# Sec.14.2 函数的幂级数展开

一. Taylor级数

二. 函数展开成幂级数

我们知道,若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$(-R,R)(R>0)$内收敛,

则其和函数$S(x)$在$(-R,R)$内连续,任意多阶可导,

且$a_0 = S(0), a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!} \ (n = 1,2,\cdots)$.

如果一个函数$f(x)$在某区间$I$内可以用一个幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$来表示,即 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in I$,则$f(x)$在区间

$I$内连续,且任意多阶导函数连续.所有这样的函数

构成一个函数空间,记为$C^{\infty}(I)$,可以证明,这个无穷

维的函数空间$C^{\infty}(I)$是一个向量空间.

上页 下页 返回

若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n, x\in I$,则$f(x)$在区间$I$内连续,

且任意多阶导函数连续.所有这样的函数构成一个无穷维的向量空间$C^{\infty}(I)$.可以认为,

$$\{1, x, x^2, \cdots, x^n, \cdots\}$$

就构成了函数空间$C^{\infty}(I)$的一组基,

那么,*Th*.14.5的结论就相当于线性代数中的结论:$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$是$n$维向量空间$E^n$的一组基,$\alpha\in E^n$,那么

$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$ 且表达式唯一.

上页 下页 返回

问题.

1.$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,求和函数$S(x), x \in ?$

2.若$f(x)$在区间$I$内任意多阶可导,即 $f \in C^{\infty}(I)$,那么,如何给出$f(x)$的幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in I$ 的表达式?是否一定有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x), x \in I.$$

**复习** 在理论分析和近似计算中,常希望能用一个简单的函数来近似地表示一个比较复杂的函数.我们已经介绍了用线性函数(一次多项式)来近似表示函数的方法.

1. 设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处连续, 则有

$$f(x) \approx f(x_0) \quad \left[ f(x) = f(x_0) + \alpha \right]$$

2.设 $f(x)$ 在 $x_0$ 处可导,则有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$[f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)]$$

例如, 当 $|x|$ 很小时, $e^x \approx 1 + x$ ， $\ln(1 + x) \approx x$

上页 下页 返回

# 带有Peano型余项的Taylor公式

定理　如果函数$f(x)$在点$x_0$具有直至$n$阶的导数,则$f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个$n$次多项式与一个余项之和:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$+o(x^n)$　称为带*Peano*型余项的*Maclaurin*公式

## 带有Lagrange余项的Taylor公式

**泰勒(Taylor)中值定理** 如果函数 $f(x)$在点 $x_0$ 的某邻域内存在直至 $n+1$ 阶的连续导数，则当 $x$ 在该邻域内时，$f(x)$可以表示为 $x$ 的一个 $n$ 次多项式与一个余项 $R_n(x)$ 之和：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$ 其中$\xi$介于$x_0$与$x$之间.

# 一.Taylor级数

在Chap.04 §3 的Taylor定理中曾指出,若函数$f(x)$在点$x_0$的某邻域内存在直至$n+1$阶的连续导数,则

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\quad\cdots\quad(1)$$

这里$R_n(x)$是Lagrange型余项,

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\cdots(2)$$ 其中$\xi$在$x$与$x_0$之间,这就是$f$在$x_0$处的*Taylor*展开.

上页 下页 返回

如果在(1)中抹去余项$R_n(x)$,那么在$x_0$附近$f(x)$可用(1)式右边的多项式来近似代替,如果函数$f(x)$在$x=x_0$处存在任意阶的导数,这时称形式为

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \cdots(3)$$

的级数为函数$f(x)$在$x_0$处的**Taylor级数**。对于级数(3)在$x_0$附近是否能确切地表示$f(x)$,或说$f(x)$在点$x_0$处的Taylor级数,在$x_0$的附近其和函数是否就是$f(x)$,这就是本节所要讨论的内容。

**定理 14.7** $f(x)$在点$x_0$的 Taylor 级数, 在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x) \Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$.

证明 必要性

设$f(x)$能展开为Taylor级数,

$$\because\ f(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+R_n(x)$$

$$\therefore R_n(x)=f(x)-S_{n+1}(x), \because \lim_{n\to\infty} S_{n+1}(x)=f(x),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[f(x)-S_{n+1}(x)\right]=0\ .$$

充分性

$$\because\ f(x) - S_{n+1}(x) = R_n(x),$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[f(x) - S_{n+1}(x)\right] = \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n+1}(x) = f(x)$,

$\therefore\ f(x)$的Taylor级数收敛于$f(x)$.

