Các hàm và mô men của BNN nhiều chiều

Functions & Moments of Multiple Random Variables

Đặng Thanh Hải (Ph.D)
School of Engineering and Technology, VNUH
Homepage: uet.vnu.edu.vn/~hai.dang
Email: haidt82@yahoo.com

Acknowledgement

Hayder Radha

Associate Professor

Michigan State University

Department of Electrical & Computer Engineering

Functions of Two Random Variables

Các hàm của BNN nhiều chiều

- In general, we have to find the pdf and cdf of a random variable $Z=g(X,Y)$

Nhìn chung, chúng ta phải tìm hàm pdf và cdf của 1 bnn Z=g(X, Y)

- Start with the event $\{Z \leq z\}$

Bắt đầu với sự kiện {Z <= z}

- This leads to the event $\{g(X,Y) \leq z\}$

Điều này dẫn đến sự kiện {g(X, Y) <= z}

- This leads to the event $\{(X,Y) \in R(z)\}$, where $R(z)$ is some 2-D region in the (x,y) plane

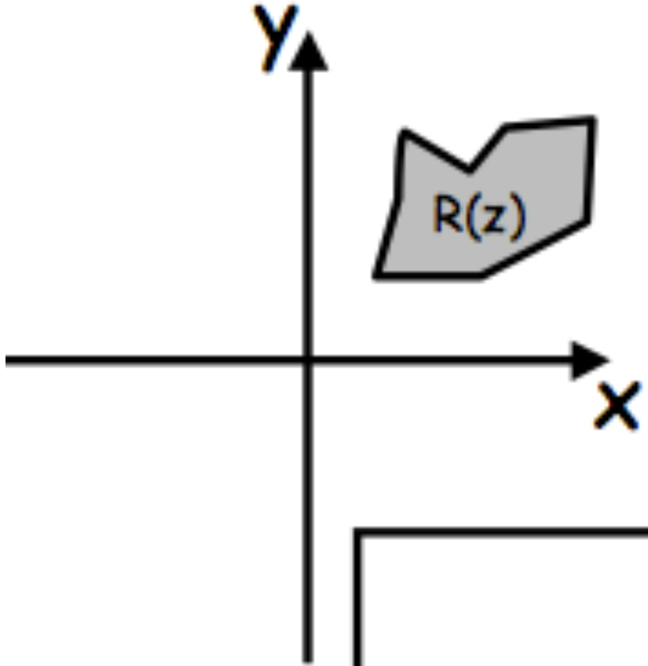
Điều này dẫn đến sự kiện {(X, Y) ... R(z)}, trong đó R(z) là một vài miền 2-chiều trong mặt phẳng (x,y)

Functions of Two Random Variables

Các hàm của BNN nhiều chiều

- **The probability of the event $\{(X,Y) \in R(z)\}$:**

  Xác suất của sự kiện {(X, Y) .... R(z)}:



$$P[Z \le z] = P[\{(X,Y) \in R(z)\}]$$

$$F_Z(z) = \iint_{R(z)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz} = \frac{d\left(\iint_{R(z)} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy\right)}{dz}}$$

Functions of Two Random Variables

Các hàm của BNN nhiều chiều

- **In summary, for Z=g(X,Y)**

Tóm lại, với Z=g(X, Y)

$$\{Z \le z\} \Rightarrow \{g(X,Y) \le z\} \Rightarrow \{(X,Y) \in R(z)\}$$

- **Examples:**

Các ví dụ:

