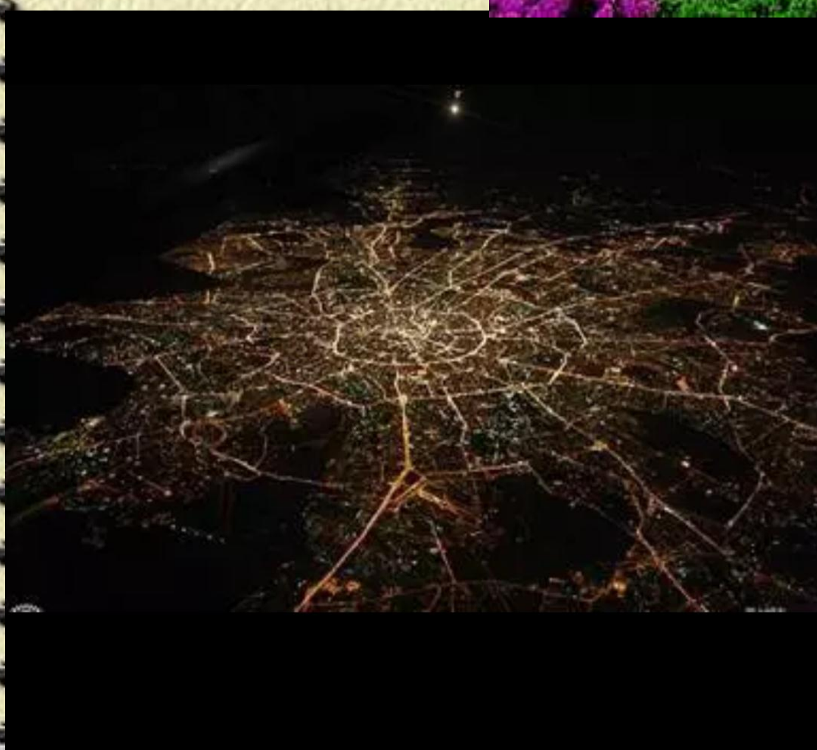
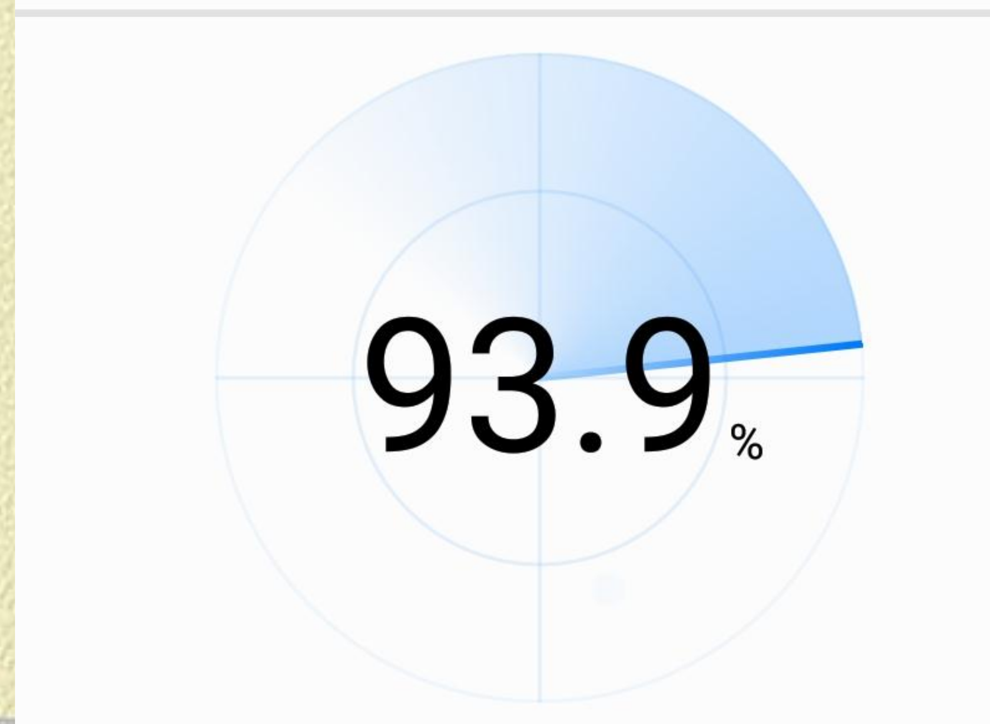



93.9%

$Add.$ 极坐标系

在普通的直角坐标系xOy中,有一点 $P(x,y)$,

向径$\overrightarrow{OP}$的长$r=\sqrt{x^2+y^2}$, $x\neq 0$时 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}$,

θ为向径$\overrightarrow{OP}$与x轴的正向的夹角,$\theta\in[0,2\pi]$.

