

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»  
(УНИВЕРСИТЕТ ИТМО)

Факультет «Систем управления и робототехники»

## ОТЧЕТ О ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ №2

По дисциплине «Частотные методы»  
на тему: «Преобразования фурье»

Студент:  
Охрименко Ева

Преподаватели:  
Догадин Егор Витальевич  
Пашенко Артем Витальевич

г. Санкт-Петербург  
2025

# Содержание

<b>1</b>	<b>Вещественное задание</b>	<b>2</b>
1.1	Краткое условие	2
1.2	Прямоугольная функция	2
1.2.1	Аналитика	2
1.2.2	Код	3
1.2.3	Вывод	3
1.3	Треугольная функция	4
1.3.1	Аналитика	4
1.3.2	Код	5
1.3.3	Вывод	6
1.4	Кардинальный синус	7
1.4.1	Аналитика	7
1.4.2	Код	7
1.4.3	Вывод	8
1.5	Функция Гаусса	9
1.5.1	Аналитика	9
1.5.2	Код	9
1.5.3	Вывод	10
1.6	Двустороннее затухание	11
1.6.1	Аналитика	11
1.6.2	Код	12
1.6.3	Вывод	12
<b>2</b>	<b>Комплексное задание</b>	<b>14</b>
2.1	Краткое условие	14
2.2	Аналитика	14
2.3	Код	15
2.4	Вывод	15
<b>3</b>	<b>Музыкальное задание</b>	<b>17</b>
3.1	Краткое условие	17
3.2	Код	17
3.3	Вывод	18
<b>4</b>	<b>Примечания</b>	<b>19</b>

# 1 Вещественное задание

## 1.1 Краткое условие

Для каждой из функций  $f(t)$  провести исследование её Фурье-образа  $\hat{f}(\omega)$ :

- Привести аналитические выражения для  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$ .
  - Для прямоугольной, треугольной и двустороннего затухания функций — с выкладками.
  - Для кардинального синуса и функции Гаусса — только результат.
- Выбрать три набора значений  $a, b > 0$ .
- Построить графики  $f(t)$  и  $\hat{f}(\omega)$  для выбранных параметров.
- Проверить равенство Парсеваля.
- Сделать выводы о влиянии параметров  $a$  и  $b$ .

## 1.2 Прямоугольная функция

### 1.2.1 Аналитика

Исходная функция:

$$f(t) = \begin{cases} a, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Фурье-образ вычисляется по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b a e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega} \right]_{-b}^b = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-i\omega b} - e^{i\omega b}}{-i\omega} = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{-2i \sin(\omega b)}{-i\omega} = \frac{2a \sin(\omega b)}{\omega \sqrt{2\pi}}.$$

Таким образом, Фурье-образ прямоугольной функции:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2a \sin(\omega b)}{\omega \sqrt{2\pi}}.$$

Для параметров  $(a, b) = (1, 1)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(\omega)}{\omega}.$$

Для параметров  $(a, b) = (2, 2)$ :

$$\hat{f}(\omega) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(2\omega)}{\omega}.$$

Для параметров  $(a, b) = (5, 4)$ :

$$\hat{f}(\omega) = 5\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\sin(4\omega)}{\omega}.$$

### 1.2.2 Код

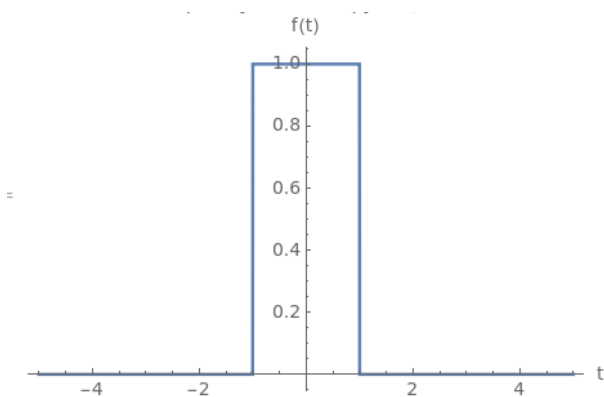
```
1 f[t_, a_, b_] := Piecewise[{{a, Abs[t] <= b}, {0, Abs[t] > b}}]
2
3 a=1;
4 b=1;
5
6 fourier=FourierTransform[f[t, a, b], t, w]
7
8 Plot[f[t, a, b], {t, -5, 5}, PlotRange->All, PlotStyle->Thick, AxesLabel->{"t", "f(t)"}
9   }, PlotLabel->"Прямоугольная функция", Exclusions->None]
10
11 Plot[Re[fourier], {w, -10, 10}, PlotRange->All, PlotStyle->Thick, AxesLabel->{"\[
12   Omega]", "F\[Omega]"}, PlotLabel->"Фурьеобраз - прямоугольной функции"]
13
14 energyTimeDomain = Integrate[Abs[f[t, a, b]]^2, {t, -Infinity, Infinity}];
15
16 energyFrequencyDomain = Integrate[Abs[fourier]^2, {w, -Infinity, Infinity}];
17
18 Print["\Проверка равенства Парсеваля: "]
19 Print["\[Integral]|f(t)|^2 dt = ", energyTimeDomain]
20 Print["\[Integral]|F\[Omega]|^2 d\[Omega] = ", energyFrequencyDomain]
21 Print["Результат: ", energyTimeDomain == energyFrequencyDomain]
```

Листинг 1: Фурье-образ прямоугольной функции и проверка равенства Парсеваля

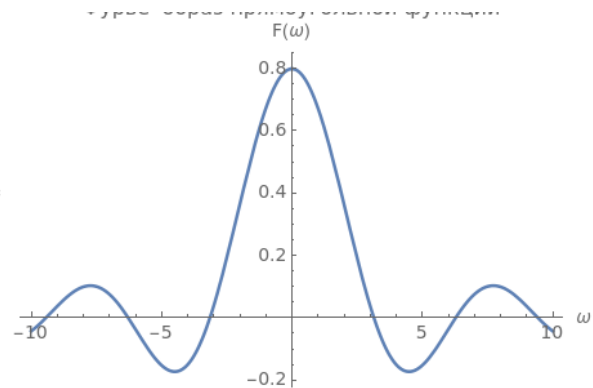
Этот код определяет прямоугольную функцию, вычисляет её Фурье-образ, строит графики и проверяет равенство Парсеваля.

### 1.2.3 Вывод

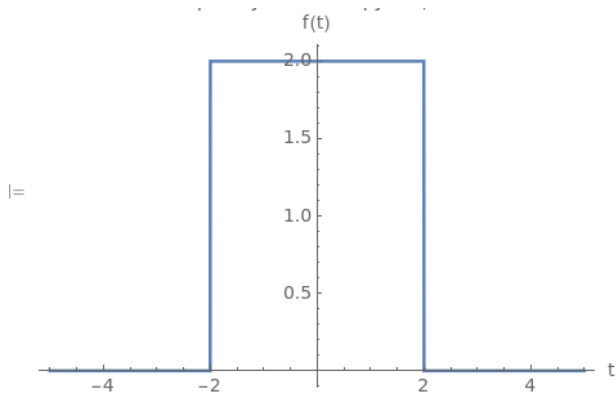
Теперь посмотрим на вывод кода. Я построю графики прямоугольной функции и Фурье-образа для выбранных значений.



