b_2\ )\ -\ \ldots\ldots.$

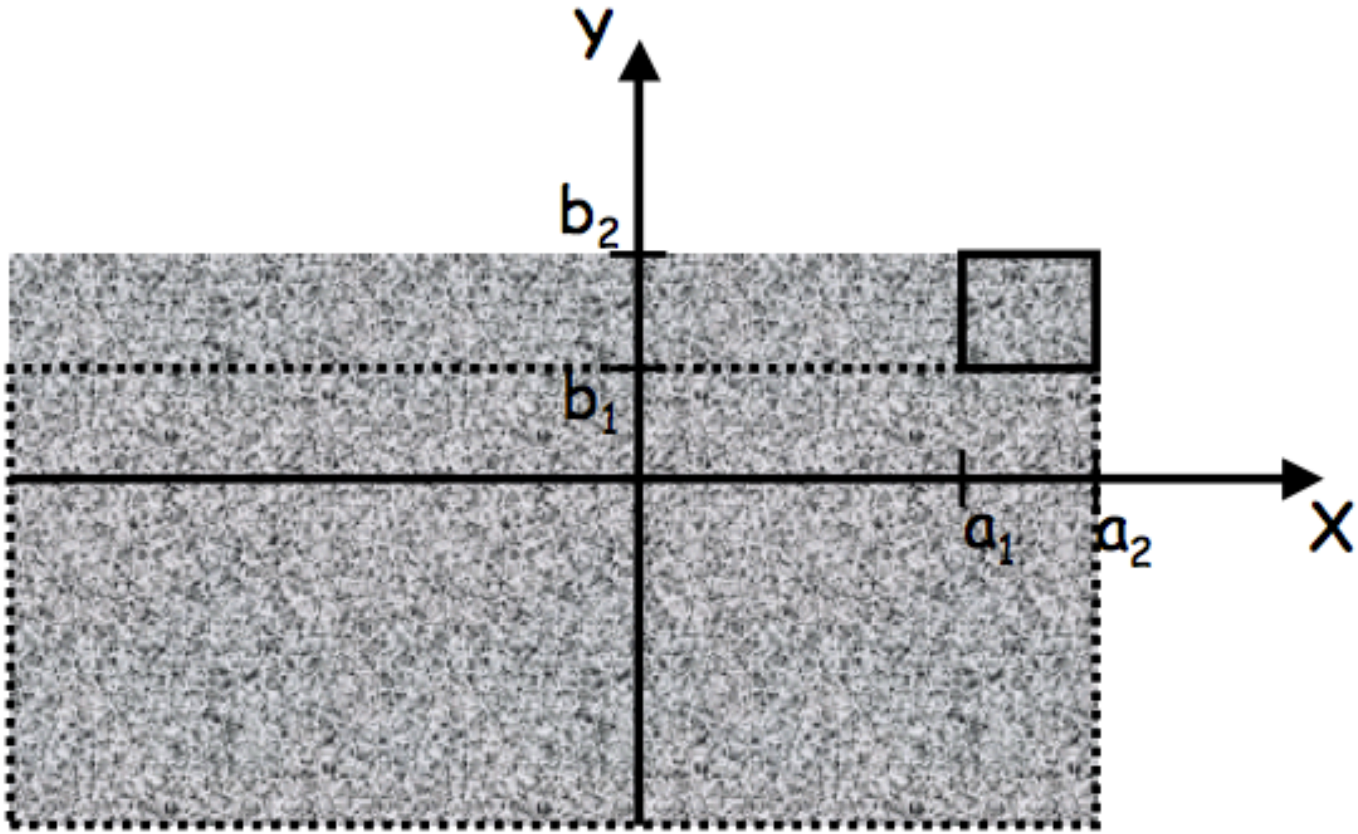


Properties of the joint cdf

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $P[\{a_1 < x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$