$or:\theta\in[-\pi,\pi]$

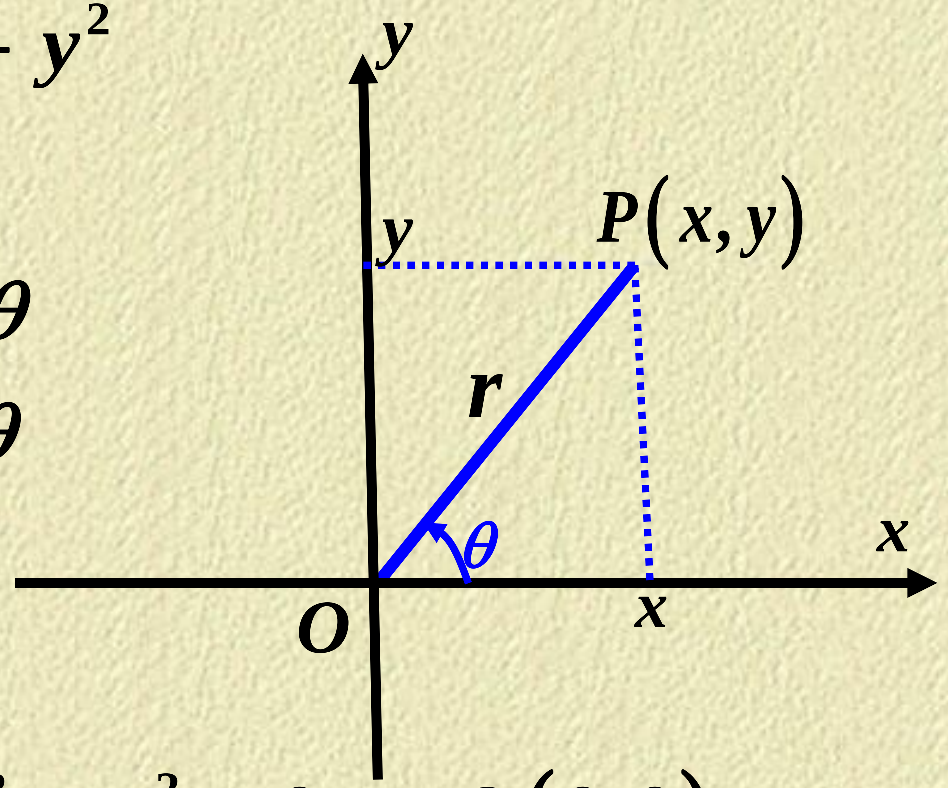
那么$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}$, $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$,

$r=0$时θ无法确定.当$r>0$时一点$P(x,y)$就有唯一的一个有序数组(r,θ)与之相对应,此时

$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$是一一对应的.

$$\begin{cases} \tan\theta = \dfrac{y}{x} \ \ or \cot\theta = \dfrac{x}{y} \ \left(x^2 + y^2 \neq 0\right) \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$



$$r = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow O(0,0)$$

点$P(x,y)$,向径$\overrightarrow{OP}$长$r=\sqrt{x^2+y^2}$,$r\geq 0$,

向径$\overrightarrow{OP}$与x轴的正向的夹角$\theta\in[0,2\pi]$.

$or:\theta\in[-\pi,\pi]$

$$\begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases},\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},$$

当$r>0$时$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$一一对应.

在普通的直角坐标系xOy中,$r=c$(常数)表示以$O(0,0)$为圆心,c为半径的圆周曲线.$\theta=\alpha$(常数)表示从$O(0,0)$出发,与x轴正向的夹角为α的射线.

我们知道,圆周的过某点的切线与过该点的半径垂直.

当$r>0$时$P(x,y)\leftrightarrow P(r,\theta)$一一对应.

这样我们就建立了一个极坐标系$rO\theta$:

极坐标系$rO\theta$的坐标原点与$O(0,0)$重合,

横轴—极轴$\left(\theta=0\right)$与x轴的正半轴重合,

$\because r=c$与$\theta=\alpha$正交(垂直),

$\therefore$ 极坐标系$rO\theta$也是一种直角坐标系.

