Лабораторная работа 1: Градиентный спуск

Одномерная оптимизация нулевого порядка

1. Реализуйте методы оптимизации нулевого порядка:
   - Метод золотого сечения;
   - Метод парабол, с явной формулой и с помощью встроенного солвера линейных уравнений (например, numpy.linalge.solve). Явная формула имеет следующий вид для $x_1 < x_2 < x_3$:
   $$u = x_2 - \frac{(x_2 - x_1)^2(f(x_2) - f(x_3)) - (x_2 - x_3)^2(f(x_2) - f(x_1))}{2((x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_3)) - (x_2 - x_3)(f(x_2) - f(x_1))};$$
   - Метод Брента.
2. Протестируйте реализованные алгоритмы на следующих оптимизационных задачах:
   1. $f(x) = -5x^5 + 4x^4 - 12x^3 + 11x^2 - 2x + 1$ на $[-0.5, 0.5]$.
   2. $f(x) = -\ln^2(x - 2) + \ln^2(10 - x) - x^{0.2}$ на $[6, 9.9]$.
   3. $f(x) = -3x\sin(0.75x) + e^{-2x}$ на $[0, 2\pi]$.
   4. $f(x) = e^{3x} + 5e^{-2x}$ на $[0, 1]$.
   5. $f(x) = 0.2x\ln x + (x - 2.3)^2$ на $[0.5, 2.5]$.
3. Постройте графики сходимости методов (ось ординат логарифмическая – ошибка, ось абсцисс - количество итераций, можно методы на одном рисунке). На основе графиков охарактеризуйте скорость сходимости каждого из методов. Покажите, что при большой точности метод парабол, запрограммированный с явной формулой для u ведет себя хуже, чем с линейным солвером.
4. Для каждой функции используйте встроенный оптимизатор: (Например, scipy.optimize.minimize_scalar поддерживает все три метода). Изобразите график сходимости вместе с графиками остальных методов.
5. Протестируйте реализованные алгоритмы на мультимодальных функциях (придумайте самостоятельно 2-3 штуки). Нарисуйте график, начальное приближение, объясните сходимость (или расходимость) к локальному минимуму.

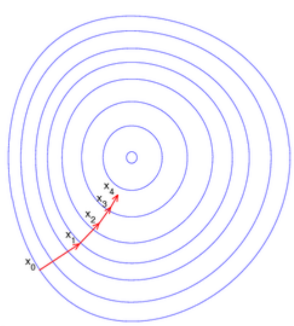
Градиентный спуск

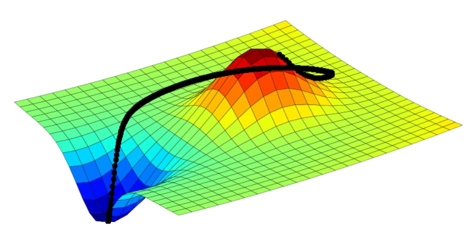
1. Реализуйте метод градиентного спуска $x_{k+1} = x_k - \alpha \nabla f(x_k)$, поддерживающий следующие стратегии:

    - Постоянный коэффициент $\alpha_k = \text{const} \ \ \forall k$;
    - Поиск $\beta > 0$ для минимума $f\left(x_k - \beta \dfrac{\nabla f(x_k)}{||\nabla f(x_k)||}\right)$, $\alpha_k = \dfrac{\beta}{||\nabla f(x_k)||}$. Для этого используйте реализованные вами в предыдущем разделе методы;
    - Адаптивный стратегия для константы Липшица, $\alpha_k = \dfrac{1}{L_k}$;
    - Стратегия Армихо-Вульфа с процедурой backtracking.

2. Примените метод для произвольной функции вида $f(x) = x^T A x + b^T x$, где $x \in \mathbb{R}^2$, $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ - положительно определенная матрица, $b \in \mathbb{R}^2$ - матрица коэффициентов. Выберите несколько начальных приближений.

    - Построить график функции;
    - Примените градиент спуск со стратегией постоянного коэффициента. Выберите $\alpha = \dfrac{1}{L}$ найденный аналитически. Найдите μ, сравните скорость сходимости с аналитической оценкой. Выберите несколько отличных значений, сравните между скорость сходимости, сделайте вывод о типе сходимости.
    - Примените остальные стратегии. Постройте графики скорости сходимости для всех стратегий, сравните между собой.
    - Для каждой стратегии приведите двумерную картинку, показывающую линии уровня функции и последовательность x_k. Альтерантивно, можно построить трехмерную картинку, показывающую ход спуска. (см. картинки)





3. Возьмите функцию Розенброка $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$.

    - Проведите аналитическое исследование на липшицевость градиента.
    - Проведите исследование на выпуклость/сильную выпуклость.
    - Примените метод градиентного спуска с несколькими произвольными начальными приближениями, со всеми стратегиями, сделайте выводы о сходимости, постройте графики, подкрепляющие графики.

Построение траектории

Представьте, что вы робот, и вам нужно придумать траекторию из точка A в точку B. Но на вашем пути возникают препятствия. Предлагается строить траекторию, придумав некоторый потенциал $F(x, y)$. Условия следующие:

- $F(x_B, y_B)$ - единственная точка локального минимума;
- Все препятствия должны находиться в близости от локального максимума F;

Построить такую функцию можно, взяв, например, линейную комбинацию из квадратичной функции с нулём в (x_B, y_B) и нескольких гауссовых колоколов, с вершиной в центре (x_p, y_p) препятствия соответсвующей ширины.

$$F(x, y) = a((x - x_B)^2 + (y - y_B)^2) + b \exp\left(-\frac{(x - x_p)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(y - y_p)^2}{2\sigma_2^2}\right) + \dots$$

Остается применить градиентный спуск с начальным приближением (x_A, y_A). Полученная последовательность точек может стать кусочно-линейной траекторией.

- Постройте потенциал с несколькими препятствиями. Вы можете взять предлженный шаблон функции, а можете придумать свой.
- Постройте график потенциала;
- Примените метод градиентного спуска со стратегией по вашему выбору.
- Постройте траекторию, объясните её поведение (может быть, она не сошлась?)

Отчет

Отчет должен состоять из:

1. Кода для каждого из разделов;
2. Предложенных к построению графиков;
3. Аналитических выкладок;
4. Выводов к каждому разделу.