$$Z = X + Y$$

$$Z = X / Y$$

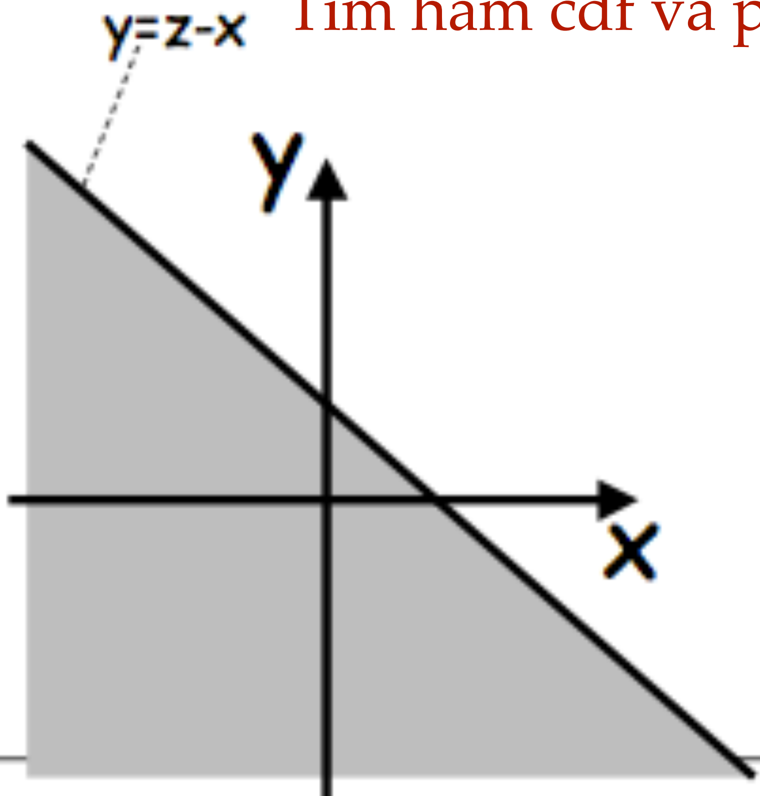
$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

Example I.8

Ví dụ I.8

- Let X and Y be two random variables with a joint pdf $f_{XY}(x,y)$. Find the cdf and pdf of the random variable $Z=X+Y$.

Cho X và Y là 2 bnn với hàm mật độ đồng thời pdf fxy(x,y). Tìm hàm cdf và pdf của bnn Z=X+Y.



$$P[Z \le z] = P[X+Y \le z]$$

$$P[X+Y \le z] =$$

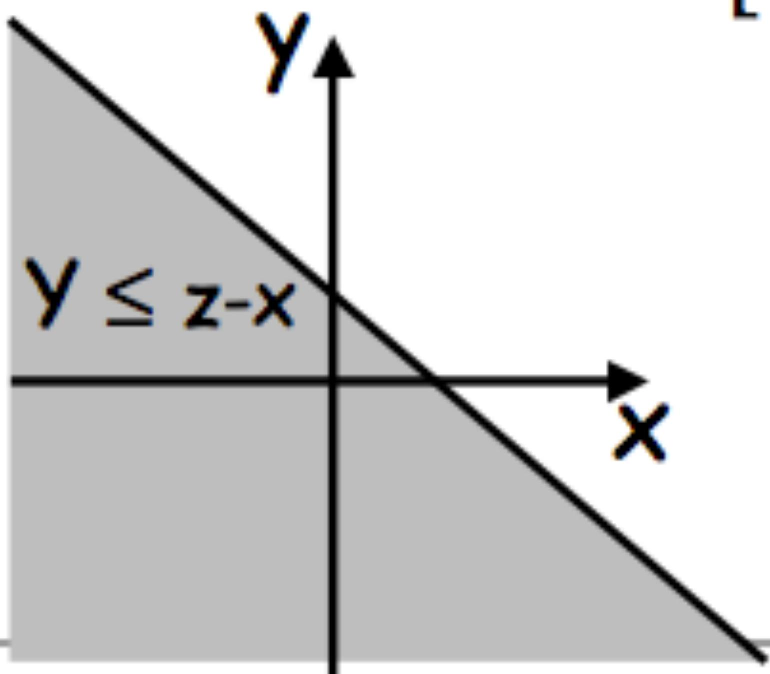
$$P[\{Y \le z-x\} \cap \{-\infty \le X \le +\infty\}]$$