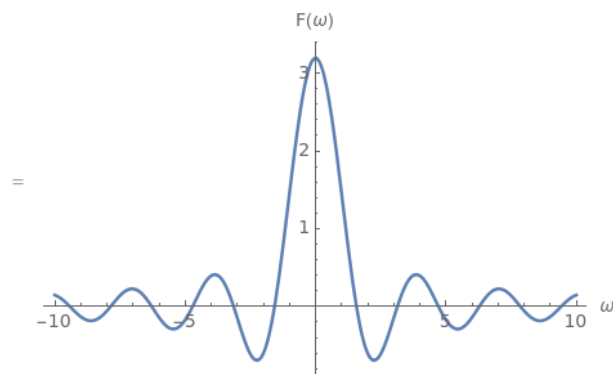
$f(t)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



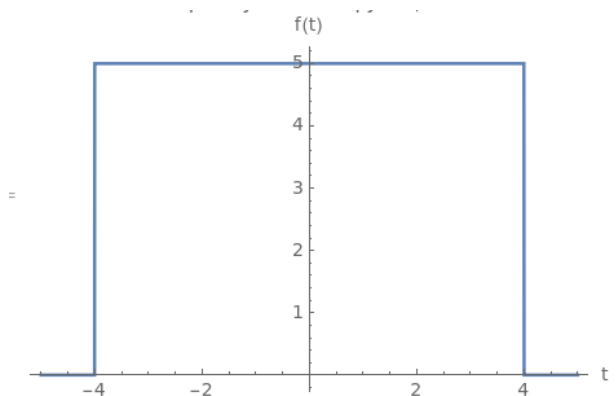
$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



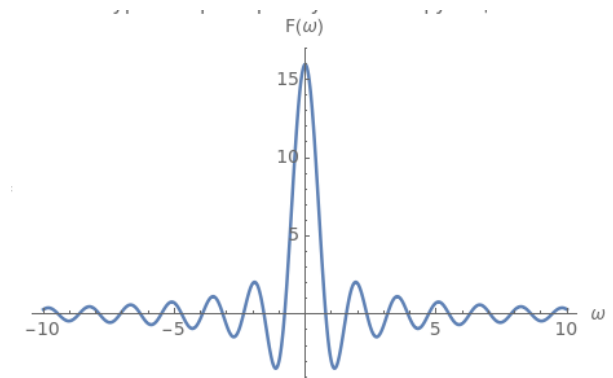
$f(t)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$f(t)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .

Параметры  $a$  и  $b$  определяют форму прямоугольной функции и её Фурье-образ. В исходной функции  $b$  задаёт длину прямоугольника, а  $a$  — его высоту. При увеличении  $a$  амплитуда Фурье-образа возрастает, так как преобразование Фурье линейно, и умножение функции на константу  $a$  приводит к пропорциональному увеличению её Фурье-образа.

При увеличении  $b$  прямоугольник становится длиннее, что приводит к более "частым" и "узким" колебаниям в Фурье-образе. Это происходит из-за того, что преобразование Фурье сохраняет энергию сигнала, и увеличение ширины прямоугольника во временной области вызывает сжатие его спектра в частотной области..

Также в моем коде присутствует проверка равенства Парсераля. Для любых  $(a, b)$  проверка вернула *True* следовательно равенство выполнено.

Проверка равенства Парсераля:

$$\int |f(t)|^2 dt = 2$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = 2$$

Результат: True

$$(a, b) = (1, 1)$$

Проверка равенства Парсераля:

$$\int |f(t)|^2 dt = 16$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = 16$$

Результат: True

$$(a, b) = (2, 2)$$

Проверка равенства Парсераля:

$$\int |f(t)|^2 dt = 200$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = 200$$

Результат: True

$$(a, b) = (5, 4)$$

## 1.3 Треугольная функция

### 1.3.1 Аналитика

Исходная функция:

$$f(t) = \begin{cases} a - \left| \frac{at}{b} \right|, & |t| \leq b, \\ 0, & |t| > b. \end{cases}$$

Фурье-образ вычисляется по формуле:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b}^b \left(a - \left|\frac{at}{b}\right|\right) e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_0^b \left(1 - \frac{t}{b}\right) e^{-i\omega t} dt + \int_{-b}^0 \left(1 + \frac{t}{b}\right) e^{-i\omega t} dt \right) = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-i\omega b} - 1 + i\omega b}{b\omega^2} + \frac{1 + i\omega b - e^{i\omega b}}{b\omega^2} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{e^{-i\omega b} + e^{i\omega b} - 2}{b\omega^2} \right) = \frac{2a(1 - \cos(\omega b))}{\sqrt{2\pi}b\omega^2}\end{aligned}$$

Для параметров  $(a, b) = (1, 1)$ :

$$\frac{2 - 2\cos(w)}{\sqrt{2\pi}w^2}$$

Для параметров  $(a, b) = (2, 2)$ :

$$\frac{4 - 4\cos(2w)}{2\sqrt{2\pi}w^2}$$

Для параметров  $(a, b) = (5, 4)$ :

$$\frac{10 - 10\cos(4w)}{4\sqrt{2\pi}w^2}$$

### 1.3.2 Код

```

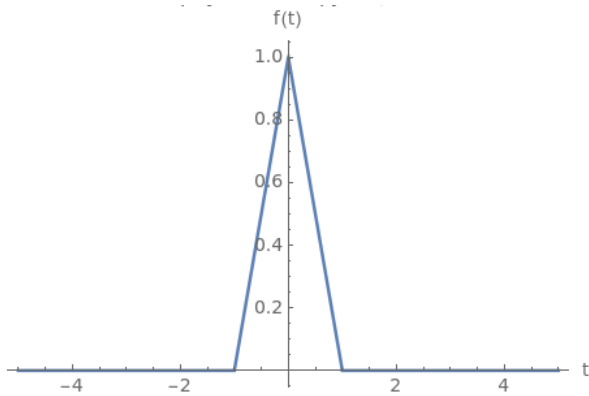
1 f[t_, a_, b_] :=
2   Piecewise[{{a - Abs[a t/b], Abs[t] <= b}, {0, Abs[t] > b}}]
3
4 a = 5;
5 b = 4;
6
7 fourier = FourierTransform[f[t, a, b], t, w]
8
9 Plot[f[t, a, b], {t, -5, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
10  AxesLabel -> {"t", "f(t)"}, PlotLabel -> "Треугольная функция"]
11
12 Plot[Re[fourier], {w, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
13  AxesLabel -> {"\[Omega]", "F(\[Omega])"},
14  PlotLabel -> "Фурьеобраз- треугольной функции"]
15
16 energyTimeDomain =
17   Integrate[Abs[f[t, a, b]]^2, {t, -Infinity, Infinity}];
18
19 energyFrequencyDomain =
20   Integrate[Abs[fourier]^2, {w, -Infinity, Infinity}];
21
22 Print["\Проверка равенства Парсеваля: "]
23 Print["\[Integral]|f(t)|\^2 dt = ", energyTimeDomain]
24 Print["\[Integral]|F(\[Omega])|\^2 d\[Omega] = ", \
25 energyFrequencyDomain]
26 Print["Результат: ", energyTimeDomain == energyFrequencyDomain]
```

Листинг 2: Фурье-образ треугольной функции и проверка равенства Парсеваля

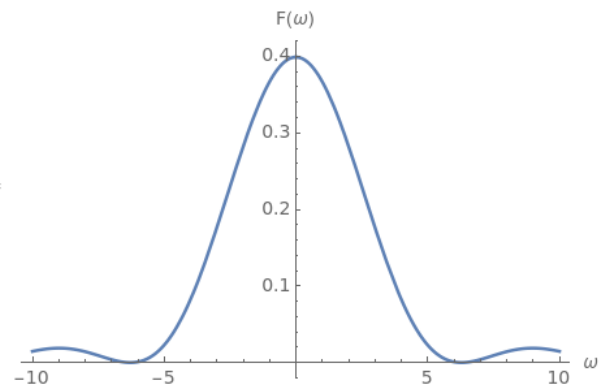
Этот код определяет треугольную функцию, вычисляет её Фурье-образ, строит графики и проверяет равенство Парсеваля.