(r,θ)称为是点P在极坐标系中的坐标.

上页 下页 返回

我们将建立的极坐标系$rO\theta$的坐标原点—极点O与xOy坐标系的坐标原点$O(0,0)$重合,极轴$\theta = 0$与x轴的正半轴重合.

上页 下页 返回

例1.给出下列xOy 直角坐标系中的直线或曲线在极坐标系中的表达式:(1).$y=\sqrt{3}x$.

解 (1).$y=\sqrt{3}x \leftrightarrow \tan\theta=\sqrt{3}$,

$$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}\text{或}\theta=\frac{4\pi}{3},$$

$\left(r\geq 0,\text{两条射线}\right)$.

$(2).\ x+y=1.$

解 $(2).\ x+y=1,$

$$r\cos\theta + r\sin\theta = 1,$$

$$\therefore r = \frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}.$$

上页 下页 返回

$$(3).\ y = x^2; \qquad (4).\ x = \sqrt{4 - y^2}.$$

解 $(3).\ y = x^2,\ r\sin\theta = r^2\cos^2\theta,$

$$\therefore r = \sec\theta\tan\theta, \left(0 \le \theta \le \pi, \theta \ne \frac{\pi}{2}\right);$$

$$(4).\ x = \sqrt{4 - y^2},\ x^2 + y^2 = 4,\ x \ge 0,$$

$\downarrow \cos\theta \ge 0$

$$\therefore r = 2, \left(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right).$$

例2.给出下列xOy直角坐标系中的区域在极坐标系中的表达式:

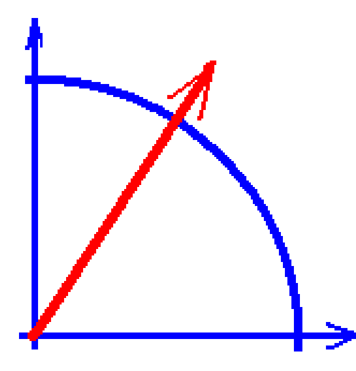
$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}.$$

解 充分注意到 $r=\sqrt{x^2+y^2}, r\ge 0,$

$$\theta\in[0,2\pi] \quad or: \theta\in[-\pi,\pi], \quad \begin{cases} r=\sqrt{x^2+y^2} \\ \tan\theta=\dfrac{y}{x} \end{cases}, \quad \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases},$$

$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

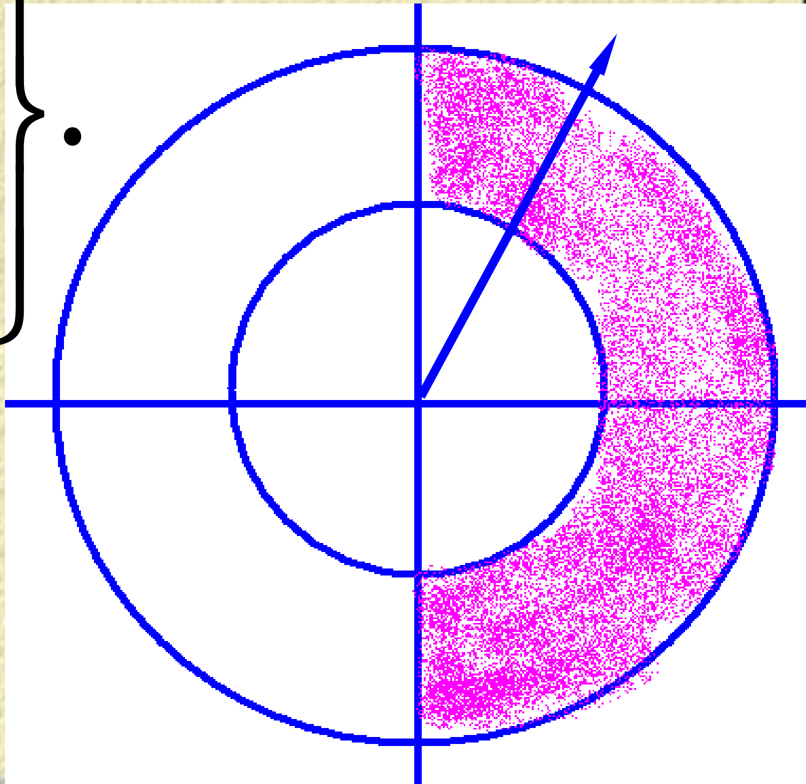


上页

$$(2).\ D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}.$$

解(2) $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

$$=\left\{(r,\theta)\,\middle|\,\begin{array}{c}-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1\le r\le 2\end{array}\right\}.$$