Example I.8

$P[Z \le z] = P[X+Y \le z] =$

$P[\{Y \le z-x\} \cap \{-\infty \le X \le +\infty\}]$

$$P[Z \le z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$



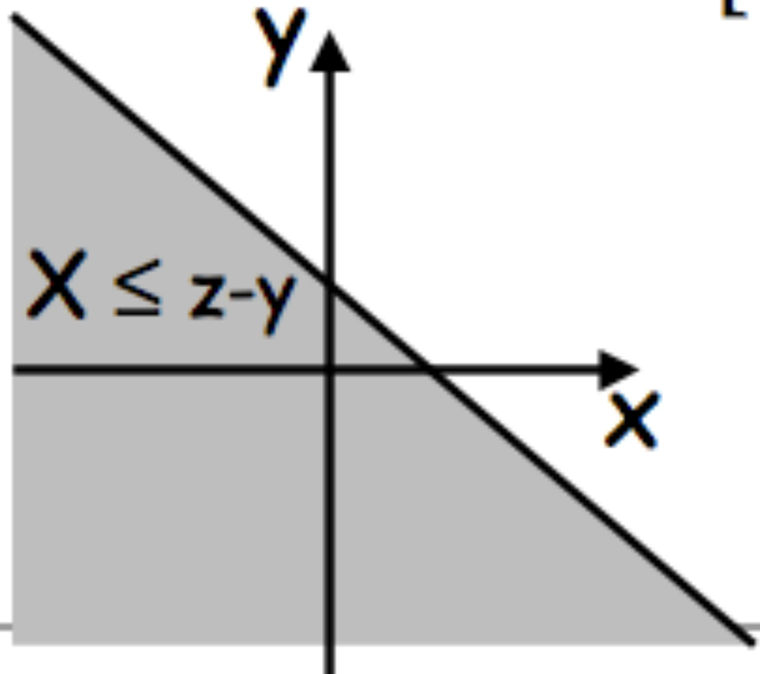
$$\boxed{F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx}$$

Example I.8

$P[Z \le z] = P[X+Y \le z] =$

$P[\{X \le z\text{-}y\} \cap \{-\infty \le Y \le +\infty\}]$

$$P[Z \le z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy$$

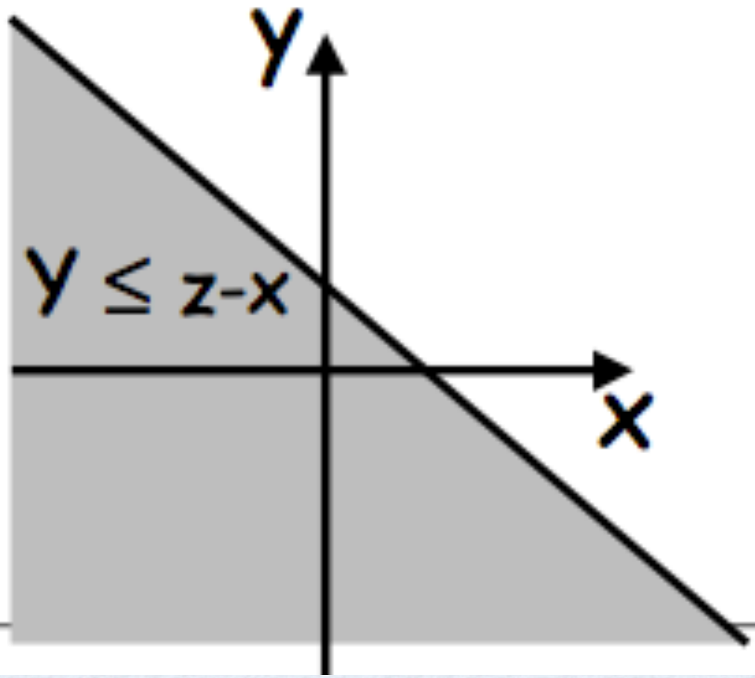


$$\boxed{F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)\, dx\, dy}$$

Example I.8

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx$$

$$F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z,x)\, dx$$

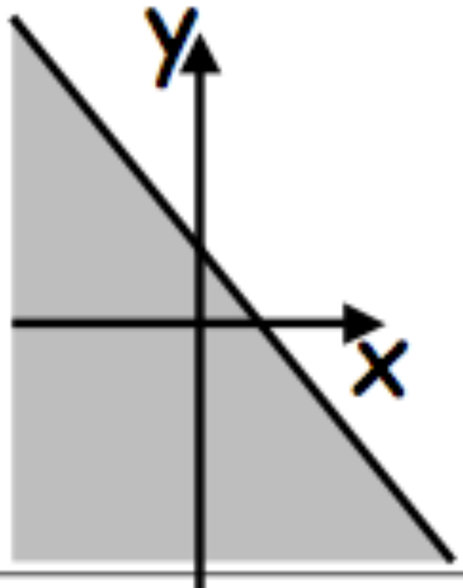


$$h(z,x) = \int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\, dy$$

Example I.8

$$\boxed{F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} h(z,x)\,dx} \qquad f_Z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz}$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}\big(h(z,x)\big)\,dx$$



$$\frac{d}{dz}\big(h(z,x)\big) = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\right)$$

