Tối ưu hóa (5)

TS. Đỗ Đức Đông
dongdoduc@gmail.com

Các cách tiếp cận

Tối ưu tổ hợp	Tối ưu liên tục
• Các phương pháp truyền thống Chứng minh hội tụ hoặc tỷ lệ tối ưu • Các phương pháp dựa trên thực nghiệm + Heuristic kiến trúc (constructive heuristic) + Tìm kiếm địa phương (local search) + Metaheurisics: - GA (Genetic Algorithms) - ACO (Ant Colony Optimization) - Memetic algorithm	• Quy hoạch tuyến tính • Quy hoạch phi tuyến + Tìm kiếm địa phương - Phương pháp gradient …. + Tối ưu toàn cục - Quy hoạch lồi, hiệu lồi - Tìm kiếm ngẫu nhiên (Monter-Carlo) - GA (Genetic Algorithms) …

Xét bài toán

Giả sử một xí nghiệp sản xuất hai loại sản phẩm I và II. Để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm I cần có 4 đơn vị nguyên liệu loại A và 2 đơn vị nguyên liệu loại B, các chỉ tiêu đó cho một đơn vị sản phẩm loại II là 2 và 4. Lượng nguyên liệu dự trữ loại A và B hiện có là 60 và 48 (đơn vị). Hãy xác định phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất, biết lợi nhuận trên một đơn vị sản phẩm bán ra là 8 và 6 (đơn vị tiền tệ) cho các sản phẩm loại I và II.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2$$

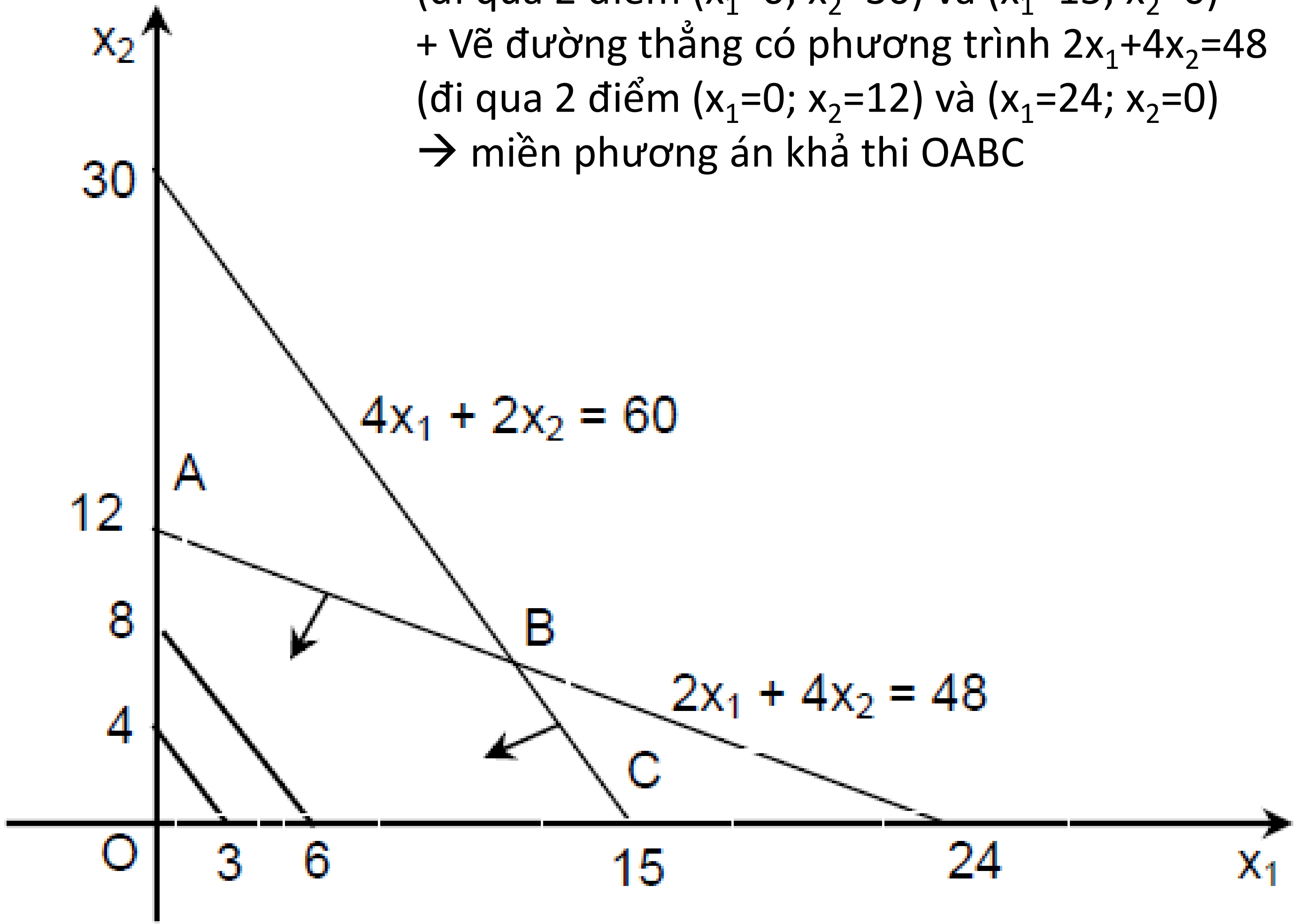
Phương pháp đồ thị (1)

- Bước 1: Vẽ miền các phương án khả thi
- Bước 2: Dùng đường đồng mức hoặc xét các điểm cực biên của miền phương án khả thi

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

+ Vẽ đường thẳng có phương trình $4x_1+2x_2=60$ (đi qua 2 điểm ($x_1=0$; $x_2=30$) và ($x_1=15$; $x_2=0$))
+ Vẽ đường thẳng có phương trình $2x_1+4x_2=48$ (đi qua 2 điểm ($x_1=0$; $x_2=12$) và ($x_1=24$; $x_2=0$))
→ miền phương án khả thi OABC

