Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

ОТЧЕТ
О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №3

По дисциплине «Частотные методы»
на тему: «Жесткая фильтрация»

Студент:
Охрименко Ева

Преподаватели:
Догадин Егор Витальевич
Пашенко Артем Витальевич

г. Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Task. Жесткие фильтры

1.1 Краткое условие

Рассмотрите функцию $g(t)$, заданную как:

$$g(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_1, t_2], \\ 0, & t \notin [t_1, t_2], \end{cases}$$

и её зашумлённую версию:

$$u(t) = g(t) + b\xi(t) + c\sin(dt),$$

где $\xi(t) \sim U[-1, 1]$ — белый шум, а b, c, d — параметры.

- При $c = 0$ найдите Фурье-образ $u(t)$, обнулите его вне $[-\nu_0, \nu_0]$ и выполните обратное преобразование. Исследуйте влияние ν_0 и b.
- При ненулевых b, c, d обнулите Фурье-образ на выбранных частотах, подавляя шум и гармонику. Исследуйте влияние параметров.
- бнулите Фурье-образ в окрестности $\nu = 0$, пропустите сигнал через фильтр и оцените результат.

Ожидаемые результаты:
Графики исходного, зашумлённого и фильтрованного сигналов, а также их Фурье-образов. Выводы по каждому пункту.

1.2 Убираем высокие частоты

1.2.1 Предподготовка

Для начала выберу все нужные параметры для этого задания:

$$a = 4, t_0 = 0, t_1 = 3, c = 0, d = 5$$

Тогда у меня получится прямоугольная функция:

$$g(t) = \begin{cases} 4, & t \in [0, 3], \\ 0, & t \notin [0, 3], \end{cases}$$

Теперь посмотрим, какая функция белого шума получилась:

$$u(t) = g(t) + 0.5\xi(t) + 0\sin(dt),$$

где $\xi(t) \sim U[-1, 1]$ — равномерное распределение на интервале $[-1, 1]$.

Слагаемое с синусом отсутствует, поэтому колебаний у шума также не будет.

Теперь посмотрим на график функций $g(t)$ и $u(t)$:

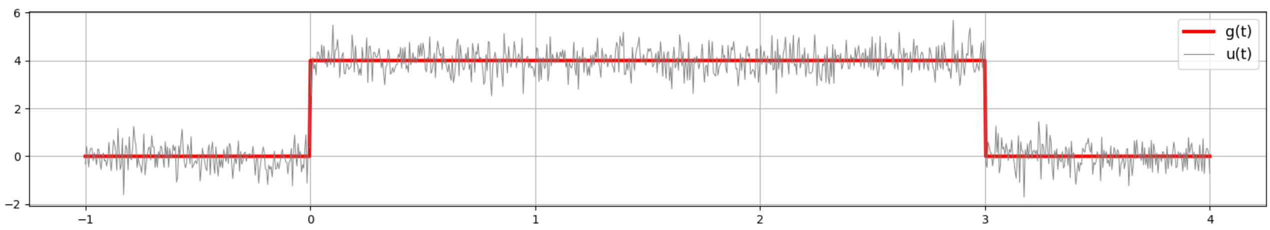

Рис. 1: График $g(t)$ и $u(t)$

Дальше в задании нужно найти фурье-образ $u(t)$, обнулить его значение на диапазоне $[-\nu_0, \nu_0]$ и восстановить сигнал с помощью обратного преобразования фурье.

1.2.2 Фиксирую b

Для начала выберем значения $\nu_0 = 0.5$ и $b = 0.5$. Теперь посмотрим на график получившегося отфильтрованного сигнала при этих значениях. Также я приведу графики модулей фурье образов сигнала $g(t)$, зашумленного сигнала $u(t)$ и отфильтрованного сигнала.

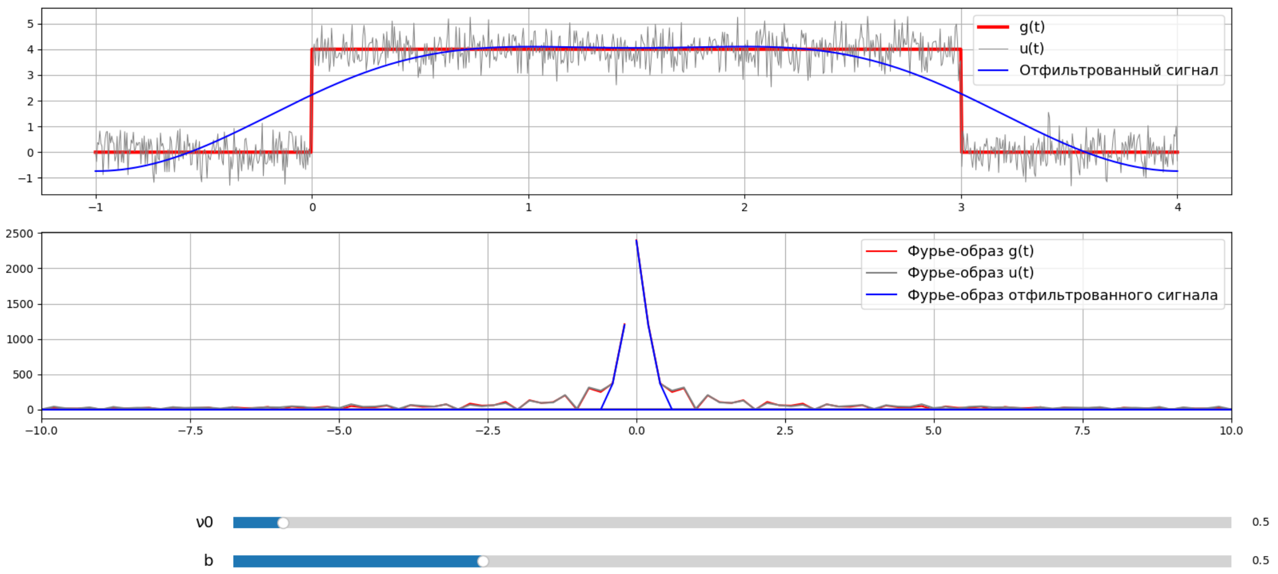

Рис. 2: Графики при $\nu_0 = 0.5$ и $b = 0.5$

Внизу можно заметить 2 бегунка, с помощью которых можно менять параметры. В этой части задания я зафиксирую параметр $b = 0.5$ и буду исследовать влияние на поведение функций параметра ν_0. Выберу несколько $\nu_0 = \{1, 1.5, 3, 10\}$ и отрисую графики:

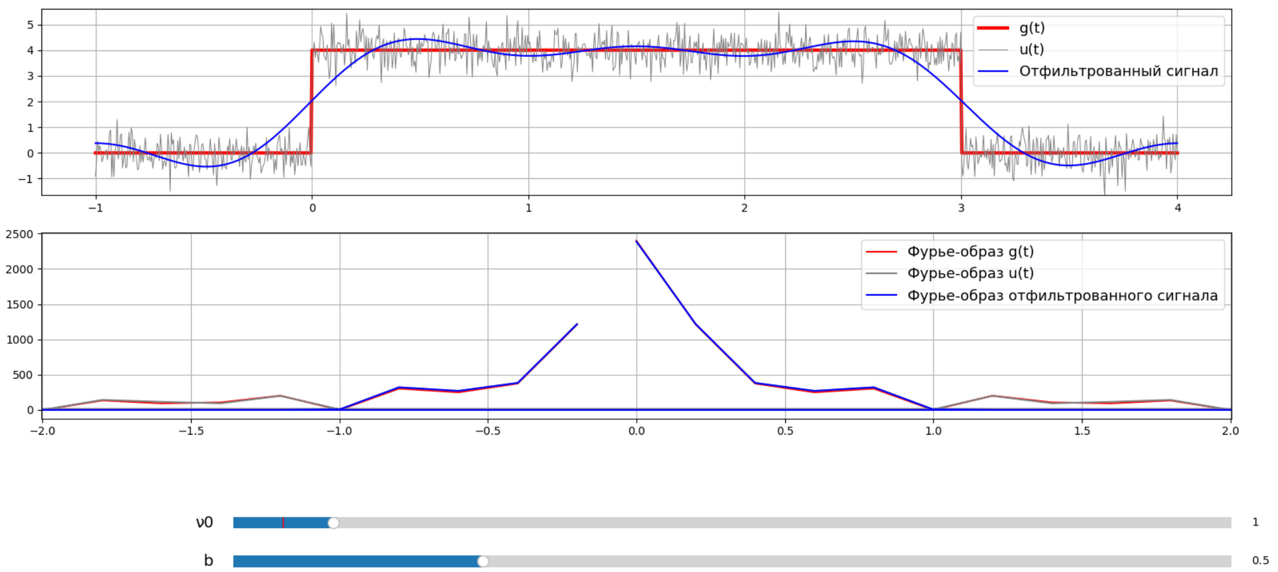

Рис. 3: Графики при $\nu_0 = 1$ и $b = 0.5$

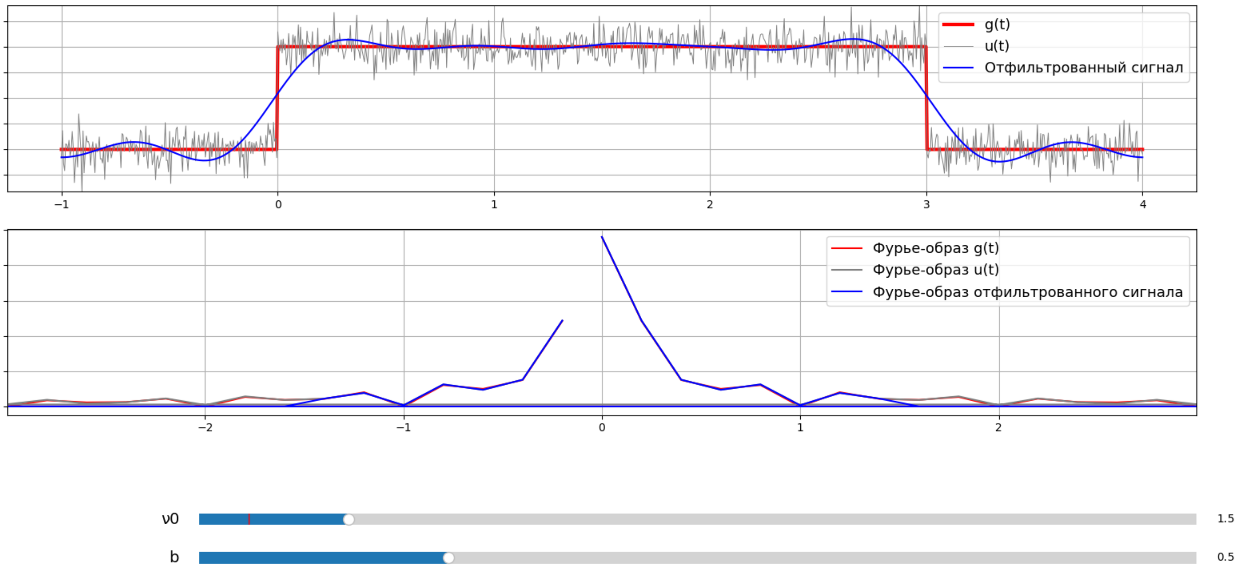

Рис. 4: Графики при $\nu_0 = 1.5$ и $b = 0.5$

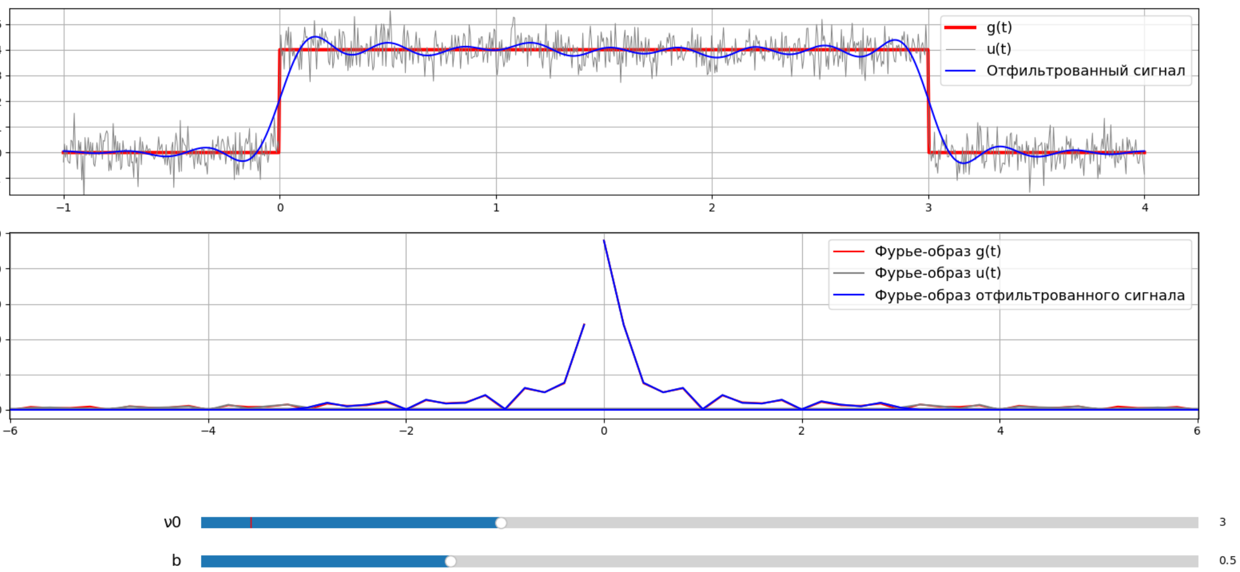

Рис. 5: Графики при $\nu_0 = 3$ и $b = 0.5$

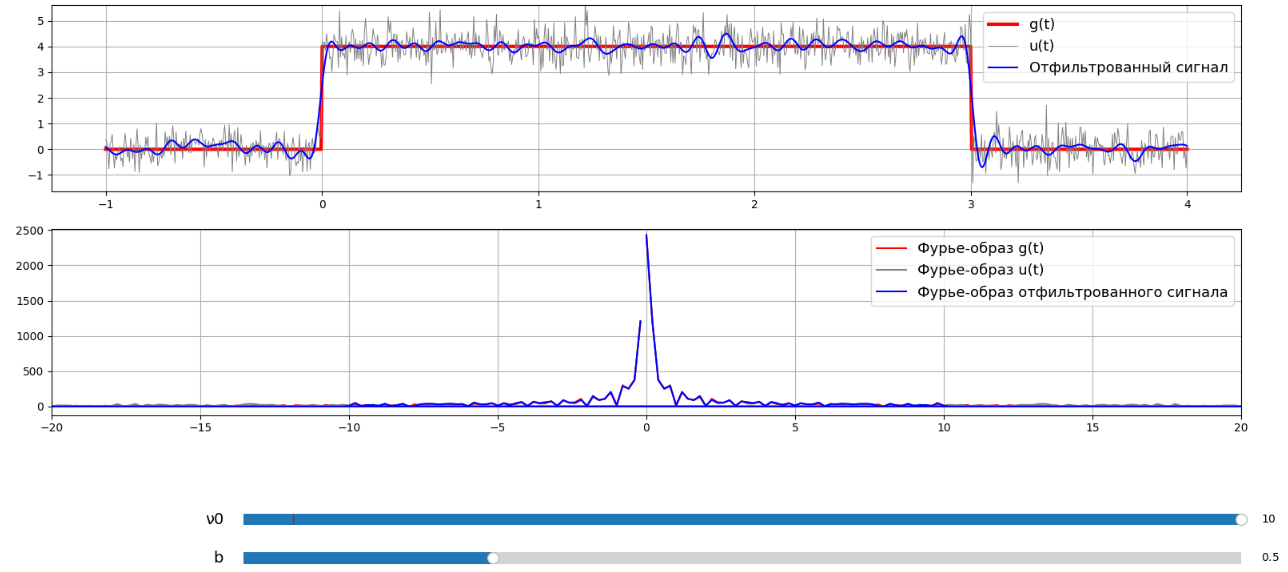

Рис. 6: Графики при $\nu_0 = 10$ и $b = 0.5$

1.2.3 Вывод

- С увеличением ν_0 изменялось количество колебаний отфильтрованного сигнала. Число гармоник увеличивалось, однако при большем значении ν_0 не всегда удавалось получить хорошо отфильтрованный сигнал. Наиболее удачным оказался график при параметрах $\nu_0 = 3$ и $b = 0.5$. На этом графике форма отфильтрованного сигнала практически идеально совпадает с исходной, а шум удалён наиболее эффективно.

- Можно заметить, что графики модулей Фурье-образов отфильтрованного сигнала и шума совпадают при всех выбранных значениях ν_0. Теперь обратим внимание на синюю линию — модуль Фурье-образа. С увеличением ν_0 синий график постепенно начинает совпадать с остальными, практически полностью повторяя их форму. Это означает, что при увеличении частоты среза ν_0 фильтр пропускает больше частот, что приводит к лучшему сохранению формы сигнала.