$= F_{XY}(a_2\ ,\ b_2\ ) - F_{XY}(a_2\ ,\ b_1\ ) -\ \ldots\ldots$

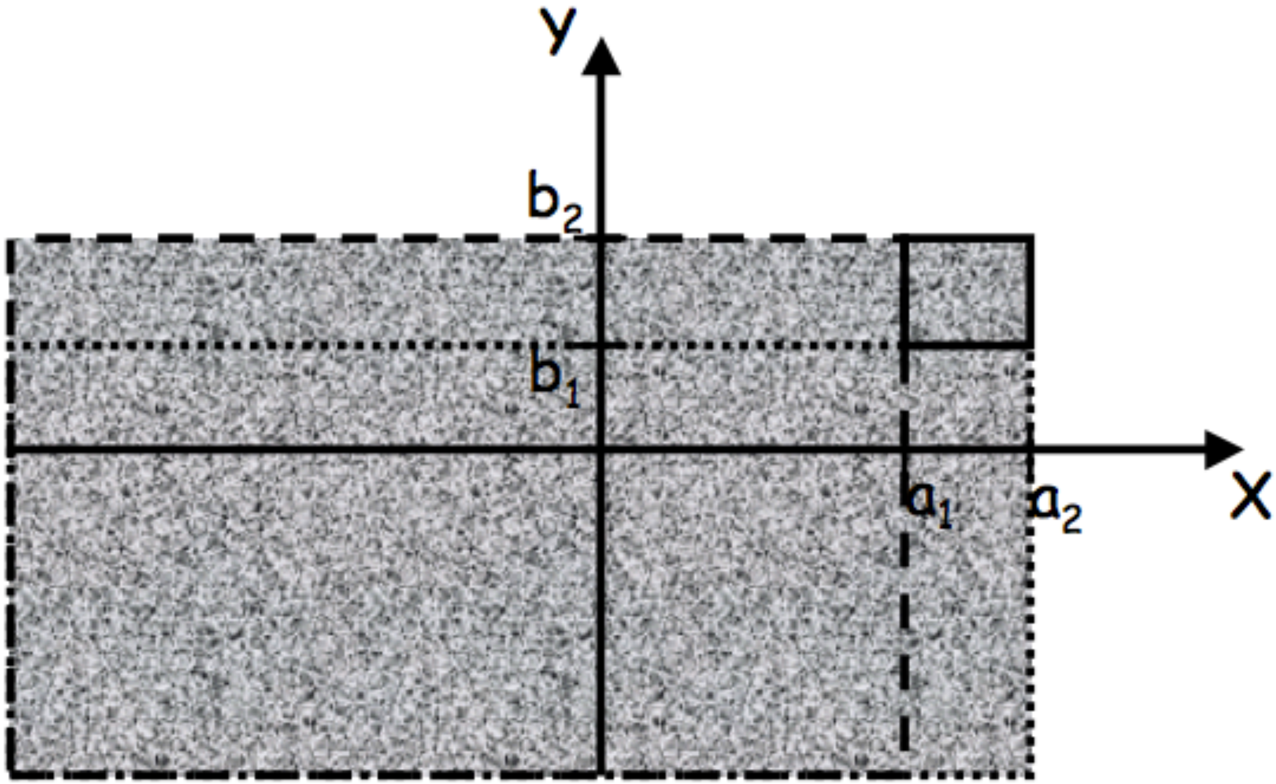


Properties of the joint cdf

Đặc trưng của cdf đông thời FXY

- $P[\{a_1 < x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$

$= F_{XY}(a_2\ ,\ b_2\ ) - F_{XY}(a_2\ ,\ b_1\ ) - F_{XY}(a_1\ ,\ b_2\ ) - ......$

