

Sec.12.3 一般项级数的审敛法

一. 交错级数及其审敛法

二. 绝对收敛与条件收敛

例1. 判断级数的敛散性

$$(1). \sum \frac{\sin nx}{2^n}; \quad (2). 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots;$$

$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

解 (1). 随着 x 取不同的值, 级数 $\sum \frac{\sin nx}{2^n}$ 显

示其并不是一个正项级数, 但是显然

有 $\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$, 由 *Cauchy* 收敛准则可

知级数 $\sum \frac{\sin nx}{2^n}$ 收敛, $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

$$(2). 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n, u_n = ?$$

收敛\发散,有何感觉?

对无限多个数的和运算我们不熟悉,考虑部分和

$$\begin{aligned} S_{3n} &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n} \\ &> 1 + \frac{1}{4} + \cdots \frac{1}{3n-2} > \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \cdots \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

我们知道调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots \frac{1}{n} \right) = \infty$,

由极限的**保序性**知 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{3n} = \infty$, 而 $\{S_{3n}\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子列,

由“数列收敛 \Leftrightarrow 数列的任意非平凡子列均收敛”知

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在, 故原级数发散.

$$(2). \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

或者, 记 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$, 考虑用 *Cauchy* 收敛准则:

$$|S_{4n} - S_n| =$$

$$\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{4n} \right|$$

$$> \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+4} + \dots + \frac{1}{4n-2}$$

$$> \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} + \dots + \frac{1}{4n} = \frac{1}{4}$$

\therefore 由 *Cauchy* 收敛准则, 知原级数发散.

$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 是收敛的, 由 *Cauchy* 收敛准则,

分析: 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 要确认存在 N , 使得对任意的 $n > N$, 对任意的 $m \in \mathbb{Z}^+$, 有

$$|S_{n+m} - S_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m} \right| < \varepsilon \text{ 成立.}$$

$$\text{而} \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m} \right| = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{n+m} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m} \right) < \frac{1}{n+1}, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+m-2} - \frac{1}{n+m-1} \right) - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}, m \text{ 偶} \end{cases}$$

所以只要 $\frac{1}{n+1} < \varepsilon$, 即 $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$ 可也, 故可取 $N \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

(3)证明: $\because \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq \frac{1}{\varepsilon}, \forall n > N, \forall m \in \mathbb{Z}^+,$

$$\text{对于 } |S_{n+m} - S_n| = \left| \frac{(-1)^n}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^{n+m-1}}{n+m} \right|$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} + \cdots + \frac{(-1)^{m-1}}{n+m} =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots \right) < \frac{1}{n+1}, m \text{ 为奇数} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots \right) - \frac{1}{n+m} < \frac{1}{n+1}, m \text{ 为偶数} \end{cases}$$

有 $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{N} \leq \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon$, 即 $|S_{n+m} - S_n| < \varepsilon, \therefore$ 原级数收敛.

一. 交错级数及其审敛法

1. 交错级数.

若 $u_n > 0$, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ 为交错级数.

定理12.7 (Leibniz). 若交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$

满足条件(1). $u_n \geq u_{n+1}, n \in \mathbb{Z}^+, (2). \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$

则该级数收敛, 且其余项 $|R_n| \leq u_{n+1}.$

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0$,

$$\because S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

\therefore 数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调增加的. 又

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leq u_1$$

数列 $\{S_{2n}\}$ 是有上界的.

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S \leq u_1. \because \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0,$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + u_{2n+1}) = S,$$

\therefore 级数的和为 S , 且 $S \leq u_1$.

$$\text{余项 } |R_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots, \therefore |R_n| \leq u_{n+1}.$$

例2.判断交错级数 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

的敛散性.

解 $\because u_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = u_{n+1}$
 $(n = 1, 2, \dots),$

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$

\therefore 由Leibniz *th.*知级数收敛.

若记 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = S,$

那么 $1 - \frac{1}{2} < S < 1,$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} < S < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} < S$$
$$< 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}, \cdots$$

例2.(2). 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 的敛散性 .

解 $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1} \right)' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0, (x \geq 2)$

故函数 $\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ 单调递减, $\therefore u_n > u_{n+1}$,

又 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$, 原级数收敛.