1.2.4 Фиксирую ν_0

Для этого задания выберу несколько значений $b = \{0, 0.5, 1, 2\}$, чтобы исследовать поведение графиков при фиксированном значении $\nu_0 = 3$. Это значение было выбрано, поскольку ранее мне показалось, что при этом значении сигнал хорошо фильтруется. Ниже рассмотрим эти графики:

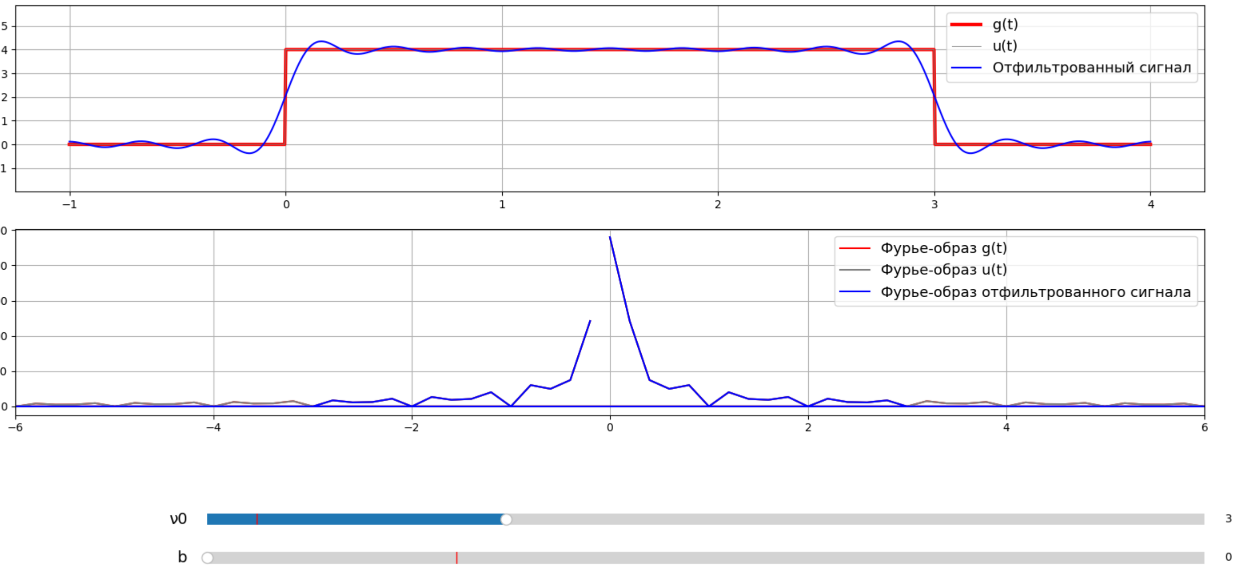

Рис. 7: Графики при $\nu_0 = 3$ и $b = 0$

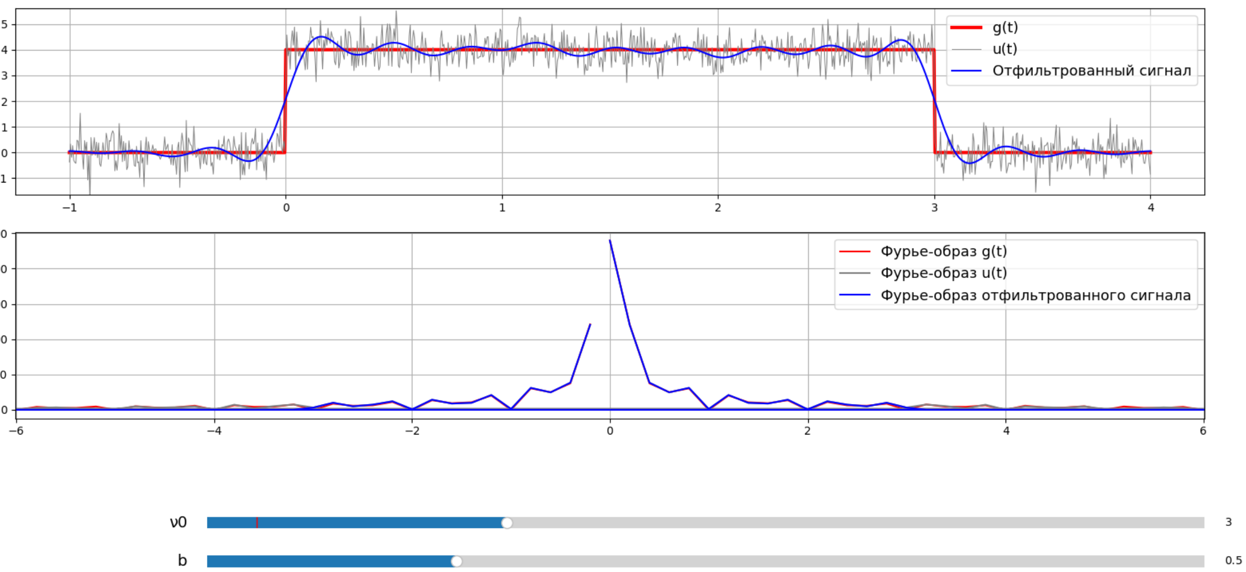

Рис. 8: Графики при $\nu_0 = 3$ и $b = 0.5$

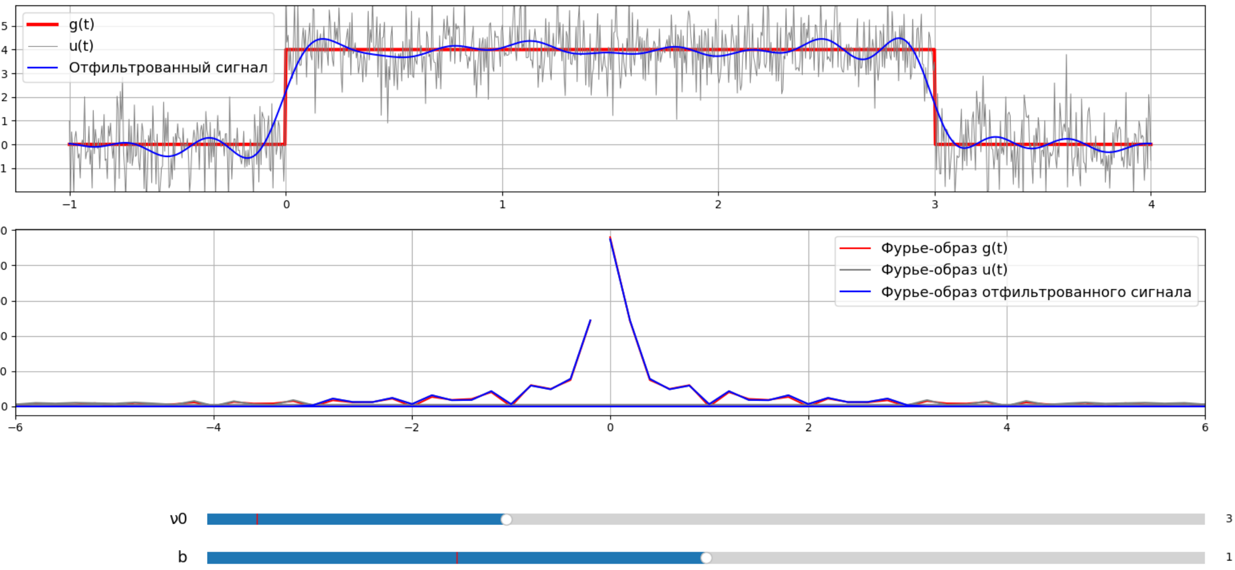

Рис. 9: Графики при $\nu_0 = 3$ и $b = 1$

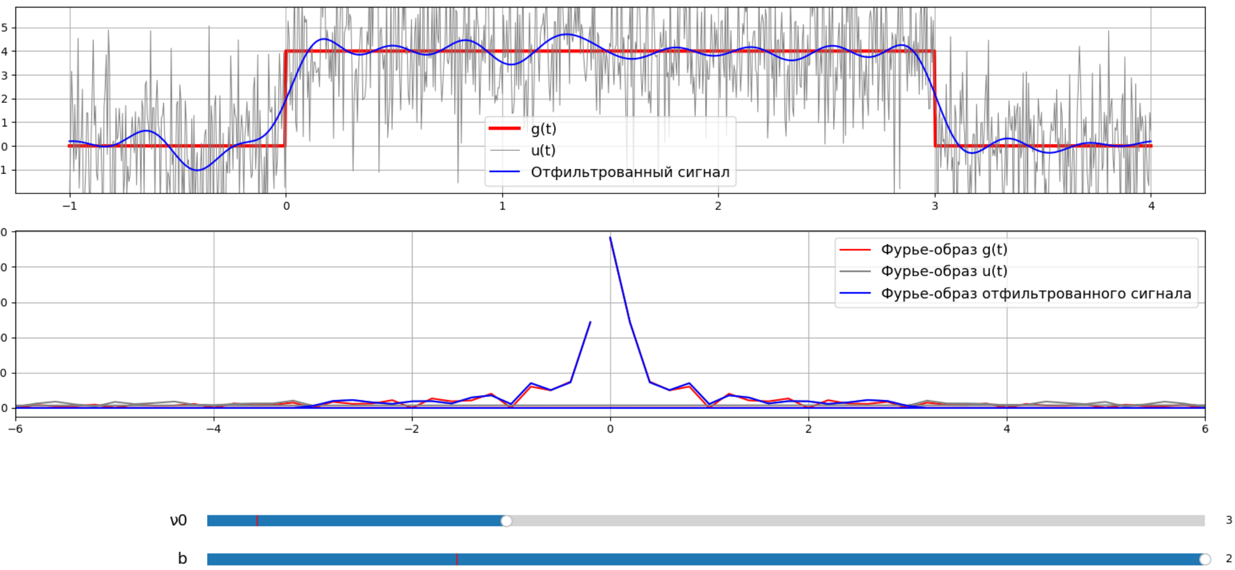

Рис. 10: Графики при $\nu_0 = 3$ и $b = 2$

1.2.5 Вывод

- При увеличении b увеличивается шум, а также растет амплитуда колебаний синего графика. То есть чем больше шум, тем больше помех в отфильтрованном сигнале . Идеальным графиком будет первый, поскольку шума совсем нет, соответственно мы фактически фильтруем не зашумленный сигнал, а идеальный.

- Спектр отфильтрованного сигнала близок к спектру $g(t)$, но остаются небольшие шумовые компоненты. Различия между модулями фурье-образов слабо заметны при моих параметрах b.

1.3 Убираем специфические частоты

1.3.1 Предподготовка

Для этого задания выберу параметры функций:

$$a = 4, t_0 = 0, t_1 = 3, c = 1, d = 2$$

Значение частоты я выберу $\nu_0 = 0.5$. Стоит указать, что это только начальные значения и в ходе этого задания я буду их менять, чтобы посмотреть, как это отображается на графике.

У меня получатся следующие функции:

$$g(t) = \begin{cases} 4, & t \in [0, 3], \\ 0, & t \notin [0, 3], \end{cases}$$

$$u(t) = g(t) + 0.5\xi(t) + \sin(2t),$$

где $\xi(t) \sim U[-1, 1]$ — равномерное распределение на интервале $[-1, 1]$.

Отрисую график для выбранных значений:

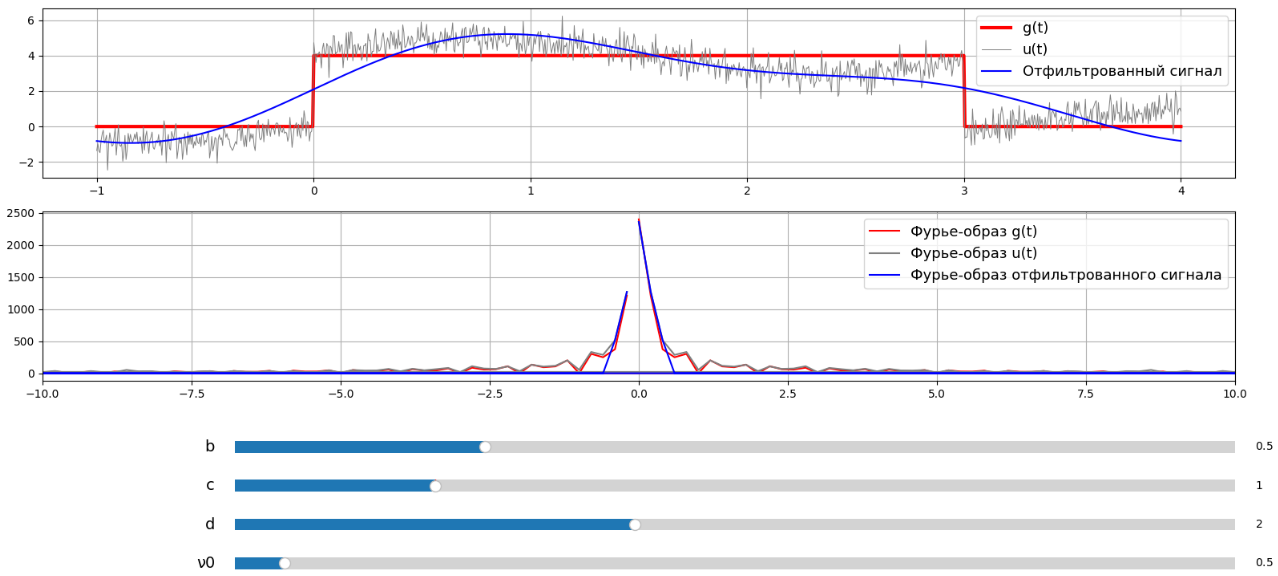

Рис. 11: Графики при $b = 0.5$, $c = 1$, $d = 1$ и $\nu_0 = 3$

В отличие от предыдущего пункта можно заметить, что шум пошел по синусоиде.

В этом задании нужно сделать совмещенный фильтр - он убирает не только низкие частоты, но и гармонические колебания. Алгоритм задания такой же, как и описыватся в пункте 1.1.1.

Также отмечу, что, поскольку нужно исследовать довольно много меняющихся параметров в этом задании, я приведу несколько показательных случаев в следующих пунктах и отражу влияние компонент в выводе.