上页 下页 返回

如果函数$f(x)$能在点$x_0$的某邻域内等于其**Taylor级数**的和函数,则称函数$f(x)$在点$x_0$的这一邻域内可以展开成Taylor级数,并称等式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\cdots\cdots(4)$$

的右边为函数$f(x)$在点$x=x_0$处的**Taylor级数**展开式,或称幂级数展开式。

由级数的逐项求导性质可推得:若$f(x)$为幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间上的和函数,则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

就是$f(x)$在$(-R,R)$上的Taylor级数展开式, 这是幂级数展开的唯一性问题.在实际应用上,主要讨论函数在$x=0$ 处的展开式.这时(3)式可以写作

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

称为Maclaurin级数。

例如 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

经过计算知道, $f(x)$在$x=0$处任意多阶可导,

且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$,

$\therefore\ f(x)$的*Maclaurin*级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n \equiv 0$,

该级数在$(-\infty,+\infty)$内的和函数为$S(x)\equiv 0$.

上页 下页 返回

因为$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

的*Maclaurin*展开式 $p_n(x)\equiv 0$,而其

*Lagrange*型余项$R_n(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}$,因而

$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\neq 0$,所以,除$x=0$外,$f(x)$

的*Maclaurin*级数处处不收敛于$f(x)$.

从定理14.7知道,余项对确定函数能否展开为幂级数是极为重要的.下面再给出当$x_0=0$时的Lagrange型余项:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$\xi$介于$x_0$与$x$之间.

上页 下页 返回

**Th.14.8** 若存在常数$M$,使得$\forall n\in\mathbb{Z}^{+}$,

$\forall x\in\left(x_0-R,x_0+R\right)$,有$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$,那么

$f$可在$\left(x_0-R,x_0+R\right)$内展开为Taylor级数.

**证明** 只需证明在定理的条件下有

$$\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,x\in\left(x_0-R,x_0+R\right).$$

事实上,由Lagrange型余项可得

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\left(x-x_0\right)^{n+1}\right|\le\frac{M\cdot R^{n+1}}{(n+1)!},$$

$$\because\sum_{n=0}^{\infty}\frac{R^n}{n!}<\infty\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0,x\in\left(x_0-R,x_0+R\right).$

上页 下页 返回

例1.给出函数$f(x)=\sin x$的*Maclaurin*级数.

解 $\sin^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right), n=1,2,\cdots$

$$\sin^{(n)}(x)\Big|_{x=0}=\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=\begin{cases}0 & ,n=2k\\ (-1)^k & ,n=2k+1\end{cases}$$

$\forall n\in\mathbb{Z}^+,\forall x\in(-\infty,+\infty)$,有

$\left|\sin^{(n)}(x)\right|=\left|\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\right|\le 1$, 由*Th*.14.12 知

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\ ,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

## 二. 函数展开成幂级数

### 1.直接法(Taylor级数法)

步骤: (1) 求$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$,

则级数在收敛区间内收敛于 $f(x)$.

上页 下页 返回

例2. 求 $k$ 次多项式函数

$$f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$$ 的展开式。

解　由于$f^{(n)}(0)=\begin{cases} n!c_n, n\le k, \\ 0, n>k, \end{cases}$

总有$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$,因而

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

$$=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_kx^k$$

即多项式函数的幂级数展开式就是它本身。

例3.求函数 $f(x)=e^x$ 的展开式

解 由于 $f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1, n=1,2,\cdots$ 所以$f$ 的

Lagrange余项为 $R_n(x)=\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, 0\le\theta\le 1$

显见 $\left|R_n(x)\right|\le\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}$

它对任何实数$x$ ,都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}=0$

因而 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ 由定理12.15得到

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots, x\in(-\infty,+\infty)$$

上页 下页 返回

## 2.间接法

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法 求展开式.

