

Tối ưu hóa (1)

TS. Đỗ Đức Đông
dongdoduc@gmail.com

Giới thiệu môn học

- **Mục đích môn học:**

Trang bị cho sinh viên một số kiến thức cơ bản về tối ưu hoá để phục vụ cho việc học tập và nghiên cứu các bài toán trong kinh tế và kỹ thuật.

- **Nội dung môn học:** Gồm 2 phần chính: Tối ưu tổ hợp và Tối ưu liên tục.

- *Tối ưu tổ hợp*

- + Heuristic kiến trúc (constructive)
- + Tìm kiếm địa phương
- + Metaheuristics

- *Tối ưu liên tục*

- + Quy hoạch tuyến tính
- + Quy hoạch phi tuyến

- **Tài liệu tham khảo:**

- Hoàng Xuân Huân, Giáo trình Tối ưu hóa.
- Nguyễn Thanh Hải, Giáo trình Tối ưu hóa.

- **Kế hoạch điểm tra đánh giá:**

Chuyên cần (10%) + Kiểm tra giữa kỳ (30%) + Kiểm tra cuối kỳ (60%)

Nội dung

- Bài toán tối ưu
- Vận trù học
- Phân loại bài toán tối ưu và các cách tiếp cận

Bài toán tối ưu

Cần tìm cực đại hoặc cực tiểu của hàm mục tiêu $f(x)$ nào đó:

$$f(x) \rightarrow \max / \min$$

Với $x \in X$, tập X được gọi là tập phương án chấp nhận được.

Tùy theo đặc điểm của bài toán mà bài có tên gọi khác nhau, ví dụ như bài toán tối ưu liên tục hoặc bài toán tối ưu tổ hợp, bài toán tối ưu đa mục tiêu,...

Vận trù học (Operations research)

- Vận trù học xuất hiện từ chiến tranh thế giới thứ hai khi giải quyết các vấn đề về quân sự để giải các bài toán như: vận tải, phân bố tối ưu hệ thống ra đa, chống tàu ngầm...
- Vận trù học là ngành học ứng dụng toán học và các khoa học khác để ra quyết định nhằm thiết kế và điều hành tốt nhất một hệ thống với mục đích định trước trong các điều kiện xác định.
- Các vấn đề cần quyết định được mô tả thành các bài toán tối ưu và các lời giải của chúng cho ta các giải pháp thực hiện.
- Với sự phát triển mạnh mẽ của tin học các bài toán vận trù học thường được xây dựng thành các hệ hỗ trợ quyết định để giúp các nhà quản lý giải quyết các vấn đề phức tạp.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học (1)

Khi thực hiện vận trù thường tuân theo các thủ tục sau:

- *Bước 1.* Xác định bài toán
- *Bước 2.* Quan sát hệ thống
- *Bước 3.* Xây dựng mô hình toán học
- *Bước 4.* Lựa chọn giải pháp phù hợp
- *Bước 5.* Biểu diễn kết quả và kết luận
- *Bước 6.* Triển khai và đánh giá

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học (2)

- *Bước 1.* Xác định bài toán

Các nhà phân tích phải xác định được bài toán đặt ra của tổ chức: mục tiêu là gì, các yếu tố nào liên quan tới mục tiêu.

- *Bước 2.* Quan sát hệ thống

Đây là bước thu thập các dữ liệu liên quan đến bài toán, đánh giá các biến, các tham số để phục vụ việc xây dựng mô hình toán học cho bài toán.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học (3)

- *Bước 3. Xây dựng mô hình toán học (hay còn gọi là mô hình hoá)*

Bao gồm việc thiết lập bài toán và tìm các lời giải của nó theo quy trình. Khi xây dựng mô hình toán học ta phải đơn giản hoá bài toán thực nhưng đòi hỏi phản ánh đúng các quan hệ cốt yếu của nó. Vì vậy có thể có nhiều mô hình cho một bài toán. Mỗi mô hình được đề xuất phải kiểm tra tính phù hợp của nó.

- *Bước 4. Lựa chọn giải pháp phù hợp*

Mỗi bài toán ta có thể có nhiều mô hình để giải quyết. Với mỗi mô hình đã cho, thường lời giải cho ta một số giải pháp. Ta phải dựa theo các tiêu chuẩn đã định và điều kiện cụ thể để lựa chọn giải pháp khả thi phù hợp.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học (5)

Ví dụ: Bài toán dự đoán giá vàng

- **Bước 1. Xác định bài toán**

- Mục tiêu: Dự đoán giá vàng

- Yếu tố liên quan: Các yếu tố ảnh hưởng đến giá vàng (Quan hệ về nguồn cung vàng, ảnh hưởng của USD đến giá vàng, mối quan hệ giữa vàng và dầu,...)