### 1.3.3 Вывод

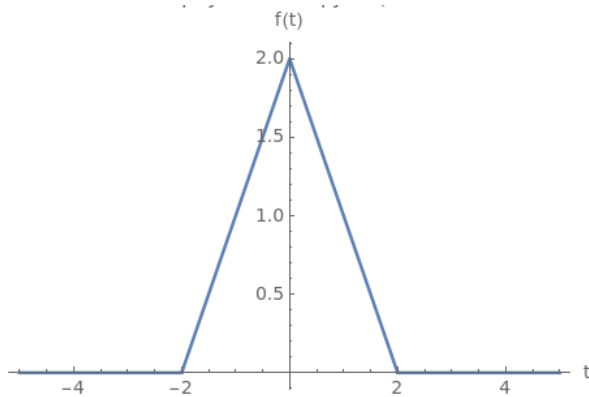
Теперь посмотрим на вывод кода. Я построю графики треугольной функции и Фурье-образа для выбранных значений.



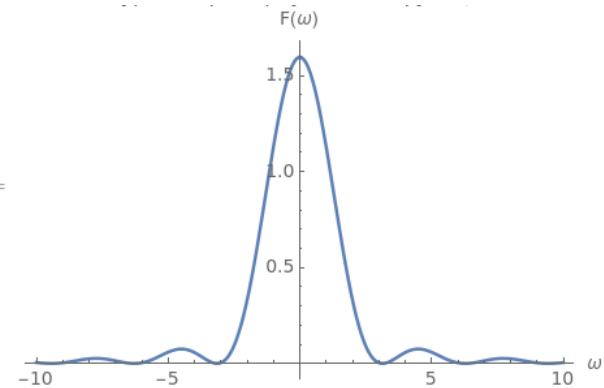
$f(t)$  для  $(a, b) = (1, 1)$  .



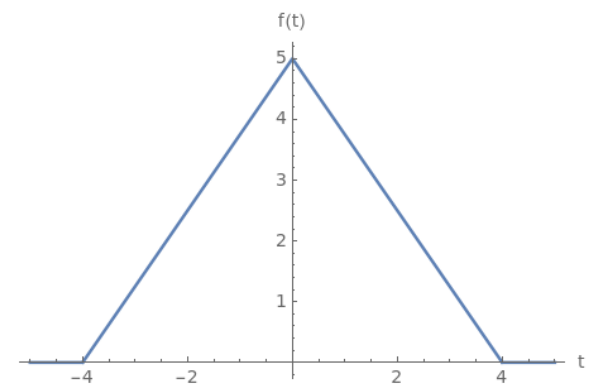
$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



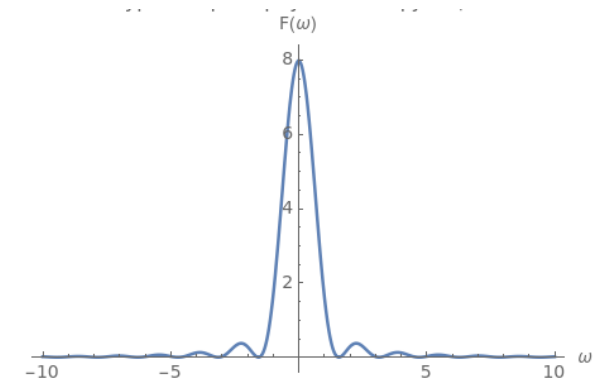
$f(t)$  для  $(a, b) = (2, 2)$  .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$f(t)$  для  $(a, b) = (5, 4)$  .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .

Параметры  $a$  и  $b$  влияют на форму треугольной функции и её Фурье-образ. В исходной функции  $b$  задаёт ширину основания треугольника, а  $a$  — его высоту. При увеличении  $a$  амплитуда Фурье-образа увеличивается, потому что преобразование Фурье линейно, и умножение функции на константу  $a$  приводит к умножению её Фурье-образа на ту же константу.

При увеличении  $b$  основание треугольника становится шире, что приводит к более "частым" и "узким" колебаниям в Фурье-образе, потому что преобразование Фурье сохраняет энергию сигнала, и расширение во временной области компенсируется сжатием в частотной области.

Также в моем коде присутствует проверка равенства Парсерваля. Для любых  $(a, b)$  проверка вернула *True* следовательно равенство выполнено.

Проверка равенства Парсеваля:	Проверка равенства Парсеваля:	Проверка равенства Парсеваля:
$\int  f(t) ^2 dt = \frac{2}{3}$	$\int  f(t) ^2 dt = \frac{16}{3}$	$\int  f(t) ^2 dt = \frac{200}{3}$
$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \frac{2}{3}$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \frac{16}{3}$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \frac{200}{3}$
Результат: True	Результат: True	Результат: True
$(a, b) = (1, 1)$	$(a, b) = (2, 2)$	$(a, b) = (5, 4)$

## 1.4 Кардинальный синус

### 1.4.1 Аналитика

Исходная функция

$$f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt) = a \cdot \frac{\sin(bt)}{bt}.$$

Фурье-образ функции  $f(t)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = a \cdot \frac{\pi}{b} \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi b}\right),$$

где  $\text{rect}(x)$  — прямоугольная функция, равная 1 при  $|x| \leq \frac{1}{2}$  и 0 в остальных случаях.

### 1.4.2 Код

```

1 f[t_, a_, b_] := a Sinc[b t]
2
3 a = 5;
4 b = 4;
5
6 fourier = FourierTransform[f[t, a, b], t, w]
7
8 Plot[f[t, a, b], {t, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
9 AxesLabel -> {"t", "f(t)"},
10 PlotLabel -> "Функция кардинального синуса"]
11
12 Plot[Re[fourier], {w, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
13 AxesLabel -> {"\[Omega]", "F\[Omega]"},
14 PlotLabel -> "Фурьеобраз- функции кардинального синуса",
15 Exclusions -> None]
16
17 energyTimeDomain =
18 Integrate[Abs[f[t, a, b]]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
19
20 energyFrequencyDomain =
21 Integrate[Abs[fourier]^2, {w, -Infinity, Infinity}]
22
23 Print["\nПроверка равенства Парсеваля:"]
24 Print["\[Integral]|f(t)|^2 dt = ", energyTimeDomain]
25 Print["\[Integral]|F\[Omega]|^2 d\[Omega] = ", \
26 energyFrequencyDomain]
27 Print["Результат: ", energyTimeDomain == energyFrequencyDomain]
```

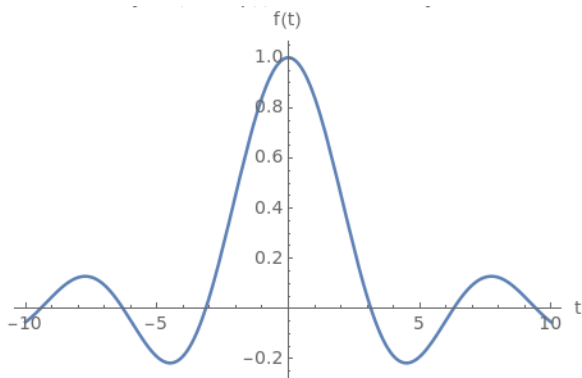
Листинг 3: Фурье-образ кардинального синуса и проверка равенства Парсеваля



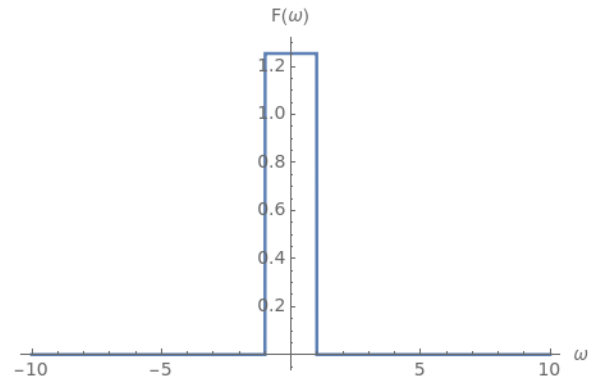
Этот код определяет функцию кардинального синуса, вычисляет его Фурье-образ, строит графики и проверяет равенство Парсеваля.