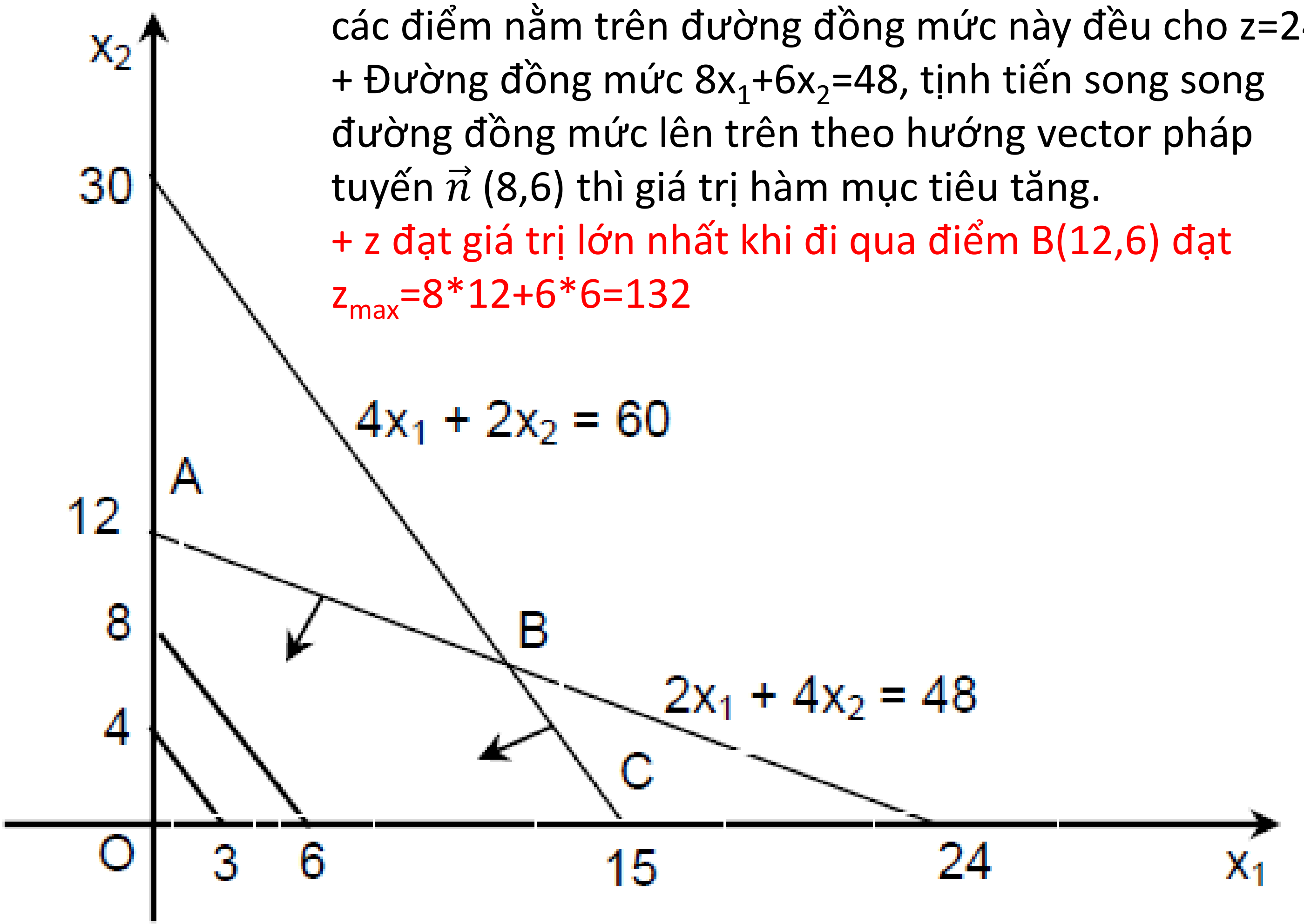


Phương pháp đồ thị (2)

- Bước 1: Vẽ miền các phương án khả thi
- Bước 2: Tìm cực trị bằng dùng đường đồng mức hoặc xét các điểm cực biên của miền phương án khả thi

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



+ Vẽ đường đồng mức $8x_1+6x_2=c$, $c=24$ (c có thể chọn bất kỳ, nhưng chọn $c=24$ là bội chung của 6 và 8), đường này đi qua 2 điểm ($x_1=0$; $x_2=4$) và ($x_1=3$; $x_2=0$), các điểm nằm trên đường đồng mức này đều cho $z=24$.

+ Đường đồng mức $8x_1+6x_2=48$, tịnh tiến song song đường đồng mức lên trên theo hướng vector pháp tuyến $\vec{n}$ (8,6) thì giá trị hàm mục tiêu tăng.

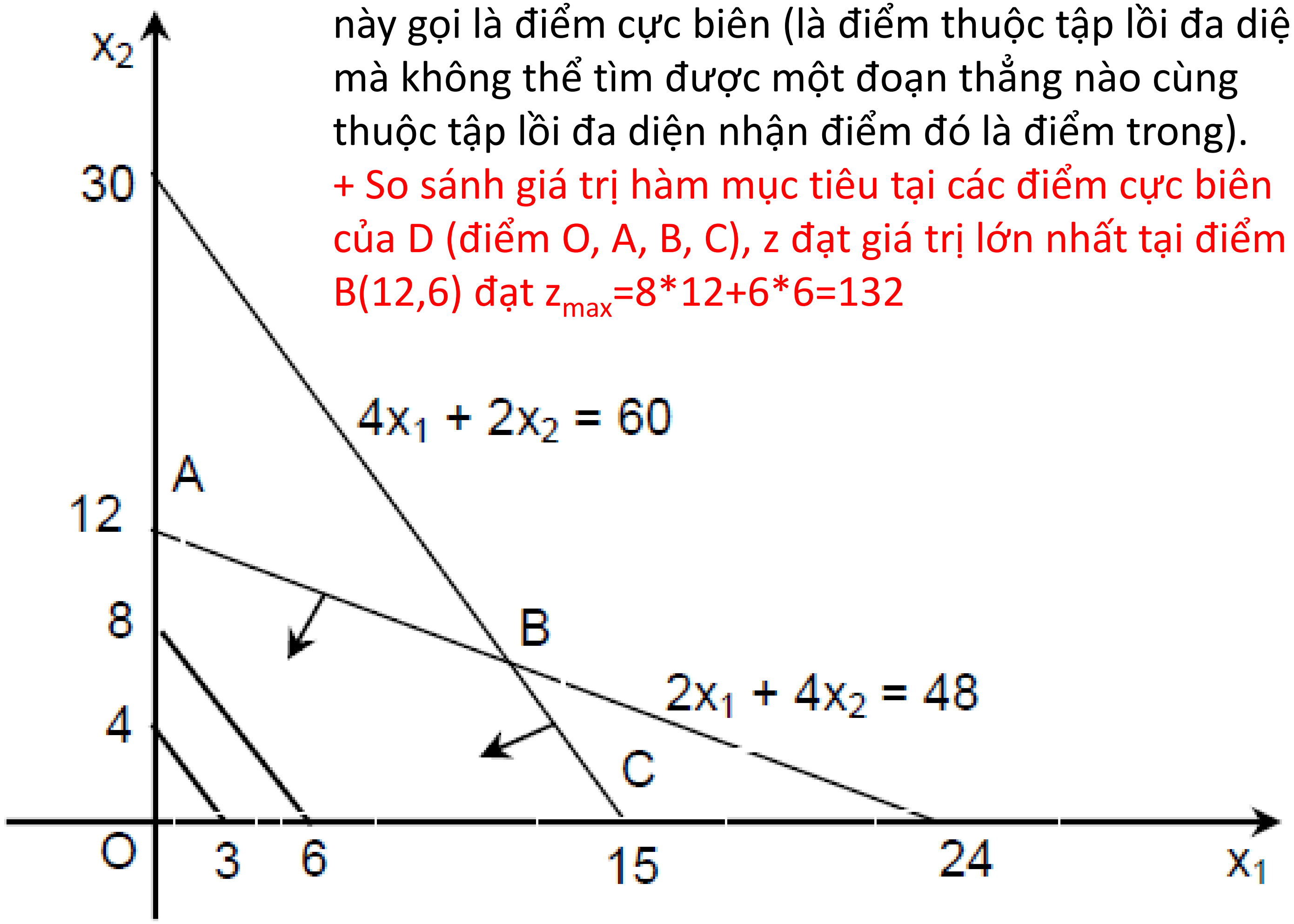
+ z đạt giá trị lớn nhất khi đi qua điểm B(12,6) đạt $z_{max}=8*12+6*6=132$

Phương pháp đồ thị (3)

- Bước 1: Vẽ miền các phương án khả thi
- Bước 2: Tìm cực trị bằng dùng đường đồng mức hoặc xét các điểm cực biên của miền phương án khả thi