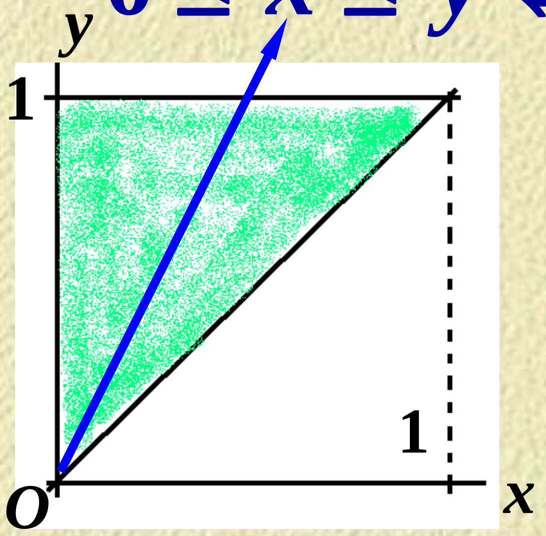


$$(3).D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y,0\le y\le 1\right\}.$$

解 $$(3).D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le y,0\le y\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \csc\theta,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$0\le x\le y\Leftrightarrow r\cos\theta\le r\sin\theta,\tan\theta\ge 1,$$



$$y\le 1\Leftrightarrow r\sin\theta\le 1$$

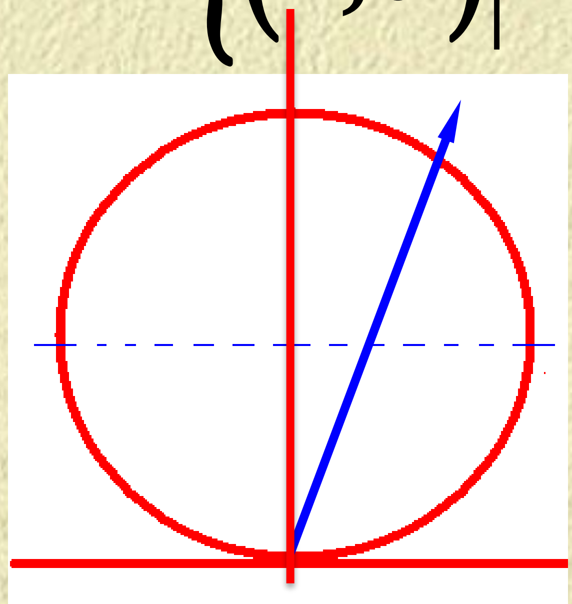
$$\to r\le\csc\theta,$$

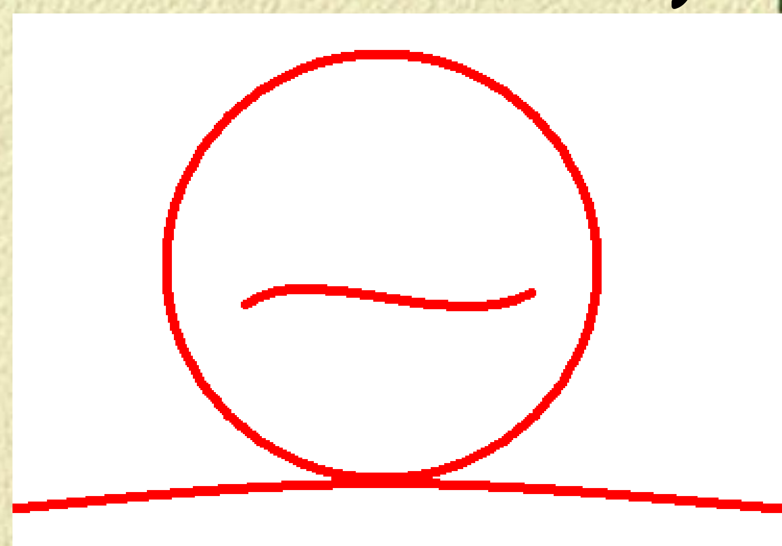
$$(4).D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 2y\right\}.$$

