Probability

Xác suất

Đặng Thanh Hải (Ph.D)
School of Engineering and Technology, VNUH
Email: hai.dang@vnu.edu.vn

Course Materials

- Bruce Bowerman, Richard O'Connell, Emilly Murphree. Business Statistics in Practice, McGraw-Hill_Irwin Series in Operations and Decision Sciences (2013).
- Đặng Hùng Thắng, [Lý thuyết, Bài tập] Xác suất thống kê
- Đào Hữu Hồ, Hướng dẫn giải các bài toán xác suất thống kê, Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.
- Đào Hữu Hồ, Xác suất Thống kê (259 trang), Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2007.

Introduction to Probability Theory

Giới thiệu về lý thuyết xác suất

- Định nghĩa về các sự kiện ngẫu nhiên
  Definition of random experiments
- Axioms of probability Các tiên đề của xác suất
- Mutual exclusivity Tính xung khắc lẫn nhau
- Conditional probability Xác suất có điều kiện
- Partition of the sample space Phân hoạch không gian mẫu
- Total probability Xác suất đầy đủ
- Bay's rule Luật Bayesian
- Independence Tính độc lập

Definition of Random Experiment

Định nghĩa về sự kiện ngẫu nhiên

Các thủ tục/ các bước
Procedures/ steps
(tossing a coin)
(Tung một đồng xu)

Các giá trị đo/
Measurements/ observations
Các quan sát

Set of all possible <u>outcomes</u>

Tập hợp các <u>kết quả</u> có thể có

S

"Không gian mẫu"

"Sample Space"

Một <u>kết quả</u> s không thể phân rã thành các kết quả khác

An <u>outcome *s*</u> can NOT be decomposed into other outcomes

Outcomes; events; sample space
Các kết quả; các sự kiện (biến cố); không gian mẫu

Một sự kiện (biến cố) A là một tập các kết quả:

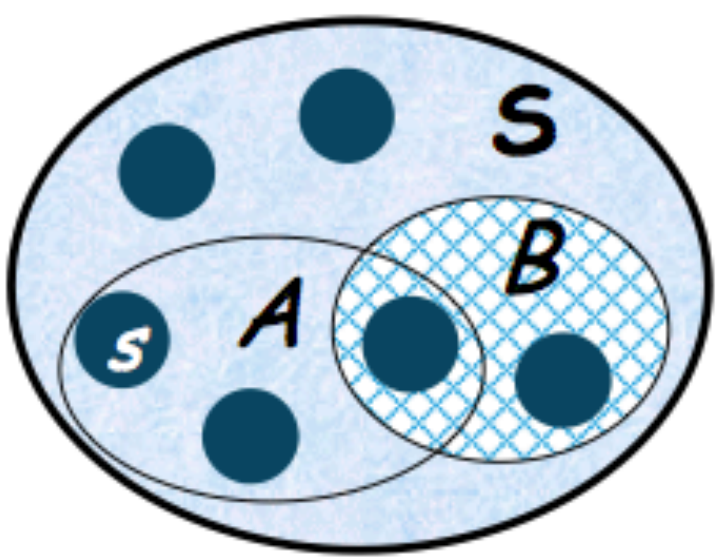
- **An event A is a set of outcomes:**

$$A = \{\, s : \text{such that } s \text{ is an even number} \,\}$$

sao cho s là một số chẵn

"outcome" $\in$ Event $\subset$ Sample Space

"kết quả" Biến cố Không gian mẫu



$$s \in A \subset S$$

Examples of random experiments

Các ví dụ về các thí nghiệm ngẫu nhiên

Tung một con xúc xác và ghi lại số chấm ở mặt trên

- Role a die once and record the result of the top-face:
  - $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - A = "the outcome is even" = $\{2, 4, 6\}$
    "Kết quả thu được là chẵn"
  - B = "the outcome is larger than 3" = $\{4, 5, 6\}$
    "Kết quả thu được lớn hơn 3"
  - C = "the outcome is odd" = $\{1, 3, 5\}$
    "Kết quả thu được là lẻ"
- Role a die once and see if the top-face is even Tung một con xúc xác và kiểm tra xem mặt trên có là chẵn không?
  - chẵn, lẻ
  - S = { even, odd } = $\{A, C\}$

Axioms of Probability
Các tiên đề của xác suất

Xác suất của một biến cố (sự kiện) A là không âm:

- **Probability of any event A is non-negative:**

  $P[A] \geq 0$

Xác suất để "một sự kiện thuộc không gian mẫu" là 1:

- **The probability that "the outcome belongs to the sample space" is 1:** $P[S] = 1$

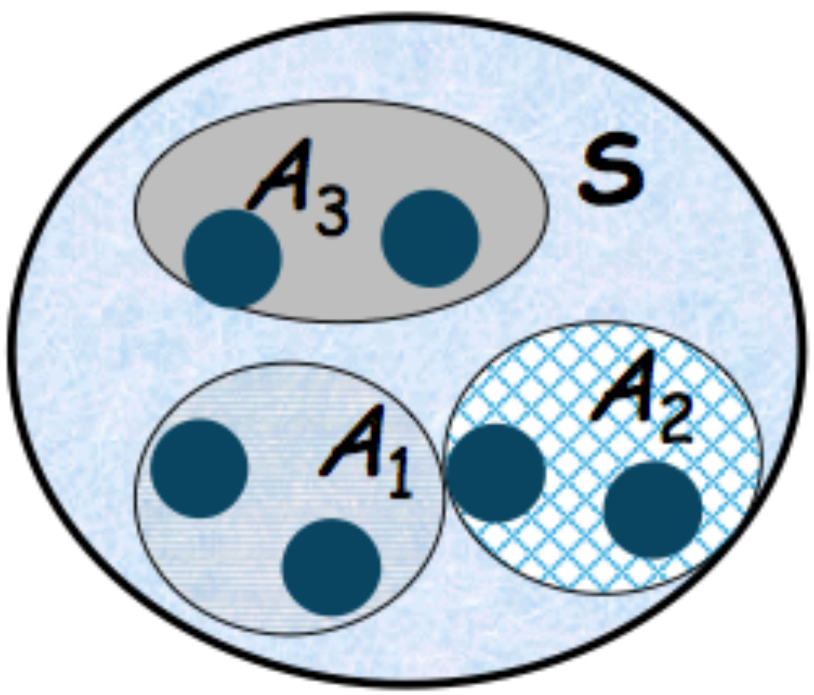
- **The probability of "the union of mutually-exclusive events" is the sum of their probabilities:** Xác suất của "hợp hai biến cố xung khắc (loại trừ) lẫn nhau" là tổng của các xác suất của chúng:

$$\text{If } A_1 \cap A_2 = \varnothing, \Rightarrow P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2]$$

Mutual Exclusivity
Xung khắc (loại trừ) lẫn nhau

- **The probability of "the union of mutually-exclusive events" is the sum of their probabilities:** Xác suất của "hợp các biến cố xung khắc (loại trừ) lẫn nhau" là tổng của các xác suất của chúng:

$$\text{If } A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j \quad \Rightarrow \quad P\left[\bigcup_j A_j\right] = \sum_j P[A_j]$$



Mutual Exclusivity

Xung khắc (loại trừ) lẫn nhau

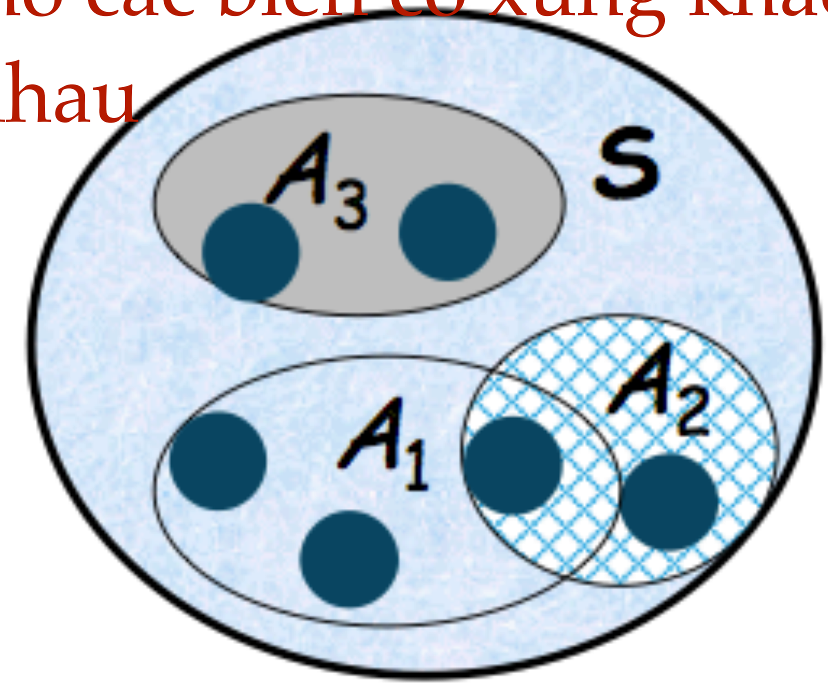
Tuy vậy, trong trường hợp tổng quát:

- <u>**However**</u>**, in general:**

$$P[A_1 \cup A_2] = P[A_1] + P[A_2] - P[A_1 \cap A_2]$$

This formula works for both mutually exclusive and non-mutually-exclusive events

Công thức này đúng cho các biến cố xung khắc và không xung khắc với nhau



Example I.1
Ví dụ I.1

Định nghĩa các biến cố sau:

- **Define the following events:**

"Lần tung đầu tiên thu được mặt lẻ số chấm"