### 1.4.3 Вывод

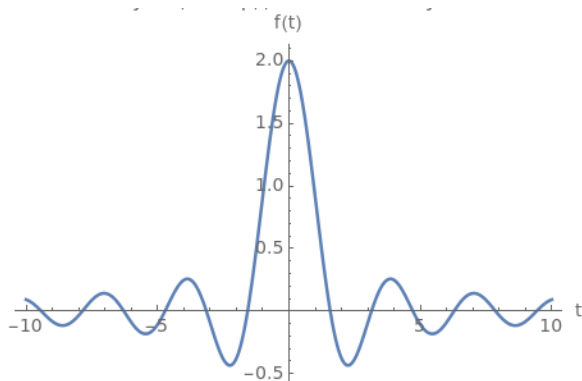
Теперь посмотрим на вывод кода. Я построю графики кардинального и Фурье-образа для выбранных значений.



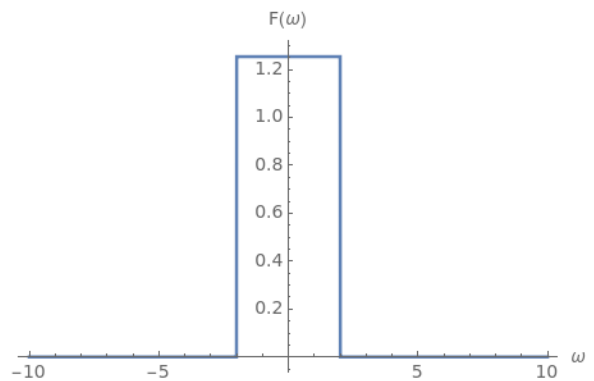
$f(t)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



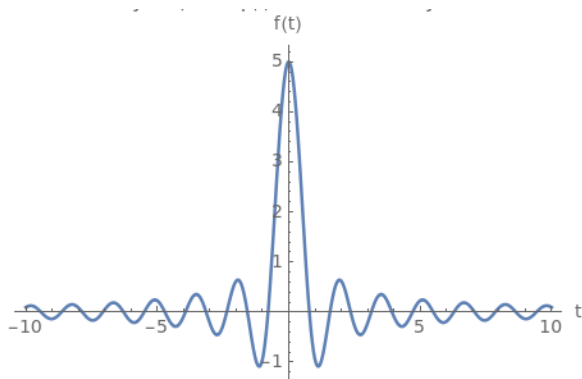
$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



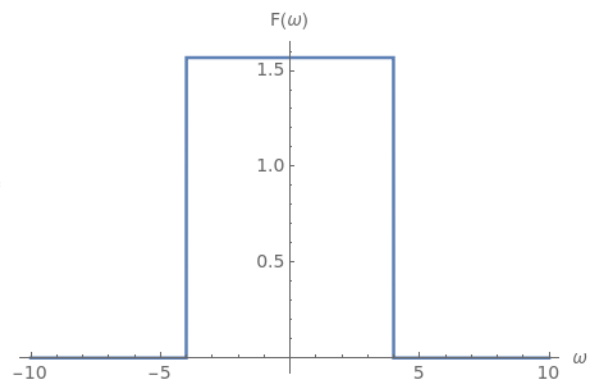
$f(t)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$f(t)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .

Функция  $f(t) = a \cdot \text{sinc}(bt)$  имеет Фурье-образ, который определяется свойствами преобразования Фурье. Параметр  $a$  влияет на амплитуду функции и её Фурье-образа: при увеличении  $a$  амплитуда Фурье-образа увеличивается пропорционально, потому что преобразование Фурье линейно, и умножение функции на константу  $a$  приводит к умножению её Фурье-образа на ту же константу.

Параметр  $b$  влияет на масштабирование функции по оси времени: при увеличении  $b$  функция  $\text{sinc}(bt)$  становится более "сжатой" во временной области, потому что аргумент

функции  $\text{sinc}(bt)$  увеличивается, что приводит к более быстрому затуханию колебаний. Это приводит к "растяжению" её Фурье-образа в частотной области, потому что преобразование Фурье сохраняет энергию сигнала, и сжатие во временной области компенсируется расширением в частотной области.

Таким образом, при увеличении  $b$  Фурье-образ становится более широким, потому что сжатие функции во временной области приводит к расширению её спектра в частотной области, а при уменьшении  $b$  — более узким, потому что расширение функции во временной области приводит к сжатию её спектра в частотной области.

Также в моем коде присутствует проверка равенства Парсерваля. Для любых  $(a, b)$  проверка вернула *True* следовательно равенство выполнено.

Проверка равенства Парсеваля:	Проверка равенства Парсеваля:	Проверка равенства Парсеваля:
$\int  f(t) ^2 dt = \pi$	$\int  f(t) ^2 dt = 2\pi$	$\int  f(t) ^2 dt = \frac{25\pi}{4}$
$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \pi$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = 2\pi$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \frac{25\pi}{4}$
Результат: True	Результат: True	Результат: True
$(a, b) = (1, 1)$	$(a, b) = (2, 2)$	$(a, b) = (5, 4)$

## 1.5 Функция Гаусса

### 1.5.1 Аналитика

Исходная функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-bt^2}.$$

Фурье-образ функции  $f(t)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = a \cdot \sqrt{\frac{\pi}{b}} \cdot e^{-\frac{\omega^2}{4b}},$$

где  $a$  и  $b$  — параметры функции Гаусса, определяющие её амплитуду и ширину.

### 1.5.2 Код

```

1 f[t_, a_, b_] := a Exp[-b t^2]
2
3 a = 2;
4 b = 1;
5
6 fourier = FourierTransform[f[t, a, b], t, w]
7
8 Plot[f[t, a, b], {t, -5, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
9 AxesLabel -> {"t", "f(t)"}, PlotLabel -> "Функция Гаусса"]
10
11 Plot[Re[fourier], {w, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
12 AxesLabel -> {"\[Omega]", "F(\[Omega])"},
13 PlotLabel -> "Фурьеобраз- функции Гаусса"]
14
15 energyTimeDomain =
16 Integrate[Abs[f[t, a, b]]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
17
18 energyFrequencyDomain =
19 Integrate[Abs[fourier]^2, {w, -Infinity, Infinity}]
20

```

```

21 Print["\Проверка равенства Парсеваля: "]
22 Print["\[Integral]|f(t)|\b2 dt = ", energyTimeDomain]
23 Print["\[Integral]|F(\[Omega])|\b2 d\[Omega] = ", \
24 energyFrequencyDomain]
25 Print["Результат: ", energyTimeDomain == energyFrequencyDomain]

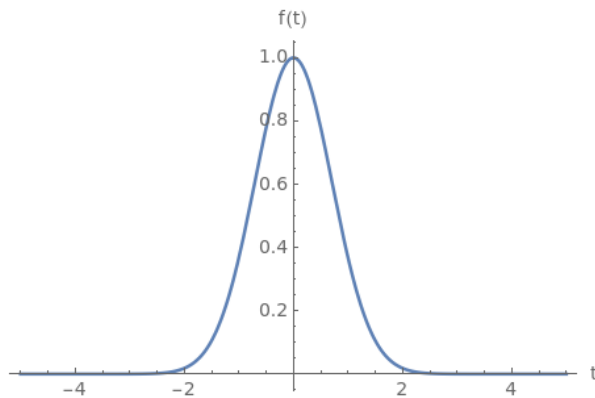
```