解(4). $x^2+y^2\le 2y \leftrightarrow r^2\le 2r\sin\theta,$

$y\ge 0\leftrightarrow r\sin\theta\ge 0\to \sin\theta\ge 0,$

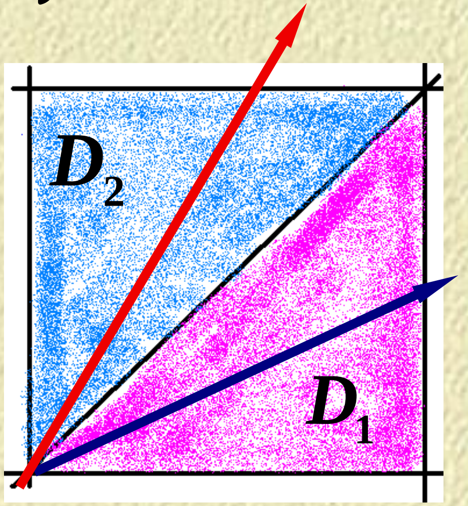
$$\therefore D=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le 2\sin\theta, 0\le\theta\le\pi\right\}.$$





$(5).D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}.$

解$(5).D=D_1+D_2,$



$$D_1=\{(x,y)|0\le y\le x,0\le x\le 1\}$$

$$D_2=\{(x,y)|x\le y\le 1,0\le x\le 1\}$$

$$D_1=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \sec\theta,0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(r,\theta)\middle|0\le r\le \csc\theta,\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$(1).D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le 2, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$(5).D=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\right\}.$$

$$D=D_1+D_2,$$

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|\, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le \sec\theta, 0\le\theta\le\frac{\pi}{4}\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\middle|\, x\le y\le 1, 0\le x\le 1\right\}$$

$$=\left\{(r,\theta)\middle|\, 0\le r\le \csc\theta, \frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}.$$

我们可以注意到,在极坐标系中以$O(0,0)$为圆心的圆周,圆形区域(或部分),过$O(0,0)$的直线的表达式较为简单,而在xOy直角坐标系中一般的直线,邻边分别平行于坐标轴的矩形区域的表达式较为简单.这就是我们介绍极坐标系中的积分计算的目的:

想要化圆为方,简化积分的计算.

不过,我们并不直接画出极坐标系中区域的图形,而是画出xOy直角坐标系中区域的图形,同时确定区域在极坐标系中的表达式.

上页 下页 返回

约定：

在极坐标系中,由于$r=\sqrt{x^2+y^2}\geq 0$,

$\theta\in[0,2\pi]$或$[-\pi,\pi]\cdots$

若某个θ_0,使得$r=r(\theta)$中的$r_0=r(\theta_0)<0$,

则人们约定：点(r_0,θ_0)实际上表示极坐标

系中点$(-r_0,\theta_0+\pi)$[或者是$(-r_0,\theta_0-\pi)$].

$(-r_0,\theta_0)$与$(-r_0,\theta_0+\pi)$[或$(-r_0,\theta_0-\pi)$]

关于极点对称.

如对于$r=2\cos\theta$,当$\theta\in\left[-\pi/2,\pi/2\right]$时$r\geq 0$,

而当$\theta=\dfrac{2\pi}{3}$时$r=2\cos\dfrac{2\pi}{3}=-1$,

$\therefore\left(-1,\dfrac{2\pi}{3}\right)$实际上表示点$\left(1,\dfrac{2\pi}{3}-\pi\right)$,

$$\left(1,\frac{2\pi}{3}-\pi\right)=\left(1,-\frac{\pi}{3}\right).$$

上页 下页 返回

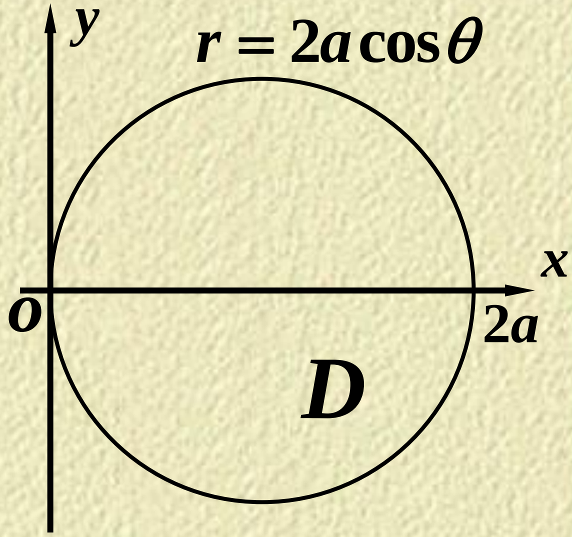
思考题.

$r=2a\cos\theta, a>0$是什么曲线?