A_1 = "First role gives an odd #" $\Rightarrow$ $P[A_1]=(18/36)$

"Lần tung thứ 2 thu được mặt lẻ số chấm"

A_2 = "Second role gives an odd #" $\Rightarrow$ $P[A_2]=(18/36)$

"Tổng hai lần là lẻ"

C = "The sum is odd" ;

Compute the probability of the event C (i.e. $P[C]$) using the probabilities $P[A_1]$ & $P[A_2]$

Tính xác suất của biến cố C (là P[C]) sử dụng các xác suất P[A1] và P[A2]

Example I.1
Ví dụ I.1

Lời giải:

Solution:

hợp của:

C = the union: $C_1 \cup C_2$:

C_1 = "first role is odd & second role is even" = $(A_1 \cap A_2^c)$

Lần tung đầu tiên thu được mặt lẻ và lần hai là mặt chẵn

C_2 = "first role is even & second role is odd" = $(A_2 \cap A_1^c)$

Lần tung đầu tiên thu được mặt chẵn và lần hai là mặt lẻ

$$C = (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_2 \cap A_1^c)$$

Vì C1 và C2 là xung khắc lẫn nhau:

Since C_1 and C_2 are mutually exclusive:

$$P[C] = P[C_1 \cup C_2] = P[C_1] + P[C_2]$$

$$P[C] = (9/36) + (9/36) = 1/2$$

Conditional Probabilities

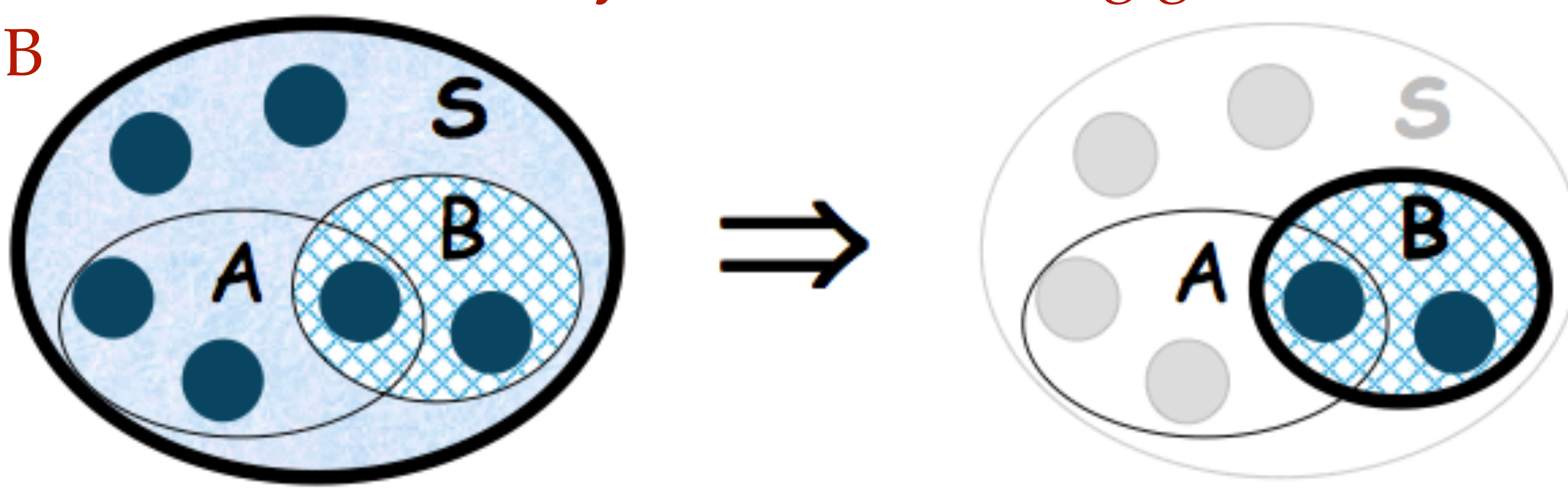
Xác suất có điều kiện

- Given that an event B has occurred, what is the probability of A

Biết rằng một sự kiện B đã xẩy ra, khi đó xác suất của sự kiện A là bao nhiêu?

- Given that B has occurred, reduces the sample space: $S \rightarrow B \subset S$

Biết rằng một sự kiện B đã xẩy ra, khi đó không gian mẫu (S) được co lại thành B



Conditional Probabilities

Xác suất có điều kiện

Chúng ta cần:

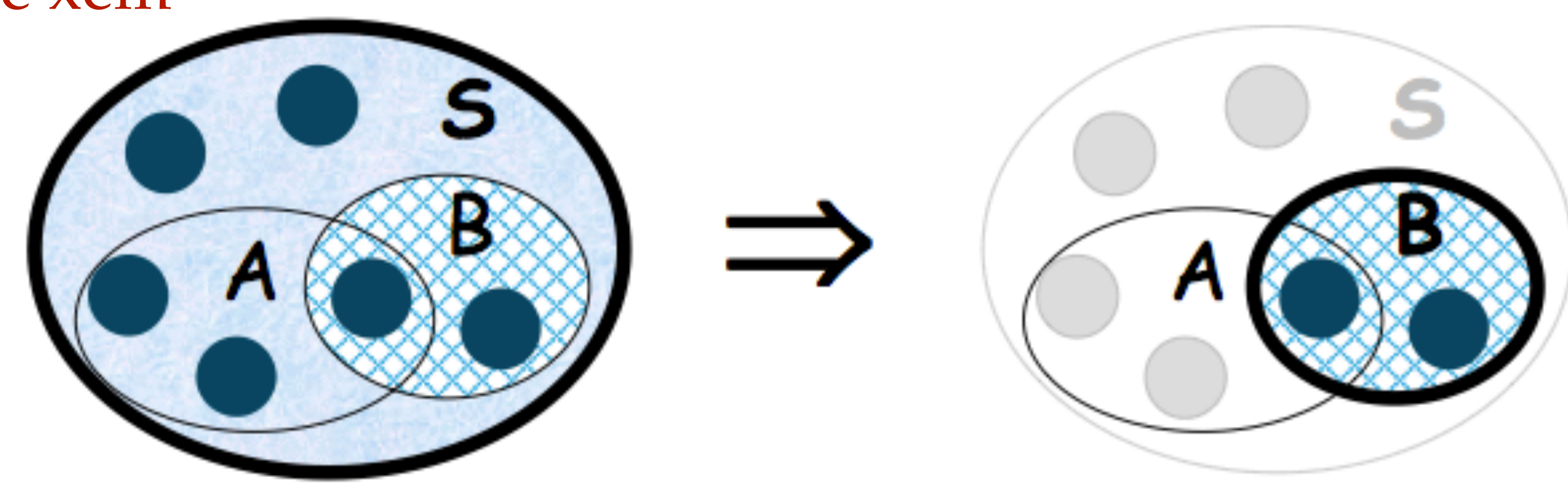
- **We need to:**
  - Tính phần giao giữa A với B:
  - compute the intersection of A with B:
  - normalize the probabilities by P[B]

Chuẩn hoá xác suất bởi P[B]

$$P[A/B] = P[A \cap B] / P[B]$$

Think of $\quad P[A/S] = P[A \cap S] / P[S]$

Có thể xem



So far, we have learned...

Đến giờ, chúng ta đã học ....

- An <u>outcome s</u> can NOT be decomposed into other outcomes Một kết quả [của thí nghiệm ngẫu nhiên] s là nguyên tử, không thể phân rã thành các kết quả khác.
- "outcome" $s \in$ Event $A \subset$ Sample Space S

  Kết quả s Sự kiện/Biến cố Không gian mẫu
- $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$
- For M.E. events $A \cap B = \emptyset$, $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$

  Với các sự kiện xung khắc (loại trừ lẫn nhau)
- Conditional probability reduces the sample space:

  $P[A/B] = P[A \cap B] / P[B]$

  Xác suất có điều kiện làm không gian mẫu co lại

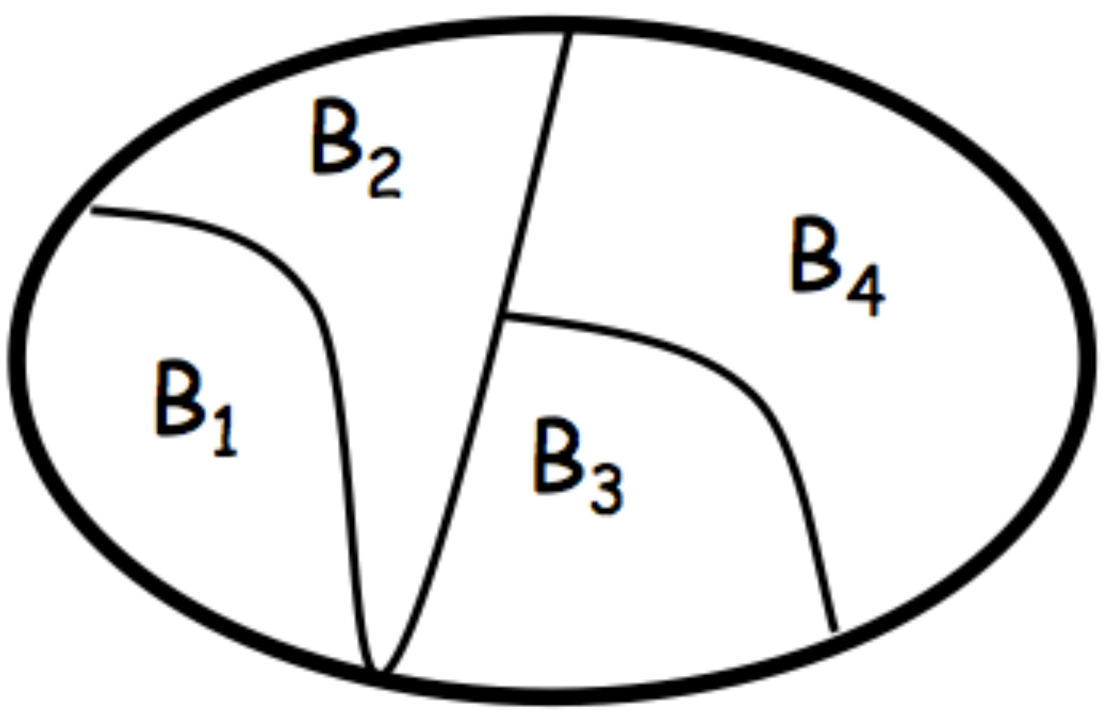
Partition of the Sample Space

Phân hoạch của không gian mẫu

- B_1 , B_2 ,…B_n form a "partition" of S when:

  tạo ra một "phân hoạch" của không gian mẫu S khi:

  - $S = B_1 \cup B_2 \cup \ldots B_n$
  - $B_i \cap B_j = \varnothing,\ i \neq j$



Total Probability

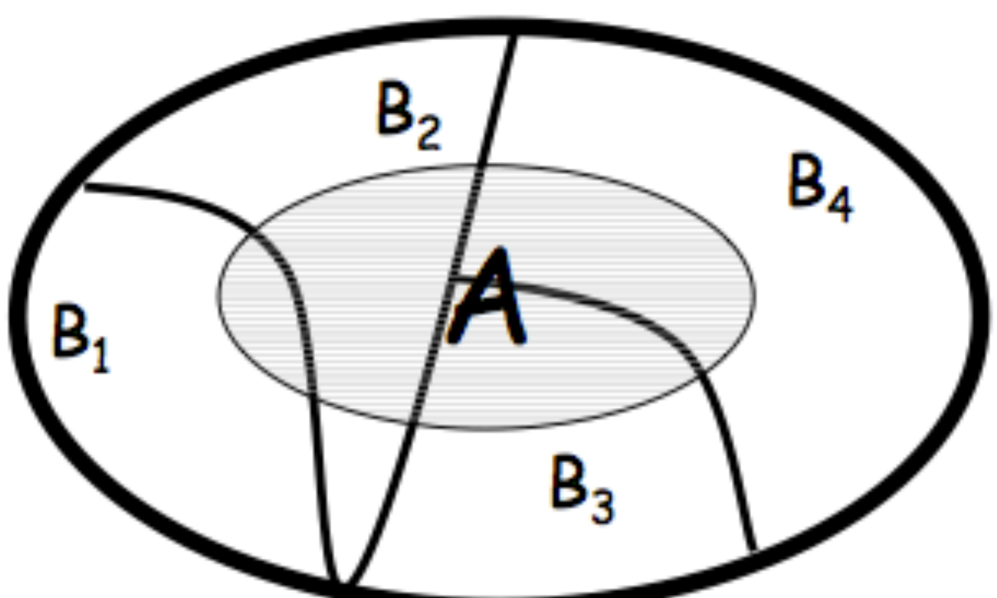
Xác suất tổng (Xác suất đầy đủ)

- **If B_1 , B_2 ,...B_n form a "partition" of S, then for any event A:**

  Nếu ...... tạo ra một "phân hoạch" của S, thì với bất kỳ sự kiện A nào:

$$(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset \ , \ i \neq j$$

$$\Rightarrow \quad A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_n)$$



Total Probability

Xác suất tổng (Xác suất đầy đủ)

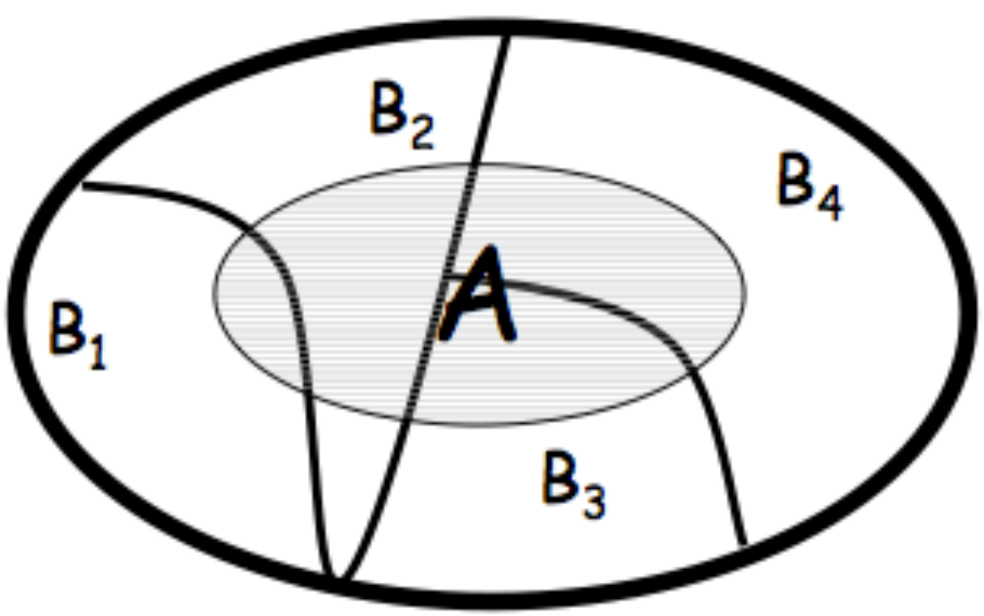
- Since A can be expressed as the union of mutually exclusive events:

Vì A có thể được biểu diễn thành hợp của các sự kiện xung khắc nhau:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots (A \cap B_n)$$

$\Rightarrow$

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots P[A \cap B_n]$$



Total Probability

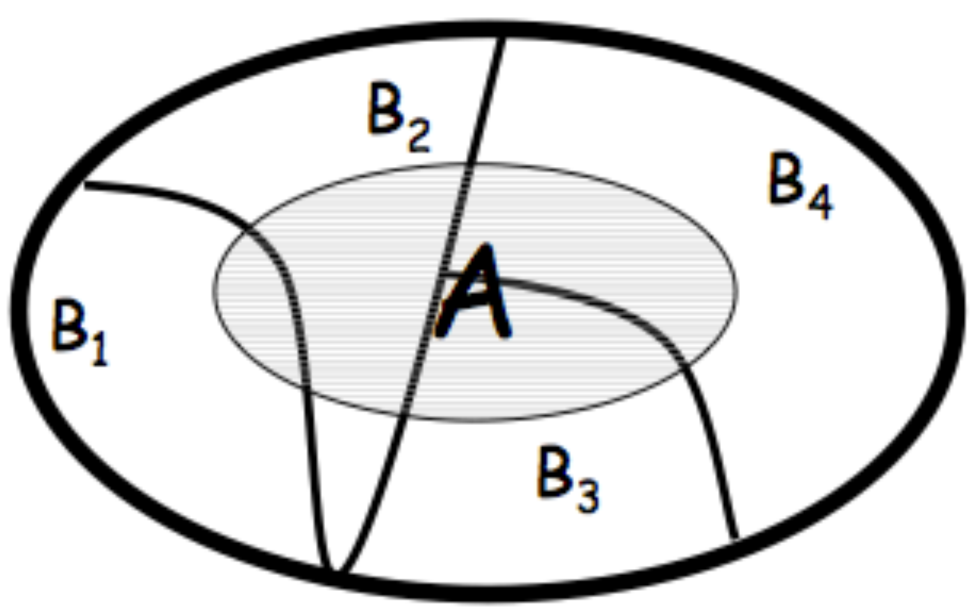
Xác suất tổng (Xác suất đầy đủ)

- Using the definition of conditional probability Sử dụng định nghĩa về xác suất có điều kiện

$$P[A/B_i] = P[A \cap B_i] / P[B_i]$$

$\Rightarrow$

$$P[A \cap B_i] = P[A/B_i]\, P[B_i]$$



$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots$$

Total Probability

Xác suất tổng (Xác suất đầy đủ)

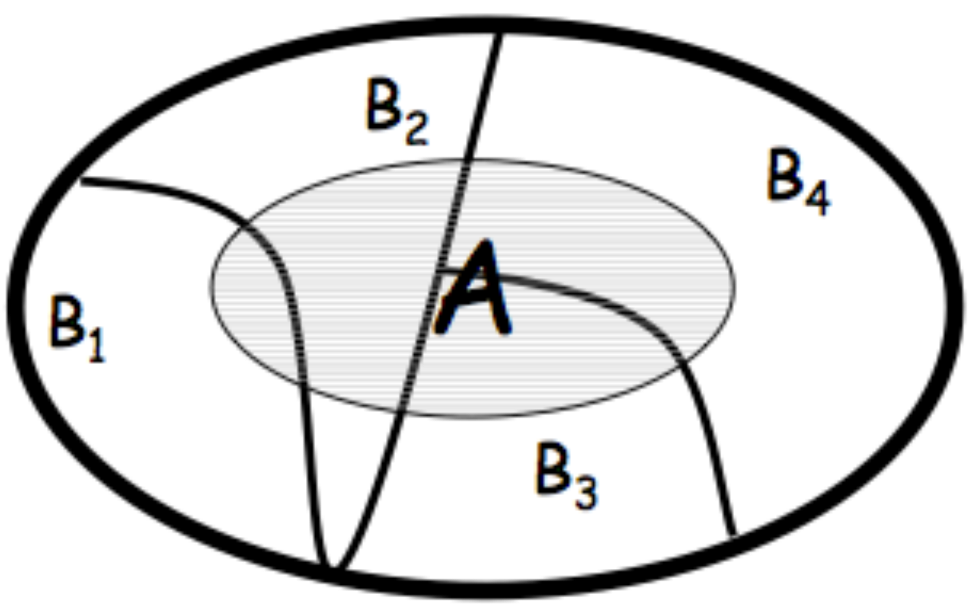
- **The Law of Total Probability:**

  Luật xác suất tổng (Xác suất đầy đủ)