Листинг 4: Фурье-образ Гауссовой функции и проверка равенства Парсеваля

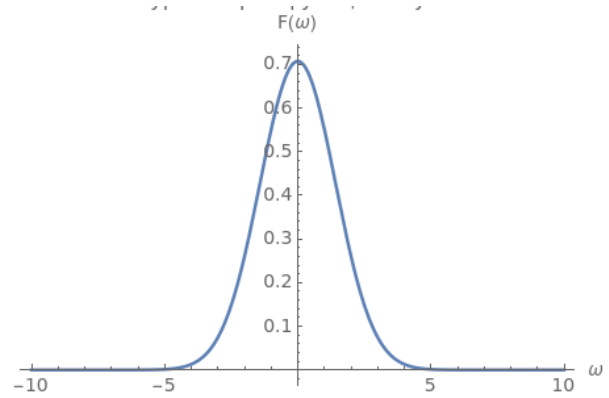
Этот код определяет функцию Гаусса, вычисляет ее Фурье-образ, строит графики и проверяет равенство Парсеваля.

### 1.5.3 Вывод

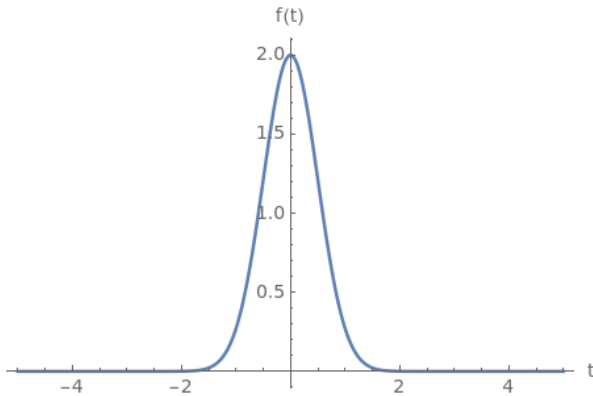
Теперь посмотрим на вывод кода. Я построю графики функции Гаусса и Фурье-образа для выбранных значений.



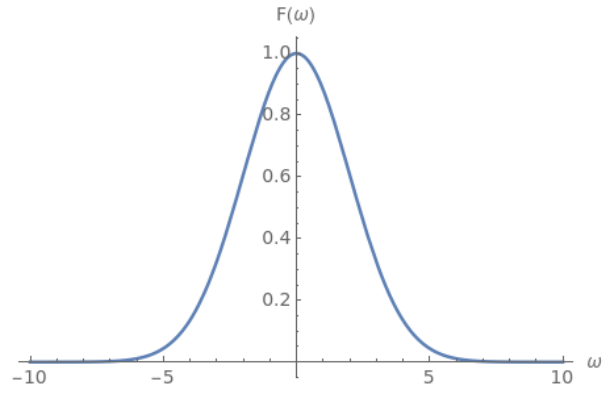
$f(t)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



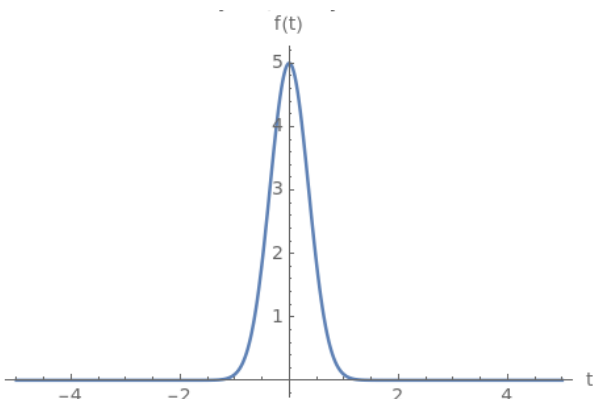
$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



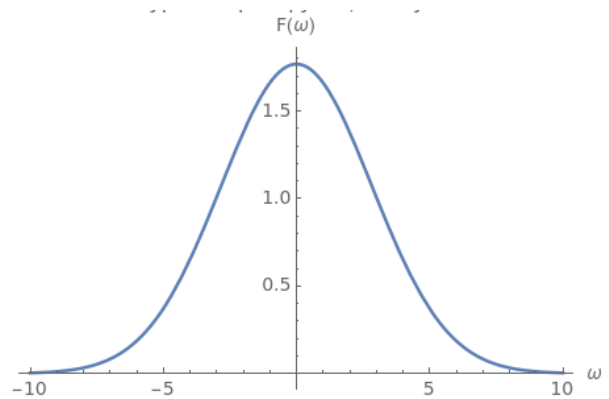
$f(t)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$f(t)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .

Функция  $f(t) = a \cdot e^{-bt^2}$  имеет Фурье-образ, который также является функцией Гаусса. Параметр  $a$  влияет на амплитуду функции и её Фурье-образа: при увеличении  $a$  амплитуда Фурье-образа увеличивается пропорционально, потому что преобразование Фурье линейно, и умножение функции на константу  $a$  приводит к умножению её Фурье-образа на ту же константу.

Параметр  $b$  влияет на ширину функции Гаусса во временной области: при увеличении  $b$  функция становится более "узкой" (быстрее затухает), потому что экспонента  $e^{-bt^2}$  убывает быстрее. Это приводит к "расширению" её Фурье-образа в частотной области, потому что преобразование Фурье сохраняет энергию сигнала, и сжатие во временной области компенсируется расширением в частотной области.

Таким образом, при увеличении  $b$  Фурье-образ становится более широким, потому что сжатие функции во временной области приводит к расширению её спектра в частотной области, а при уменьшении  $b$  — более узким, потому что расширение функции во временной области приводит к сжатию её спектра в частотной области.

Также в моем коде присутствует проверка равенства Парсерваля. Для любых  $(a, b)$  проверка вернула *True* следовательно равенство выполнено.

Проверка равенства Парсеваля:

$$\int |f(t)|^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Результат: True

$$(a, b) = (1, 1)$$

Проверка равенства Парсеваля:

$$\int |f(t)|^2 dt = 2\sqrt{\pi}$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = 2\sqrt{\pi}$$

Результат: True

|

$$(a, b) = (2, 2)$$

Проверка равенства Парсеваля:

$$\int |f(t)|^2 dt = \frac{25\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

$$\int |F(\omega)|^2 d\omega = \frac{25\sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2}$$

Результат: True

$$(a, b) = (5, 4)$$

## 1.6 Двустороннее затухание

### 1.6.1 Аналитика

Исходная функция:

$$f(t) = a \cdot e^{-b|t|}.$$

Фурье-образ вычисляется по формуле:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} a e^{-b|t|} e^{-i\omega t} dt = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(b+i\omega)t} dt \right).$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{(b-i\omega)t} dt = \left[ \frac{e^{(b-i\omega)t}}{b-i\omega} \right]_{-\infty}^0 = \frac{1}{b-i\omega},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-(b+i\omega)t} dt = \left[ \frac{e^{-(b+i\omega)t}}{-(b+i\omega)} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{b+i\omega}.$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{b-i\omega} + \frac{1}{b+i\omega} \right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{2b}{b^2 + \omega^2}.$$

Таким образом, Фурье-образ функции двустороннего затухания:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{\sqrt{2\pi}(b^2 + \omega^2)}.$$

Для параметров  $(a, b) = (1, 1)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}(1 + \omega^2)}.$$