- **Bước 2. Quan sát hệ thống**

Thu thập dữ liệu, đánh giá các yếu tố.

- **Bước 3. Xây dựng mô hình toán học**

$f(\mathbf{x})$ là hàm chưa biết nhưng có tập dữ liệu quan sát được:

$$D = \{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)\}_{k=1}^N \text{ sao cho } \forall k, \mathbf{y}^k = f(\mathbf{x}^k)$$

$D = \{(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)\}_{k=1}^N$ sao cho $\forall k, \mathbf{y}^k = f(\mathbf{x}^k) + \varepsilon^k$, trong đó ε^k là nhiễu trắng, tức là $E(\varepsilon^k) = 0$. Ta cần tìm xấp xỉ $g(\mathbf{x})$ để tính gần đúng giá trị của hàm $f(\mathbf{x})$ sao cho tổng bình phương sai số tại các mốc quan sát cực tiểu.

- **Bước 4. Lựa chọn giải pháp phù hợp**

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học (4)

- *Bước 5.* Biểu diễn kết quả và kết luận

Dựa trên kết quả của bước 4, nhà phân tích biểu diễn và bình luận kết quả. Nếu kết quả phân tích không phù hợp với tổ chức thì quay lại bước 1.

- *Bước 6.* Triển khai và đánh giá

Khi tổ chức đã chấp nhận giải pháp thì tổ chức triển khai thực hiện. Trong quá trình triển khai phải thường xuyên kiểm tra, giám sát hệ thống để đảm bảo nó hoạt động đúng dự kiến trong bước 5 và đưa ta tới mục đích. Nếu phát hiện các đặc điểm bất thường thì phải rà soát lại từ bước 1 và chỉnh lý kịp thời.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học

Mô hình hóa (1)

Công việc chính của nó là thiết lập và giải bài toán tối ưu phù hợp với thức tiễn. Việc tối ưu hoá một hàm ta còn gọi là quy hoạch hàm này, hay giải bài toán quy hoạch.

Quá trình mô hình hoá tuân theo trình tự sau.

- *Bước 1.* Xây dựng mô hình định tính cho bài toán.
- *Bước 2.* Thiết lập bài toán toán học.
- *Bước 3.* Tìm phương pháp giải số cho bài toán tối ưu.
- *Bước 4.* Kiểm định mô hình.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học

Mô hình hóa (2)

- *Bước 1.* Xây dựng mô hình định tính cho bài toán.

Trong giai đoạn này các chuyên gia phát biểu bài toán thành lời để các nhà toán học có thể thiết lập bài toán giải được. Các mục tiêu và yếu tố cần quan tâm và mối quan hệ giữa chúng được mô tả rõ ràng cùng với các điều kiện tự nhiên và kinh tế kỹ thuật mà chúng cần tuân theo.

- *Bước 2.* Thiết lập bài toán toán học.

Dựa trên bài toán định tính đã có, thiết lập thành bài toán bằng ngôn ngữ toán học bao gồm xác định hàm mục tiêu và các tham số cần thiết, mô tả các điều kiện bằng các phương trình, bất phương trình. Bài toán có thể có một mục tiêu hoặc nhiều mục tiêu, tuyến tính hay phi tuyến. Nếu dạng bài toán đơn giản thì dễ tìm lời giải nhưng thường không phản ánh đúng bài toán thực tiễn còn khi chọn dạng bài toán dạng phức tạp để gần với thực tiễn thì thường khó tìm lời giải số.

Vận trù học

Phương pháp luận của vận trù học

Mô hình hóa (3)

- *Bước 3.* Tìm phương pháp giải số cho bài toán tối ưu.

Các bài toán này thường có nhiều biến với nhiều điều kiện buộc. Ngày nay, nhiều bài toán đã có chương trình được xây dựng sẵn có thể sử dụng mà không nhất thiết phải hiểu rõ bản chất thuật toán. Các chương trình giải bài toán tối ưu thường được tích hợp thành các hệ hỗ trợ quyết định để người dùng dễ sử dụng.

- *Bước 4.* Kiểm định mô hình.