  If B_1, B_2 ,.... form a "partition" of S, then for any event A:

Nếu ...... tạo ra một "phân hoạch" của S, thì với bất kỳ sự kiện A nào:

$$P[A] = P[A/B_1].P[B_1] + P[A/B_2].P[B_2] \ldots$$



$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots$$

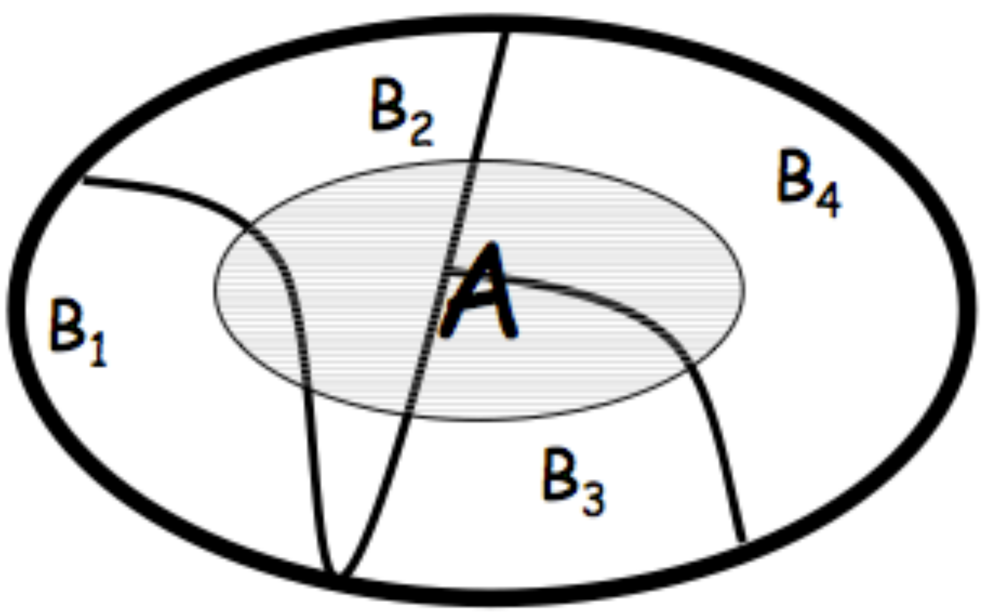
Bay's Rule

Luật Bayesian

- **If B_1 , B_2 ,...B_n form a "partition" of S, then for any event A:**

Nếu ...... tạo ra một "phân hoạch" của S, thì với bất kỳ sự kiện A nào:

$$\boxed{P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j]\cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]\cdot P[B_i]}}$$



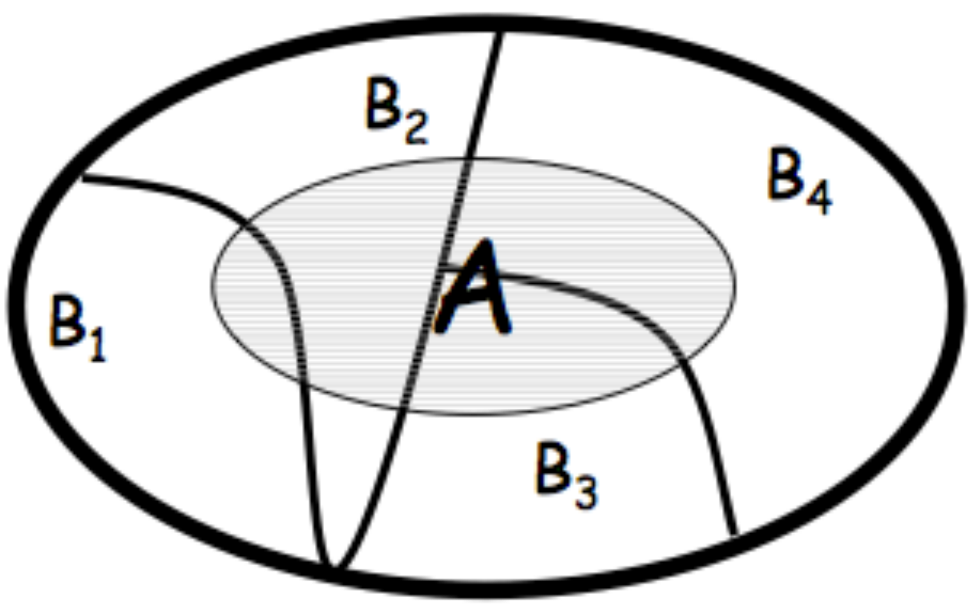
Derivation of Bay's Rule

Chứng minh Luật Bayesian

- Recall that, if B_1 , B_2 ,...B_n form a "partition" of S, then for any event A:

Nhớ lại rằng, nếu ...... tạo ra một "phân hoạch" của S, thì với bất kỳ sự kiện A nào:

$$P[A] = P[A/B_1].P[B_1] + P[A/B_2].P[B_2] \ldots$$



$$P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j] \cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i] \cdot P[B_i]}$$

Derivation of Bay's Rule

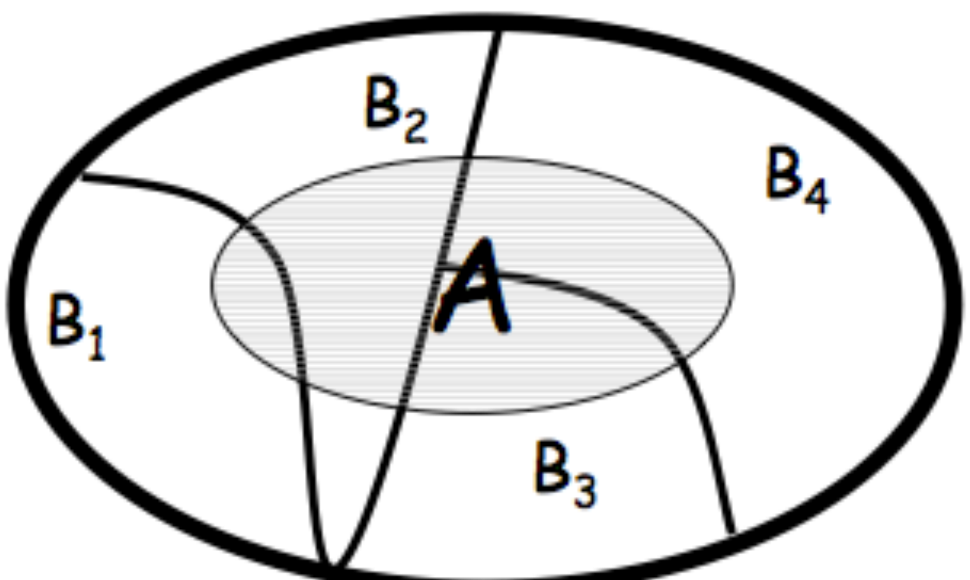
Chứng minh Luật Bayesian

- **Also recall that the conditional probability $P[B_j/A]$ can be expressed as follows:**

Nhớ lại rằng, xác suất có điều kiện P[Bj | A] có thể được tính như sau:

$$\boxed{P[B_j/A] = P[A \cap B_j] / P[A]}$$

$$P[A] = P[A/B_1].P[B_1] + P[A/B_2].P[B_2] \ldots$$



$$P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j] \cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i] \cdot P[B_i]}$$

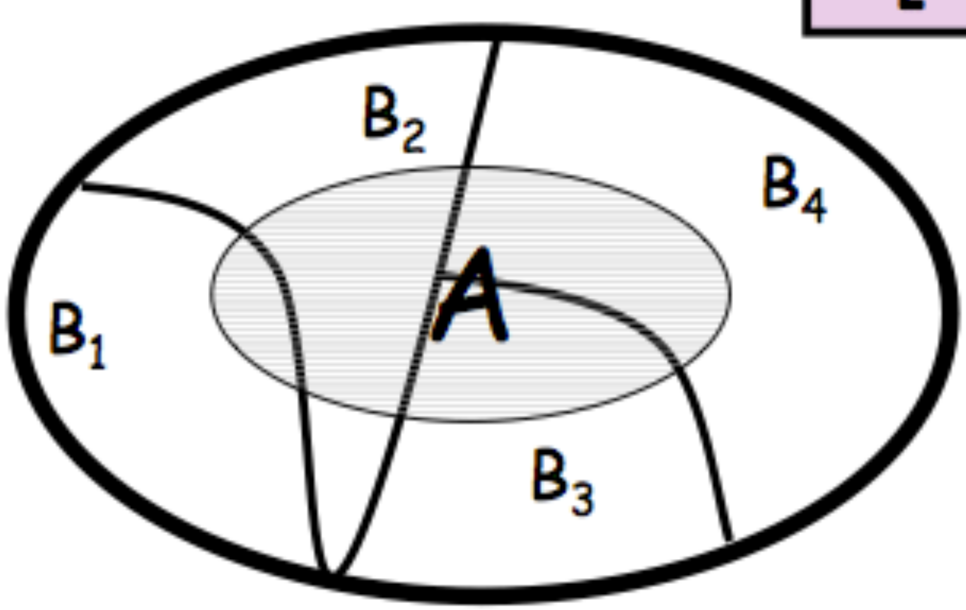
Derivation of Bay's Rule

Chứng minh Luật Bayesian

- **Reapplying the definition of conditional probability to the nominator:** Áp dụng công thức tính xác suất có điều kiện cho tử số

$$\boxed{P[B_j/A] = P[A \cap B_j] \;/\; P[A]}$$

$$\boxed{P[B_j/A] = P[A/B_j]\, P[B_j] \;/\; P[A]}$$



$$\boxed{P[A] = P[A/B_1].P[B_1] + P[A/B_2].P[B_2] \ldots}$$

$$\boxed{P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j]\cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]\cdot P[B_i]}}$$