Example I.8

$$\frac{d}{dz}(h(z,x)) = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\right)$$

$$\frac{d}{dz}(h(z,x)) = f_{XY}(x,z-x)$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dz}(h(z,x))\,dx$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_z(z)}{dz} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\,dx$$

Example I.8

Ví dụ I.8

- **Therefore, for Z=X+Y:**

Do đó, với Z=X+Y

$$\boxed{F_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x,y)\,dy\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{z-y} f_{XY}(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,z-x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(z-y,y)\,dy}$$

Example I.8

Ví dụ I.8

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx$$

Khi X và Y là độc lập:

When X and Y are independent:

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$$

Example I.8

Ví dụ I.8

- **When Z=X+Y and X & Y are independent:**

Khi Z=X+Y và X, Y là độc lập với nhau:

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y(y)\, dy}$$

$\boxed{f_Z \text{ is the convolution of } f_X \text{ and } f_Y}$

fz là tích chập của fx và fy

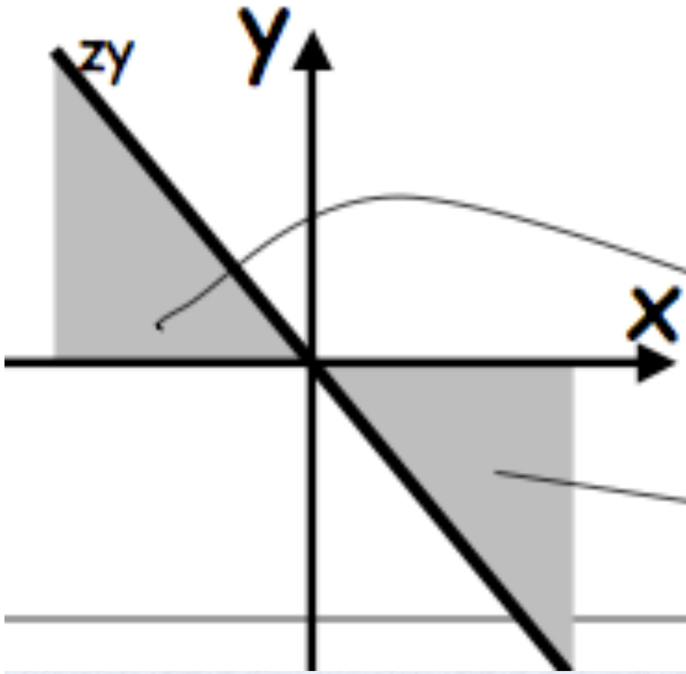
Example I.9

Ví dụ I.9

- Let X and Y be two random variables with a joint pdf $f_{XY}(x,y)$. Find the cdf and pdf of the random variable Z=X/Y.

Cho X và Y là 2 bnn với hàm mật độ đồng thời pdf fxy(x,y).
Tìm hàm cdf và pdf của bnn Z=X/Y

$$P[Z \le z] = P\left[\frac{X}{y} \le z\right]$$



$$\{X/Y \le z\} =$$

$$\{\{X \le z\,y\} \cap \{0 < Y \le +\infty\}\} \cup$$

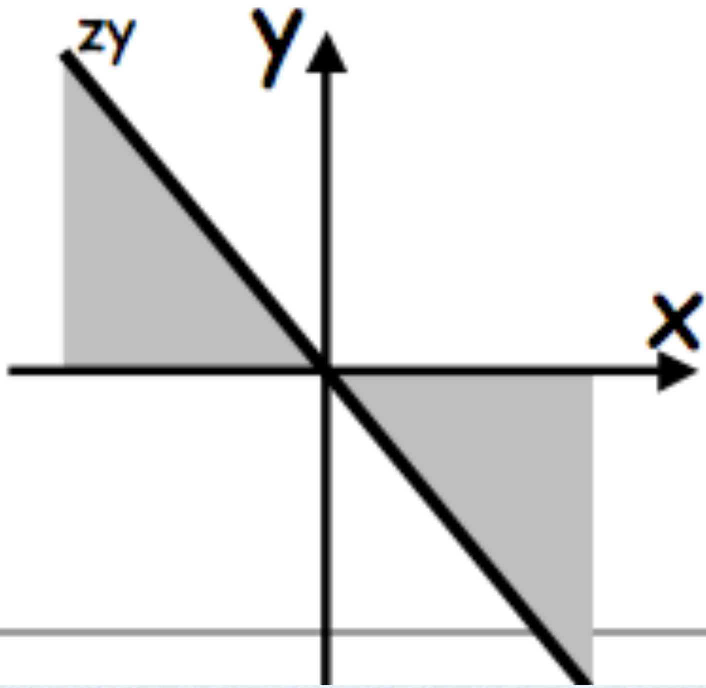
$$\{\{X \ge z\,y\} \cap \{-\infty \le Y < 0\}\}$$

