Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

РГР 1 по Дифферинциальным уравнениям

«ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА»

Выполнила:
Охрименко Анастасия Дмитриевна
R3225, 409290
Поток: ДУ 23 1.1
Факультет: СУиР

Санкт-Петербург, 2024

1 Вариант 20. Условие задачи

Численно решить дифференциальное уравнение:

$$y' = 3x - \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1$$

на отрезке $[1; 2]$ с шагом $h = 0.2$ методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера.

Найти точное решение $y = y(x)$ и сравнить значения точного и приближенных решений в точке $x = 2$. Найти абсолютную и относительную погрешности в этой точке для каждого метода. Вычисления вести с четырьмя десятичными знаками.

Замечание. Необходимые теоретические сведения и образец выполнения работы приведены в конце пункта.

2 Точное решение

Приведение уравнения к однородному виду

Дано дифференциальное уравнение:

$$y' = 3x - \frac{y}{x}.$$

Запишем его в форме:

$$\frac{dy}{dx} = 3x - \frac{y}{x}.$$

Предположим подстановку $y = z^2$, где $z = \sqrt{y}$. Тогда:

$$y = z^2, \quad \frac{dy}{dx} = 2z\frac{dz}{dx}.$$

Подставляем в уравнение:

$$2z\frac{dz}{dx} = 3x - \frac{z^2}{x}.$$

Приводим к однородному виду:

$$2z\frac{dz}{dx} = \frac{3x^2 - z^2}{x}.$$

Разделение переменных

Перепишем уравнение в форме, удобной для разделения переменных:

$$2z\,dz = \frac{3x^2 - z^2}{x}\,dx.$$

Разделим переменные:

$$\frac{2z}{z^2 - 3}\,dz = \frac{1}{x}\,dx.$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{2z}{z^2-3}\, dz = \int \frac{1}{x}\, dx.$$

Решение интегралов

Интегрируем левую часть:

$$\int \frac{2z}{z^2-3}\, dz = \ln|z^2-3| + C_1.$$

Интегрируем правую часть:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + C_2.$$

Собираем итоговое выражение:

$$\ln|z^2-3| = \ln|x| + C,$$

где $C = C_2 - C_1$.

Возвращаемся к переменной y через z:

$$z^2 - 3 = Cx.$$

Так как $z = \sqrt{y}$, то:

$$y = x^2 + Cx.$$

Задача Коши

Учитываем начальное условие $y(1) = 1$:

$$1 = 1^2 + C \cdot 1.$$

Решаем относительно C:

$$C = 0.$$

Итоговое решение

Подставляем значение $C = 0$ в общее решение:

$$y = x^2.$$

Таким образом, точное решение задачи Коши:

$$y = x^2.$$

3 Метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши:

$$y'(x) = 3x - \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Шаг интегрирования: $h = 0.2$. Необходимо найти приближённые значения y на отрезке $[1; 2]$ методом Эйлера.

Формула метода Эйлера

Приближённые значения вычисляются по формуле:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n),$$

где $f(x, y) = 3x - \frac{y}{x}$.

Пошаговые вычисления

Шаг 0:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

Шаг 1:

$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0.2 = 1.2,$$
$$f(x_0, y_0) = 3 \cdot 1 - \frac{1}{1} = 3 - 1 = 2,$$
$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.2 \cdot 2 = 1.4.$$

Шаг 2:

$$x_2 = x_1 + h = 1.2 + 0.2 = 1.4,$$
$$f(x_1, y_1) = 3 \cdot 1.2 - \frac{1.4}{1.2} = 3.6 - 1.1667 \approx 2.4333,$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.4 + 0.2 \cdot 2.4333 = 1.8867.$$

Шаг 3:

$$x_3 = x_2 + h = 1.4 + 0.2 = 1.6,$$
$$f(x_2, y_2) = 3 \cdot 1.4 - \frac{1.8867}{1.4} = 4.2 - 1.3476 \approx 2.8524,$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1.8867 + 0.2 \cdot 2.8524 = 2.4572.$$

Шаг 4:

$$x_4 = x_3 + h = 1.6 + 0.2 = 1.8,$$
$$f(x_3, y_3) = 3 \cdot 1.6 - \frac{2.4572}{1.6} = 4.8 - 1.5358 \approx 3.2642,$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 2.4572 + 0.2 \cdot 3.2642 = 3.1100.$$

Шаг 5:

$$x_5 = x_4 + h = 1.8 + 0.2 = 2.0,$$

$$f(x_4, y_4) = 3 \cdot 1.8 - \frac{3.1100}{1.8} = 5.4 - 1.7278 \approx 3.6722,$$

$$y_5 = y_4 + h \cdot f(x_4, y_4) = 3.1100 + 0.2 \cdot 3.6722 = 3.8444.$$

Итоговая таблица значений

n	x_n	$f(x_n, y_n)$	y_n
0	1.0	2.0	1.0000
1	1.2	2.4333	1.4000
2	1.4	2.8524	1.8867
3	1.6	3.2642	2.4572
4	1.8	3.6722	3.1100
5	2.0	–	3.8444

Вывод

При использовании метода Эйлера для решения задачи Коши приближённое значение решения в точке $x = 2$ равно $y = 3.8444$.