说明：

1.定理12.7—**Leibniz判别法**,是判定交错级数收敛的充分而非必要条件.

→ Leibniz判别法的条件之一不满足 ,
那结果如何呢?

2.判定 $u_{n+1} < u_n$ 的方法:

(1). $u_{n+1} - u_n < 0$;

(2). $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$;

(3).相应函数的单调性.

Ex.1.试判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{解} \because & \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) + \cdots \\ & = \frac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots \\ & + \frac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} + \cdots \\ & = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} \because & \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \cdots \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) + \cdots \\
 = & \frac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots \\
 & + \frac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} + \cdots \\
 = & 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots \right),
 \end{aligned}$$

由于调和级数发散,由级数性质4:若级数加括号后发散,则原级数发散.再由性质1:级数乘上非零数,级数的敛散性不变.故此原级数发散.

二. 绝对收敛与条件收敛

2. 绝对收敛和条件收敛:

定义: 正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

任意项级数的各项取绝对值

任意项级数



正项级数

问题: 如何研究任意项级数的敛散性?

任意项级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛： $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛；

2. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛：

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散， $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

3. $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理12.8.若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明 令 $v_n = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$, $n = 1, 2, \dots$

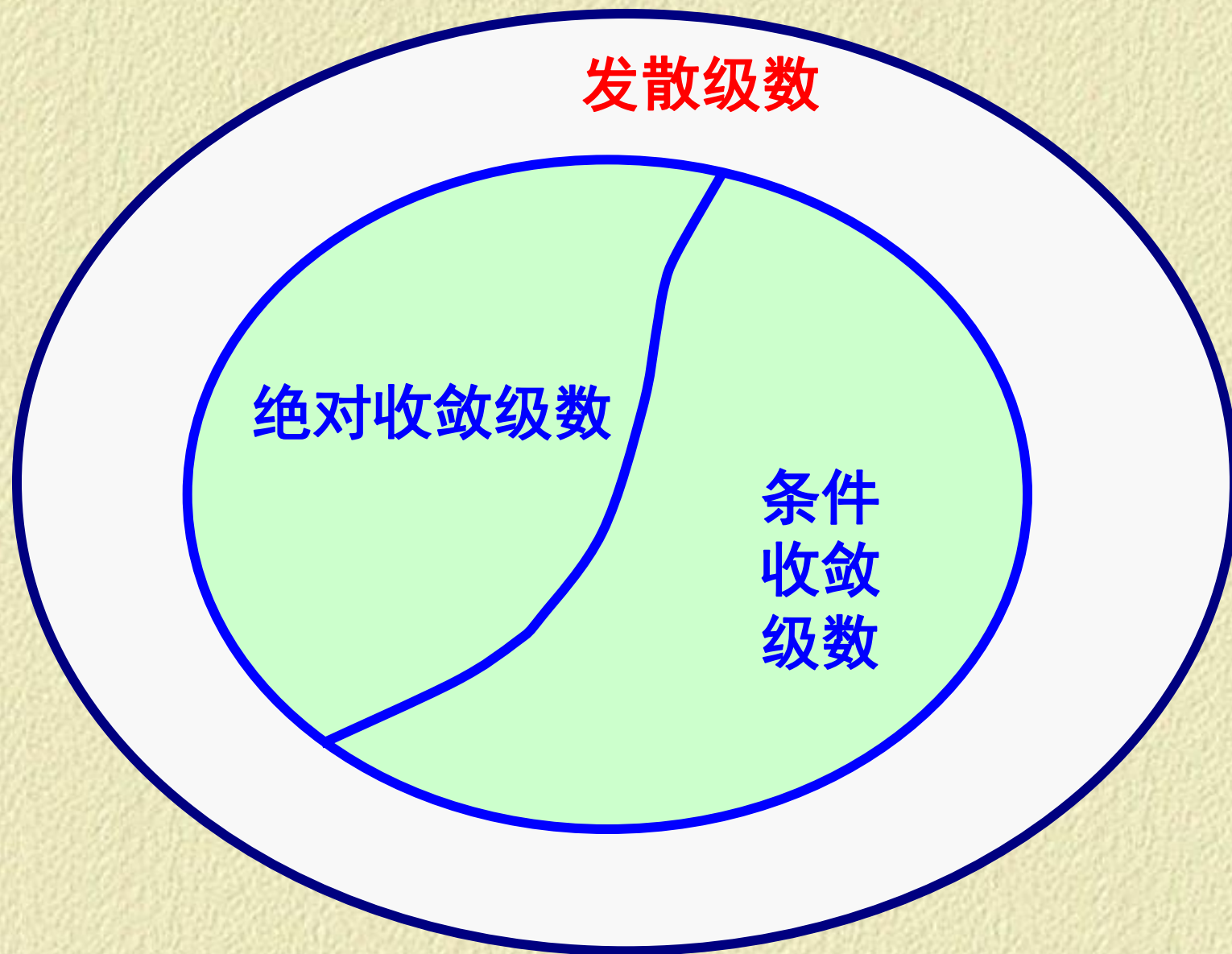
显然 $v_n \geq 0$, 且 $v_n \leq |u_n|$,

\therefore 由正项级数的比较判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{收敛},$$

又 $\because \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (2v_n - |u_n|)$, 由收敛

级数的线性运算性质知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.



级数敛散关系图

例3.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的敛散性.

解 $\because \left| \frac{\sin n}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\sin n}{n^2} \right|$ 收敛,

由 $Th.12.8$ 知原级数绝对收敛.

例3.(2). 判断级数 $\sum \frac{\sin nx}{2^n}$ 的敛散性 .

解 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. 有 $\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$,

$\sum \frac{1}{2^n}$ 收敛, 据 *Th.12.8* 知原级数在 $(-\infty, +\infty)$ 上绝对收敛, 当然收敛 .

原级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

Q.如何判断任意项级数的敛散性?

A. $\sum u_n \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ 否 $\rightarrow \sum u_n$ 发散

是

正项级数的敛散性?