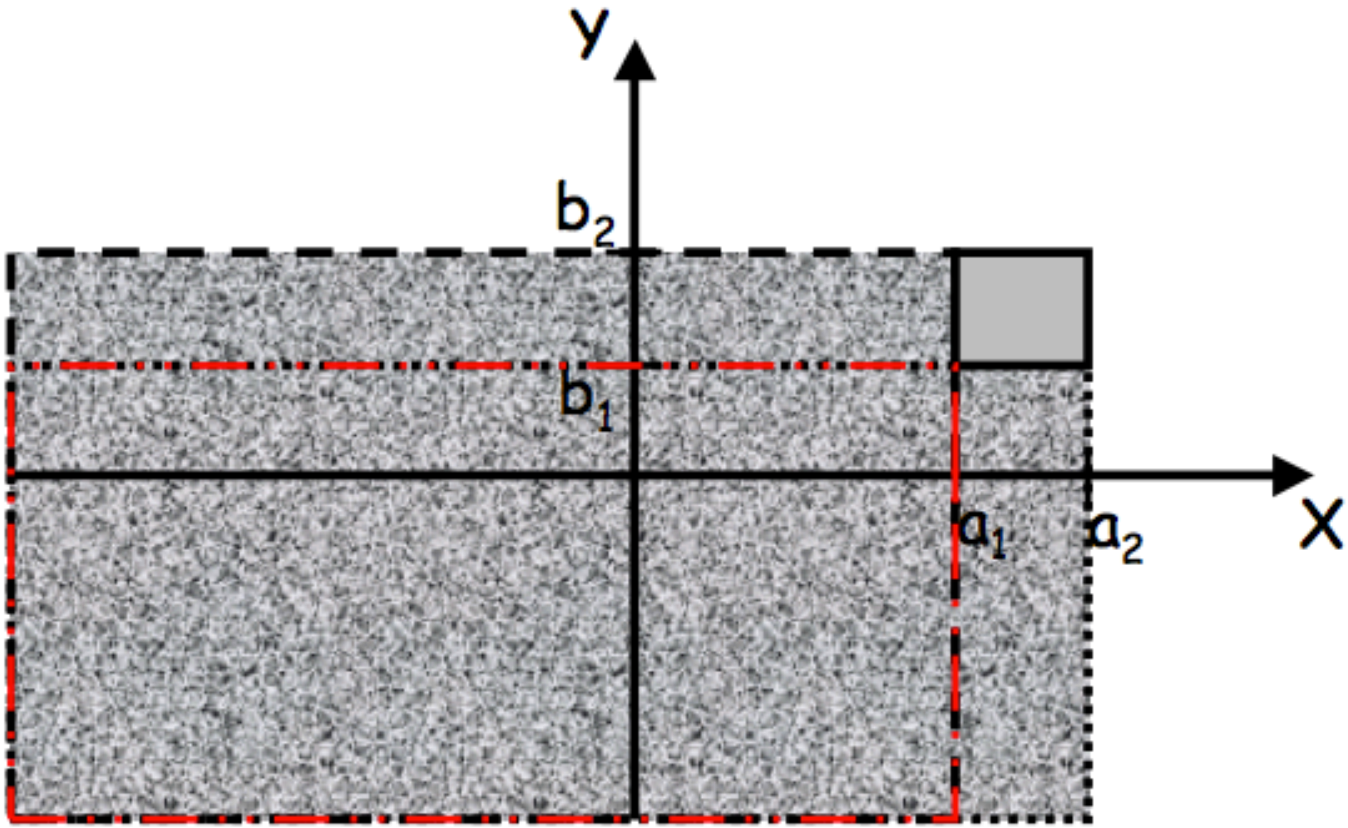


Properties of the joint cdf

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

- $P[\{a_1 < x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$

$$= F_{XY}(a_2, b_2) - F_{XY}(a_2, b_1) - F_{XY}(a_1, b_2) + F_{XY}(a_1, b_1)$$



Properties of the joint cdf

Đặc trưng của cdf đồng thời FXY

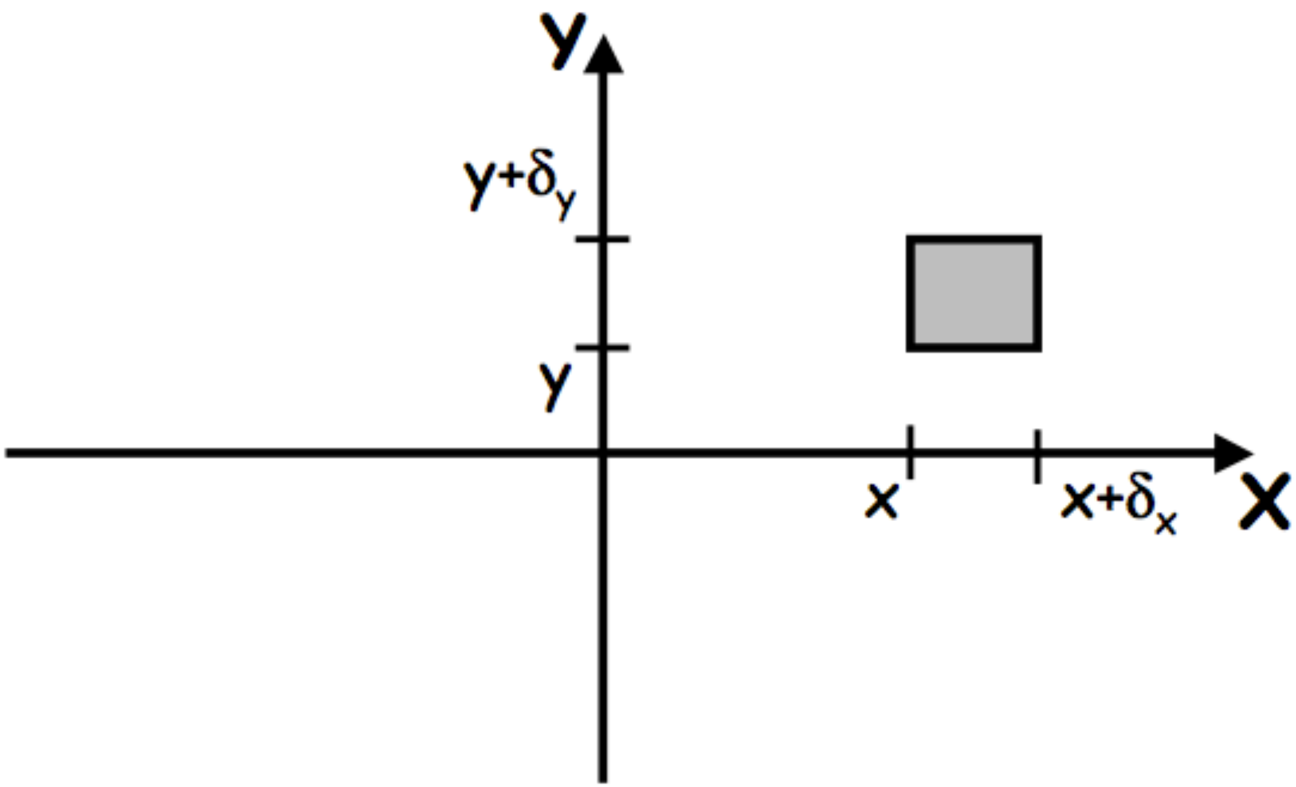
- For a jointly continuous RVs, these events are equivalents: Với một BNN liên tục nhiều chiều phân bố đồng thời, các sự kiện sau là tương đương
  - $P[\{a_1 < x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$
  - $P[\{a_1 < x < a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$
  - $P[\{a_1 \leq x < a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$
  - $P[\{a_1 \leq x \leq a_2\} \cap \{b_1 < y \leq b_2\}]$
  - ....

Joint Random variables

Các BNN nhiều chiều phân bố đồng thời

- $P[\{x < X \leq x+\delta_x\} \cap \{y < Y \leq y+\delta_y\}]$

$$=F_{XY}(x+\delta_x , y+\delta_y) - F_{XY}(x+\delta_x , y) - F_{XY}(x , y+\delta_y) + F_{XY}(x , y)$$