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

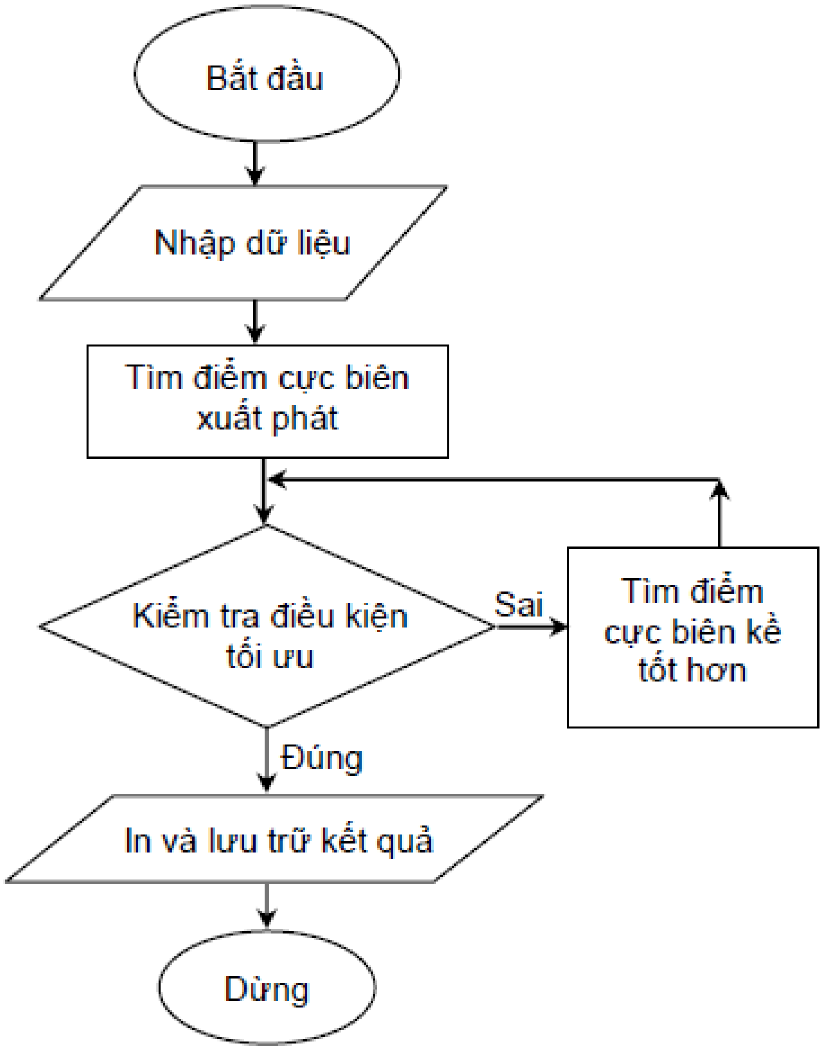
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$



+ Phương án tối ưu (nếu có) của một bài toán QHTT với miền phương án D (một tập lồi đa diện có đỉnh) luôn đạt được tại ít nhất một trong các đỉnh của D. Các đỉnh này gọi là điểm cực biên (là điểm thuộc tập lồi đa diện mà không thể tìm được một đoạn thẳng nào cùng thuộc tập lồi đa diện nhận điểm đó là điểm trong).

+ So sánh giá trị hàm mục tiêu tại các điểm cực biên của D (điểm O, A, B, C), z đạt giá trị lớn nhất tại điểm B(12,6) đạt z_{max}=8*12+6*6=132

Phương pháp đồ thị (4)



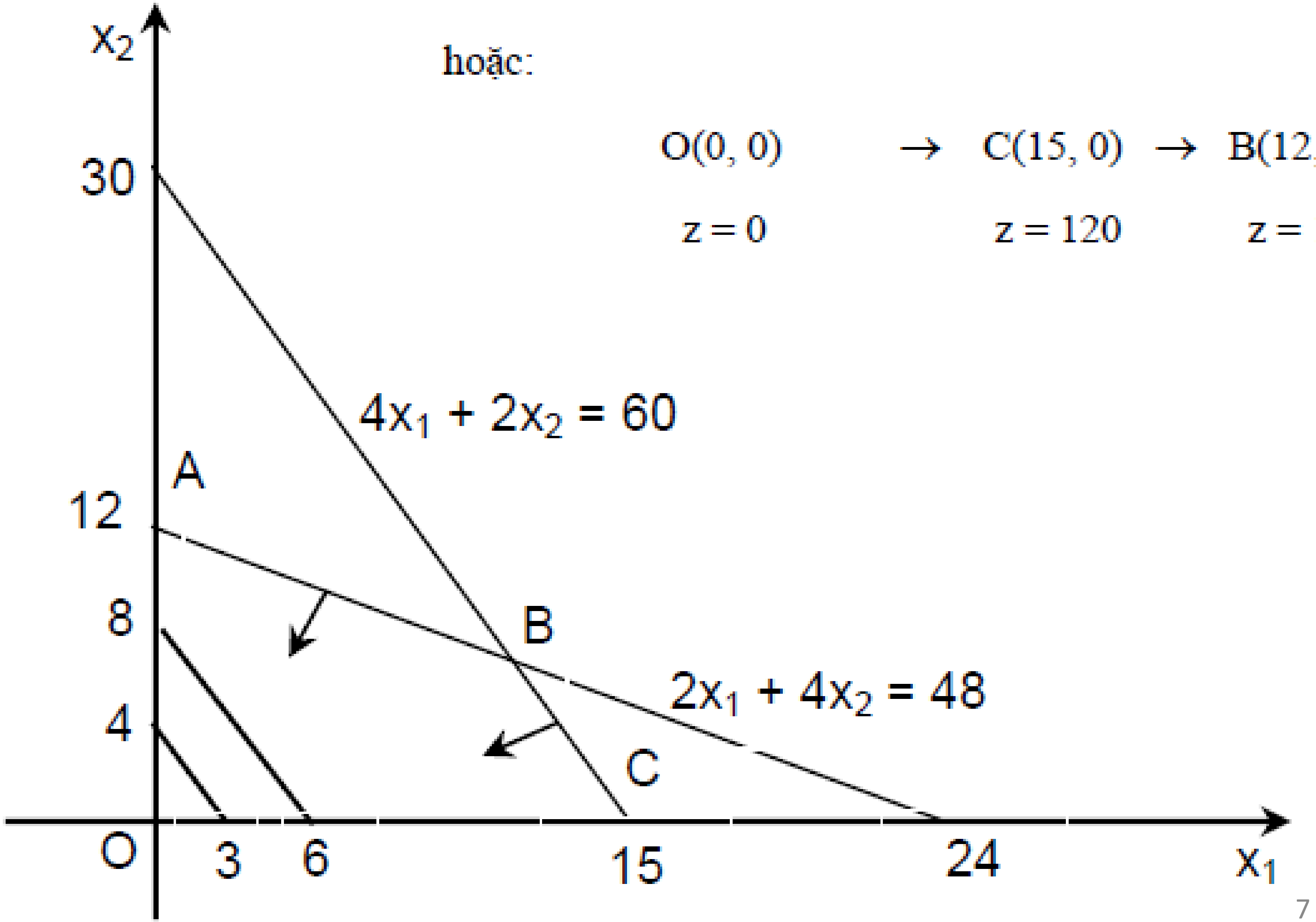
$O(0, 0) \rightarrow A(0, 12) \rightarrow B(12, 6)$ dừng

$z = 0 \qquad z = 72 \qquad z = 132$

hoặc:

$O(0, 0) \rightarrow C(15, 0) \rightarrow B(12, 6)$ dừng

$z = 0 \qquad z = 120 \qquad z = 132$



Phương pháp đơn hình

- Phương pháp đơn hình là phương pháp số giải bài toán QHTT.
- Cần đưa bài toán QHTT về dạng chính tắc bằng các biến bù không âm.
- Bài toán QHTT có dạng chính tắc với các biến không âm, các ràng buộc có dấu "=", hệ số bên phải của các ràng buộc không âm, ngoài ra mỗi ràng buộc phải có một biến đứng độc lập với hệ số +1.

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \quad = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \quad + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4

Điền số liệu của bài toán vào bảng

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 8$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$

Phương án xuất phát có thể chọn $x_1=x_2=0$;

Do đó, $x_3=60$; $x_4=48$

Bài toán có 2 ràng buộc nên có 2 biến cơ sở (x_3 và x_4 vì giá trị khác 0)

+ Ghi hệ số của biến cơ sở trong hàm mục tiêu (cột 1)

+ Ghi biến cơ sở (cột 2)

+ Ghi giá trị các biến cơ sở (cột 3)

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

+ Ghi các hệ số 4 (cột 4) có ý nghĩa nếu tăng 1 sản phẩm loại 1 (biến x_1) thì sản phẩm loại 3 phải giảm đi 4 (tăng x_1 lên 1 thì phải giảm x_3 đi 4), …

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = \mathbf{8}$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	60	4	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 8$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$

+ $z_0 = 0$

+ z_1 = chi phí để thêm 1 sản phẩm loại 1 (cột hệ số hàm mục tiêu * hệ số của biến x_1)

+ $\Delta_j = c_j - z_j$ = (lợi nhuận/1 đơn vị sản phẩm) - (chi phí/1 đơn vị sản phẩm)

+ Nếu Δ_j>0 thì hàm mục tiêu còn tăng được

x_1 tăng lên 1 thì z tăng lên 8, còn x_2 tăng lên 1 thì z tăng lên 6.