$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛?

是

级数绝对收敛

否

交错级数?
级数定义?

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛?

是

级数条件收敛

否

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

无法判定 😞

上页

下页

返回

例3.(3).试问级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ 是

否收敛?若收敛,是绝对/条件收敛?

解 $|u_n| = \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n} = \frac{1}{n+1},$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散,

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2+1}$ 非绝对收敛.

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}, \because \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0,$$

$$\text{设 } f(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad (x \geq 1),$$

$$x \geq 1 \text{ 时 } f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0,$$

$f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, $\therefore u_n \geq u_{n+1}$.

由 *Leibniz* 定理, $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2 + 1}$ 收敛即条件收敛.

如何判定正数列 $\left\{ \frac{n}{n^2 + 1} \right\}$ 的单调性：

(1). 作差法： $\frac{n}{n^2 + 1} - \frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 1} > 0?$

(2). 比值法： $\left(\frac{\frac{n + 1}{(n + 1)^2 + 1}}{\frac{n}{n^2 + 1}} \right) < 1 ?$

(3). 导数法：设 $f(x) = \frac{x}{1 + x^2} (x \geq 1)$,

则 在 $[1, +\infty)$ 上 $f'(x) \leq 0?$

例4.判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin \frac{n\pi}{9}}{3^n}$ 的敛散性 .

解 注意, $\sin \frac{n\pi}{9}$ 是干扰项.

$$\therefore \left| \frac{n \sin \frac{n\pi}{9}}{3^n} \right| \leq \frac{n}{3^n}, \text{对正项级数 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n},$$

$$\text{由根值法, } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1,$$

\therefore 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 收敛,

\therefore 原级数绝对收敛.

例4.(2).判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n + (-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的敛散性 .

解 注意,解题不能不管不顾地一上来就通项取绝对值.

$$\left| \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n} \right| < \frac{2^n}{n \cdot 3^n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n \cdot 3^n}} = \frac{2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{2}{3} < 1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n}$ 绝对收敛,故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n}$ 收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是交错级数,满足 *Leibniz* 定理条件,

故 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. (需注意 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 是条件收敛的)

由收敛级数加法性质知原级数收敛.

例4.(2).判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n + (-3)^n}{n \cdot 3^n}$ 的敛散性.