Example I.9

Ví dụ I.9

$$\Rightarrow P[Z \le z] = P[\{X \le z\,y\} \cap \{Y > 0\}]$$

$$+ P[\{X \ge z\,y\} \cap \{Y < 0\}]$$

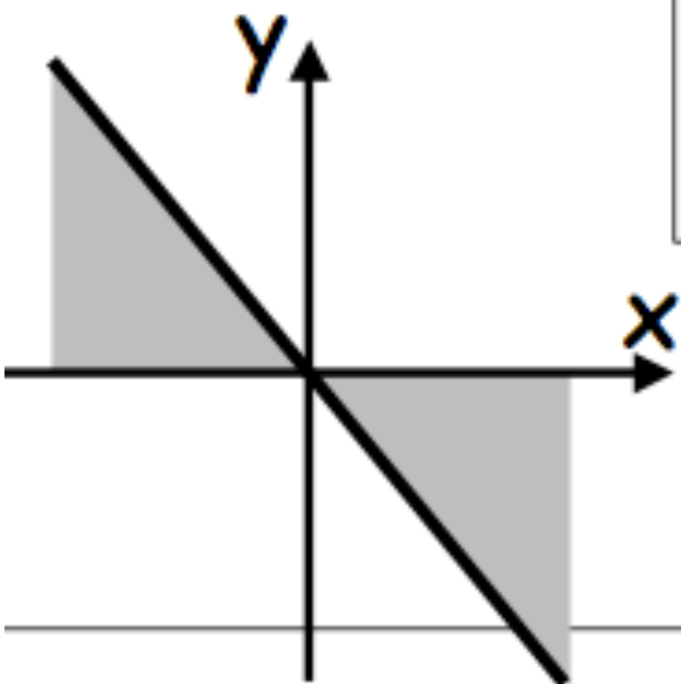


$$F_Z(z) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{y\,z} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0} \int_{y\,z}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$

Example I.9

Ví dụ I.9

$$F_Z(z) = \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{yz} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0} \int_{yz}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy$$



$$F_Z(z) = \int_{0}^{\infty} h_1(y,z)\,dy + \int_{-\infty}^{0} h_2(y,z)\,dy$$

Example I.9

Ví dụ I.9

$$\boxed{F_Z(z) = \int_0^{\infty} h_1(y,z)\,dy + \int_{-\infty}^{0} h_2(y,z)\,dy}$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{d}{dz}(h_1(y,z))\,dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dz}(h_2(y,z))\,dy$$

Example I.9

Ví dụ I.9

$$\frac{d}{dz}(h_1(y,z)) = \frac{d}{dz}\left(\int_{-\infty}^{zy} f_{XY}(x,y)\,dx\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dz}(h_1(y,z)) = y f_{XY}(zy,y)}$$

$$\frac{d}{dz}(h_2(y,z)) = \frac{d}{dz}\left(\int_{zy}^{\infty} f_{XY}(x,y)\,dx\right)$$

$$\boxed{\frac{d}{dz}(h_2(y,z)) = -y f_{XY}(zy,y)}$$

Example I.9

Ví dụ I.9

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} \frac{d}{dz}(h_1(y,z))\,dy + \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dz}(h_2(y,z))\,dy$$

$$f_Z(z) = \int_0^{\infty} y f_{XY}(zy,y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f_{XY}(zy,y)\,dy$$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_{XY}(zy,y)\,dy$$

Example I.9

Ví dụ I.9

- **Therefore, for Z=X/Y:**

  Do đó, với Z=X/Y

$$\boxed{F_Z(z) = \int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{yz} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy + \int_{-\infty}^{0}\int_{yz}^{\infty} f_{xy}(x,y)\,dx\,dy}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{0}^{\infty} y f_{XY}(zy,y)\,dy - \int_{-\infty}^{0} y f_{XY}(zy,y)\,dy}$$

$$\boxed{f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} |y|\, f_{XY}(zy,y)\,dy}$$