Do Δ_1 và Δ_2 > 0, nên vẫn có thể cải thiện hàm mục tiêu (trong phương pháp đồ thị, từ điểm O(0,0) có thể sang điểm A(0,12) hay C(15,0)

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

+ Chọn cột xoay là cột bất kỳ có $\Delta_j > 0$, biến x_j tương ứng với cột xoay làm biến cơ sở mới (chọn x_1)

+ Chọn hàng xoay để xác định biến đưa ra khỏi tập biến cơ sở, để chọn hàng xoay theo quy tắc "tỉ số dương bé nhất" bằng cách lấy cột phương án $(60,48)^T$ chia cột xoay $(4,2)^T$ (chọn x_3)

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = \mathbf{8}$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 2						
8	x_1	**15**	1	**1/2**	1/4	0
0	x_4	18	0	3	–1/2	1
Hàng z		$z_0 = 120$	$z_1 = 8$	$z_2 = 4$	$z_3 = 2$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = \mathbf{2}$	$\Delta_3 = -2$	$\Delta_4 = 0$

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \qquad + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

+ Ghi lại hệ số của biến cơ sở trong hàm mục tiêu (cột 1)
+ Ghi các hệ số của hàng xoay bằng cách lấy hàng cũ chia cho phần tử xoay
+ Tính lại các hệ số cho các hàng khác.

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = \mathbf{8}$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 2						
8	x_1	**15**	1	**1/2**	1/4	0
0	x_4	18	0	3	–1/2	1
Hàng z		$z_0 = 120$	$z_1 = 8$	$z_2 = 4$	$z_3 = 2$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = \mathbf{2}$	$\Delta_3 = -2$	$\Delta_4 = 0$

biến đổi tương đương hệ phương trình

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \end{cases} \quad \text{để có hệ} \quad \begin{cases} x_1 + (1/2)x_2 + (1/4)x_3 = 15 \\ 0x_1 + 3x_2 - (1/2)x_3 + x_4 = 18 \end{cases}$$

Ở bước 3, điều kiện tối ưu thỏa mãn $\Delta_j < 0$ nên không còn khả năng cải thiện phương án → tối ưu

Hệ số hàm mục tiêu c_j	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 8$	$c_2 = 6$	$c_3 = 0$	$c_4 = 0$
			x_1	x_2	x_3	x_4
Bảng đơn hình bước 1						
0	x_3	**60**	**4**	2	1	0
0	x_4	48	2	4	0	1
Hàng z		$z_0 = 0$	$z_1 = 0$	$z_2 = 0$	$z_3 = 0$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = \mathbf{8}$	$\Delta_2 = 6$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 2						
8	x_1	**15**	1	**1/2**	1/4	0
0	x_4	18	0	3	–1/2	1
Hàng z		$z_0 = 120$	$z_1 = 8$	$z_2 = 4$	$z_3 = 2$	$z_4 = 0$
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			$\Delta_1 = 0$	$\Delta_2 = \mathbf{2}$	$\Delta_3 = -2$	$\Delta_4 = 0$
Bảng đơn hình bước 3						
8	x_1	12	1	0	1/3	–1/6
6	x_2	6	0	1	–1/6	1/3
Hàng z		$z_0 = 132$	8	6	5/3	2/3
Hàng $\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	–5/3	–2/3

Một số chú ý

- Trong trường hợp không tìm được phương án xuất phát, tức là không có phương án khả thi.
- Trong trường hợp tìm được cột xoay mà không tìm được hàng xoay thì kết luận hàm mục tiêu không bị chặn.

Khung thuật toán đơn hình cho bài toán QHTT cực đại chính tắc

- Bước khởi tạo
  - Tìm phương án cực biên ban đầu.
  - Tính $\Delta_j = c_j - z_j, \forall j = 1,2,\ldots,n$, với n là số biến bài toán đang xét.
- Các bước lặp
  - Bước 1: Kiểm tra điều kiện tối ưu. Nếu Δ_j<0 với mọi j thì in kết quả và kết thúc;
  - Nếu tồn tại Δ_j>0 thì tiến hành thủ tục xoay.

Thực hành (1)

Xét BTQHTT dạng Max:

$$\text{Max } z = 6x_1 + 4x_2$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 2x_2 \le 120 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

Thực hành (2)

$6x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 10x_1 + 4x_2 + x_5 = 36 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,2,3,4,5$$

	Hệ số	Cơ sở	Phương án	6	5	1	1	-1
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	1	x_3	8	1	1	1	0	0
	1	x_4	6	2	1	0	1	0
	-1	x_5	36	10	4	0	0	1
	z		-22	-7	-2	1	1	-1
	Δ_j			13	7	0	0	0
II	1	x_3	5	0	1/2	1	-1/2	0
	6	x_1	3	1	1/2	0	1/2	0
	-1	x_5	6	0	-1	0	-5	1
	z		17	6	5/2	1	15/2	-1
	Δ_j			0	5/2	0	-13/2	0
III	1	x_3	2	-1	0	1	-1	0
	5	x_2	6	2	1	0	1	0
	-1	x_5	12	2	0	0	-4	1
	z		20	7	5	1	8	-1
	Δ_j			-1	0	0	-7	0

Bài toán quy hoạch tuyến tính tổng quát

- Trong đó $\circledast$ biểu diễn cho $\leq$, $\geq$ hoặc $=$ đối với các ràng buộc.
- Muốn giải bài toán QHTT tổng quát cần đưa về dạng chính tắc.

$$Max\ (Min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \ \Theta\ b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \ \Theta\ b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \ \Theta\ b_m \\ x_1\ \Theta\ 0,\ x_2\ \Theta\ 0,\ \dots,\ x_n\ \Theta\ 0. \end{cases}$$

Bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$\text{Max (Min) } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_j \geq 0, \ \forall j = \overline{1,n}. \end{cases}$$

$$\text{Max } z = c^T x, \text{ với } x \in D = \{x \in R^n: Ax = b, x \geq 0\}$$

Chúng ta sử dụng các ký hiệu sau (T là ký hiệu chuyển vị):

– Véc tơ hệ số hàm mục tiêu $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)^T \in R^n$,

– Véc tơ quyết định $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in R^n$,

– Véc tơ hệ số vế phải $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T \in R^m$,

Ma trận hệ số các điều kiện ràng buộc

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \in R^{m \times n};$$

Bài toán QHTT dạng chuẩn tắc nếu hạng của A bằng m và $b \geq 0$ (các tọa độ của b đều không âm). Nếu A có m vector cột đơn vị độc lập tuyến tính thì bài toán chuẩn tắc trở thành bài toán dạng chính tắc, giả sử các vector cột a_j ($j=n-m+1,\ldots,n$)

Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc (1)

- Trường hợp 1: Ràng buộc $\leq$, thêm biến bù (cộng thêm một biến không âm)

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \leq 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 48 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc (2)

- Trường hợp 2: Ràng buộc ≥, thêm biến (trừ đi một biến không âm)

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc (3)

- Trường hợp 3: Có biến không dương → đổi biến

$$\text{Max } z = 8x_1 - 6x_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \le 0, x_3 \ge 0, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{Max } z = 8x_1 + 6x'_2$$

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x'_2 + x_3 \le 60 \\ 2x_1 - 4x'_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Đưa bài toán quy hoạch tuyến tính về dạng chính tắc (4)

- Trường hợp 4: Biến có dấu tùy ý → thay bằng hiệu hai biến dương

Max $z = 8x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \le 48 \\ x_1 \ge 0, x_2 \text{ có dấu tuỳ ý.} \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x'_2 - 6x''_2 + 0x_3 + 0x_4$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x'_2 - 2x''_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x'_2 - 4x''_2 + x_4 = 48 \\ x_1, x'_2, x''_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases}$$

Max $z = 8x_1 + 6x_2$, với các ràng buộc Max $z = 8x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$, trong đó $M \approx +\infty$