注意,解题不能不管不顾地一上来就通项取绝对值.

$$\text{倘若你作 } \left| \frac{2^n \cos n + (-3)^n}{n \cdot 3^n} \right| \leq \left| \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n} \right| + \left| \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} \right| < \frac{2^n}{n \cdot 3^n} + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n \cdot 3^n} \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n} \text{绝对收敛, 故 } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cos n}{n \cdot 3^n} \text{收敛}.$$

但是, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散,你就得不到有用的信息了.

例5.判断下列级数的敛散性.

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad (2). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad (3). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

解 (1).当 $x = 0$ 时显然级数收敛.

而当 $x \neq 0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

故此级数对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛.

$$(2). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

当 $x = 0$ 时显然级数收敛.而当 $x \neq 0$ 时,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} |x|^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

\therefore 对任一确定的 $x \in \mathbb{R}$,级数绝对收敛.

(3). $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$, 当 $x = 0$ 时级数显然收敛.

而 $x \neq 0$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|$,

$\therefore |x| < 1$ 时级数绝对收敛,

$|x| > 1$ 时级数发散; (?)

而 $|x| = 1$ 时, $x = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ 是级数,

此时级数收敛——条件收敛;

$x = -1$, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$, 显然级数发散.

说明：

对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \neq 0$) 而言,

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = r$, 那么

(1). $0 \leq r < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

(2). $r > 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散. $\left(\because r > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty \right)$

第一节思考练习：判断级数敛散性：

$$(1). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}; \quad (2). \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right);$$

$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; \quad (4). \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{2n+1} \right].$$

现在再来做这样的题目就觉得十分简单了吧！

思考练习2.

(1).若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

试问 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 是否收敛?

(2).若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

试问 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 是否收敛?

请问这一做法对吗？

(1).若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛!

证明 \because 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,

\therefore 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = r < 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$,

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n^2} = r^2 < 1$ 或 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} = r^2 < 1$,

由根值法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.
比值

前面的这一做法是错误的!

∴比值/根值法判断级数收敛的定理,其条件是充分的而不是必要的.

即 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 \nRightarrow

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = r < 1 \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1.$$

(1).若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛!

正确的做法可为:

$$\because u_n > 0 \text{ 时}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

(2).若一般项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 \text{收敛!}$$

比如, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是Leibniz级数,条件收敛.

但 $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数,发散.



3. 绝对收敛级数的一个重要性质※

——→级数的重排.

定义: 把正整数列 $\{1, 2, \dots, n \dots\}$ 到它自身的一一映射 $f : n \rightarrow k(n)$ 称为正整数列的重排, 相应地对于数列 $\{u_n\}$ 按映射 $F : u_n \rightarrow u_{k(n)}$ 所得到的数列 $\{u_{k(n)}\}$ 称为

原数列的重排, 那么相应地称 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k(n)}$ 为

原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的重排.

定理12.9.* 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛, 其和等于

S , 则级数重排后的新级数也绝对收敛于 S .

注意: 条件收敛的级数重排后得到的新级数, 可以发散可以收敛. 即使收敛, 在作适当的重排后, 新级数可以收敛于任一事先指定的数.

结论: 级数绝对收敛时级数的加法满足加法交换律. 级数条件收敛时级数的加法不满足加法交换律.

容易看出, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ 条件收敛. 记

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = A,$$

可以按某一规则得到

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots = \frac{3}{2}A,$$

甚至可以重排该级数的项的次序, 使得级数收敛于任何的有限值, 甚或发散.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = A,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{2}A,$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{13} - \frac{1}{14} + \dots = A,$$

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} + 0 - \frac{1}{12} + 0 + \frac{1}{14} + \dots = \frac{1}{2}A,$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots \dots \dots = \frac{3}{2}A$$

在概率论中,一个离散型随机变量的数学期望的定义需要无穷级数的绝对收敛,就是要期望值不随随机变量的分布律中的取值次序的改变而有什么变化.

定义:设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, 3, \dots$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| p_k$ 收敛,则称 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望(*mathematical expectation*)或平均值(*mean*),简称 期望或均值记为 $E(X)$ 或 $M(X)$.