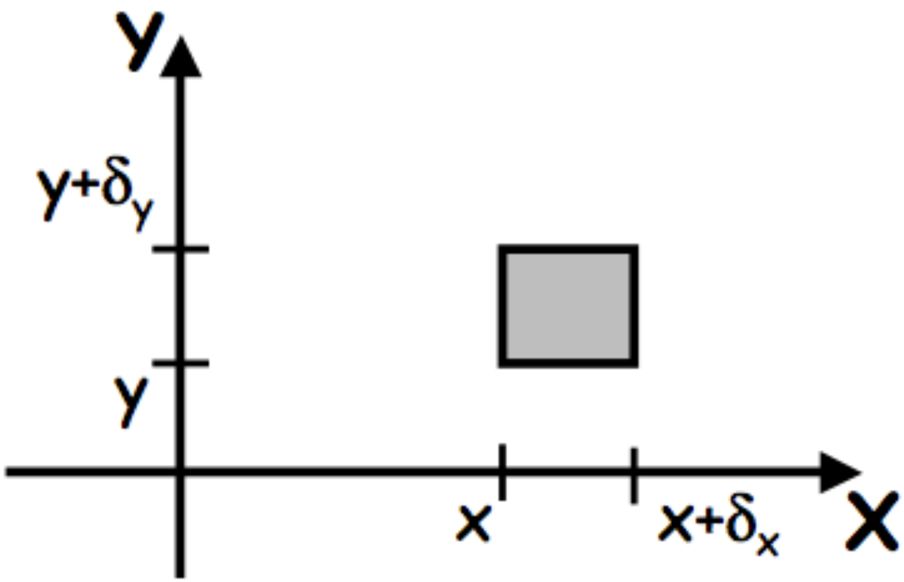


Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$\lim_{\substack{\delta_x \to 0 \\ \delta_y \to 0}} \frac{F_{XY}(x+\delta_x, y+\delta_y) - F_{XY}(x+\delta_x, y) - F_{XY}(x, y+\delta_y) + F_{XY}(x, y)}{\delta_x \, \delta_y}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y}$$



$$\boxed{\frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \, \partial y} \triangleq f_{XY}(x, y)}$$

Joint Density & Distribution Functions

Các hàm phân bố và mật độ đồng thời

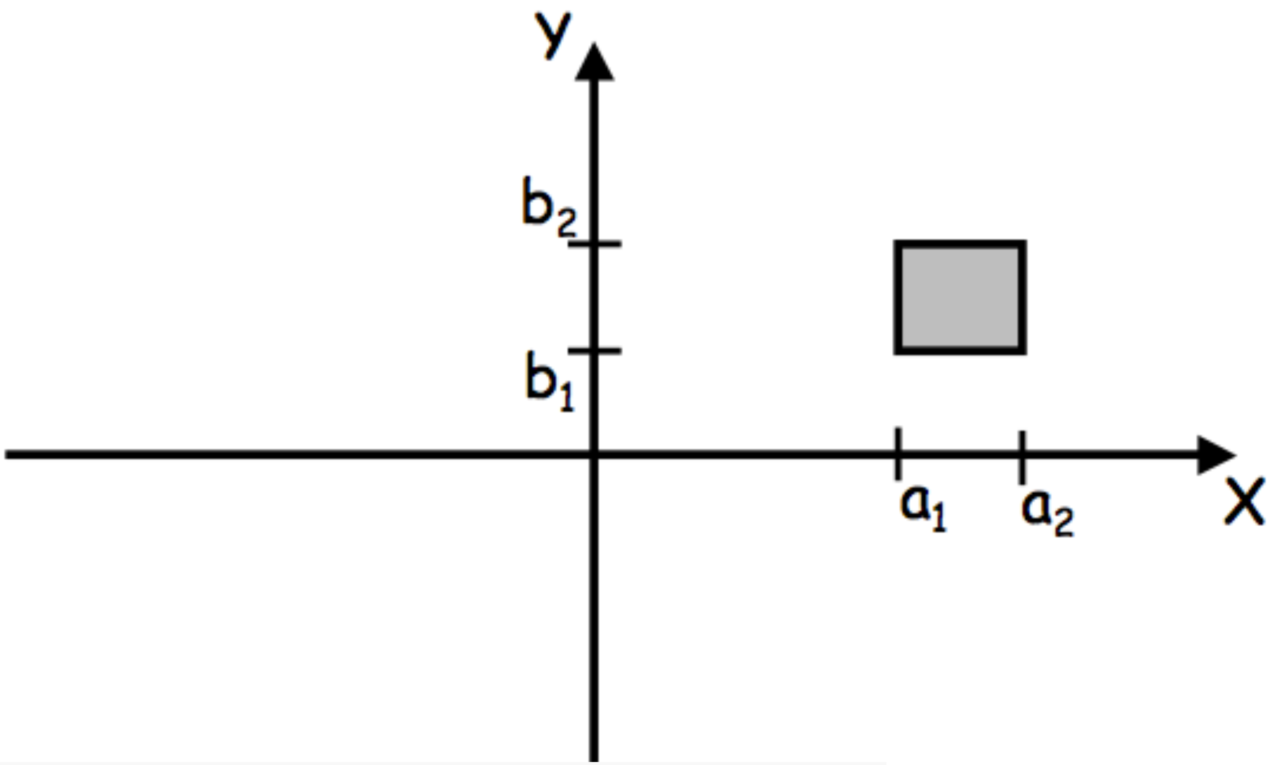
$$\boxed{\frac{\partial^2 F_{XY}(x\,,\,y\,)}{\partial x\,\partial y} \triangleq f_{XY}(x,y)}$$