Для параметров  $(a, b) = (2, 2)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{8}{\sqrt{2\pi}(4 + \omega^2)}.$$

Для параметров  $(a, b) = (5, 4)$ :

$$\hat{f}(\omega) = \frac{40}{\sqrt{2\pi}(16 + \omega^2)}.$$

## 1.6.2 Код

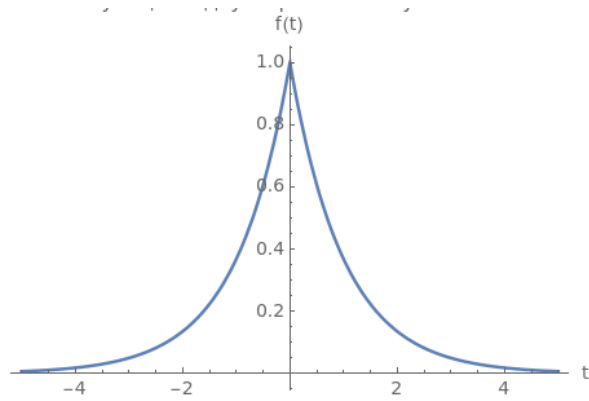
```
1 f[t_, a_, b_] := a Exp[-b Abs[t]]
2
3 a = 1;
4 b = 2;
5
6 fourier = FourierTransform[f[t, a, b], t, w]
7
8 Plot[f[t, a, b], {t, -5, 5}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
9 AxesLabel -> {"t", "f(t)"},
10 PlotLabel -> "Функция с двусторонним затуханием"]
11
12 Plot[Re[fourier], {w, -10, 10}, PlotRange -> All, PlotStyle -> Thick,
13 AxesLabel -> {"\[Omega]", "F\[Omega]"},
14 PlotLabel -> "Фурьеобраз- функции с двусторонним затуханием"]
15
16 energyTimeDomain =
17 Integrate[Abs[f[t, a, b]]^2, {t, -Infinity, Infinity}]
18
19 energyFrequencyDomain =
20 Integrate[Abs[fourier]^2, {w, -Infinity, Infinity}]
21
22 Print["\nПроверка равенства Парсеваля:"]
23 Print["\[Integral]|f(t)|\^2 dt = ", energyTimeDomain]
24 Print["\[Integral]|F\[Omega]|^2 d\[Omega] = ", \
25 energyFrequencyDomain]
26 Print["Результат: ", energyTimeDomain == energyFrequencyDomain]
```

Листинг 5: Фурье-образ двустороннего затухания и проверка равенства Парсеваля

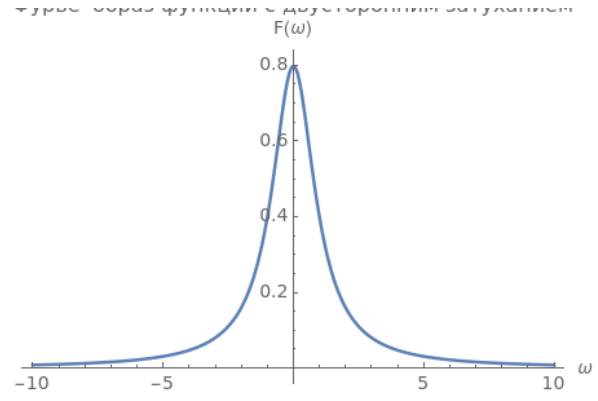
Этот код определяет функцию двустороннего затухания, вычисляет ее Фурье-образ, строит графики и проверяет равенство Парсеваля.

## 1.6.3 Вывод

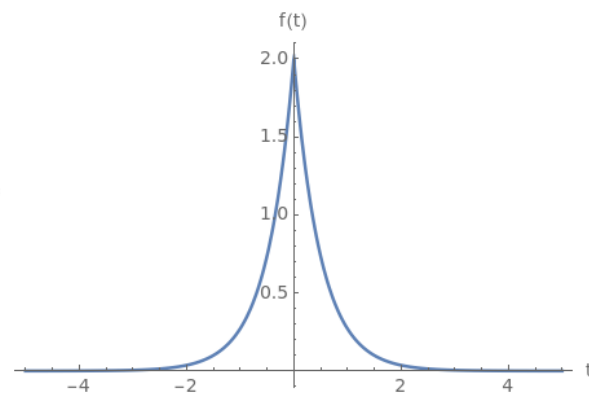
Теперь посмотрим на вывод кода. Я построю графики функции двустороннего затухания и Фурье-образа для выбранных значений.



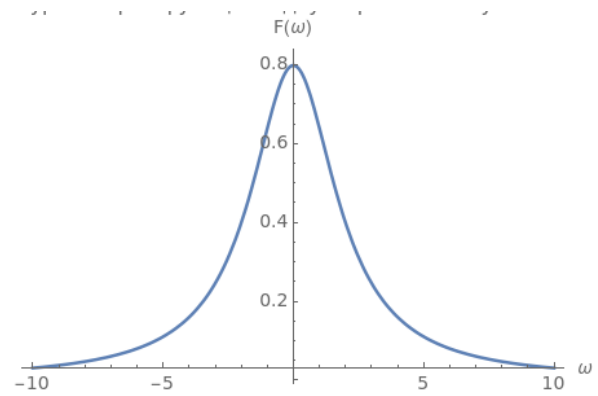
$f(t)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



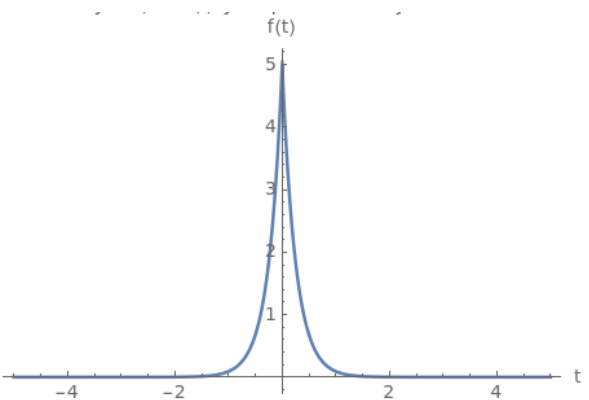
$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (1, 1)$ .



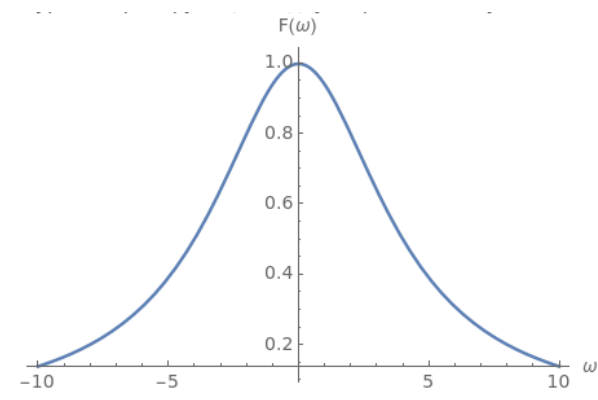
$f(t)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (2, 2)$ .



$f(t)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .



$\hat{f}(\omega)$  для  $(a, b) = (5, 4)$ .

Функция  $f(t) = a \cdot e^{-b|t|}$  имеет Фурье-образ, который определяется свойствами преобразования Фурье. Параметр  $a$  влияет на амплитуду функции и её Фурье-образа: при увеличении  $a$  амплитуда Фурье-образа увеличивается пропорционально, потому что преобразование Фурье линейно, и умножение функции на константу  $a$  приводит к умножению её Фурье-образа на ту же константу.