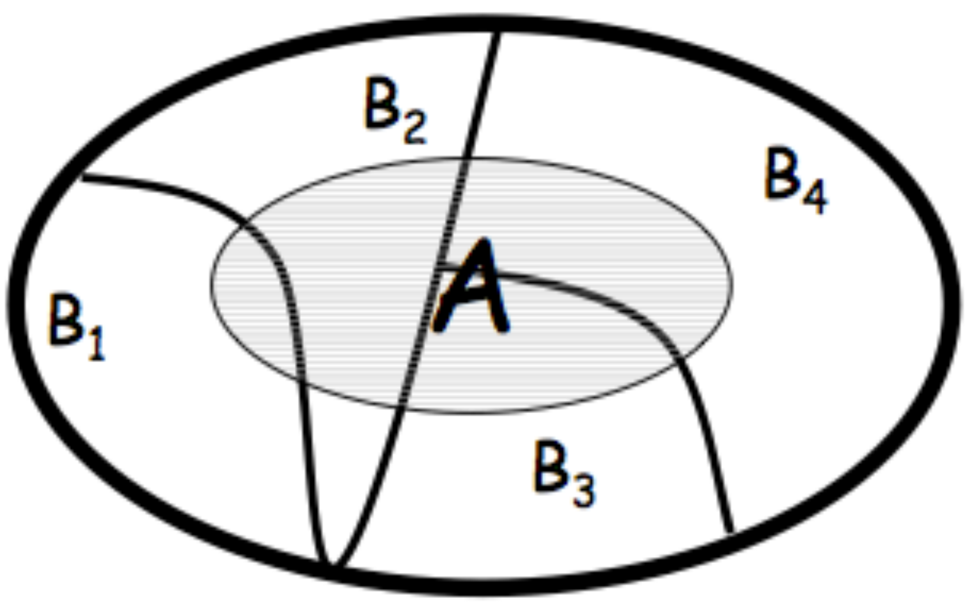
Bay's Rule

Chứng minh Luật Bayesian

- **Using the law of total probability to express P[A] , we arrive at the expression for Bay's Rule:** Sử dụng công thức tính xác suất tổng (xác suất đầy đủ) để tính P[A], chúng ta thu được biểu diễn cho luật Bayesian:

$$\boxed{P[B_j/A] = P[A/B_j]\, P[B_j] \,/\, P[A]}$$

$$\boxed{P[A] = P[A/B_1].P[B_1] + P[A/B_2].P[B_2] \ldots}$$

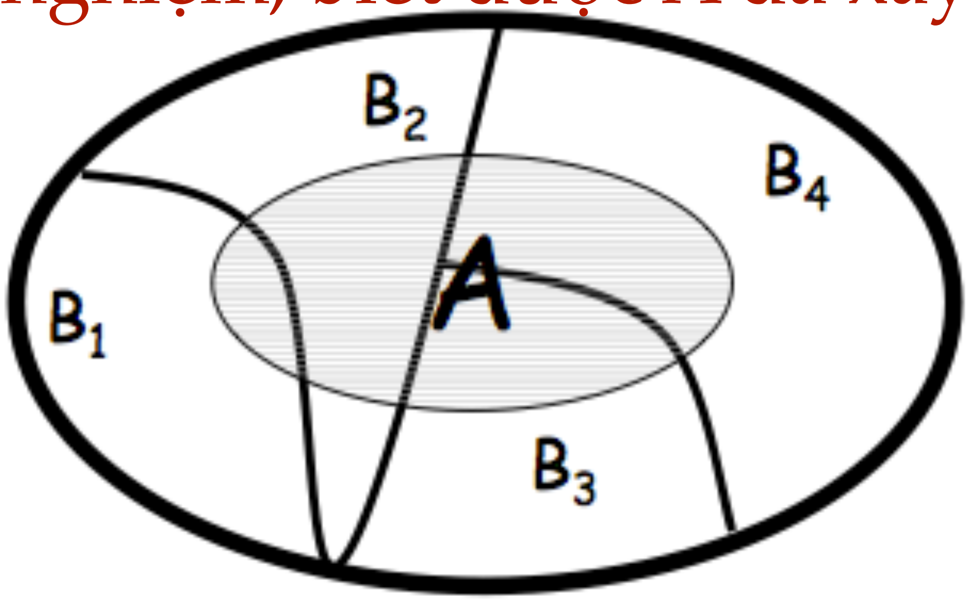


$$\boxed{P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j]\cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]\cdot P[B_i]}}$$

Bay's Rule Luật Bayesian

- B_1 , B_2 ,…B_n are known as the "a priori" events (i.e. we know about them before the experiment is performed) B1, B2, … được gọi là các sự kiện "tiên nghiệm" (nghĩa là. chúng ta biết về chúng trước khi thực hiện thí nghiệm)
- $P[B_j/A]$ is the "a posteriori" probability (i.e., after performing the experiment, A occurred; then what is the probability of B_j)

P[Bj | A] là xác suất "hậu nghiệm" (nghĩa là., sau khi thực hiện thí nghiệm, biết được A đã xẩy ra; thì khi đó xác suất của Bj là bao nhiêu?

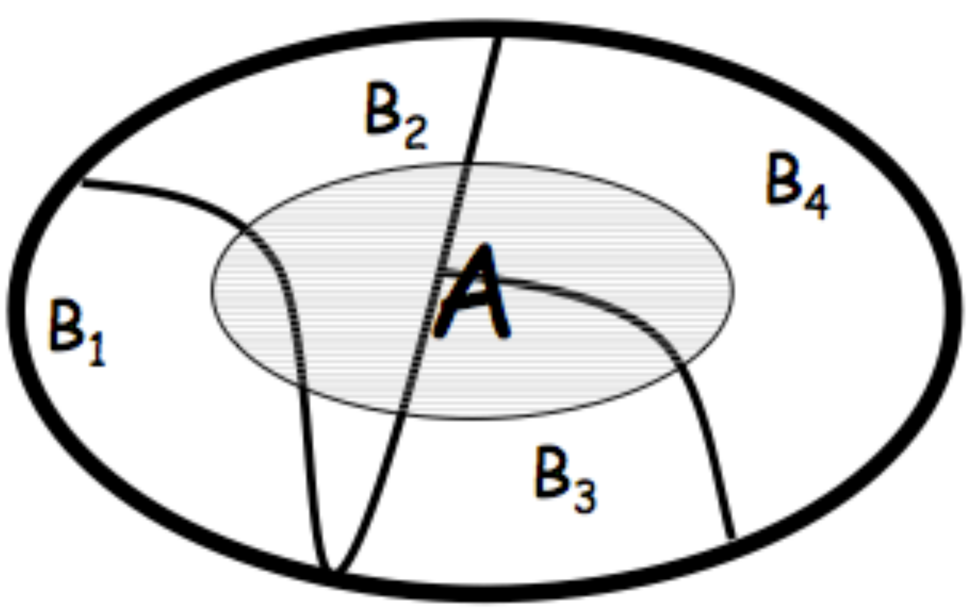


$$P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j]\cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]\cdot P[B_i]}$$

Bay's Rule Luật Bayesian

Typically: Thông thường:

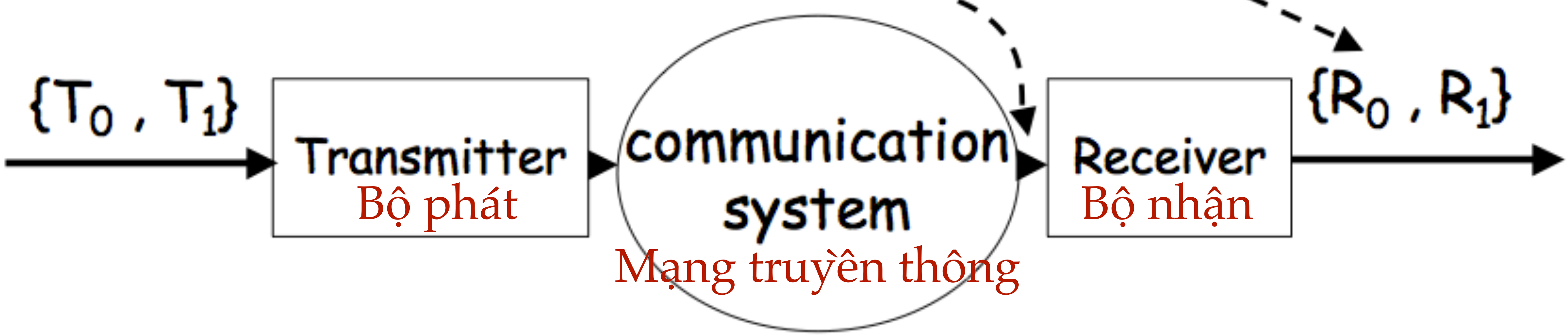
- We perform an experiment and observe an event *A*
  Chúng ta thực hiện một thí nghiệm và quan sát một sự kiện A
- Given that *A* has been observed, we are interested in finding out which are the most likely "a priori" event
  Khi đã quan sát được A, chúng ta quan tâm đến việc việc sự kiện "tiên nghiệm" nào nhiều khả năng đã xẩy ra nhất
- E.g., we compute $P[B_1/A]$, $P[B_2/A]$, $P[B_3/A]$, & $P[B_4/A]$
  Ví dụ., chúng ta tính