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_{XY}(a,b)\,da\,db}$$

Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$P\left[\{a_1 < X \le a_2\} \cap \{b_1 < Y \le b_2\}\right]$$
$$= F_{XY}(a_2, b_2) - F_{XY}(a_2, b_1) - F_{XY}(a_1, b_2) + F_{XY}(a_1, b_1)$$



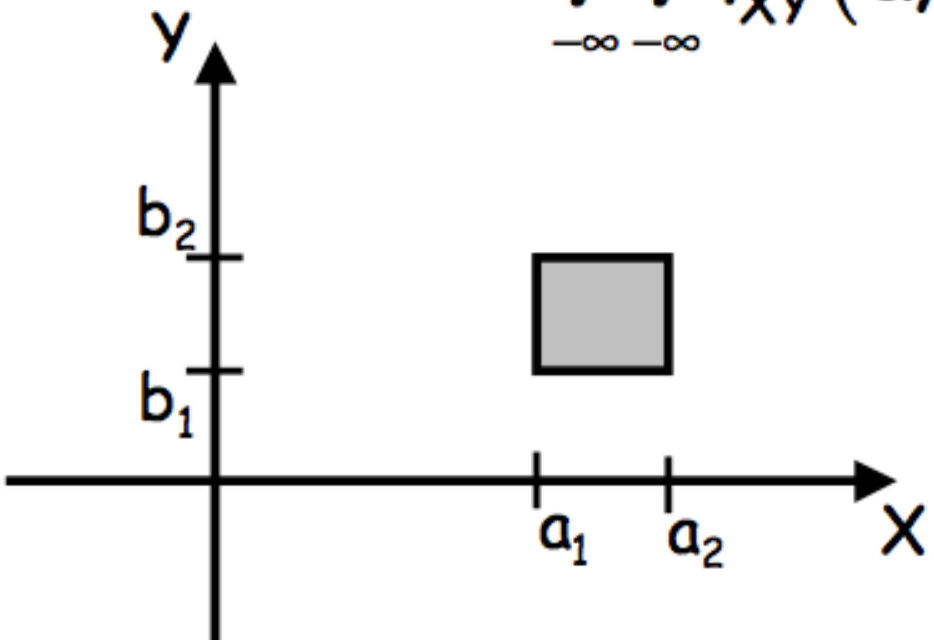
Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đông thời

$$P\left[\{a_1 < X \le a_2\} \cap \{b_1 < Y \le b_2\}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{b_2}\int_{-\infty}^{a_2} f_{XY}(a,b)\,da\,db - \int_{-\infty}^{b_1}\int_{-\infty}^{a_2} f_{XY}(a,b)\,da\,db$$

$$- \int_{-\infty}^{b_2}\int_{-\infty}^{a_1} f_{XY}(a,b)\,da\,db + \int_{-\infty}^{b_1}\int_{-\infty}^{a_1} f_{XY}(a,b)\,da\,db$$