Код

Ниже представлен код метода Эйлера для решения задачи:

```
import numpy as np
import pandas as pd

def f(x, y):
    return 3 * x - y / x

def euler_method(f, x0, y0, h, x_end):
    x_values = [x0]
    y_values = [y0]

    x = x0
    y = y0

    while x < x_end:
        y = y + h * f(x, y)
        x = x + h
        x_values.append(round(x, 4))
        y_values.append(round(y, 4))

```

```
    return np.array(x_values), np.array(y_values)

x0 = 1
y0 = 1
h = 0.2
x_end = 2

x_vals, y_vals = euler_method(f, x0, y0, h, x_end)

results = pd.DataFrame({'x': x_vals, 'y (Eiler)': y_vals})
print(results)
```

4 Модифицированный метод Эйлера

Рассмотрим задачу Коши:

$$y'(x) = 3x - \frac{y}{x}, \quad y(1) = 1.$$

Шаг интегрирования: $h = 0.2$. Необходимо найти приближённые значения y на отрезке $[1; 2]$ модифицированным методом Эйлера.

Формула метода

1. Промежуточное значение (предиктор):

$$y^* = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

2. Коррекция (корректор):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} \cdot \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y^*) \right].$$

Пошаговые вычисления

Шаг 0:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

Шаг 1:

$$x_1 = x_0 + h = 1.2, \quad f(x_0, y_0) = 2.0,$$

$$y^* = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0.2 \cdot 2.0 = 1.4,$$

$$f(x_1, y^*) = 3 \cdot 1.2 - \frac{1.4}{1.2} = 2.4333,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_0, y_0) + f(x_1, y^*)] = 1 + 0.1 \cdot (2.0 + 2.4333) = 1.4433.$$

Шаг 2:

$$x_2 = x_1 + h = 1.4, \quad f(x_1, y_1) = 2.3461,$$

$$y^* = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1.4433 + 0.2 \cdot 2.3461 = 1.9125,$$

$$f(x_2, y^*) = 3 \cdot 1.4 - \frac{1.9125}{1.4} = 2.8524,$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1, y_1) + f(x_2, y^*)] = 1.4433 + 0.1 \cdot (2.3461 + 2.8524) = 1.9632.$$

Итоговая таблица значений

n	x_n	y^*	$f(x_n, y_n)$	y_n
0	1.0	–	2.0000	1.0000
1	1.2	1.4000	2.4333	1.4433
2	1.4	1.9125	2.8524	1.9632
3	1.6	2.5031	3.2642	2.5436
4	1.8	3.1615	3.6722	3.1983
5	2.0	–	–	3.9547

Код

```
import numpy as np
import pandas as pd

def f(x, y):
    return 3 * x - y / x

def modified_euler_method(f, x0, y0, h, x_end):
    x_values = [x0]
    y_values = [y0]

    x = x0
    y = y0

    while x < x_end:
        y_pred = y + h * f(x, y)
        x_next = x + h
        y = y + (h / 2) * (f(x, y) + f(x_next, y_pred))
        x = x_next

        x_values.append(round(x, 4))
        y_values.append(round(y, 4))

    return np.array(x_values), np.array(y_values)
```

```python

x0 = 1
y0 = 1
h = 0.2
x_end = 2

x_vals, y_vals = modified_euler_method(f, x0, y0, h, x_end)

results = pd.DataFrame({'x': x_vals, 'y (Mod. Eiler)': y_vals})
print("Results:")
print(results)
```

Вывод

При использовании модифицированного метода Эйлера приближённое значение решения в точке $x = 2$ равно $y = 3.9547$.

5 Сравнение точного решения и приближённых решений

Решение	$x = 1.2$	$x = 1.4$	$x = 1.6$	$x = 1.8$	$x = 2.0$	Абс. погрешн.	Относ. погрешн.
Точное	1.4400	1.9600	2.5600	3.2400	4.0000	-	-
Эйлер	1.4000	1.8867	2.4572	3.1100	3.8444	0.1556	3.89%
Мод. Эйлер	1.4433	1.9632	2.5436	3.1983	3.9547	0.0453	1.13%