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 4x_2 \ge 48 \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 60 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 48 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	8	6	0	0	–M
			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	60	4	2	1	0	0
–M	x_5	**48**	2	**4**	0	–1	+1
Hàng z		$z_0 = -48M$	$z_1 = -2M$	$z_2 = -4M$	$z_3 = 0$	$z_4 = M$	$z_5 = -M$
Hàng Δ_j			$\Delta_1 = 8 + 2M$	$\Delta_2 = \mathbf{6+4M}$	$\Delta_3 = 0$	$\Delta_4 = -M$	$\Delta_5 = 0$
0	x_3	**36**	3	0	1	**1/2**	–1/2
6	x_2	12	1/2	1	0	–1/4	1/4
Hàng z		72	3	6	0	–3/2	3/2
Hàng Δ_j			5	0	0	**3/2**	–M–3/2
0	x_4	72	6	0	2	1	–1
6	x_2	30	2	1	1/2	0	0
Hàng z		180	12	6	3	0	0
Hàng Δ_j			–4	0	–3	0	–M

$$\text{Min } z = 3x_1 - x_2$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -4x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 4 \leq x_1 \leq 8 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

a. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đồ thị.

b. Hãy giải bài toán bằng phương pháp đơn hình.

$$\text{Min } z = 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

Bài toán gốc

$$Max\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m \\ x_1, x_2, ..., x_n \ge 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu

$$Min\ u = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1 \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge c_2 \\ ... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \ge c_n \\ y_1, y_2, ..., y_m \ge 0. \end{cases}$$

Các biến $y_1, y_2, \dots, y_m$ được gọi là các biến đối ngẫu. Bài toán gốc có m ràng buộc, nên bài toán đối ngẫu có m biến đối ngẫu. Biến đối ngẫu y_i tương ứng với rang buộc thứ i.

Ý nghĩa của bài toán đối ngẫu

Xét *bài toán gốc*

$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

- Có 3 loại sản phẩm I, II, III. Để sản xuất 1 đơn vị sản phẩm loại I cần 3 đơn vị nguyên liệu loại A, 2 đơn vị nguyên liệu loại B và 1 đơn vị nguyên liệu loại C. Loại 2 là 4, 1, 3; Loại 3 là 2, 2, 2. Nguyên liệu loại A, B, C có là 60, 40, 80. Lợi nhuận 1 sản phẩm loại A, B, C là 2, 4, 3.

→xây dựng phương án sản xuất đạt lợi nhuận lớn nhất.

- Một khách hàng muốn mua lại các nguyên liệu loại A, B, C. Bài toán cần định giá các đơn vị nguyên liệu.
  - Các nguyên liệu được quy định bởi giá trị của sản phẩm tạo ra, nếu sản phẩm lợi nhuận lớn thì giá ước định của nguyên liệu phải cao và ngược lại.
  - Gọi y_1, y_2, y_3 ($y_1, y_2, y_3 \ge 0$) là giá ước định 1 đơn vị nguyên liệu loại A, B, C
  - Mua các nguyên liệu với tổng chi phí nhỏ nhất $60y_1 + 40y_2 + 80y_3$
  - Giá tiền mua nguyên liệu để sản xuất 1 sản phẩm loại I là $3y_1 + 2y_2 + y_3$, giá này không ít hơn 2, …

Quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát (1)

Bài toán gốc (BTG)	*Bài toán đối ngẫu (BTĐN)*
$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 80 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$	$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$

- Hàm mục tiêu của BTG là Max thì BTĐN là Min
- Hệ số hàm mục tiêu của BTG là hệ số vế phải của BTĐN
- Hệ số vế phải của BTG là hệ số hàm mục tiêu của BTĐN
- Ma trận hệ số BTG là A thì ma trận hệ số BTĐN là A^T.

- Biến có ràng buộc ≥ 0 của BTG thì ràng buộc là $\geq$ của BTĐN
- Ràng buộc $\leq$ của BTG thì biến ≥ 0 của BTĐN

Quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát (2)

Xét bài toán gốc là BTQHTT dạng tổng quát sau đây: $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \rightarrow \text{Max}$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \quad \Theta \; b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad \Theta \; b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad \Theta \; b_m \\ x_1 \,\Theta\, 0,\; x_2 \,\Theta\, 0, \quad ...,\; x_n \;\Theta\; 0 . \end{cases}$$

Trong đó, ký hiệu Θ có thể hiểu là $\leq$, $\geq$ hoặc = đối với các ràng buộc. Đối với điều kiện về dấu của các biến, ký hiệu Θ 0 có thể hiểu là ≥ 0, ≤ 0 hoặc có dấu tuỳ ý.

- Hàm mục tiêu của BTG là Max thì BTĐN là Min
- Hệ số hàm mục tiêu của BTG là hệ số vế phải của BTĐN
- Hệ số vế phải của BTG là hệ số hàm mục tiêu của BTĐN
- Ma trận hệ số BTG là A thì ma trận hệ số BTĐN là A^T.

- Biến ≥ 0 của BTG thì ràng buộc là $\geq$ của BTĐN;
- Biến ≤ 0 của BTG thì ràng buộc là $\leq$ của BTĐN;
- Biến tùy ý của BTG thì ràng buộc là $=$ của BTĐN;

- Ràng buộc $\leq$ của BTG thì biến ≥ 0 của BTĐN
- Ràng buộc $\geq$ của BTG thì biến ≤ 0 của BTĐN
- Ràng buộc $=$ của BTG thì biến tùy ý của BTĐN

Quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát (3)

Bài toán gốc (BTG)	*Bài toán đối ngẫu (BTĐN)*
$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \ge 80 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \le 0,\ x_3 \text{ dấu tuỳ ý.} \end{cases}$	$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$ với các ràng buộc: $\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \le 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 3 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \text{ dấu tuỳ ý},\ y_3 \le 0. \end{cases}$

- Hàm mục tiêu của BTG là Max thì BTĐN là Min
- Hệ số hàm mục tiêu của BTG là hệ số vế phải của BTĐN
- Hệ số vế phải của BTG là hệ số hàm mục tiêu của BTĐN
- Ma trận hệ số BTG là A thì ma trận hệ số BTĐN là A^T.

- Biến ≥ 0 của BTG thì ràng buộc là $\ge$ của BTĐN;
- Biến ≤ 0 của BTG thì ràng buộc là $\le$ của BTĐN;
- Biến tùy ý của BTG thì ràng buộc là $=$ của BTĐN;

- Ràng buộc $\le$ của BTG thì biến ≥ 0 của BTĐN
- Ràng buộc $\ge$ của BTG thì biến ≤ 0 của BTĐN
- Ràng buộc $=$ của BTG thì biến tùy ý của BTĐN

Quy tắc viết bài toán đối ngẫu tổng quát (5)

	Bài toán *I*	Bài toán *II*
Hàm mục tiêu	$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to \max$	$\sum_{j=1}^{m} b_j y_j \to \min$
Điều kiện loại	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i \le b_j$	$y_j \ge 0$
	$\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j$	y_j nhận dấu tuỳ ý
	$x_i \ge 0$	$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_i \ge c_i$
	x_i nhận dấu tuỳ ý	$\sum_{j=1}^{m} a_{ji} y_i = c_i$

Các tính chất và ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu (1)

- Tính chất 1: Bài toán đối ngẫu của bài toán đối ngẫu là bài toán gốc

$$\text{Max } z = 2x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 60 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \le 40 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \le 80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{Min } u = 60y_1 + 40y_2 + 80y_3$$

với các điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} 3y_1 + 2y_2 + y_3 \ge 2 \\ 4y_1 + y_2 + 3y_3 \ge 4 \\ 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \ge 3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{Min } v = -2x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 \ge -60 \\ -2x_1 - x_2 - 2x_3 \ge -40 \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 \ge -80 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

$$\text{Max } t = -60y_1 - 40y_2 - 80y_3$$

với các điều kiện ràng buộc

$$\begin{cases} 3(-y_1) + 2(-y_2) + (-y_3) \le -2 \\ 4(-y_1) + (-y_2) + 3(-y_3) \le -4 \\ 2(-y_1) + 2(-y_2) + 2(-y_3) \le -3 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0. \end{cases}$$

Các tính chất và ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu (2)

- Tính chất 2: Với mọi phương án x của bài toán gốc (bài toán Max) và mọi phương án y của bài toán đối ngẫu (bài toán Min), ta luôn có $z(x) \leq u(y)$

- Ý nghĩa kinh tế: Với mọi phương án định giá nguyên liệu thì "tổng chi phí (phía muốn mua) phải bỏ ra để mua các đơn vị nguyên liệu đó không bao giờ thấp hơn được tổng lợi nhuận mang lại khi dùng các đơn vị nguyên liệu đó để sản xuất ra sản phẩm và tiêu thụ chúng trên thị trường".