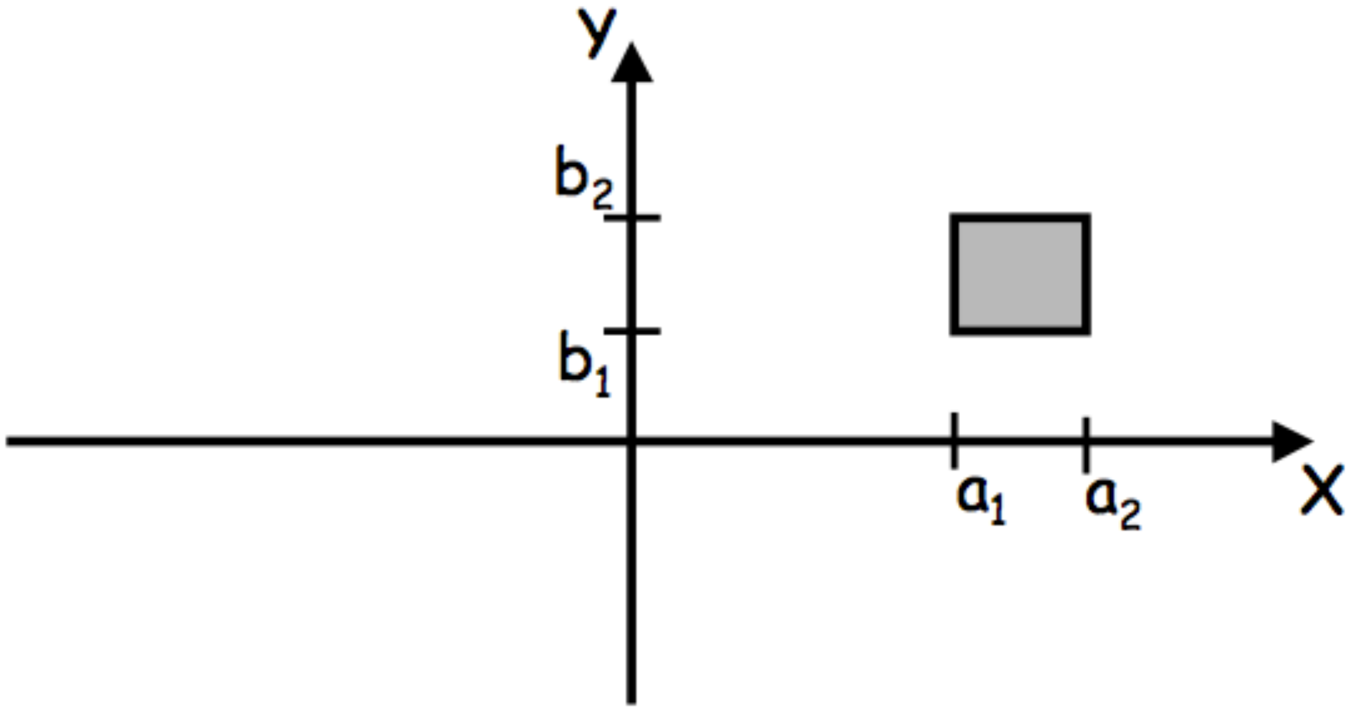


Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$\Rightarrow P\left[\{a_1 < X \leq a_2\} \cap \{b_1 < Y \leq b_2\}\right]$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f_{XY}(a,b)\, da\, db$$



Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$\lim_{\substack{a_1, b_1 \to -\infty \\ a_2, b_2 \to +\infty}} P\left[\{a_1 < X \le a_2\} \cap \{b_1 < Y \le b_2\}\right]$$

$$= \lim_{\substack{a_1, b_1 \to -\infty \\ a_2, b_2 \to +\infty}} \int_{b_1}^{b_2} \int_{a_1}^{a_2} f_{XY}(a,b)\, da\, db$$

$$\boxed{1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(a,b)\, da\, db}$$

Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(a,b)\,da\,db$$

Differentiating with respect to x

Lấy vi phân theo biến x

$$\frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,b)\,db$$

Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đông thời

$$\frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{y} f_{XY}(x,b)\,db$$

Taking the limit as $y \to \infty$ cho y -> vô cùng

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,b)\,db$$

Joint Density Function

Hàm mật độ xác suất đông thời

$$\lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,b)\,db$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,b)\,db = f_X(x)$$

$$\boxed{f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}$$

Marginal Density Functions

Hàm mật độ xác suất biên

$$\boxed{f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \lim_{x\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial y} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

- Let $F_{XY}(x, y)=1-(e^{-\alpha x}+e^{-\beta y})+ e^{-(\alpha x+ \beta y)}$, $x \geq 0$ and $y \geq 0$

  Cho Fxy(x,y) = ...

find the marginal density functions f_X and f_Y and the marginal distribution functions F_X and F_Y.