Параметр  $b$  влияет на скорость затухания функции: при увеличении  $b$  функция становится более "узкой" (быстрее затухает), потому что экспонента  $e^{-b|t|}$  убывает быстрее. Это приводит к "расширению" её Фурье-образа в частотной области, потому что преобразование Фурье сохраняет энергию сигнала, и сжатие во временной области компенсируется расширением в частотной области.

Таким образом, при увеличении  $b$  Фурье-образ становится более широким, потому что сжатие функции во временной области приводит к расширению её спектра в частотной

области, а при уменьшении  $b$  — более узким, потому что расширение функции во временной области приводит к сжатию её спектра в частотной области.

Также в моем коде присутствует проверка равенства Парсераля. Для любых  $(a, b)$  проверка вернула *True* следовательно равенство выполнено.

Проверка равенства Парсераля:	Проверка равенства Парсераля:	Проверка равенства Парсераля:
$\int  f(t) ^2 dt = 1$	$\int  f(t) ^2 dt = 2$	$\int  f(t) ^2 dt = \frac{25}{4}$
$\int  F(\omega) ^2 d\omega = 1$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = 2$	$\int  F(\omega) ^2 d\omega = \frac{25}{4}$
Результат: True	Результат: True	Результат: True
$(a, b) = (1, 1)$	$(a, b) = (2, 2)$	$(a, b) = (5, 4)$

## 2 Комплексное задание

### 2.1 Краткое условие

Выбрать одну функцию  $f(t)$  из задания 1 и один набор параметров  $a, b$ . Рассмотреть сдвинутую функцию  $g(t) = f(t + c)$  и провести исследование её Фурье-образа  $\beta(\omega)$ :

- Привести аналитическое выражение для Фурье-образа  $\beta(\omega)$ .
- Выбрать три значения параметра  $c \neq 0$  и построить графики  $g(t)$ . Проанализировать влияние  $c$  на оригинал функции.
- Для выбранных значений  $c$  построить:
  - Графики вещественной и мнимой компонент Фурье-образа:  $\text{Re}(\beta(\omega))$  и  $\text{Im}(\beta(\omega))$ .
  - График модуля Фурье-образа:  $|\beta(\omega)|$ .
- Проанализировать влияние параметра  $c$  на компоненты и модуль Фурье-образа.
- Сделать выводы.

### 2.2 Аналитика

Рассмотрим функцию  $f(t) = ae^{-b|t|}$ , где  $a = 1$  и  $b = 1$ . Определим сдвинутую функцию  $g(t, c) = f(t + c)$ , где  $c$  принимает значения из набора  $c = \{1, 2, 3\}$ . Тогда:

$$g(t, c) = ae^{-b|t+c|}.$$

Фурье-образ функции  $g(t, c)$  вычисляется следующим образом:

$$\hat{g}(\omega, c) = F\{g(t, c)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} ae^{-b|t+c|}e^{-i\omega t} dt.$$

Используя свойство сдвига Фурье-преобразования, получаем:

$$\hat{g}(\omega, c) = e^{i\omega c} \cdot F\{f(t)\}(\omega).$$

Фурье-образ исходной функции  $f(t) = ae^{-b|t|}$  известен и равен:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{2ab}{b^2 + \omega^2}.$$

Таким образом, Фурье-образ сдвинутой функции  $g(t, c)$  выражается как:

$$\hat{g}(\omega, c) = e^{i\omega c} \cdot \frac{2ab}{b^2 + \omega^2}.$$

## 2.3 Код

```
1 a = 1;
2 b = 1;
3 f[t_] := a Exp[-b Abs[t]];
4
5 cValues = {1, 2, 3};
6 g[t_, c_] := f[t + c];
7
8 fourierTransforms =
9   Table[FourierTransform[g[t, c], t, \[Omega]], {c, cValues}];
10
11 Plot[Evaluate[Table[g[t, c], {c, cValues}]], {t, -10, 5},
12   PlotLabel -> "Графики g(t) для c = {1, 2, 3}",
13   PlotLegends -> Table["c = " <> ToString[c], {c, cValues}],
14   PlotRange -> {Automatic, {0, 1}}]
15
16 plotsReIm =
17   Table[Plot[{Re[fourierTransforms[[c]]],
18     Im[fourierTransforms[[c]]}], {\[Omega], -10, 10},
19     PlotLegends -> {"Re(g(\[Omega]))", "Im(g(\[Omega]))"},
20     PlotLabel ->
21       "Re и Im Фурьеобраза- для c = " <> ToString[cValues[[c]]], {c,
22       Length[cValues]}]
23
24 plotsAbs =
25   Plot[Evaluate[
26     Table[Abs[fourierTransforms[[c]]], {c,
27       Length[cValues]}]], {\[Omega], -10, 10},
28   PlotLabel -> "Модуль Фурьеобраза- для c = {1, 2, 3}",
29   PlotLegends ->
30     Table["c = " <> ToString[cValues[[c]]], {c, Length[cValues]}]]
```

Код задаёт  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = \{1, 2, 3\}$  и функцию  $f(t) = 2e^{-2|t|}$ . Для  $g(t, c) = f(t + c)$  вычисляет Фурье-образы и строит графики  $g(t, c)$ , действительной и мнимой частей Фурье-образа, а также их модуля.

## 2.4 Вывод

Теперь посмотрим и проанализируем графики, которые выдал мой код. В этом задании, я решила не делать много картинок и что было целесообразно нарисовала на одном графике.

Анализ показывает, что амплитуды действительной и мнимой частей Фурье-образа сохраняются при сдвиге  $c$ , так как сдвиг влияет только на фазу, но не на амплитуду. Это следует из свойства Фурье-преобразования:

$$\hat{g}_c(\omega) = e^{i\omega c} \cdot \hat{g}(\omega),$$

где  $e^{i\omega c}$  — фазовый множитель. С увеличением  $|c|$  частота колебаний  $\text{Re } \hat{g}(\omega)$  и  $\text{Im } \hat{g}(\omega)$  возрастает, что связано с линейным изменением фазы.

Знак  $c$  определяет положение мнимой части: при  $c > 0$  она смещается вправо. Действительная часть остаётся симметричной, так как Фурье-образ действительной функции имеет чётную действительную часть.

Модуль Фурье-образа инвариантен относительно сдвигов. Его форма совпадает с модулем Фурье-образа несдвинутой функции.



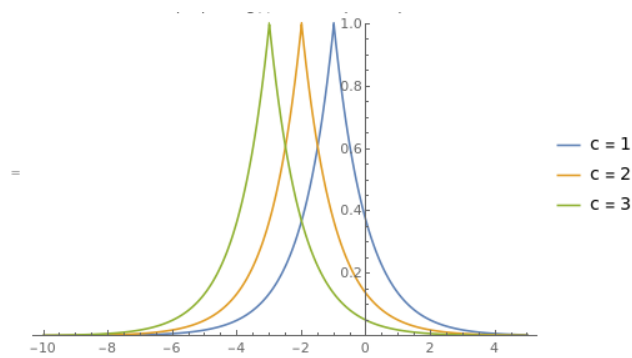


Рис. 1:  $g(t)$  для  $c = \{1, 2, 3\}$



Рис. 2:  $Re$  и  $Im$  Фурье-образа для  $c = \{1, 2, 3\}$

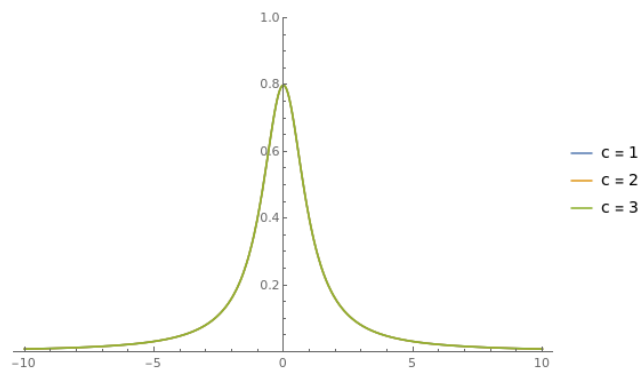


Рис. 3: Модуль Фурье-образа для  $c = \{1, 2, 3\}$

## 3 Музыкальное задание

### 3.1 Краткое условие

Требуется:

- Преобразовать запись музыкального аккорда в массив  $f(t)$ .
- Построить график  $f(t)$ .
- Найти Фурье-образ  $f(\nu)$  с помощью численного интегрирования
- Построить график модуля Фурье-образа  $|f(\nu)|$ .
- Определить основные частоты и соотнести их с музыкальными нотами.