$$P[B_j/A] = \frac{P[A/B_j]\cdot P[B_j]}{\sum_{i=1}^{n} P[A/B_i]\cdot P[B_i]}$$

Example I.2

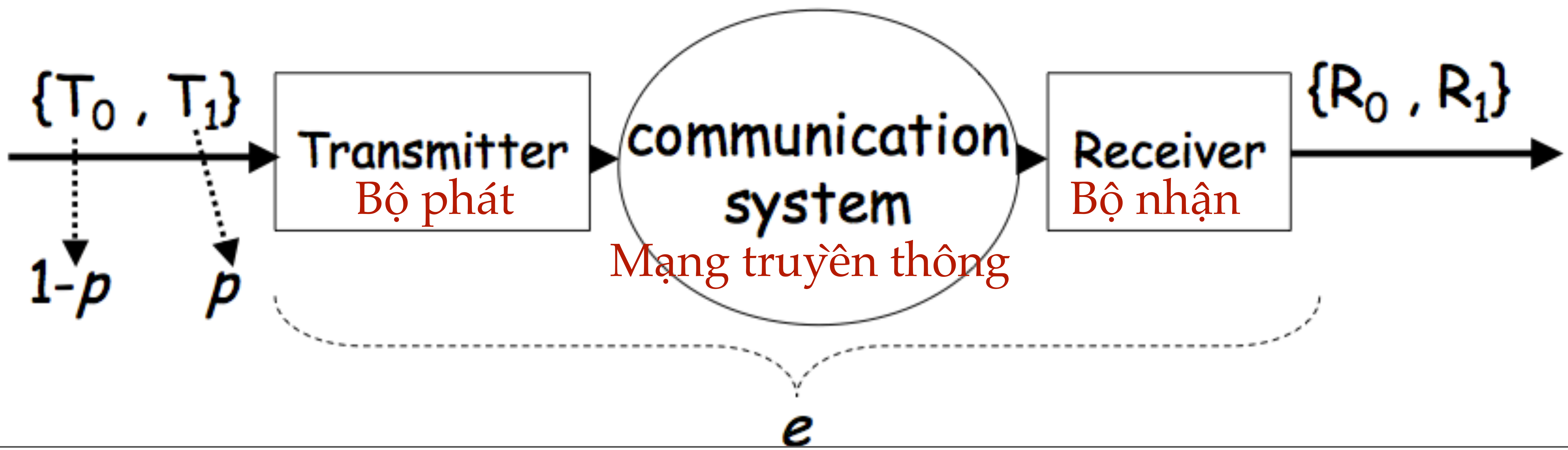
- **A transmitter sends either a "1" or a "0" over a communication system**
  Một bộ phát gửi 1 bít "0" hoặc "1" trên một mạng truyền thông
- **The receiver makes a decision based on the received signal**
  Bộ nhận đưa ra quyết định dựa trên tín hiệu (bít) nhận được



Example I.2

- $P[T_0]=1-p$; $P[T_1]=p$
- Probability of error e Xác suât xẩy ra lỗi
- Compute $P[T_i \cap R_j]$ & $P[T_i/R_j]$, $i,j=0,1$

Tính



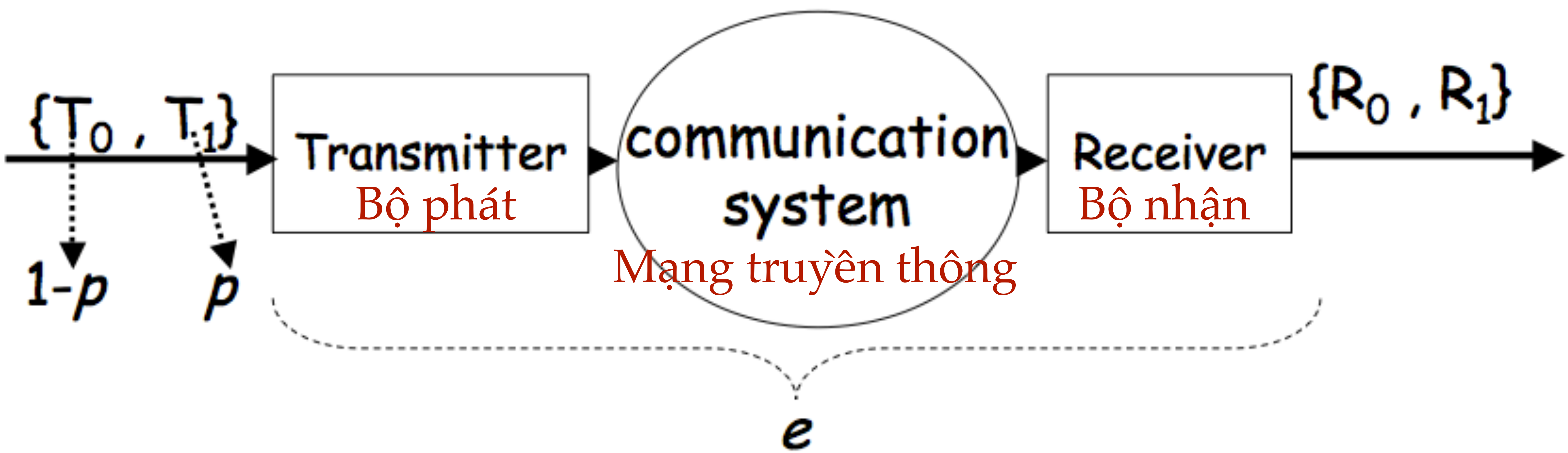
Example I.2

- **Computing $P[T_i \cap R_j] = P[R_j/T_i].P[T_i]$**

Tính

- $P[T_0 \cap R_0] \quad = P[R_0/T_0]\ P[T_0]$

  $= (1-e)\ (1-p)$;

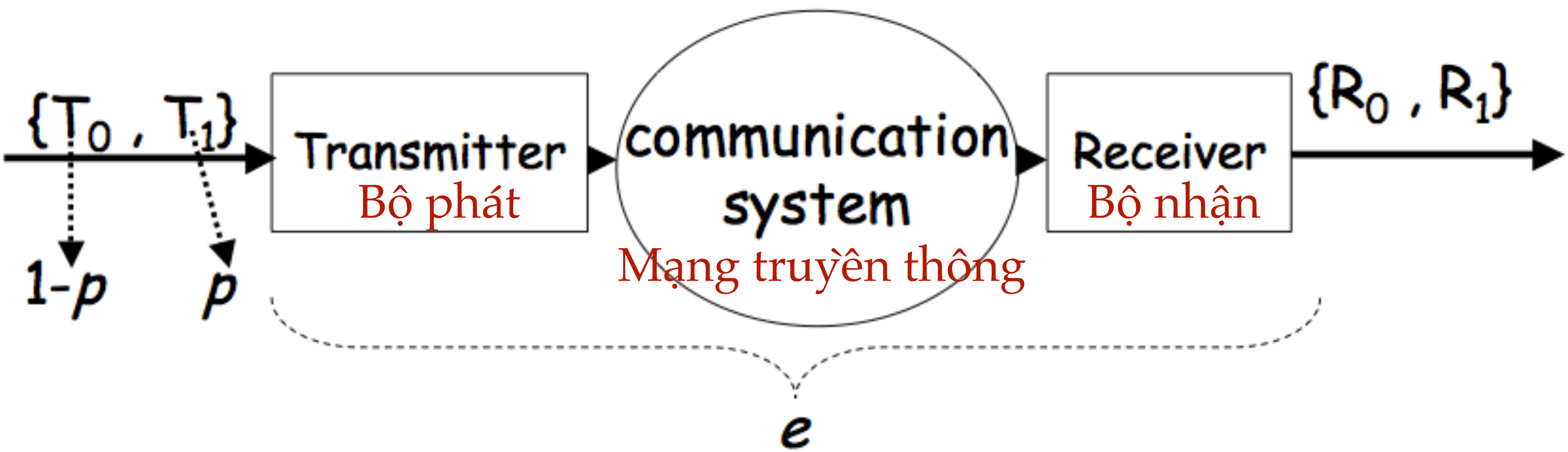


Example I.2

- **Computing $P[T_i \cap R_j] = P[R_j/T_i].P[T_i]$**

  Tính

  - $P[T_0 \cap R_0] = (1-e)\,(1-p)$; $P[T_0 \cap R_1] = e\,(1-p)$
  - $P[T_1 \cap R_1] = (1-e)\,p$; $P[T_1 \cap R_0] = e\,p$