Tìm hàm mật độ xác suất biên fx và fy và các hàm phân phối biên Fx và Fy

First, let's use the following:

Hàm mật độ xác suất đồng thời

$$\boxed{f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \lim_{x\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial y}}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

We can express $F_{XY}(x, y)$ as follows:
Chúng ta có thể biểu diễn Fxy(x,y) như sau:

$$F_{XY}(x, y) = 1 - (e^{-\alpha x}+e^{-\beta y}) + e^{-(\alpha x+ \beta y)} = (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y})$$

$$f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \lim_{y\to\infty} \alpha\, e^{-\alpha x}(1 - e^{-\beta y})$$

$$f_Y(y) = \lim_{x\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial y} = \lim_{x\to\infty} \beta\, e^{-\beta y}(1 - e^{-\alpha x})$$

Example I.7 Ví dụ I.7

$$f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \lim_{y\to\infty} \alpha\, e^{-\alpha x}(1 - e^{-\beta y})$$

$$\boxed{f_X(x) = \lim_{y\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial x} = \alpha\, e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \lim_{x\to\infty} \frac{\partial F_{XY}(x,y)}{\partial y} = \beta\, e^{-\beta y}}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

- **Second approach, let's use:**
  Cách tiếp cận thứ 2 sử dụng:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx$$

Now, we need to evaluate $f_{XY}(x,y)$:
Bây giờ, chúng ta có thể tính fxy(x, y):

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\,\partial y}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y} = \alpha\ \beta\ e^{-(\alpha x+\beta y)}$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dy = \int_0^{\infty} \alpha\ \beta\ e^{-(\alpha x+\beta y)} dy$$

Let $y' = \beta y$

Đặt

$$f_X(x) = \alpha\ \ e^{-\alpha x} \int_0^{\infty} e^{-y'} dy' \Rightarrow \boxed{f_X(x) = \alpha\ e^{-\alpha x}}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \beta\ e^{-\beta y}}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

Now let's find the marginal distribution functions: F_X and F_Y Bây giờ chúng ta cần tìm các hàm phân bố biên: Fx, Fy

We can start from: Chúng ta có thể bắt đầu từ:

$$F_{XY}(x, y) = 1 - (e^{-\alpha x} + e^{-\beta y}) + e^{-(\alpha x + \beta y)} = (1-e^{-\alpha x})(1-e^{-\beta y})$$

And use: Và sử dụng:

$$\boxed{F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{XY}(x,y)} \qquad \boxed{F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{XY}(x,y)}$$

$$\boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}} \qquad \boxed{F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y}}$$

Example I.7 Ví dụ I.7

If we <u>only have</u> $f_{XY}(x,y)$, then we can also start from: Nếu chúng ta chỉ có fxy(x, y), khi đó chúng ta có thể bắt đầu từ:

$$\boxed{F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(a,b)\,db\,da}$$

$$\boxed{F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(a,b)\,da\,db}$$

Show that you get the same answer starting from $f_{XY}(x,y)$ Chứng minh rằng bạn có thể thu được câu trả lời tương tự khi xuất phát từ fxy(x, y)

Example I.7 Ví dụ I.7

- **Also show the following:** Tương tự, chứng minh điều sau:

$$F_{XY}(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{XY}(a,b)\,da\,db$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(a,b)\,da\,db = 1$$

Example I.7 Ví dụ I.7

$$\boxed{F_X(x) = 1 - e^{-\alpha x}} \quad \boxed{F_Y(y) = 1 - e^{-\beta y}}$$

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = (1 - e^{-\alpha x})(1 - e^{-\beta y}) = F_X(x)F_Y(y)}$$

$$\boxed{f_{XY}(x,y) = \alpha\,\beta\,e^{-\alpha x}e^{-\beta y} = f_X(x)f_Y(y)}$$

Independence Tính độc lập

2 BNN X và Y là độc lập nhau nếu-và-chỉ-nếu:

- Two random variables X and Y are independent if-and-only-if:

$$\boxed{F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)}$$

Điều này đúng vì:

- This is the case since:

$$P[\{X \le x\} \cap \{Y \le y\}] = P[X \le x]\, P[Y \le y]$$

Independence Tính độc lập

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \partial y}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 (F_X(x) F_Y(y))}{\partial x \partial y}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial F_X(x)}{\partial x} \frac{\partial F_Y(y)}{\partial y}$$

Independence Tính độc lập

2 BNN X và Y là độc lập nhau nếu-và-chỉ-nếu:

- **Two random variables X and Y are independent if-and-only-if:**

$$\boxed{f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)}$$

Điều này đúng vì:

- **This is the case since:**

$$\boxed{F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)}$$