Для этого задания я выбрала 22 запись.

### 3.2 Код

Данный код выполняет анализ аудиосигнала, загруженного из файла в формате `.wav`. Основные этапы анализа включают построение графиков во временной и частотной областях, а также поиск основных частот в сигнале.

Функция `load_audio` загружает аудиофайл и извлекает данные и частоту дискретизации.

Функция `plot_time_domain` строит график амплитуды сигнала в зависимости от времени:

$$f(t) = \text{Амплитуда сигнала}$$

Функция `compute_fourier_transform` вычисляет преобразование Фурье для перехода в частотную область:

$$F(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) e^{-i2\pi\nu k/N}$$

где  $N$  — количество отсчётов,  $\nu$  — частота.

Функция `plot_frequency_domain` строит график амплитуды спектра в зависимости от частоты:

$$|F(\nu)| = \text{Амплитуда спектра}$$

Функция `find_peak_frequencies` находит основные частоты в спектре сигнала, используя метод поиска пиков.

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.io.wavfile import read
4 from scipy.signal import find_peaks
5
6 def load_audio(file_path):
7     sample_rate, audio_data = read(file_path)
8     if len(audio_data.shape) > 1:
9         audio_data = audio_data[:, 0]
10    return sample_rate, audio_data
11
12 def plot_time_domain(sample_rate, audio_data):
13     time = np.arange(0, len(audio_data)) / sample_rate
14     plt.figure(figsize=(10, 4))
15     plt.plot(time, audio_data)
```

```

16     plt.title("График  $f(t)$ ")
17     plt.xlabel("Время  $s()$ ")
18     plt.ylabel("Амплитуда")
19     plt.grid()
20     plt.show()
21
22 def compute_fourier_transform(audio_data, sample_rate):
23     n = len(audio_data)
24     frequencies = np.fft.fftfreq(n, d=1/sample_rate)
25     fourier_transform = np.fft.fft(audio_data) / n
26     return frequencies[:n // 2], fourier_transform[:n // 2]
27
28 def plot_frequency_domain(frequencies, fourier_transform):
29     plt.figure(figsize=(10, 4))
30     plt.plot(frequencies, np.abs(fourier_transform))
31     plt.title("График  $|f()|$ ")
32     plt.xlabel("Частота Гц()")
33     plt.ylabel("Амплитуда")
34     plt.grid()
35     plt.show()
36
37 def find_peak_frequencies(frequencies, fourier_transform, num_peaks=3):
38     peaks, _ = find_peaks(np.abs(fourier_transform), height=np.max(np.abs(
39         fourier_transform)) * 0.1)
40     peak_indices = np.argsort(np.abs(fourier_transform[peaks]))[-num_peaks:]
41     return frequencies[peaks[peak_indices]]
42
43 def main(file_path):
44     sample_rate, audio_data = load_audio(file_path)
45     plot_time_domain(sample_rate, audio_data)
46     frequencies, fourier_transform = compute_fourier_transform(audio_data,
47         sample_rate)
48     plot_frequency_domain(frequencies, fourier_transform)
49     peak_frequencies = find_peak_frequencies(frequencies, fourier_transform)
50     print("Основные частоты:", peak_frequencies)
51
52 if __name__ == "__main__":
53     file_path = "/home/evaДокументы//itmo/2_course/chMethods/lab2/audio.wav"
54     main(file_path)

```

Листинг 6: Обработка аудиосигнала с использованием преобразования Фурье

### 3.3 Вывод

А теперь посмотрим, что за графики и частоты вывел мой код.

```

1 Основные
2 частоты: [329.38063667 261.53756019 440.2298894 ]

```

Листинг 7: Вывод основных частот аккорды

Частоты 329.38 Гц, 261.54 Гц и 440.23 Гц соответствуют аккорду Ля-минор. Аккорд состоит из нот:

- Ля (А): 440.23 Гц
- До (С): 261.54 Гц
- Ми (Е): 329.38 Гц

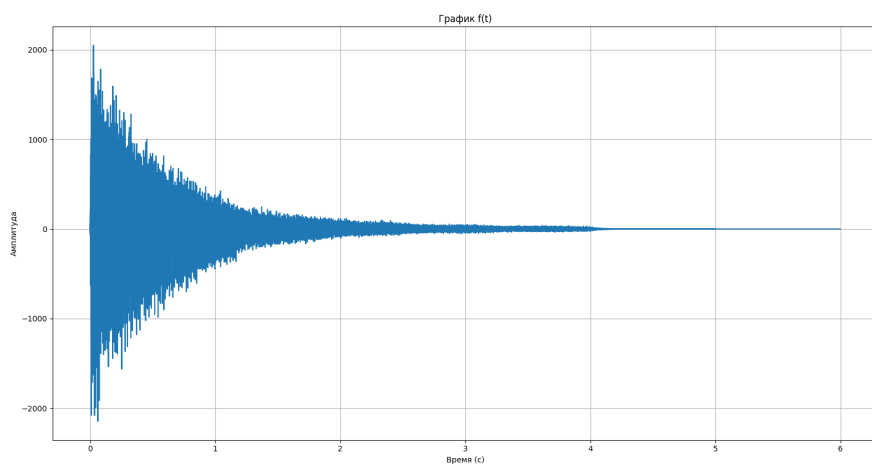


Рис. 4: График амплитуды от времени

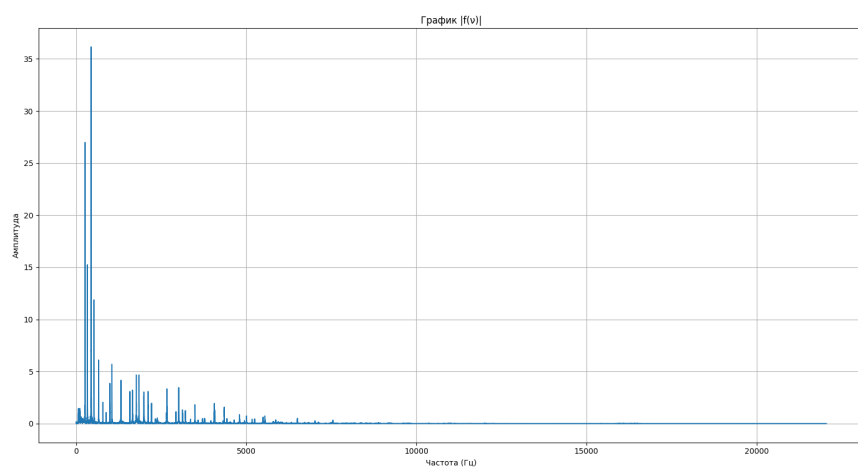


Рис. 5: Модуль Фурье-образа звука

## 4 Примечания

- Для заданий 1, 2 был использован язык Wolfram Mathematica, 3 задание написано на python.
- Репозиторий [github](#) с исходным кодом и tex-проектом.