例如, $\cos x = (\sin x)'$

$$\because \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$\because x \in (-1,1)$时

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x},$$

幂级数求和

幂级数展开

$$\therefore \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots$$

$$x \in (-1,1).$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,(-1,1)$$

以$x^2$代入上式,可得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots,(-1,1)$$

$$\arctan x=\int_0^x\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,x\in[-1,1]$$

$$\ln(1+x)=\int_0^x\frac{dx}{1+x}=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=$$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,x\in(-1,1]$$

**例4** 用间接的方法求非初等函数

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$$ 的幂级数展开式。

并求 $F(1)=\int_0^1 e^{-t^2}dt$ 要求精确到0.0001

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,x\in(-\infty,+\infty)$$

解 $e^{x}=1+x+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}x^{n}+\cdots,-\infty<x<+\infty$

以$-x^{2}$替代上式中的$x$,得

$$e^{-x^{2}}=1-x^{2}+\frac{x^{4}}{2!}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!}x^{2n}+\cdots,-\infty<x<+\infty$$

再逐项积分,得$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上的幂级数展开式

$$F(x)=\int_{0}^{x}e^{-t^{2}}dt$$

$$=x-\frac{1}{1!}\frac{x^{3}}{3}+\frac{1}{2!}\frac{x^{5}}{5}-\frac{1}{3!}\frac{x^{7}}{7}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$$

$$F(1)=\int_{0}^{1}e^{-t^{2}}dt=1-\frac{1}{1!\cdot 3}+\frac{1}{2!\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 7}+\cdots+\frac{(-1)^{n}}{n!(2n+1)}+\cdots$$

$$\int_0^1 e^{-t^2}dt = 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + \cdots$$

这是一个交错级数.

对于交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n > 0$而言,

若其用部分和$S_n$来做近似,那么其绝对误差

$$|R_n| \le u_{n+1}.$$

现在要使得近似计算精确到 0.0001,求$n$,使得

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 0.0001$$

可从中确定一个最小的$n\cdots$

上页 下页 返回

例5.将函数$f(x)=\ln x$展开成$x-2$的幂级数.

解　令$x-2=t$,

$$\ln x=\ln(2+t)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)$$

$$=\ln 2+\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{t}{2}\right)^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{t}{2}\right)^n+\cdots$$

$$=\ln 2+\frac{x-2}{2}-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2}+\frac{(x-2)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}+\cdots,0<x\le 4$$

## 注：常用函数的Maclaurin级数

(1). $$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad ,x\in(-\infty,+\infty)$$

(2). $$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n,$$

$x\in(-1,1)\ \alpha\in(-\infty,+\infty)$，若$\alpha\in\mathbb{Z}^+$，那么上式就是*Newton*二项展开式，

特别：$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\qquad ,x\in(-1,1)$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,x\in(-1,1)$$

上页 下页 返回

$$(3).\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1},x\in(-1,1]$$

$$(4).\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in[-1,1]$$

$$(5).\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!},x\in(-\infty,+\infty)$$

## 小结

1.如何求函数的Taylor级数;

2. Taylor级数收敛于函数的条件;

3.函数展开成Taylor级数的方法.

# Sec.14.3 幂级数的应用举例

一.幂级数在近似计算中的应用

二.幂级数在常微分方程中的应用

三. 幂级数在其他方面的应用

# 一. 幂级数在近似计算中的应用

若函数$f(x)$在点$x_0$的某邻域内存在直至$n+1$阶的连续导数, 则 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)\cdots\ \cdots\ \cdots(1)$$

这里$R_n(x)$为*Lagrange*型余项 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

其中$\xi$在$x$与$x_0$之间, 称为是$f$在$x_0$的*Taylor*展开.

**定理 14.7** 函数$f(x)$在点$x_0$的邻域内任意阶导数均存在,则其 Taylor 级数在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x)$ $\Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$.

例1.给出函数$f(x)=e^x$的$n$阶$Maclaurin$公式.

解 $\because f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x$,

$\therefore f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$,

注意到$f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$,代入公式可得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

$$(0<\theta<1)$$

$\therefore f(x)=e^x$的$Maclaurin$级数为

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, (0 < \theta < 1)$$

由公式可知,$n$较大时$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$,

而其绝对误差为

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1},$$

取$x = 1$,则$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$,

其绝对误差为$|R_n| \le \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

$n = 10$时 $1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{10!}$

$$\approx 2.718\ 281\ 8\cdots$$

其绝对误差为

$$\left|R_{10}\right| < \frac{3}{11!} \approx 7.52 \times 10^{-8},$$

上页 下页 返回

例2.给出数$\pi$的近似计算式.