1.3.2 Случай, когда $b = 0$

Отдельно рассмотрю случай, когда $b = 0$. Вот несколько графиков

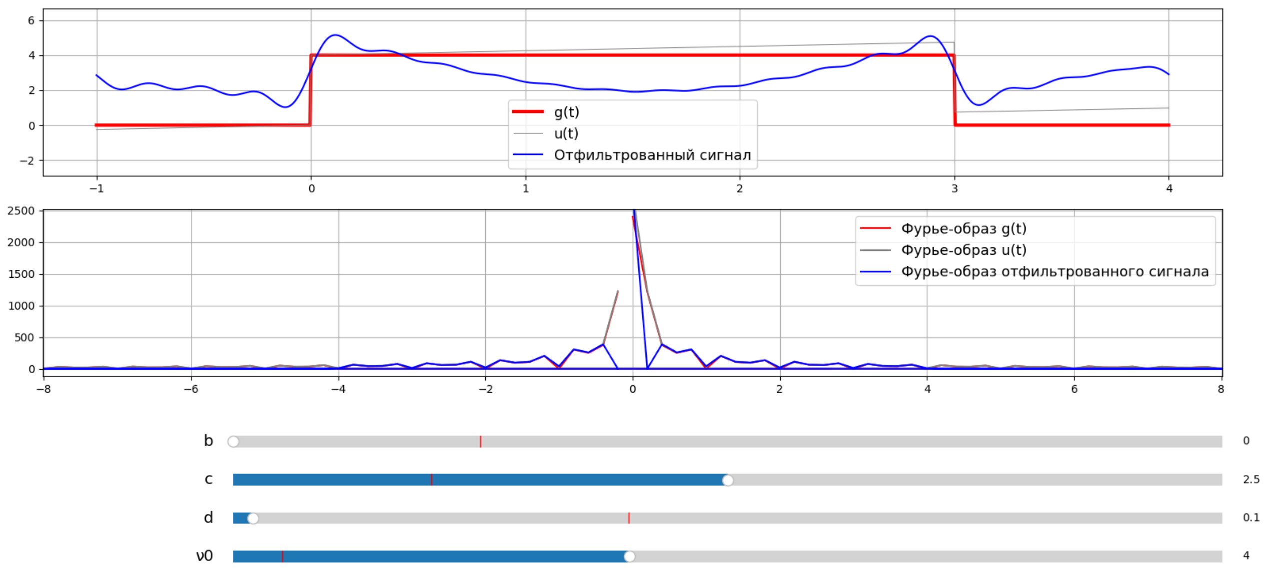

Рис. 12: Графики при $b = 0$, $c = 2.5$, $d = 0.1$ и $\nu_0 = 4$

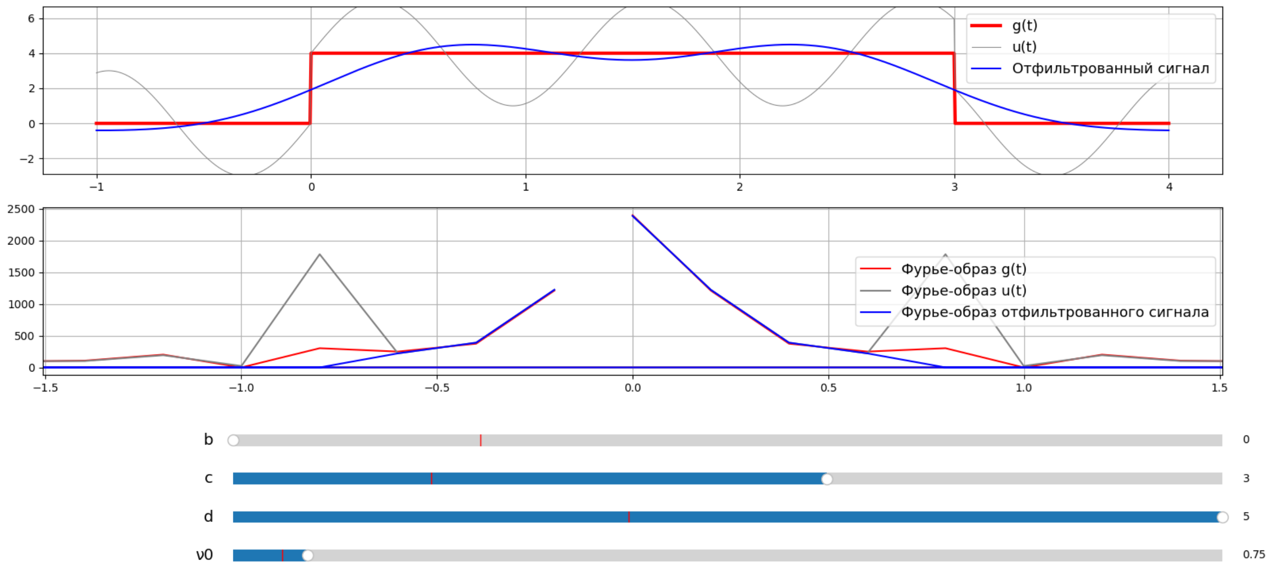

Рис. 13: Графики при $b = 0$, $c = 3$, $d = 5$ и $\nu_0 = 0.75$

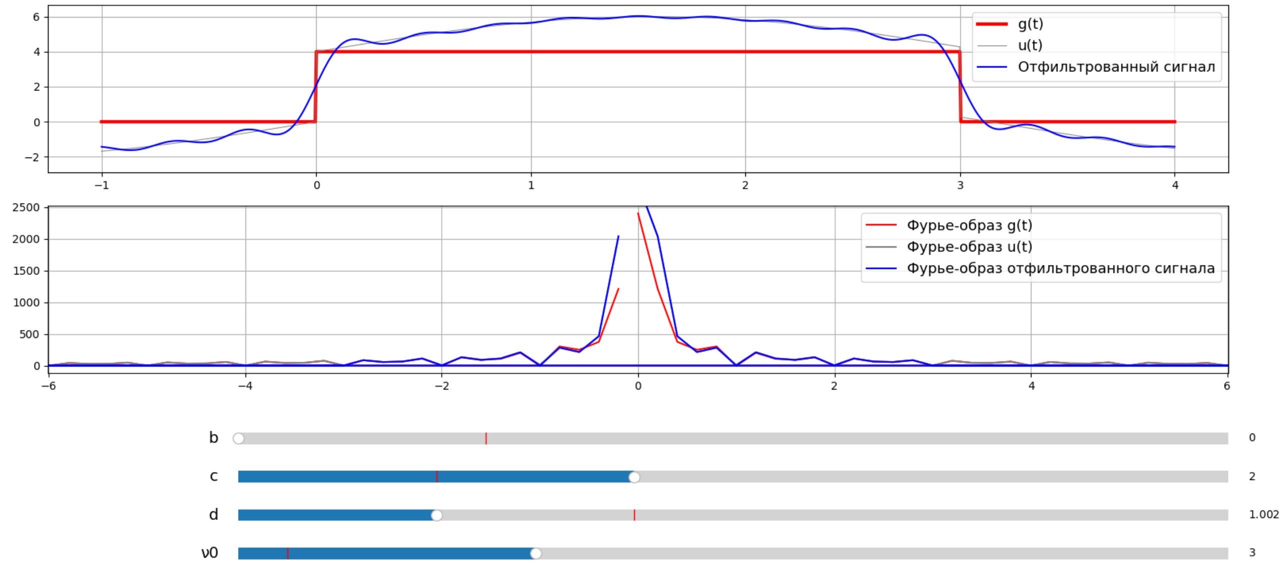

Рис. 14: Графики при $b = 0$, $c = 2$, $d \approx 1$ и $\nu_0 = 3$

1.3.3 Остальные случаи

Приведу графики, когда $b \neq 0$:

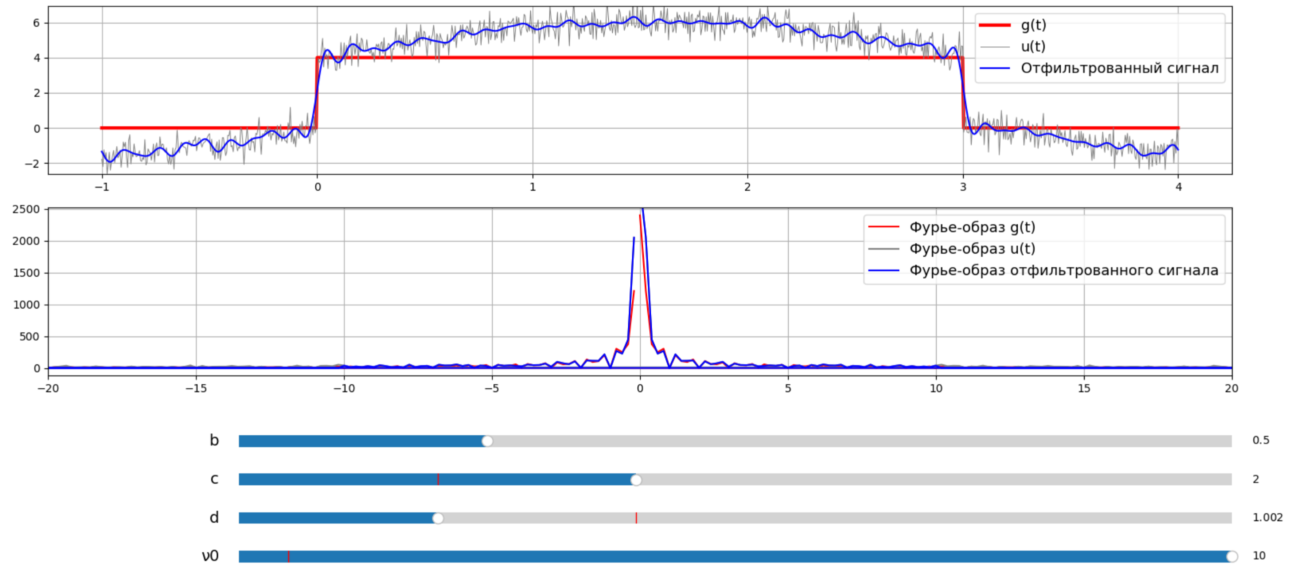

Рис. 15: Графики при $b = 2$, $c = 0.75$, $d \approx 5$ и $\nu_0 = 1$

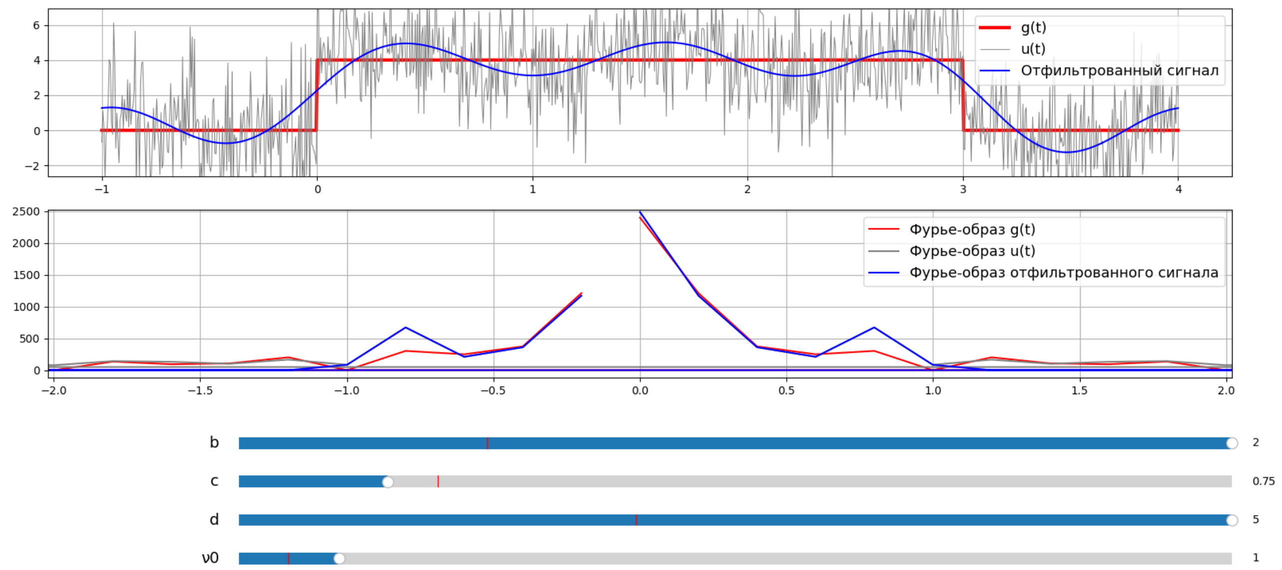

Рис. 16: Графики при $b = 0$, $c = 3$, $d = 5$ и $\nu_0 = 0.75$

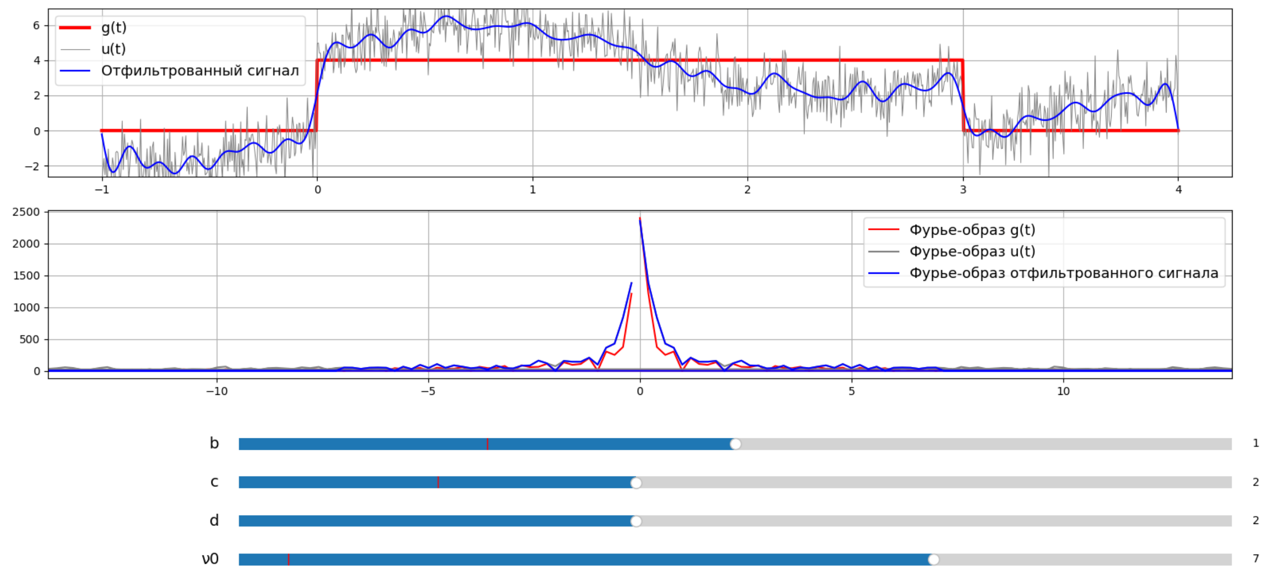

Рис. 17: Графики при $b = 1$, $c = 2$, $d = 2$ и $\nu_0 = 7$

1.3.4 Выводы по пунктам 1.3.2 и 1.3.3

Много раз поменяв параметры b, c, d и ν_0, я пришла к следующим выводам:

- Параметр b: Чем больше значение b, тем больше шума накладывается на сигнал. Это связано с тем, что b определяет амплитуду шума.

- Параметр c: Увеличение c приводит к увеличению амплитуды колебаний зашумлённой функции. Также c влияет на количество колебаний шума, делая их более частыми или редкими.

- Параметр d: Увеличение d приводит к увеличению частоты гармонической составляющей шума, что делает колебания более частыми.

- Параметр ν_0: Чем больше частота среза ν_0, тем больше колебаний сохраняется в отфильтрованном сигнале. Это связано с тем, что фильтр пропускает больше высокочастотных компонент.

На графиках заметно, что совмещенный фильтр эффективно работает при присутствии колебаний в зашумленной функциии.

1.4 Убираем низкие частоты?

2 Task. Фильтрация звука

2.1 Краткое условие