解 $-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$时$r=2a\cos\theta\ge 0$,

$\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{2}$时$r=2a\cos\theta\le 0$,

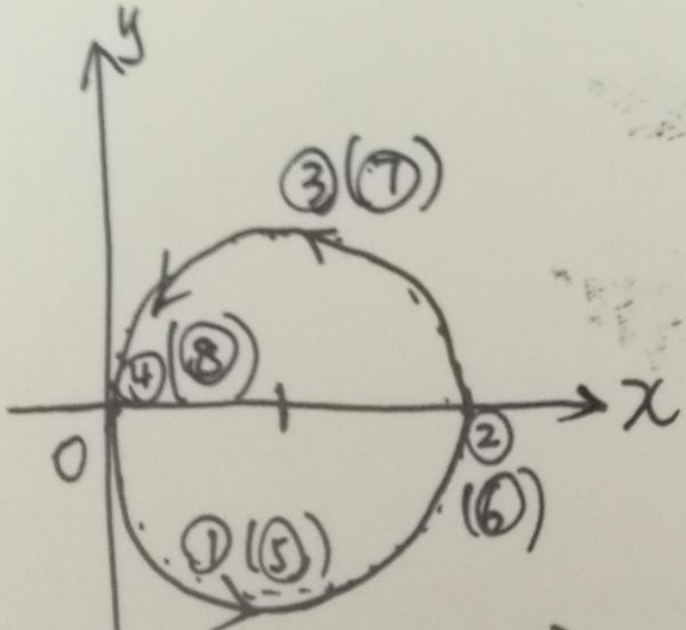
此时(r,θ)应表示点$(-r,\theta-\pi)$.



$r=2a\cos\theta\leftrightarrow r^2=2ar\cos\theta$

$\leftrightarrow x^2+y^2=2ax.$

上页 下页 返回



$r=2a\cos\theta, a>0$.

$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$时 $r=2a\cos\theta\ge0$

$\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3}{2}\pi$时 $r\le0$.

此时(r,θ)实际表示点$(-r,\theta-\pi)$.

$\theta: -\frac{\pi}{2}\to0\to\frac{\pi}{2}$,

$r: 0\to2a\to0$.

在$\theta: -\frac{\pi}{2}\to0\to\frac{\pi}{2}\to\pi\to\frac{3}{2}\pi$时，我们画曲线的笔迹沿着

①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧

的顺序行进，曲线被描了两遍.

$r=2a\cos\theta, a>0$是什么曲线?

$r=2a\cos\theta\leftrightarrow r^2=2ar\cos\theta\leftrightarrow x^2+y^2=2ax.$

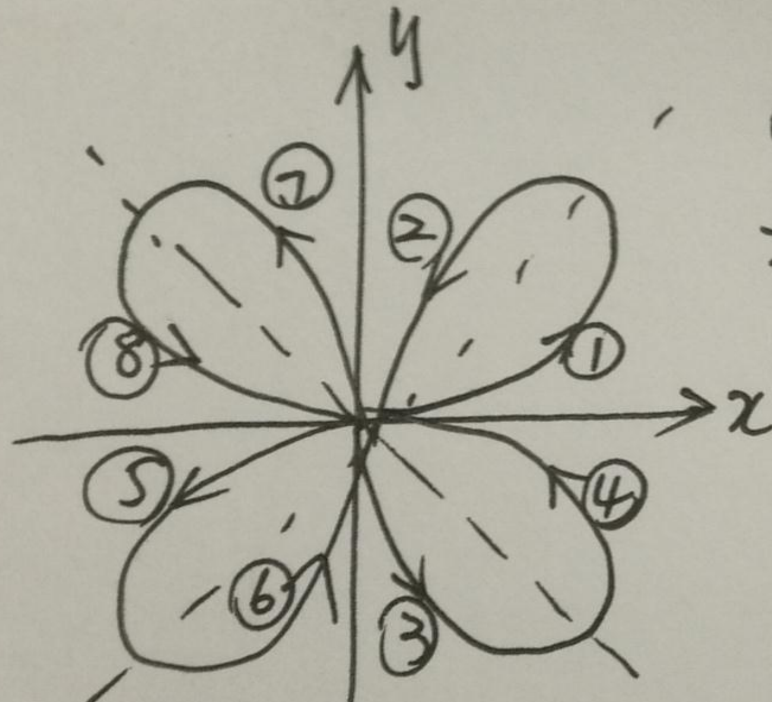
又如著名的四叶玫瑰线$(a>0)$

$$r = a\sin 2\theta\,,\quad \theta \in [0, 2\pi].$$

三叶玫瑰线$(a>0)$

$$r = a\sin 3\theta\,,$$

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right].$$



$r=a\sin 2\theta,\ a>0.$

$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi]$，$r\geq 0$.