Các tính chất và ý nghĩa kinh tế của cặp bài toán đối ngẫu (3)

- Tính chất 3: Nếu tồn tại hai phương án x^* của bài toán gốc và y^* của bài toán đối ngẫu sao cho $z(x^*) = u(y^*)$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán gốc còn y^* là phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu. Phương án tối ưu của bài toán đối ngẫu có thể tìm được trong bảng đơn hình tối ưu của bài toán gốc và ngược lại.

- Dễ dàng suy ra vì z(x) ≤ u(y)

- Ý nghĩa kinh tế:

➢ Chi phí thấp nhất phải bỏ ra để mua các đơn vị nguyên liệu chính bằng tổng lợi nhuận cao nhất khi dùng các đơn vị nguyên liệu đó để sản xuất ra sản phẩm và tiêu thụ chúng trên thị trường.

➢ Giá trị các tài nguyên của một công ty được ước định dựa trên trình độ tổ chức sản xuất, trình độ công nghệ và giá trị thị trường của các sản phẩm mà các tài nguyên này tạo nên tại thời điểm hiện tại. Quy tắc này tỏ ra đặc biệt cần thiết trong việc đánh giá tài nguyên tài sản của một công ty. Đối với các công ty làm ăn thua lỗ thì giá ước định các tài nguyên là thấp, còn các công ty làm ăn phát đạt thì giá ước định các tài nguyên là cao.

Min $z = 3x_1 + 2x_2$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 + x_2 \geq 3 \\ 2x_1 + x_2 \geq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Bài toán đối ngẫu:

Max $u = 4y_1 + 3y_2 + 4y_3$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 \leq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Viết bài toán đối ngẫu dưới dạng chính tắc:

Max $u = 4y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 0y_5$

với các ràng buộc

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 3 \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0. \end{cases}$$

Hệ số hàm mục tiêu	*Biến cơ sở*	*Phương án*	$c_1 = 4$	$c_2 = 3$	$c_3 = 4$	$c_4 = 0$	$c_5 = 0$
			y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
0	y_4	3	1	1	**2**	1	0
0	y_5	2	2	1	1	0	1
u_j		0	0	0	0	0	0
Δ_j^l			4	3	4	0	0
4	y_3	3/2	1/2	1/2	1	1/2	0
0	y_5	1/2	**3/2**	1/2	0	– 1/2	1
u_j		6	2	2	4	2	0
Δ_j^l			2	1	0	– 2	0
4	y_3	4/3	0	1/3	1	2/3	– 1/3
4	y_1	1/3	1	**1/3**	0	– 1/3	2/3
u_j		20/3	4	8/3	4	4/3	4/3
Δ_j^l			0	1/3	0	– 4/3	– 4/3
4	y_3	1	– 1	0	1	1	– 1
3	y_2	1	3	1	0	– 1	2
u_j		7	5	3	4	1	2
Δ_j^l			– 1	0	0	– 1	– 2

Bài toán vận tải tổng quát (1)

Có m kho (còn gọi là điểm phát) A_1, A_2,…,A_m với lượng hàng ở kho A_i là a_i. Lượng hàng này cấp cho n điểm tiêu thụ (còn gọi là điểm thu) B_1, B_2,…,B_n với nhu cầu ở B_j là b_j. Nếu $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ thì ta nói bài toán là *cân bằng thu phát* hay bài toán đúng.

Nếu cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ A_i tới B_j là c_{ij} và ký hiệu x_{ij} là lượng hàng được đưa từ A_i đến B_j thì bài toán quy hoạch.

Bài toán này có *mxn* ẩn, để đưa về dạng chính tắc cần thêm *m +n* ẩn phụ nữa. Nếu dùng thuật toán đơn hình để giải thì hiệu quả kém.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$

Bài toán vận tải tổng quát (2)

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & \left(i = \overline{1,m}\right) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & \left(j = \overline{1,n}\right) \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}\right)$$

Thu Cước phí Phát	B_1 b_1	...	B_j b_j	...	B_n b_n
$A_1 : a_1$	c_{11} x_{11}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}
...	...	...	...	...	...
$A_i : a_i$	c_{i1} x_{i1}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}
...	...	...	...	...	...
$A_m : a_m$	c_{m1} x_{m1}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}

Bài toán vận tải tổng quát (3)

Trong bài toán tổng quát có thể xảy ra hai trường hợp

1) Phát (cung) lớn hơn thu (cầu) $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_i} > \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{b_j}$

➢thêm điểm thu giả B_{n+1} với lượng cầu là $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$

➢cước phí từ điểm phát bất kỳ tới nó đều bằng nhau và bằng c không đổi (có thể lấy $c = 0$). Ta đưa được về bài toán cân bằng thu phát. Nếu trong lời giải có $x_{i,(n+1)} > 0$ thì đây là lượng hàng sẽ còn lại ở trong kho A_i tương ứng sau khi phát.

2) Phát (cung) không đủ thu (cầu) $\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_i} < \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{b_j}$

➢thêm điểm phát giả A_{m+1} với lượng cầu là $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$

➢cước phí từ A_{m+1} tới B_j bất kỳ sẽ như nhau và bằng c (có thể lấy $c = 0$).

Các tính chất cơ bản của bài toán cân bằng thu phát (1)

Tính chất 1: Nếu thay cước phí c_{ij} bởi $c'_{ij} = c_{ij} + r_i + s_j; \forall i, j$, trong đó r_i, s_j là các hằng số cho trước, thì phương án tối ưu của bài toán không thay đổi.

Chứng minh:

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c'_{ij}x_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(c_{ij} + r_i + s_j\right)x_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} r_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} s_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij}$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{m} r_i a_i + \sum_{i=1}^{n} s_j b_j$$

Các tính chất cơ bản của bài toán cân bằng thu phát (2)

Tính chất 2: Bài toán vận tải cân bằng thu phát luôn luôn có lời giải

Chứng minh:

➢ Ta có thể giả thiết các hệ số c_{ij} không âm . Vì vậy hầm muc tiêu bị chặn dưới bởi 0.

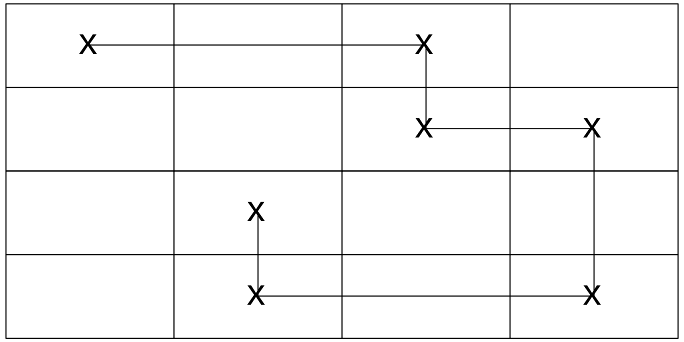
➢ Đặt $x_{ij} = \dfrac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} \quad (\forall i, j)$ là chấp nhận được vì $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = b_j$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_i b_j}{\sum_{i=1}^{m} a_i} = a_i$$

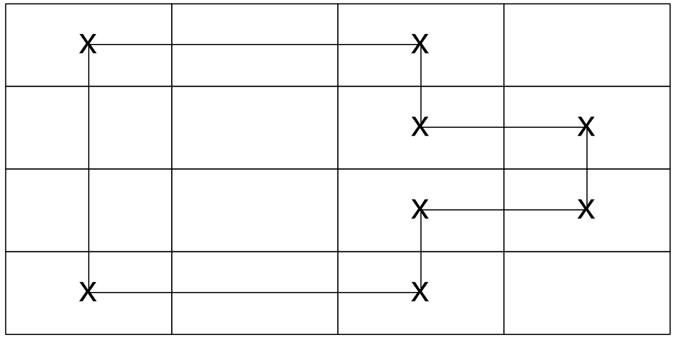
Mặt khác hàm mục tiêu của bài toán luôn bị chặn dưới bởi $M = 0$ nên bài toán có lời giải.