解 由$\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,$

$x\in(-1,1)$,以$x^2$代入上式,可得

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots, x\in(-1,1)$$

$\because \int_0^x \dfrac{dt}{1+t^2}=\arctan x,$ $\therefore$ 当$x\in[-1,1]$时有

$$\arctan x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots,$$

$$\therefore \pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\right)=4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

## 交错级数

**定理12.7 (Leibniz)** 如果交错级数满足条件:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n (\text{其中} u_n > 0)$$

$$(1)\ u_n \geq u_{n+1}, n \in \mathbb{Z}^+, (2)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

则级数收敛且其余项有 $\left|R_n\right| \leq u_{n+1}$

Leibniz级数用其部分和作为级数和的近似值,其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值.

上页 下页 返回

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$x \in [-1,1],$$

$$\therefore \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots\right) = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1},$$

因此, $\pi \approx 4\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots + \frac{(-1)^m}{2m+1}\right],$

而且该近似计算的误差$|R_{m+1}| \le \dfrac{4}{2m+3},$

但是,这种近似计算的收敛速度太慢,直到

$10^6$个项之和才有小数点后7位数字.

上页 下页 返回

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots,$$

$$x \in [-1,1],$$

若取$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$,则$\arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} = \frac{\pi}{6}$,

$$\therefore \pi = 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \frac{1}{9\cdot 3^4} - \frac{1}{11\cdot 3^5} + \cdots\right),$$

$\because \frac{2\sqrt{3}}{19\cdot 3^9} < 10^{-5}$,所以前9项之和已经精确到小数点后第四位了,收敛速度较之前有了提高,即

$$\pi \approx 2\sqrt{3}\left(1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 3^2} - \frac{1}{7\cdot 3^3} + \cdots - \frac{1}{19\cdot 3^9}\right) \approx 3.141\ 6$$

上页 下页 返回

数学家*Machin*发现了一个公式：

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4},$$

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

$$\therefore 4\arctan\frac{1}{5}=2\arctan\frac{2(1/5)}{1-(1/5)^2}$$

$$=2\arctan\frac{5}{12}=\arctan\frac{2(5/12)}{1-(5/12)^2}=\arctan\frac{120}{119},$$

*Machin*公式:

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4},$$

$$4\arctan\frac{1}{5}=\arctan\frac{120}{119},$$

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\arctan\frac{120}{119}-\arctan\frac{1}{239}$$

$$=\arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\arctan 1,$$

上页 下页 返回

数学家*Machin*发现了一个公式：

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4},$$

$$\because \tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta},$$

$$\therefore 4\arctan\frac{1}{5}=2\arctan\frac{2(1/5)}{1-(1/5)^2}$$

$$=2\arctan\frac{5}{12}=\arctan\frac{2(5/12)}{1-(5/12)^2}=\arctan\frac{120}{119},$$

$$\therefore 4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\arctan\frac{120}{119}-\arctan\frac{1}{239}$$

$$=\arctan\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=\arctan 1\ .$$

上页 下页 返回

*Machin*公式(1703年):

$$4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\ \frac{\pi}{4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}}-\frac{1}{239^{2n+1}}\right),$$

因此,$\pi\approx 4\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n}{2n+1}\left(\frac{4}{5^{2n+1}}-\frac{1}{239^{2n+1}}\right),$

该近似计算的绝对误差$\left|R_{m+1}\right|\le\frac{1}{2m+3}\cdot\frac{16}{5^{2m+3}},$

当$m=5$ 时,该近似计算的结果就为3.1415926了,可见其收敛速度已是十分令人满意的了.

有了*Machin*公式后,*Legendre*,*Gauss*,*Sturm*等人也相继给出了同样漂亮的结果.

例3.计算$\int_0^1 e^{-x^2}dx$的近似值,要求精确到0.000 1.

解 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R},$

$\therefore e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}, x \in \mathbb{R},$

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$$

$$= 1 - \frac{1}{1!\cdot 3} + \frac{1}{2!\cdot 5} - \frac{1}{3!\cdot 7} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} + \cdots$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

这是一个交错级数.