4. 级数的乘积

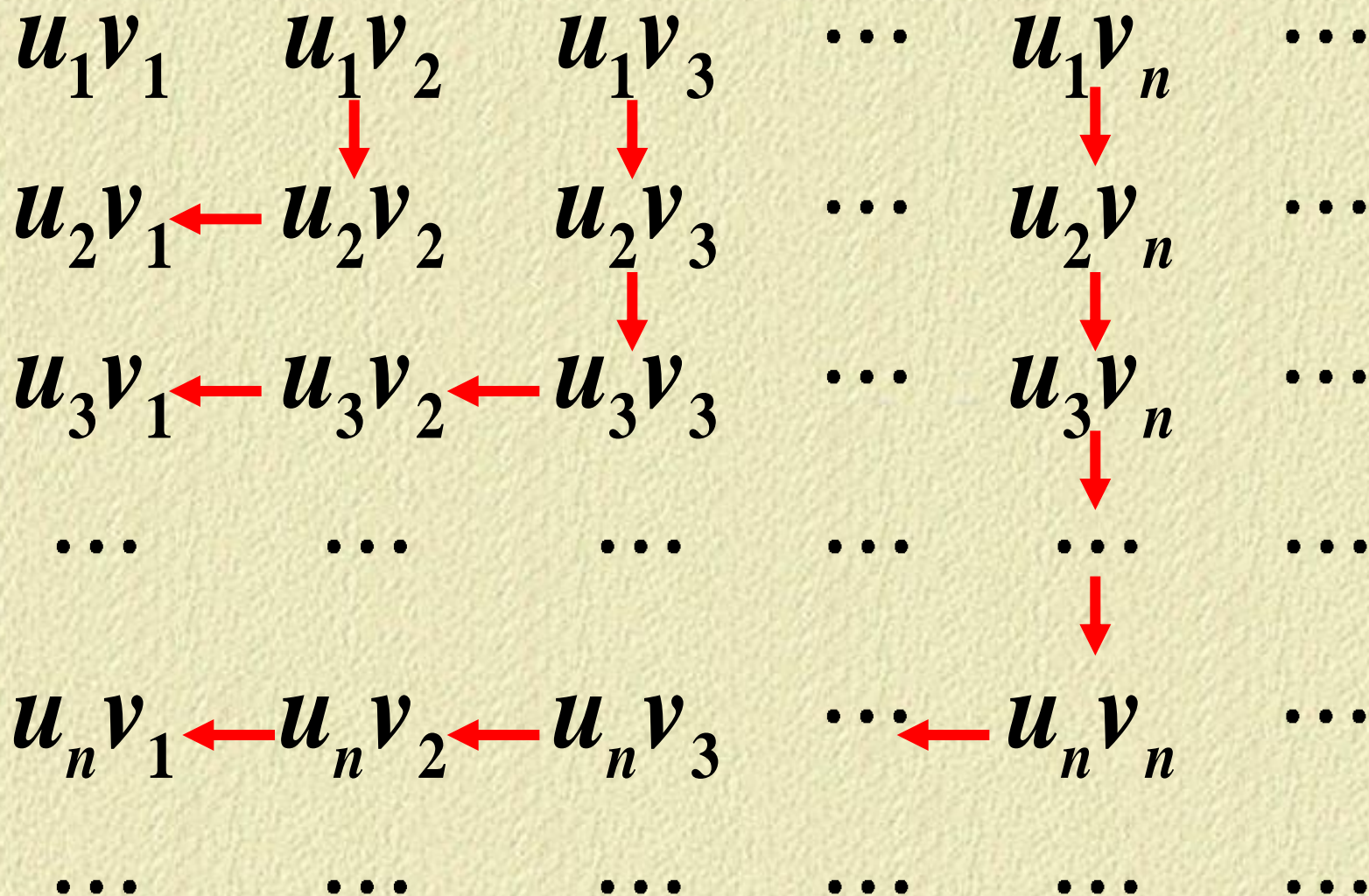
$$\text{设 } \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = A \cdots \cdots (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots = B \cdots \cdots (2)$$