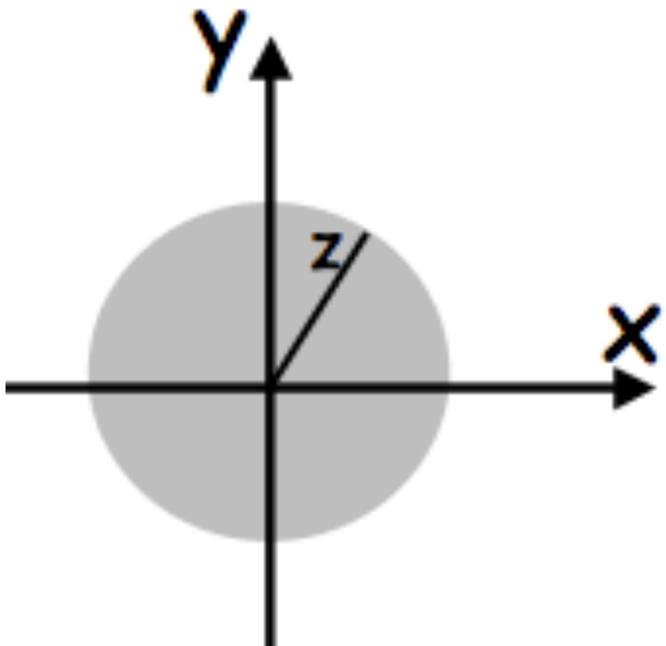
Example I.10

Ví dụ I.10

- **Let X and Y be circularly symmetrical random variables with a joint pdf $f_{XY}(x,y)$. Find the cdf and pdf of:**

  Cho X và Y là bnn đối xứng vòng có hàm mật độ đồng thời fxy(x, y).
  Tìm hàm cdf và pdf của:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$$



$$P[Z \le z] = P\left[\sqrt{X^2 + Y^2} \le z\right]$$

$$= P\left[X^2 + Y^2 \le z^2\right]$$

Example I.10

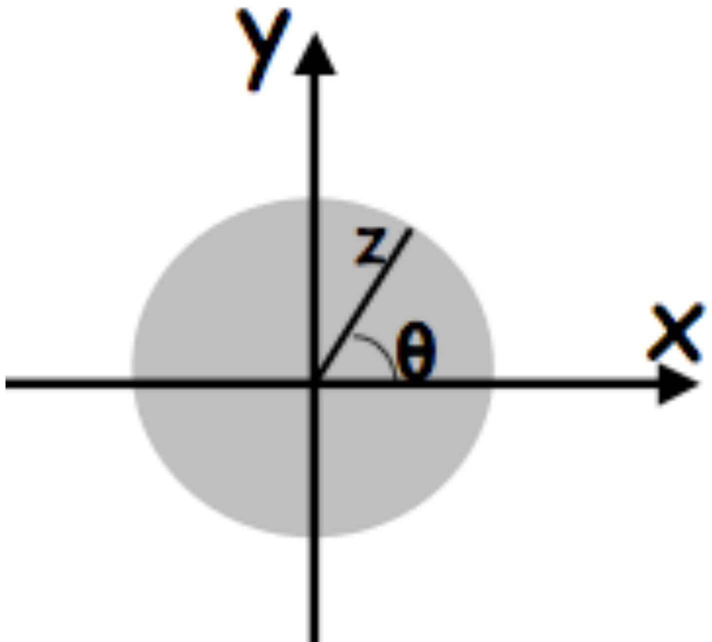
Ví dụ I.10

- **Since X and Y are circularly symmetrical:**

Vì X và Y là đối xứng vòng:

$f_{XY}(x,y)=g(r)$ where, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

với,



$$F_Z(z) = \int_0^z \int_0^{2\pi} g(r)(r d\theta) dr$$

$$\boxed{F_Z(z) = 2\pi \int_0^z r g(r) dr}$$

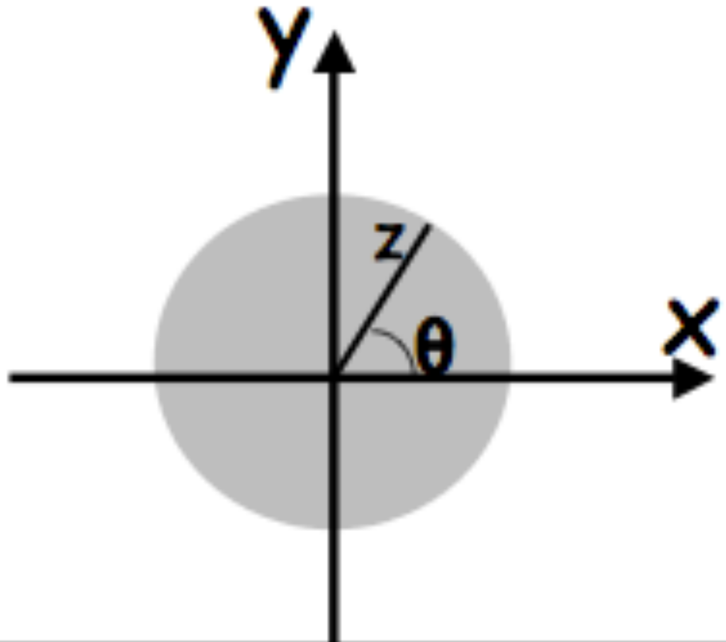
Example I.10

Therefore, for circularly symmetrical X & Y, the random variable $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$

Do đó, với X và Y là bnn đối xứng vòng, bnn Z = ...

$$\boxed{F_Z(z) = 2\pi \int_0^z r g(r)\, dr}$$

$$f_Z(z) = \frac{dF_Z(z)}{dz}$$



$$\boxed{f_Z(z) = 2\pi z g(z)}$$

Example I.11

Ví dụ I.11

Let X & Y be jointly *Gaussian* (normal) and circularly symmetrical RVs. Find the pdf and cdf of the random variable: $Z = \sqrt{X^2 + y^2}$

<u>Solution</u>

Ví dụ nâng cao, tuỳ chọn

Since X & Y are normal and *C.S.* , then they must have:

- Zero means
- *A* zero correlation coefficient (for normal RVs this implies independence)
- Equal variances

Example I.11

Therefore

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-r^2/2\sigma^2} = g(r)$$

Now using: $$\boxed{f_Z(z) = 2\pi z g(z)}$$

Example I.11

$$f_Z(z) = 2\pi z\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}\right)$$

$$\boxed{f_Z(z) = \frac{z}{\sigma^2}e^{-z^2/2\sigma^2}} \qquad z \geq 0$$

Hence, z has a Rayleigh density function

Functions of Random Variables

Therefore, when X & Y are jointly *Gaussian* (normal) and circularly symmetrical RVs, then the random variable:

$$Z = \sqrt{X^2 + y^2}$$

is a Rayleigh random variable

Moments of Functions of RVs

Mô men của hàm của các bnn

- The expected value of the function g(X,Y) of the random variables X and Y:

Giá trị kỳ vọng của hàm g(X, Y) của bnn X và Y:

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{XY}(x,y)\,dx\,dy$$

Moments of Functions of RVs

Mô men của hàm của các bnn

Special cases: Các trường hợp đặc biệt:

- $g(X,Y) = X+Y = E[X] + E[Y] = m_x + m_y$
- $g(X,Y) = (X-m_x)^j (Y-m_y)^k$

For j=1 and k=1:

Với j=1 và k=1:

$$\mathrm{COV}(X,Y) = E[(X-m_x)(Y-m_y)]$$

Đồng phương sai của X và Y

= covariance of X & Y

Moments of Functions of RVs

Mô men của hàm của các bnn

- $COV(X,Y) = E[(X-m_x)(Y-m_y)] = E[XY] - E[X]E[Y]$
- If $E[X]=0$ and/or $E[Y]=0$:

  Nếu $E[X]=0$ và/hoặc $E[Y]=0$:

  $COV(X,Y) = E[(X-m_x)(Y-m_y)] = E[XY]$
- When $COV(X,Y) = E[(X-m_x)(Y-m_y)] = 0$,

  Khi đó

  then X and Y are called <u>uncorrelated</u>

  Thì X và Y được gọi là "Không tương quan"

Moments of Functions of RVs

Mô men của hàm của các bnn

- **The correlation coefficient ρ_{xy}:**

Hệ số tương quan ....:

$$\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\rho_{XY} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Moments of Functions of RVs

Mô men của hàm của các bnn

- **The correlation coefficient value:**

Giá trị hệ số́ tương quan:

$$\boxed{-1 \leq \rho_{XY} \leq 1}$$

- **This can be shown using this inequality:**

Điêu trên có thể được chứng minh bằng việc sử dụng bất đẳng thức sau:

$$E\left[\left(\frac{X - E[X]}{\sigma_X} \pm \frac{Y - E[Y]}{\sigma_Y}\right)^2\right] \geq 0$$