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} - \frac{1}{75600} + \cdots$$

对于交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n, u_n > 0$而言，

若其用部分和$S_n$来做近似，那么其绝对误差

$$\left|R_n\right| \le u_{n+1}.$$

现在要使得近似计算精确到 0.0001，求$n$，使得

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 0.0001$$

可从中确定一个最小的$n\cdots$

上页 下页 返回

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360}-\frac{1}{75600}+\cdots$$

现在要使得近似计算精确到 0.0001,求$n$,使得

$$\frac{1}{(n+1)!(2n+3)} < 0.0001$$

可从中确定一个最小的$n\cdots$

$\because \dfrac{1}{75600} < 1.5\times 10^{-5}$,故取 $n=7$,

前7项之和具有四位有效数字,即

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{10}-\frac{1}{42}+\frac{1}{216}-\frac{1}{1320}+\frac{1}{9360} = 0.748\ 6$$

上页 下页 返回

## 二. 幂级数在常微分方程中的应用

我们可以利用幂级数的逐项求导性质，去求解某些简单的常微分方程.

### # 幂级数的逐项求导性质

***Th*.14.4.** 设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在收敛区间$(-R,R)$上的和函数为$S$,则和函数$S(x)$在收敛区间$(-R,R)$内可导,并且有逐项求导公式:

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, |x| < R.$$

**推论** 设幂级数$\sum a_n x^n$在收敛区间$(-R, R)$内的和函数是$S$,则在$(-R, R)$内$S$有任意阶导数,且可逐项求导任意次,即

$$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots$$

$$S'(x)=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots$$

$$S''(x)=2a_2x+3\cdot 2a_3x+\cdots+n(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots$$

$$\cdots\quad\cdots$$

$$S^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n(n-1)\cdots 2a_{n+1}x+\cdots$$

上页 下页 返回

例4.验证函数$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

满足微分方程 $xy''+y'+xy=0.$

解 显然,题设幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$,

从而$\varphi(x)$在$(-\infty,+\infty)$上任意多阶可导.

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$$

$$\varphi'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n\cdot x^{2n-1}}{((2n)!!)^2},$$

$$\varphi''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2n(2n-1)x^{2n-2}}{((2n)!!)^2},$$

代入知$y=\varphi(x)$满足$xy''+y'+xy=0.$

验证$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$满足$xy''+y'+xy=0.$

为了更直观,我们用“+”号替代“Σ”:

$$\varphi(x)=1-\frac{x^2}{(2!!)^2}+\frac{x^4}{(4!!)^2}-\frac{x^6}{(6!!)^2}+\frac{x^8}{(8!!)^2}-\frac{x^{10}}{(10!!)^2}\cdots$$

$\varphi'(x)=\cdots\quad,\varphi''(x)=\cdots,$

代入知$y=\varphi(x)$满足$xy''+y'+xy=0.$

注:$8!!=2\cdot4\cdot6\cdot8$

$(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n-2)(2n)$

$(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$

**例5** 求解微分方程 $\begin{cases} y'' - xy = 0 \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, \end{cases}$

**解** 这是一个二阶线性变系数常微分方程, 要给出其满足初始条件的解. 这儿我们用幂级数来解之:

设$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,若幂级数能作逐项求导,

则$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$,

$\therefore 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n = xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \cdots (@)$,

$\because y(0) = 1, y'(0) = 0, \therefore a_0 = 1, a_1 = 0$,

$$2a_2+\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n=xy=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n\cdots(@),$$

$\because y(0)=1, y'(0)=0, \therefore a_0=1, a_1=0,$

比较(@)式两边同幂次项的系数,得到

$a_2=0, (n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1}, (n=1,2,\cdots)$

由此可得$a_5=a_8=\cdots=a_{3n-1}=0,$

$$\therefore a_{3n}=\frac{a_0}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots\big((3n-1)\cdot(3n)\big)},$$

$$a_{3n+1}=\frac{a_1}{(3\cdot 4)(6\cdot 7)\cdots\big((3n)\cdot(3n+1)\big)}=0,$$

$$y(x)=1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)}+\cdots$$ 易知该幂级数的

$$+\frac{x^{3n}}{(2\cdot 3)(5\cdot 6)\cdots\big((3n-1)\cdot(3n)\big)}+\cdots,$$收敛域为$(-\infty,+\infty)$

*Exercises*

1.用幂级数的方法求解微分方程

$$\begin{cases} y'' = 4y \\ y(0) = 0, y'(0) = 4 \end{cases}.$$

上页 下页 返回

## 三. 幂级数在其他方面的应用

有时, 幂级数在函数不等式的证明方面应用十分有效.