Bài toán thiết lập trong bước 2 dựa trên bài toán phát biểu định tính là sự đơn giản hoá vấn đề đang xét và không đảm bảo nó phản ánh đúng thực tiễn. Mặt khác lời giải tìm được ở bước 3 thường là gần đúng. Nếu bài toán không ổn định thì không đảm bảo tin cậy được. Vì vậy khi đã có chương trình giải bài toán, ta cần lấy các dữ liệu đã có để kiểm tra tính phù hợp của mô hình và kết quả tính toán. Việc đánh giá sự phù hợp thường được phân tích theo phương pháp chuyên gia. Nếu các chuyên gia đánh giá mô hình phù hợp với thực tiễn thì phần mềm được hoàn thiện để sử dụng. Khi kết quả tính toán không phù hợp với thực tế thì phải xem lại từ bước 1 đến bước 3. **Môn học này sẽ tập trung giới thiệu các phương pháp thông dụng giải các bài toán tối ưu thường gặp.**

Phân loại bài toán tối ưu

- Tối ưu liên tục
- Tối ưu tổ hợp (rời rạc)
- Hỗn hợp giữa các biến liên tục và rời rạc nhưng ta không xét trong môn học này.

Phân loại bài toán tối ưu (2)

Tối ưu liên tục

- Khi tập biến x nhận giá trị liên tục trong không gian số học n chiều R^n thì bài toán là tối ưu liên tục.
- Ví dụ: Bài toán hồi quy/xấp xỉ hàm

Giả sử $f(x)$ là hàm chưa biết nhưng có tập dữ liệu quan sát được:

$$D = \{(x^k, y^k)\}_{k=1}^N \text{ sao cho } \forall k, y^k = f(x^k) + \varepsilon^k$$

trong đó ε^k là nhiễu trắng, tức là $E(\varepsilon^k) = 0$. Ta cần tìm xấp xỉ $g(x)$ để tính gần đúng giá trị của hàm $f(x)$ sao cho tổng bình phương sai số tại các mốc quan sát cực tiểu.

Phân loại bài toán tối ưu (3)

Tối ưu tổ hợp

- Khi X là tập hữu hạn,

$$f(x) \rightarrow \max / \min$$

Với $x \in X$, X sẽ gọi là tập trạng thái chấp nhận được. Mỗi trạng thái $x \in X$ được xác định bởi một vector các thành phần trong tập C : $x = \langle c_1, \dots, c_n \rangle, \forall i, c_i \in C$.

- Ví dụ: Bài toán người chào hàng (travelling salesman problem: TSP)

Cho đồ thị $G = (V, E)$, trong đó V là tập đỉnh, E là tập cạnh. Biết độ dài mỗi cạnh nối cặp đỉnh (i, j) là $d_{i,j}$, tìm chu trình đi qua mọi đỉnh V đúng một lần sao cho độ dài của nó ngắn nhất. Bài toán này thường được dùng làm bài toán chuẩn để đánh giá chất lượng của các phương pháp tối ưu tổ hợp.

Bài toán lập kế hoạch sản xuất với tài nguyên hạn chế (1)

- Một chủ trang trại có thể trồng bông hoặc đậu trên 10.000 m^2 đất canh tác.
- Nếu trồng đậu thì mỗi m^2 đất canh tác cần 0,2 công lao động và thu lãi 3500đ; Còn trồng bông thì cần 0,1 công lao động và lãi 2000đ. Số công lao động có thể huy động được là 1500 công.
- Hỏi ông chủ nên canh tác như thế nào ?

Bài toán lập kế hoạch sản xuất với tài nguyên hạn chế (2)

- Gọi x là diện tích đất trồng đậu và y là diện tích đất trồng bông. Khi đó ta cần tìm (x, y) để lợi nhuận tổng cộng lớn nhất:

$$f(x,y) = 3500x + 2000y \rightarrow \max$$

- Trong đó (x,y) thoả mãn các điều kiện hạn chế về diện tích canh tác và cung ứng lao động: $(x+y) \leq 10000$; $0.2x+0.1y \leq 1500$; $x, y \geq 0$;

Bài toán lập kế hoạch sản xuất với tài nguyên hạn chế (3)

- Một xí nghiệp có thể sản xuất n loại sản phẩm p_1, \dots, p_n từ m loại nguyên liệu M_1, \dots, M_m . Biết rằng để sản xuất một đơn vị sản phẩm p_i ($i = 1, \dots, n$) ta cần dùng a_{ji} đơn vị vật liệu M_j ($j = 1, \dots, m$) và thu được c_i tiền lãi.
- Hãy xác định phương án sản xuất có lãi nhiều nhất nếu nguyên liệu M_j chỉ có dự trữ b_j ($j = 1, \dots, m$).