Các tính chất cơ bản của bài toán cân bằng thu phát (3)

Định nghĩa. Một dãy các ô sao cho mỗi cặp (và không quá 2) ô liên tiếp cùng ở trong một hàng hoặc một cột gọi là một dây chuyền. Một dây chuyền khép kín được gọi là một chu trình.



Tính chất 3: Giả sử S là tập gồm m + n - 1 ô không chứa chu trình. Nếu thêm vào ô (i,j) tuỳ ý không thuộc S thì tập $S_1 = S \cup \{(i, j)\}$ *chứa chu trình V và nếu loại đi một ô tuỳ ý thuộc V trong* S_1 *thì được tập* S_2 *không chứa chu trình.*



Các tính chất cơ bản của bài toán cân bằng thu phát (4)

Tính chất 4: x là phương án cơ bản khi và chỉ khi các ô chọn của nó không tạo nên chu trình. Phương án cơ bản x là không suy biến nếu nó có đúng m + n - 1 ô chọn.

Chú ý. Nếu phương án là suy biến thì số ô chọn ít hơn $m + n – 1$. Trong trường hợp này ta có thể bổ sung thêm các ô loại và xem nó là ô chọn để có đúng $m + n – 1$ ô chọn không tạo nên chu trình.

Lập phương án cơ bản xuất phát (1)

Dùng phương pháp *cực tiểu cước phí* để tìm phương án xuất phát: luôn ưu tiên phân phối nhiều nhất vào ô có cước phí nhỏ nhất (nếu bài toán được đưa về bài toán cân bằng nhờ các điểm thu hoặc phát bổ sung thì ta phân phối cho các ô có liên quan tới điểm này sau cùng)

- Giả sử ma trận cước phí $C = \left(c_{ij}\right)_{m\times n}$ có c_{rs} nhỏ nhất thì ta phân phối nhiều nhất vào ô (*r*,*s*) cụ thể là: $x_{rs} = \begin{cases} a_r \text{ nếu } a_r \le b_s \\ b_s \text{ nếu } a_r > b_s \end{cases}$ và xoá đi hàng hoặc cột tương ứng với điểm đã phát hết hoặc nhận đủ.
- Trong bảng còn lại số hàng hoặc cột ít hơn ta tiếp tục phân phối như trên cho đến khi phân phối hết.

Lập phương án cơ bản xuất phát (2)

Ma trận cước phí $C = (c_{ij})_{m \times n}$ có c_{rs} nhỏ nhất thì ta phân phối nhiều nhất vào ô (*r*,*s*) cụ thể là:

$$x_{rs} = \begin{cases} a_r \text{ nếu } a_r \leq b_s \\ b_s \text{ nếu } a_r > b_s \end{cases}$$

và xoá đi hàng hoặc cột tương ứng với điểm đã phát hết hoặc nhận đủ.

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50
A_1 : 25	1 / 20	3	2 / 5
A_2 : 35	5	4 / 30	3 / 5
A_3 : 40	8	5	2 / 40

Lập phương án cơ bản xuất phát (3)

Thu / Cước phí / Phát	B_1 25	B_2 15	B_3 60
$A_1 : 25$	1	3	2
$A_2 : 35$	5	4	3
$A_3 : 40$	8	5	2

Thu / Cước phí / Phát	B_1 25	B_2 15	B_3 60
$A_1 : 25$	1 25	3	2
$A_2 : 35$	5	4 15	3 20
$A_3 : 40$	8 **0**	5	2 40

Thuật toán "Quy không cước phí" (1)

- *Bước 1*. Xây dựng phương án cơ bản xuất phát với $m + n - 1$ ô chọn.
- *Bước 2*. Quy không cước phí ô chọn:
  - Tìm các số r_i, s_j để cho các số c'_{ij} trên các ô chọn bằng 0.
  - Ta có $m + n$ ẩn r_i, s_j được xác định nhờ $m + n - 1$ phương trình nên ta chọn một ẩn số tuỳ ý (có thể chọn bằng 0).
- *Bước 3*. Kiểm tra tính tối ưu:
  - Nếu sau khi quy không cước phí ô chọn, các ô loại đều có cước phí không âm thì phương án đang xét là phương án tối ưu.
  - Ta dùng cước phí ban đầu để tính giá trị tối ưu và bài toán được giải quyết.
  - Nếu còn có ô cước phí âm ta chuyển sang bước sau.

Thuật toán "Quy không cước phí" (2)

- *Bước 4*. Xây dựng phương án mới.
  - Tìm ô đưa vào → Chọn (i^*,j^*) có cước phí âm nhỏ nhất là ô đưa vào.
  - Tìm chu trình điều chỉnh → Bổ sung ô (i^*,j^*) vào $(m + n – 1)$ ô chọn ban đầu và xác định chu trình V duy nhất (chứa (i^*,j^*)) trong các ô trên. Chu trình này gọi là chu trình điều chỉnh.
  - Phân lớp chẵn lẻ của V → Đánh số các ô của V bắt đầu từ (i^*,j^*) là ô số 1 và phân các ô của V thành 2 lớp. V^C : là các ô dánh số chẵn. V^L : là các ô dánh số lẻ
  - Xác định lượng điều chỉnh → Xác định ô (i_0, j_0) sao cho ô (i_0, j_0) là ô có x_{ij} nhỏ nhất trong các ô đánh số chẵn, được gọi là ô đưa ra và $d = x_{i_0 j_0}$ gọi là lượng điều chỉnh.
  - Lập phương án mới → khi đó ô (i_0, j_0) là ô loại và (i^*,j^*) là ô chọn với $x'_{i^* j^*} = d$.

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - d & \text{nếu} \quad (i,j) \in V^C \\ x_{ij} + d & \text{nếu} \quad (i,j) \in V^L \\ x_{ij} & \text{nếu} \quad (i,j) \notin V \end{cases}$$

  Dễ dàng kiểm tra được x' là phương án cơ bản tốt hơn x (đã loại ra một ô có cước phí lớn hơn hoặc bằng 0 thay bởi ô có cước phí âm (i^*,j^*))

- Bước 5: Quay lại bước 2 cho đến khi có câu trả lời khẳng định ở bước 3.

Thuật toán "Quy không cước phí" (3) Ví dụ 1

- *Bước 1*. Phương án xuất phát có các ô chọn là (1,1), (1,3), (2,2), (2,3), (3,3).

  $x_{11} = 20$; $x_{13} = 5$; $x_{22} = 30$; $x_{23} = 5$; $x_{33} = 40$.
- *Bước 2*. Quy không cước phí ô chọn

Ta xác định r_i ($i = 1,2,3$) và s_j ($j = 1,2,3$) nhờ hệ phương trình

- $1 + r_1 + s_1 = 0$
- $2 + r_1 + s_3 = 0$
- $4 + r_2 + s_2 = 0$
- $3 + r_2 + s_3 = 0$
- $2 + r_3 + s_3 = 0$

Cho $s_1 = 0$ ta giải được

$r_1 = -1$; $s_3 = -1$; $r_2 = -2$; $s_2 = -2$; $r_3 = -1$

- *Bước 3*. Khi đó mọi $c'_{ij} \geq 0$ vậy x là phương án tối ưu.