Uncorrelated RVs

Các bnn không tương quan

- **If X and Y are <u>uncorrelated</u>:**

  Nếu X và Y là không tương quan:

$$\Leftrightarrow COV(X,Y)=0$$

$$\Leftrightarrow E[XY]=E[X]E[Y]$$

$\Leftrightarrow$ **zero correlation coefficient** $\Leftrightarrow \rho_{xy}=0$

Hệ số tương quan không <=>

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{COV(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{E[XY]-E[X]E[Y]}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{0}{\sigma_X\sigma_Y}=0}$$

Independent and Uncorrelated RVs

Tính không tương quan và độc lập giữa các bnn

- **Theorem:** Định lý:

  If X and Y are independent, then they are uncorrelated

  Nếu X và Y là độc lập, thì chúng không tương quan với nhau

- **Proof:** Chứng minh:

  we need to show that COV(X,Y) = 0

  Chúng ta cần chỉ ra rằng COV(X, Y)=0

  This is equivalent to showing:

  Điều này tương đương với việc chứng minh:

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

Independent and Uncorrelated RVs

Tính không tương quan và độc lập giữa các bnn

- **If X and Y are independent:**

  Nếu X và Y là độc lập nhau

$\Rightarrow$ (X & Y are uncorrelated $\Leftrightarrow$ COV(X,Y)=0)

X và Y không tương quan với nhau <=>

$\Rightarrow$ (zero correlation coefficient $\Leftrightarrow$ ρ_{xy}=0)

Hệ số tương quan không <=>

$$\boxed{\rho_{XY} = \frac{COV(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{\sigma_X \sigma_Y} = 0}$$

$\boxed{\text{The inverse is not always true}}$

Điêu ngược lại không luôn luôn đúng

Conditional Expectations

Kỳ vọng có điều kiện

- We are interested in the "expected value" of one random variable Y *given* that another random variable X=x:

Chúng ta quan tâm đến giá trị kỳ vọng của một bnn Y với điều kiện khi đã biết bnn X=x $E[Y|\{X=x\}]=E[Y|x]$

$$E[Y\,|\,x] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f_{y|x}(y\,|\,\{X = x\})\,dx\,dy$$

Conditional Expectations

Kỳ vọng có điều kiện

- **Recall that the conditional density function**

Nhớ lại rằng hàm mật độ có điều kiện

$$f_{Y|X}(y|\{X=x\}) = f_{Y|X}(y|x)$$

can be computed using joint and marginal density functions:

có thể được tính sử dụng các hàm mật độ đồng thời và biên:

$$\boxed{f_{Y|X}(y\,|\,x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}}$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x\,|\,y) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}}$$

Conditional Expectations

Kỳ vọng có điều kiện

- The conditional expectation

  Kỳ vọng có điều kiện

  $$E[Y|\{X=x\}]=E[Y|x]$$

  is a function of the random variable X

  là một hàm của bnn X

- Therefore, we can define $g(X)=E[Y|X]$

  Do đó, chúng ta định nghĩa g(X)=.....

Conditional Expectations

Kỳ vọng có điều kiện

- Given the function $g(X)$ of the random variable X, we are interested in

  Cho hàm g(X) của bnn X, chúng ta quan tâm đến

$$E[g(X)]=E[E[Y|X]]$$

- It can be shown that

  Nó có thể được dùng để chứng minh rằng

$$\boxed{E[E[Y|X]]=E[Y]}$$

Independent and Uncorrelated RVs

Tính không tương quan và độc lập giữa các bnn

- If X & Y are independent,

  then g(X) and h(Y) are also independent:

Nếu X và Y là độc lập, khi đó g(X) và h(Y) cũng độc lập nhau:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$\Rightarrow f_{GH}(g,h)= f_G(g)f_H(h)$$

Independent and Uncorrelated RVs

Tính không tương quan và độc lập giữa các bnn

- If X & Y are independent,

  then g(X) and h(Y) are "uncorrelated":

Nếu X và Y là độc lập, khi đó g(X) và h(Y) không tương quan nhau:

$$f_{XY}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

$$\Rightarrow E[g(x)h(y)]=E[g(x)]\,E[h(y)]$$