当 $\theta\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时 $r\leq 0$，

此时 (r,θ) 实际表示

点 $(-r,\theta+\pi)$；

当 $\theta\in[\frac{3}{2}\pi,2\pi]$ 时 $r\leq 0$，

(r,θ) 实际表示点 $(-r,\theta-\pi)$.

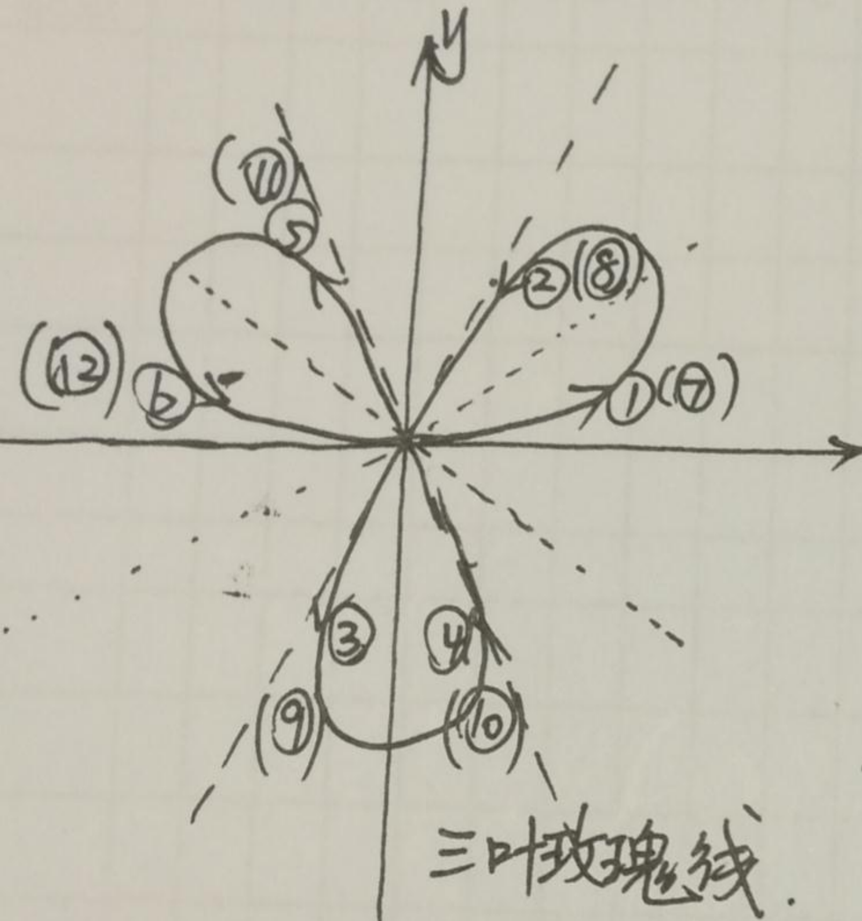
$\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时

$\theta: 0\to\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$.

$r=a\sin 2\theta: 0\nearrow a\searrow 0$.

在 θ 从 $0\to 2\pi$ 逆时针方向变化时，我们画曲线的笔迹沿着

①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧的方向行进.



$r=a\sin3\theta$，$a>0$.

$\theta\in[0,\frac{\pi}{3}]\cup[\frac{2\pi}{3},\pi]\cup[\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi]$，$r\geq0$.

当$\theta\in[\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi]$时$r\leq0$，此时
(r,θ)实际为点$(-r,\theta+\pi)$；

当$\theta\in[\pi,\frac{4}{3}\pi]$时$r\leq0$，
(r,θ)实际表示点$(-r,\theta-\pi)$；

当$\theta\in[\frac{5}{3}\pi,2\pi]$时$r\leq0$，
(r,θ)表示点$(-r,\theta-\pi)$.

当θ从$0\to2\pi$（逆时针方向）增加时，我们画曲线加笔进沿着①→②→③→④→⑤→⑥→⑦→⑧→⑨→⑩→⑪→⑫加过程行进，可见曲线被描了两遍，是为三叶玫瑰线.

