

# Лабораторная работа №2

## Задание 1

Представлено в пяти вариантах. Везде требуется найти оценку указанным методом, смещение, дисперсию, среднеквадратическую ошибку и указать свойства оценок. Также провести эксперимент при указанных параметрах по следующей схеме:

1. Задайте массив объемов выборки
2. Для каждого объема выборки  $n$  сгенерируйте  $m$  выборок из вашего распределения и для каждой сгенерированной выборки посчитайте оценку параметра согласно полученной формуле
3. Обработайте результаты (посчитайте выборочные характеристики для разницы между оценкой и реальным параметром для каждого объема выборки, количество выборок, для которых оценка отличается от реального параметра более чем на заданный вами порог и т.п.), визуализируйте результат.

Сами варианты:

1. Методом моментов найти оценку параметра  $\theta$  равномерного распределения на  $[-\theta, \theta]$ . Эксперимент при  $\theta = 10$ . **Подсказка:** в зависимости от выбранной функции  $g(x)$  можно оценить не  $\theta$ , а  $\theta^2$  (и написать выкладки относительно оцениваемой функции  $\theta^2$ ).
2. Методом моментов найти оценку квадрата масштабирующего параметра  $\theta$  распределения Лапласа (сдвиг считать нулевым). Эксперимент при  $\theta = 0.5$ . **Указание:** для плотности используйте параметризацию  $f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta} \exp\{-\frac{|x|}{\theta}\}$ .
3. Методом максимального правдоподобия найти оценку параметра  $\theta$  биномиального распределения  $\text{Bin}(m, \theta)$ , считая  $m$  известным. Эксперимент при  $m = 4$ ,  $\theta = 1/5$ .
4. Найти оценку максимального правдоподобия параметра  $\theta$  для распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\theta - x^3)^2}{2}\right).$$

Эксперимент при  $\theta = 5$ . **Подсказка:** здесь распределение не стандартное, так что имеет смысл генерировать величины по схеме  $X = F^{-1}(Y)$ , где  $U \sim U[0, 1]$ ,  $F^{-1}$  – обратная к функции распределения (в данном случае она выражается через квантильную функцию стандартного нормального закона и арифметические операции).

5. С помощью метода моментов найти оценку параметра  $\theta$  распределения с плотностью

$$f_\theta(x) = \frac{1}{(k-1)!\theta^k} x^{k-1} e^{-x/\theta} \mathbf{1}(x > 0),$$

если  $k \in \mathbb{N}$  – известный параметр. Эксперимент при  $\theta = 2$ ,  $k = 3$ .

## Задание 2

Найдите байесовскую оценку параметра  $\theta$  (относительно среднеквадратической ошибки). Проведите эксперимент по схожей схеме, что и в предыдущей задаче.

Сами варианты (сначала указывается семейство распределений для выборки, затем – априорное распределение параметра, в конце – значения параметров для эксперимента):

1.  $\mathcal{N}(\theta, b^2)$ ;  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ;  $\mu = 0$ ,  $b = \sigma = 1$ .

2.  $\text{Pois}(\theta); \Gamma(k, \lambda), \lambda > 0, k \in \mathbb{N}$  (при решении явно указывайте используемую параметризацию);  $\alpha = k = 1$ .
3.  $\text{Geom}(\theta); \text{Be}(a, b), a, b > 0; a = b = 1$ .
4.  $\text{Exp}(\theta); \Gamma(k, \lambda), \lambda > 0, k \in \mathbb{N}$  (при решении явно указывайте используемую параметризацию);  $k = \lambda = 1$ .