Example I.2

- **Computing $P[T_i/R_j]$**

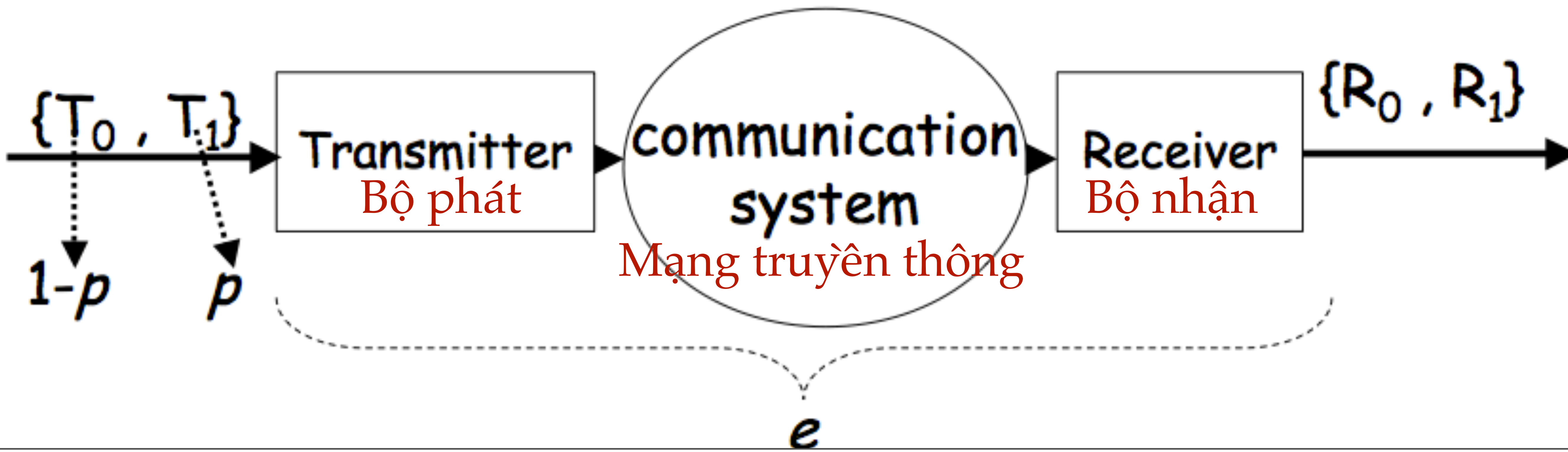
  Tính

  $$P[T_0 / R_0] = P[T_0 \cap R_0] / \mathbf{P[R_0]}$$

  since T_0 and T_1 are mutually exclusive (i.e. a partition),

  do T0 và T1 là xung khắc (loại trừ lẫn nhau) (là một phân hoạch)

  $$\mathbf{P[R_0]} = P[R_0/T_0]\, P[T_0] + P[R_0/T_1]\, P[T_1]$$



Example I.2

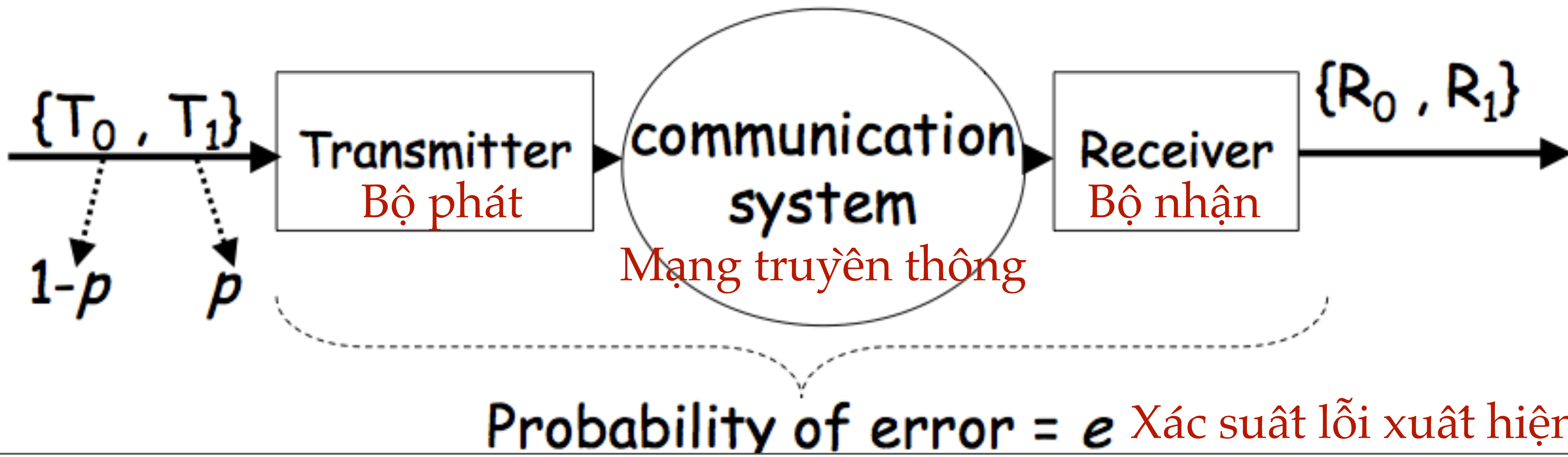
$$P[R_0] = P[R_0/T_0]\, P[T_0] + P[R_0/T_1]\, P[T_1]$$

$$= (1-e)\,(1-p) + e\,p$$

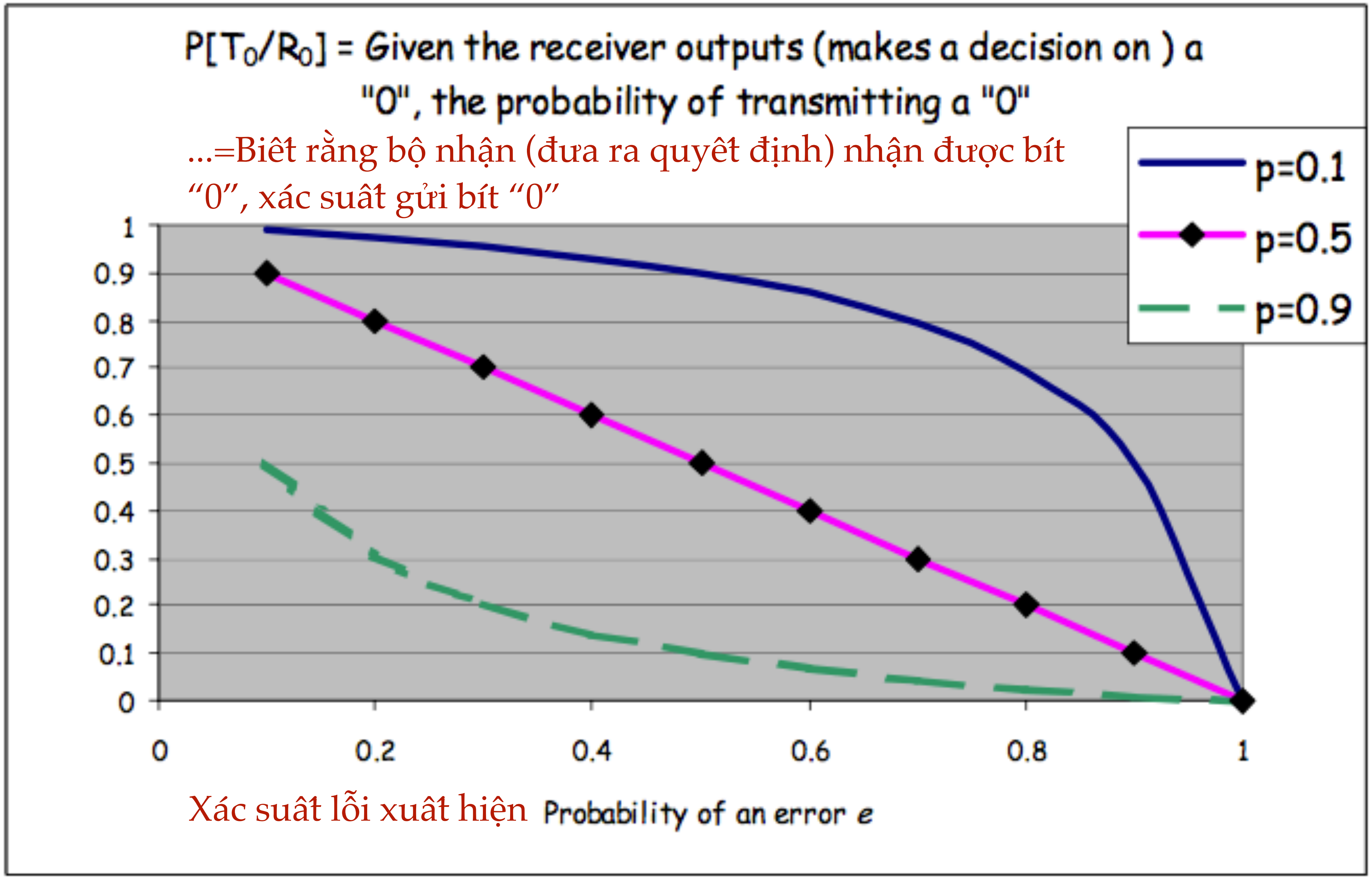
Therefore, Do đó,

$$P[T_0 / R_0] = P[T_0 \cap R_0] / P[R_0]$$

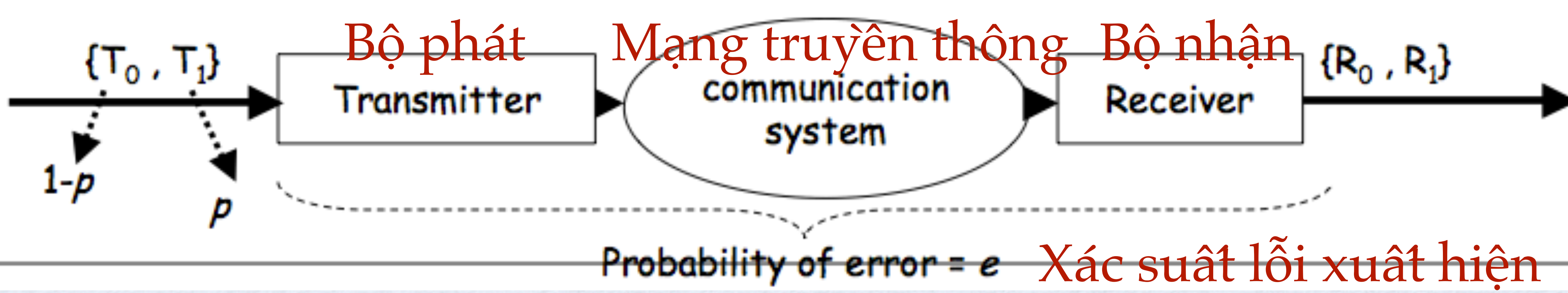
$$= (1-e)\,(1-p) / [(1-e)\,(1-p) + e\,p]$$



