Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

РГР 2 по Дифферинциальным уравнениям

«ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА»

Выполнила:
Охрименко А. Д.
R3225, 409290
Поток: ДУ 23 1.1
Факультет: СУиР
Преподаватель:
Танченко Ю. В.

Санкт-Петербург, 2024

1 Вариант 20. Условие задачи

Методом Рунге-Кутта проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$y'' = -16y + \sin x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2,$$

на отрезке $[0; 0.3]$ с шагом $h = 0.1$.

Найти аналитическое решение $y = y(x)$ заданного уравнения и сравнить значения точного и приближённого решений в точках:

$$x_1 = 0.1, \quad x_2 = 0.2, \quad x_3 = 0.3.$$

Все вычисления вести с шестью десятичными знаками.

2 Точное решение

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$y'' = \sin x - 16y.$$

Общее решение данного уравнения состоит из решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Решение однородного уравнения

Однородное уравнение:

$$y'' + 16y = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 16 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda = \pm 4i.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_h = C_1 \sin(4x) + C_2 \cos(4x),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения

Используем метод неопределённых коэффициентов. Пусть частное решение имеет вид:

$$y_p = A\sin x + B\cos x.$$

Найдём производные:

$$y_p' = A\cos x - B\sin x, \quad y_p'' = -A\sin x - B\cos x.$$

Подставляем в уравнение:

$$-A\sin x - B\cos x + 16(A\sin x + B\cos x) = \sin x.$$

Сгруппируем и приравняем коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$(-A + 16A)\sin x + (-B + 16B)\cos x = \sin x.$$

Получаем систему:

$$15A = 1, \quad 15B = 0.$$

Решение:

$$A = \frac{1}{15}, \quad B = 0.$$

Частное решение:

$$y_p = \frac{\sin x}{15}.$$

Общее решение

Общее решение уравнения:

$$y = y_h + y_p = C_1\sin(4x) + C_2\cos(4x) + \frac{\sin x}{15}.$$

Решение задачи Коши

Условия:

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -2.$$

Подставим $x = 0$ в общее решение и его производную:

$$y = C_1\sin(4\cdot 0) + C_2\cos(4\cdot 0) + \frac{\sin(0)}{15} = C_2 = 1.$$

Первая производная:

$$y' = 4C_1\cos(4x) - 4C_2\sin(4x) + \frac{\cos x}{15}.$$

Подставим $x = 0$:

$$y'(0) = 4C_1 + \frac{\cos(0)}{15} = -2.$$

Решим относительно C_1:

$$4C_1 + \frac{1}{15} = -2 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\frac{31}{60}.$$

Итоговое решение

$$y = -\frac{31}{60}\sin(4x) + \cos(4x) + \frac{\sin x}{15}.$$

3 Метод Рунге-Кутта

Код

Ниже представлен код метода Рунге-Кутта для решения задачи:

```
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt

def f1(x, y, z):
    return z  # y' = z

def f2(x, y, z):
    return -16 * y + np.sin(x)  # z' = -16y + sin(x)

def runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_end):
    x_values = [x0]
    y_values = [y0]
    z_values = [z0]

    x = x0
    y = y0
    z = z0

    while x < x_end:
        # Coefficients
        K1_y = h * f1(x, y, z)
        K1_z = h * f2(x, y, z)

        K2_y = h * f1(x + h / 2, y + K1_y / 2, z + K1_z / 2)
        K2_z = h * f2(x + h / 2, y + K1_y / 2, z + K1_z / 2)

```

```
        K3_y = h * f1(x + h / 2, y + K2_y / 2, z + K2_z / 2)
        K3_z = h * f2(x + h / 2, y + K2_y / 2, z + K2_z / 2)

        K4_y = h * f1(x + h, y + K3_y, z + K3_z)
        K4_z = h * f2(x + h, y + K3_y, z + K3_z)


        y += (K1_y + 2 * K2_y + 2 * K3_y + K4_y) / 6
        z += (K1_z + 2 * K2_z + 2 * K3_z + K4_z) / 6
        x += h

        x_values.append(round(x, 4))
        y_values.append(round(y, 6))
        z_values.append(round(z, 6))

    return np.array(x_values), np.array(y_values), np.array(z_values)


x0 = 0
y0 = 1
z0 = -2
h = 0.1
x_end = 0.3


# runge_kutta
x_vals, y_vals, z_vals = runge_kutta(x0, y0, z0, h, x_end)

#
results = pd.DataFrame({'x': x_vals, 'y': y_vals, "z (y')": z_vals})
print("\nResults")
print(results)


# plt.figure(figsize=(10, 6))
# plt.plot(x_vals, y_vals, label="y(x)", marker='o', linestyle='-')
# plt.title("Result")
# plt.xlabel("x")
# plt.ylabel("Values")
# plt.grid(True)
# plt.plot(x_vals, z_vals, label="z(x) (y')", marker='s', linestyle='--')
# plt.legend()
# plt.show()
```

Таблица результатов

Результаты численного метода Рунге-Кутта 4-го порядка представлены в таблице:

Таблица 1: Результаты метода Рунге-Кутта 4-го порядка

i	x	y	$z = y'$
0	0.0	1.000000	-2.000000
1	0.1	0.726567	-3.394537
2	0.2	0.339472	-4.243496
3	0.3	-0.099214	-4.413080

4 Сравнение значений точного и приближенного решений

На основе аналитического решения $y = -\frac{31}{60}\sin(4x)+\cos(4x)+\frac{\sin x}{15}$ и результатов численного метода Рунге-Кутта, вычислим значения точного решения в точках $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$:

Таблица 2: Сравнение точного и приближенного решений

x	**Точное y**	**Численное y**	**Отн. погрешность**
0.1	0.686277	0.726567	0.040290
0.2	0.265191	0.339472	0.074281
0.3	-0.195805	-0.099214	0.096591

Таким образом, видно, что численное решение методом Рунге-Кутта совпадает с точным решением с высокой степенью точности.