Giá trị tối ưu là $f_{\min} = 245$

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 30	B_3 50
$A_1 : 25$	1 / 20	3	2 / 5
$A_2 : 35$	5	4 / 30	3 / 5
$A_3 : 40$	8	5	2 / 40

$$c'_{1,2} = 3 + r_1 + s_2 = 3 - 1 - 2 = 0$$

$$c'_{2,1} = 5 + r_2 + s_1 = 5 - 2 + 0 = 3$$

$$c'_{3,1} = 8 + r_3 + s_1 = 3 - 1 + 0 = 7$$

$$c'_{3,2} = 5 + r_3 + s_2 = 5 - 1 - 2 = 2$$

Thuật toán "Quy không cước phí" (4) Ví dụ 2

- *Bước 1*. Tìm phương án xuất phát

1. Phân x_{13} = 50 và xoá hàng 1; B_3 còn 10.
2. Phân x_{21} = 20 và xoá cột 1; A_2 còn 20.
3. Phân x_{22} = 20 và xoá hàng 2, cột 2; B_2 còn 60.
4. Phân nốt x_{32} = 60 và x_{33} = 10

Ô chọn (1,3); (2,1); (2,2); (3,2); (3,3)

- *Bước 2*. Quy không cước phí ô chọn.

Xác định $r_1 = -2$; $s_1 = 4$; $r_2 = -7$; $s_2 = 3$; $r_3 = -11$; $s_3 = 0$ bằng giải hệ:

$2 + r_1 + s_3 = 0$ (1)

$3 + r_2 + s_1 = 0$ (2)

$4 + r_2 + s_2 = 0$ (3)

$8 + r_3 + s_2 = 0$ (4)

$11 + r_3 + s_3 = 0$ (5)

$$c'_{1,1} = 5 + r_1 + s_1 = 5 - 2 + 4 = 7$$
$$c'_{1,2} = 6 + r_1 + s_2 = 6 - 2 + 3 = 7$$
$$c'_{2,3} = 6 + r_2 + s_3 = 6 - 7 + 0 = -1$$
$$c'_{3,2} = 5 + r_3 + s_2 = 5 - 11 + 4 = -2$$

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	5	6	2 / 50
A_2 : 40	3 / 20	4 / 20	6
A_3 : 70	5	8 / 60	11 / 10

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	7	7	0 / 50
A_2 : 40	0 / 20	0 / 20	-1
A_3 : 70	-2	0 / 60	0 / 10

Thuật toán "Quy không cước phí" (5)
Ví dụ 2

- *Bước 3*. Kiểm tra tính tối ưu

Vì $c'_{3,1} = -2 < 0$ nên chưa kết thúc.

- *Bước 4*. Xây dựng phương án mới

1. Ô đưa vào (i^*, j^*) = (3,1).
2. Chu trình điều chỉnh (3,1); (2,1); (2,2); (3,2)
3. Phân lớp chẵn lẻ của

V^C : {(2,1),(3,2)}; V^L : {(3,1), (2,2)}

4. Lượng điều chỉnh $d = \min\{x_{2,1}, x_{3,2}\}=20$
5. Phương án mới:

$x_{2,1} = 0$ (ô (2,1) loại); $x_{3,2}$ = 60-20 = 40; $x_{3,1}$ = 0 + 20 = 20; $x_{2,2}$ = 20 + 20 = 40; $x_{1,3}$ = 50; $x_{3,3}$ = 10

và $x_{i,j} = 0$ với các ô còn lại.

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	7	7	0 / 50
A_2 : 40	0 / 20	0 / 20	-1
A_3 : 70	-2	0 / 60	0 / 10

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	7	7	0 / 50
A_2 : 40	0 / 0	0 / 40	-1
A_3 : 70	-2 / 20	0 / 40	0 / 10

Thuật toán “Quy không cước phí” (6) Ví dụ 2

- *Bước 2* (lặp) Quy không cước phí ô chọn nhờ giải hệ

1. $r_1 + s_3 = 0$

2. $r_2 + s_2 = 0$

3. $-2 + r_3 + s_1 = 0$

4. $r_3 + s_2 = 0$

5. $r_3 + s_3 = 0$

Lấy $s_1 = 0$ ta có $r_3 = 2$; $s_2 = -2$; $r_2 = 2$; $s_3 = -2$;$r_1 = 2$;

$$c'_{1,1} = 7 + r_1 + s_1 = 7 + 2 + 0 = 9$$

$$c'_{1,2} = 7 + r_1 + s_2 = 7 + 2 - 2 = 7$$

$$c'_{2,1} = 0 + r_2 + s_1 = 0 + 2 + 0 = 2$$

$$c'_{2,3} = -1 + r_2 + s_3 = -1 + 2 - 2 = -1$$

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
$A_1 : 50$	7	7	0 / 50
$A_2 : 40$	0 / 0	0 / 40	-1
$A_3 : 70$	-2 / 20	0 / 40	0 / 10

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
$A_1 : 50$	9	7	0 / 50
$A_2 : 40$	2	0 / 40	-1
$A_3 : 70$	0 / 20	0 / 40	0 / 10

Thuật toán "Quy không cước phí" (7) Ví dụ 2

- *Bước 3*. Kiểm tra tính tối ưu

Vì $c'_{2,3} = -1 < 0$ nên chưa kết thúc.

- *Bước 4*. Xây dựng phương án mới

1. Ô đưa vào $(i^*,j^*) = (2,3)$.
2. Chu trình điều chỉnh (2,3); (3,3); (3,2); (2,2)
3. Phân lớp chẵn lẻ của

V^C : {(3,3),(2,2)}; V^L : {(2,3), (3,2)}

4. Lượng điều chỉnh $d = \min\{x_{3,3}, x_{2,2}\}=10$
5. Phương án mới: $x_{2,2}$ = 40-10 = 30; $x_{2,3}$ = 0 + 10 = 10; $x_{3,3}$ = 10 - 10 = 0; $x_{3,2}$ = 40 + 10 = 50, các ô khác giữ nguyên.

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	9	7	0 / 50
A_2 : 40	2	0 / 40	-1
A_3 : 70	0 / 20	0 / 40	0 / 10

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
A_1 : 50	9	7	0 / 50
A_2 : 40	2	0 / 30	-1 / 10
A_3 : 70	0 / 20	0 / 50	0

Thuật toán "Quy không cước phí" (8)
Ví dụ 2

- *Bước 2*. (lặp) giải hệ

1. $r_1 + s_3 = 0$

2. $r_3 + s_1 = 0$

3. $-1 + r_2 + s_3 = 0$

4. $r_3 + s_2 = 0$

5. $r_2 + s_2 = 0$

$$c'_{1,1} = 9 + r_1 + s_1 = 9 + 0 - 1 = 8$$
$$c'_{1,2} = 7 + r_1 + s_2 = 7 + 0 - 1 = 6$$
$$c'_{2,1} = 2 + r_2 + s_1 = 2 + 1 - 1 = 2$$
$$c'_{2,3} = 0 + r_2 + s_3 = 0 + 1 + 0 = 1$$

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
$A_1 : 50$	9	7	0 / 50
$A_2 : 40$	2	0 / 30	-1 / 10
$A_3 : 70$	0 / 20	0 / 50	0

Thu / Cước phí / Phát	B_1 20	B_2 80	B_3 60
$A_1 : 50$	8	6	0 / 50
$A_2 : 40$	2	0 / 30	1 / 10
$A_3 : 70$	0 / 20	0 / 50	0

- Lấy $s_3 = 0$ ta có $r_2 = 1$; $s_2 = -1$; $r_3 = 1$; $s_1 = -1$; $r_1 = 0$;

Lời giải là:

$x_{13} = 50$; $x_{23} = 10$; $x_{31} = 20$; $x_{32} = 50$; $x_{22} = 30$.

Giá trị tối ưu

$f_{\min} = 2.50 + 4.30 + 6.10 + 5.20 + 8.60 = 670$

Thu / Cước phí / Phát	B_1 40	B_2 50	B_3 60
$A_1 : 70$	2	3	5
$A_2 : 50$	4	3	6
$A_3 : 30$	3	7	1

Thu / Cước phí / Phát	B_1 15	B_2 10	B_3 17	B_4 18
$A_1 : 20$	16	5	10	7
$A_2 : 30$	30	20	3	6
$A_3 : 10$	5	4	3	5