Example I.2



P[T0/R0] = Given the receiver outputs (makes a decision on) a "0", the probability of transmitting a "0"
...=Biết rằng bộ nhận (đưa ra quyết định) nhận được bít "0", xác suất gửi bít "0"
p=0.1
p=0.5
p=0.9
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
Xác suất lỗi xuất hiện
Probability of an error e



{T0 , T1}
1-p
p
Bộ phát
Transmitter
Mạng truyền thông
communication system
Bộ nhận
Receiver
{R0 , R1}
Probability of error = e
Xác suất lỗi xuất hiện

Example I.2

- **As an exercise, derive the expressions for the rest of the $P[T_i/R_j]$s:**

  Bài tập, hãy tìm biểu diễn cho các xác suất sau:

  $P[T_0/R_1]$, $P[T_1/R_0]$, and $P[T_1/R_1]$

- **And plot their values as functions of *e* for different values of *p***

  Và vẽ các giá trị của chúng như là các hàm của e với các giá trị p khác nhau.

Ví dụ khác

Ví dụ 1: Một lô hạt giống được phân làm 3 loại, loại 1 chiếm 2/3 (tỉ lệ nảy mầm 80%), loại 2 chiếm 1/4 (tỉ lệ nảy mầm 60%), còn lại loại 3 (tỉ lệ nảy mầm 40%). Hỏi tỉ lệ nảy mầm của lô là bao nhiêu (nói cách khác: lấy ngẫu nhiên từ lô ra một hạt. Tìm xác suất để được hạt nảy mầm)

Ví dụ 2: Trong một trạm cấp cứu bỏng: 80% bệnh nhân bỏng do nóng, 20% bỏng do hóa chất. Loại bỏng do nóng có 30% bị biến chứng, loại bỏng do hóa chất có 50% bị biến chứng.

a) Tìm xác suất gặp 1 bệnh nhân bị biến chứng?

b) Rút ngẫu nhiên được 1 bệnh án của bệnh nhân biến chứng, tìm xác suất để bệnh nhân đó bị biến chứng do nóng gây ra?

Independence

Tính độc lập (của các sự kiện ngẫu nhiên)

- **Definition of "independence" is based on preserving the value of the probability:**

  Định nghĩa về tính độc lập dựa trên việc tính bảo toàn giá trị xác suất

- **A and B are independent** $\Leftrightarrow P[A/B] = P[A]$

  A và B độc lập nhau <->

- $P[A/B] = P[A \cap B]/P[B] = P[A] \Rightarrow$

A & B are independent $\Leftrightarrow P[A \cap B] = P[A]\,P[B]$

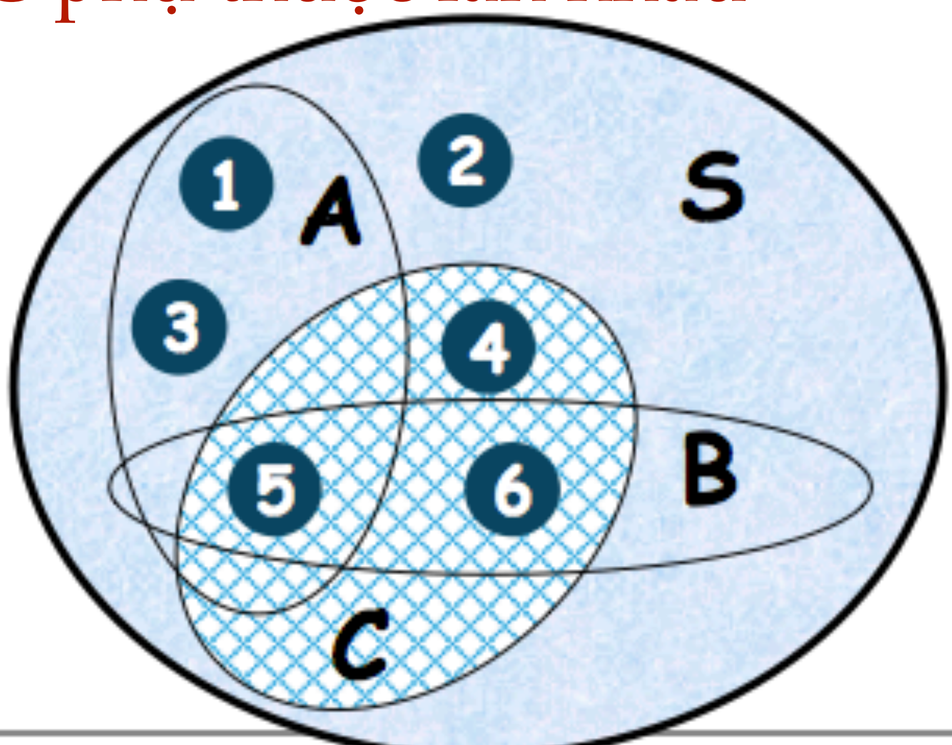
A và B độc lập nhau <->

Example I.3

- $P[A \cap B] = (1/6) = P[A]\ P[B] = (3/6)\ (2/6) = (1/6)$
  - Therefore, A and B are independent

    Do đó, A và B độc lập nhau
- $P[A \cap C] = (1/6) \neq P[A]\ P[C] = (3/6)\ (3/6) = (1/4)$
  - Therefore, A and C are dependent

    Do đó, A và C phụ thuộc lẫn nhau



Example I.3

- $P[A/B]=(1/2) = P[A] \Longrightarrow$ B did not change P[A]

  B không thay đổi P[A]

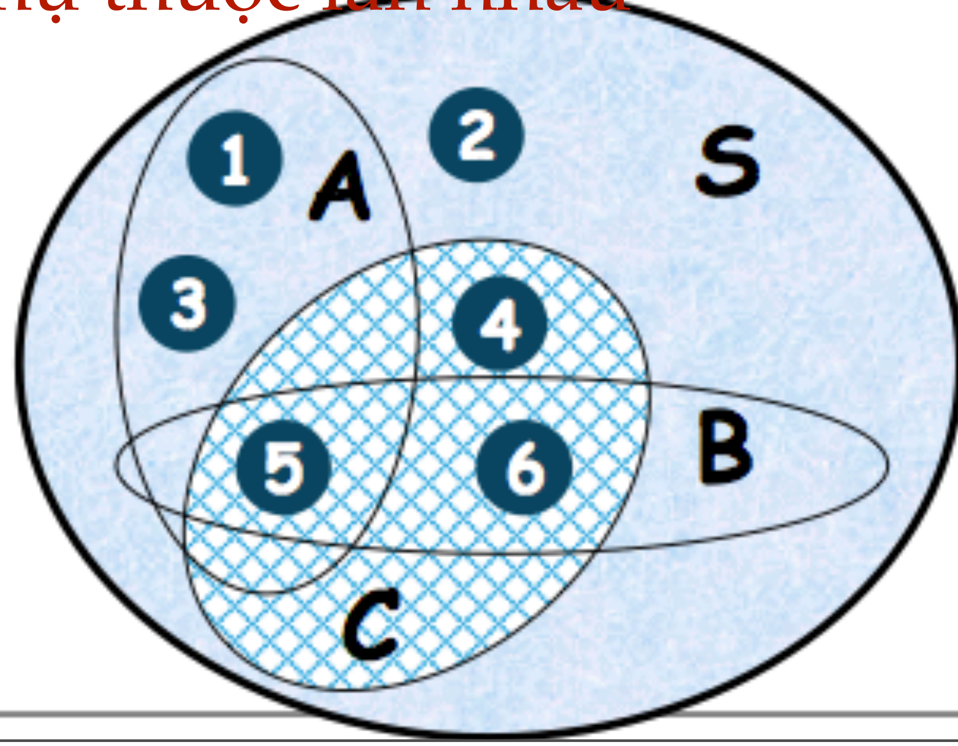
  - Therefore, A and B are independent

    Do đó, A và B độc lập nhau

- $P[A/C]=(1/3) \neq P[A] \Longrightarrow$ C changed P[A]

  - Therefore, A and C are dependent

    Do đó, A và C phụ thuộc lẫn nhau



Mutual-Exclusivity & Independence

Tính xung khắc (loại trừ lẫn nhau) & Tính độc lập

- Remember M.E. $\Longrightarrow$ $A \cap B = \emptyset$

  Nhớ lại rằng "Xung khắc (loại trừ lẫn nhau)" ==>

- If A & B are M.E. $\Longrightarrow$ $P[A \cap B] = 0$

  Nếu A & B "Xung khắc (loại trừ lẫn nhau)" ==>

- If $P[A \cap B] = 0$, does $P[A \cap B] = P[A]\,P[B]$?

  Nếu ...., liệu ....?

- If $P[A] \neq 0$ and $P[B] \neq 0$, then $P[A]\,P[B] \neq 0$

  Nếu ....và ...., thì ....

In this case: M.E. $\Longrightarrow$ Dependence

Trường hợp này: xung khắc (loại trừ lẫn nhau) => phụ thuộc nhau