例3*.求由曲线$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$所围成的平面图形的面积$(a>0)$.

解 方程$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$说明曲线围成的图形关于$x$轴对称,关于$y$轴也对称.

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

$$\rightarrow r^4=2a^2r^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)$$

$$\rightarrow r=0 \ \ or\ r=a\sqrt{2\cos 2\theta}.$$

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$$

$x^2-y^2\geq 0\leftrightarrow |y|\leq|x|$,即$\cos 2\theta\geq 0$,

$\therefore -\dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{5\pi}{4}$,

曲线的图象只落在$|y|\leq|x|$所示的区域内.

由对称性可知,我们只须考察第一象限中

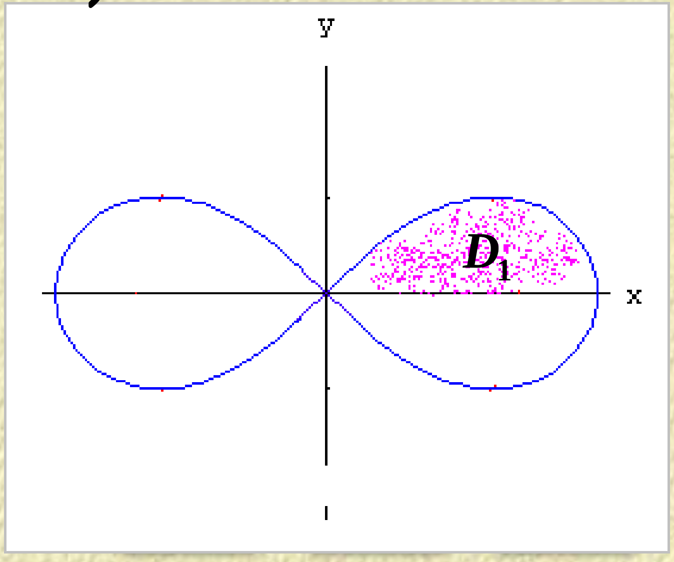
曲线的性状.当$\theta:0\cdots\to\dfrac{\pi}{4}$时$r=a\sqrt{2\cos 2\theta}$

的值从最大$r=a\sqrt{2}$ 逐渐变小直至$r=0$.

方程$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$说明曲线围成的图形关于$x$轴对称,关于$y$ 轴也对称.

$$r^2=2a^2\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)=2a^2\cos 2\theta,$$

$$\therefore A=4A_1=4\int_0^{\pi/4}\frac{1}{2}\cdot\left(2a^2\cos 2\theta\right)d\theta$$



$$=4a^2\int_0^{\pi/4}\cos 2\theta d\theta$$

$$=2a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\pi/4}=2a^2.$$

例4. 求曲线$r^2=2\sin\theta$围成的图形的面积.

解 $r^2=2\sin\theta\geq 0,\Rightarrow 0\leq\theta\leq\pi.$

$$\theta:0\uparrow\ \frac{\pi}{4}\uparrow\ \frac{\pi}{2}\uparrow\ \frac{3\pi}{4}\uparrow\ \pi,$$

$r=\sqrt{2\sin\theta}:0\uparrow\ \sqrt[4]{2}\uparrow\ \sqrt{2}\downarrow\ \sqrt[4]{2}\downarrow\ 0.$

据此画出图形的草图.

$$\therefore A=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2\sin\theta d\theta=2.$$

上页 下页 返回

思考练习.

请你画出下列方程对应的曲线草图.

设$a>0$.(此处,数a称为是尺度参数)

(1).$r=-2a\cos\theta$;

(2).$r=a(1+\cos\theta)$; (3).$r=a(1-\sin\theta)$;

(4).$r=a(2+\cos\theta)$;

(5).$\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$.

Ex.(4).画出曲线$r=a(2+\cos\theta)$ 围成的图形.

解 $r=a(2+\cos\theta)\geq 0$恒成立$\Rightarrow -\pi\leq\theta\leq\pi$.

因为$\cos(-\theta)=\cos\theta$,所以我们只需要画出

$0\leq\theta\leq\pi$ 部分的图形,$-\pi\leq\theta\leq 0$ 部分的图

形必定与$0\leq\theta\leq\pi$ 部分的图形关于横轴对称.

$$\theta:0\uparrow\frac{\pi}{2}\uparrow\pi, r=a(2+\cos\theta):3a\downarrow 2a\downarrow a.$$

所得曲线貌似“心脏肥大”…

上页 下页 返回