但特别的,利用指数函数的幂级数展开,我们可以得到*Euler*公式.

**例6** 证明：$x\in\mathbb{R},\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}\le e^{\frac{x^2}{2}}$

**试用导数的应用之常用方法证明之?**

**证明** $e^{x}=1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^{n}+\cdots,$

$$\therefore\ \frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{1}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$e^{\frac{x^2}{2}}=1+\frac{1}{2}x^{2}+\frac{1}{2^{2}\cdot 2!}x^{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n}\cdot n!}x^{2n}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!},$$

这两个幂级数的收敛半径均为$\infty$,所以在$x\in\mathbb{R}$时

$$\because\ \frac{1}{(2n)!!}\ge\frac{1}{(2n)!},\forall n\in\mathbb{Z}^{+},$$

$$\therefore\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)!!}-\frac{1}{(2n)!}\right]x^{2n}\ge 0$$

$$\therefore\ x\in\mathbb{R},\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\le e^{\frac{x^2}{2}}$$

上页 下页 返回

**例7** 求极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

试用 *L'Hopital* 法则解之?

解 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$

$$\ln(1+t) = t - \frac{1}{2}t^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{t^n}{n} + \cdots, t\in(-1,1]$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[x - x^2\left\{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{x}\right)^n + \cdots\right\}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3x}\cdots + \frac{(-1)^n}{nx^{n-2}} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{3x}\cdots + \lim_{x\to\infty}\frac{(-1)^n}{nx^{n-2}} + \cdots = \frac{1}{2}.$$

## 复级数的概念

$\forall n \in \mathbb{N}, a_n, b_n \in \mathbb{R}, u_n = a_n + ib_n, i = \sqrt{-1},$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \& \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛,

此时$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + ib_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + i\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

$\|u_n\| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, |a_n| \le \|u_n\|, |b_n| \le \|u_n\|,$

故有$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \& \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$均绝对收敛.

由指数函数的幂级数展开,我们可以得到*Euler*公式

$$由 e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$$

$$设 z = ix, \sqrt{-1} = i, x \in \mathbb{R},$$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots,$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right)$$

$$+i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

由$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,$

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots,$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right)$$

$$+ i\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)$$

$\because$ 在$x \in (-\infty, +\infty)$时

$$x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sin x$$

$$1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \cos x$$

返回

$$e^{ix}=1+(ix)+\frac{1}{2!}(ix)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(ix)^n+\cdots,$$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\right)$$

$$+i\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right),$$

$\because$ 在$x\in(-\infty,+\infty)$时

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots=\sin x,$$

$$1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\cos x.$$

***Euler Formula:*** $e^{ix}=\cos x+i\sin x,\ x\in\mathbb{R}$

## Euler Formula:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x, x \in \mathbb{R},$$

由此可得 *de Moivre*公式

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx,$$

$$\because (\cos x + i\sin x)^n = \left(e^{ix}\right)^n$$

$$= e^{inx} = \cos nx + i\sin nx,$$

有史以来最美数学公式之一：

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

由*de Moivre*公式

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx,$$可

极容易地得到三角函数的倍角公式,

如: $(\cos x + i\sin x)^2 = \cos 2x + i\sin 2x$

而 $(\cos x + i\sin x)^2$

$$= \cos^2 x + (i\sin x)^2 + 2\cos x \cdot i\sin x$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x + i \cdot 2\sin x\cos x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \\ \sin 2x = 2\sin x\cos x \end{cases}.$$

## 美丽的欧拉公式

$$e^{i\pi}+1=0$$

《欧拉神话般的公式》的作者,在书中称她为“数学美的典范”.

康斯坦斯·里德称她为“最卓越的数学公式”,而理查德·费曼把她唤作“欧拉的宝石”.伟大的高斯更是语出惊人:“如果被告知这个公式的学生不能立即领略她的风采,这个学生将永远不会成为一流的数学家.

——引自 科学网

幂级数的应用之一

用多项式一致逼近连续函数

***Weierstrass Th.***

$[a,b]$上的任何连续函数$f(x)$均能在该区间上用多项式一致逼近.

***Bernstein***多项式

详情参见常庚哲 史济怀《数学分析教程》