Bài toán lập kế hoạch sản xuất với tài nguyên hạn chế (4)

- Gọi x_i là lượng sản phẩm p_i được sản xuất, khi đó $x_i \geq 0$ ($i = 1, \dots, n$) ta cần tìm các x_i để cho tổng tiền lãi lớn nhất.

$$f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x_i \rightarrow \max$$

- Với các điều kiện hạn chế về tài nguyên.

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j; \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_i \geq 0; \quad i = 1, \dots, n.$$

- Trong thực tế sản phẩm có thể là số nguyên (cái, kiện hàng) thì bài toán thuộc tối ưu tổ hợp.

Bài toán vận tải (1)

- Có n kho A_1, \dots, A_n với lượng hàng tương ứng ở kho A_i là a_i được cung cấp cho m điểm tiêu thụ B_1, \dots, B_m , nhu cầu ở B_j tương ứng là b_j . c_{ji} là cước phí vận chuyển một đơn vị hàng hoá từ kho A_i tới B_j .
- Tìm phương án vận chuyển có chi phí nhỏ nhất.

→ Mô hình hóa???

Bài toán vận tải (2)

- Gọi x_{ji} là lượng hàng từ A_i đến B_j , bài toán là
- Tìm x_{ji} ($j = 1, 2, \dots, m; i = 1, 2, \dots, n$) sao cho
$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ji} x_{ji} \rightarrow \min$$
- Với các điều kiện
$$\sum_{j=1}^m a_{ji} \leq a_i; \quad i = 1, 2, \dots, n$$
$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \geq b_j; \quad j = 1, 2, \dots, m$$
$$x_{ji} \geq 0 \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m$$
- Trong thực tế có thể yêu cầu lượng hàng từ các kho tới các điểm tiêu thụ là số nguyên (bao, kiện hàng) thì bài toán thuộc tối ưu tổ hợp.

Phân loại bài toán tối ưu (4)

- **Quy hoạch tuyến tính**

Nếu hàm mục tiêu và các hàm ràng buộc là tuyến tính và $X = R^n$ thì ta gọi là bài toán quy hoạch tuyến tính. Các bài toán còn lại gọi là phi tuyến.

- **Quy hoạch lồi**

Bài toán gọi là quy hoạch lồi nếu hàm mục tiêu là hàm lồi và miền ràng buộc là tập lồi. Trong số các bài toán quy hoạch phi tuyến, có một đặc biệt quan trọng là quy hoạch lồi.

- **Quy hoạch tham số**

Nếu các hệ số trong hàm mục tiêu hoặc hàm ràng buộc có phụ thuộc vào tham số thì gọi là quy hoạch tham số.

- **Quy hoạch động**

Nếu các đối tượng trong bài toán được xét gồm nhiều giai đoạn (nói riêng là quá trình phát triển theo thời gian) thì gọi là bài toán quy hoạch động.

- **Quy hoạch đa mục tiêu**

Nếu trên miền được xét ta khảo sát đồng thời nhiều hàm mục tiêu thì gọi là quy hoạch đa mục tiêu.

Các cách tiếp cận

Tối ưu tổ hợp	Tối ưu liên tục
<ul style="list-style-type: none">• Các phương pháp truyền thống: Chứng minh hội tụ hoặc tỷ lệ tối ưu• Các phương pháp dựa trên thực nghiệm <p>+ Heuristic kiến trúc (constructive)</p> <p>+ Tìm kiếm địa phương</p> <p>+ Metaheuristics:</p> <ul style="list-style-type: none">- GA (Genetic Algorithms)- ACO (Ant Colony Optimization)- Memetic algorithm	<ul style="list-style-type: none">• Quy hoạch tuyến tính• Quy hoạch phi tuyến <p>Tìm kiếm địa phương</p> <p>- Phương pháp gradient</p> <p>Tối ưu toàn cục</p> <ul style="list-style-type: none">- Quy hoạch lồi, hiệu lồi- Tìm kiếm ngẫu nhiên (Monte-Carlo)- GA (Genetic Algorithms)