为收敛级数,则(1)与(2)中每一项所有可能的乘积列表如下:

$$\begin{array}{cccccc} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 & \cdots & u_1 v_n & \cdots \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 & \cdots & u_2 v_n & \cdots \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 & \cdots & u_3 v_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_n v_1 & u_n v_2 & u_n v_3 & \cdots & u_n v_n & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \cdots \cdots (3)$$

$u_1 v_1$	$u_1 v_2$	$u_1 v_3$	\cdots	$u_1 v_n$	\cdots
$u_2 v_1$	$u_2 v_2$	$u_2 v_3$	\cdots	$u_2 v_n$	\cdots
$u_3 v_1$	$u_3 v_2$	$u_3 v_3$	\cdots	$u_3 v_n$	\cdots
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots
$u_n v_1$	$u_n v_2$	$u_n v_3$	\cdots	$u_n v_n$	\cdots
\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots	\cdots



这些乘积 $u_i v_j$ 可以按各种方法排成不同的级数,常用的有按正方形顺序或对角线顺序依次相加,于是分别有:

$$u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_2 + u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_2 v_3 + u_3 v_3 + \cdots$$

和 $u_1 v_1 + u_1 v_2 + u_2 v_1 + u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1 + \cdots$

定理12.10.* (Cauchy定理) 若级数(1),(2)都绝对收敛,则对(3)中所有乘积 $u_i v_j$ 按任意顺

序排列所得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛,且

其和等于 AB .

*Cauchy*定理说,

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = A, \sum_{n=1}^{\infty} v_n = B$, 都绝对收敛, 则级数

的按任意顺序排列所得到的乘积级数

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_3 + u_3v_3 + \cdots$$

和 $u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \cdots$

也绝对收敛, 且其和等于 AB .

定理条件“级数绝对收敛”就是由于级数的乘积需要加法交换律.

例6.* 显然,级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$ 对任意给定

的实数 x, y 都绝对收敛. 若记 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,

则有 $S(x)S(y) = S(x+y)$.

解 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!},$

$$S(x)S(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \overset{\substack{\text{用Cauchy乘积} \\ \text{对角线法排列}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

解 $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!},$

$$S(x)S(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \overset{\text{用Cauchy乘积}}{\underset{\text{对角线法排列}}{=====}} \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$\frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!},$$

$$\therefore S(x)S(y) = S(x+y), x, y \in \mathbb{R}.$$

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!},$$

$$S(x)S(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) \overset{\text{用Cauchy乘积}}{\underset{\text{对角线法排列}}{=====}} \sum_{n=0}^{\infty} w_n$$

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}$$

$$\therefore S(x)S(y) = S(x+y).$$

以后就知道了,函数 $S(x)$ 就是指数函数 $S(x) = e^x$,

$$S(x)S(y) = S(x+y)$$

就是指数函数的一个基本特征 .

小结

	正项级数	任意项级数
审敛法	<ul style="list-style-type: none">1. 当 $n \rightarrow \infty, u_n \not\rightarrow 0$, 则级数发散 ;2. 若 $S_n \rightarrow S$, 则级数收敛;3. 按基本性质;	
	<ul style="list-style-type: none">4. 充要条件5. 比较法: 不等式或极限形式6. 比值法/根值法	<ul style="list-style-type: none">4. 绝对收敛5. 交错级数 (莱布尼茨定理)

思考练习 3

1. 判别下列级数是否收敛? 若是收敛, 试问是绝对收敛还是条件收敛? (题(4)略难, 可以忽略)

$$(1). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}} ; \quad (2). \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n} ;$$

$$(3). \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{10^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{3}{10^3} + \cdots ;$$

$$(4). \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots \\ + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots .$$

2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n$ 存在, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

思考练习 3

3. 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}, (p > 0)$ 是否收敛?

若是收敛,试问是绝对收敛还是条件收敛?

(此题略难, 可以忽略)

Ex.1.(3). $\frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{10^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{3}{10^3} + \dots$

解 $S_{2n} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} + \frac{1}{3^2} - \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{1}{3^n} - \frac{3}{10^n}$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} \right) - \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^n} \right)$$
$$= \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{3}{10} - \frac{3}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} \right) \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6},\end{aligned}$$

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_{2n} + \frac{1}{3^{n+1}} \right) = \frac{1}{6},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{6},$$

\therefore 级数收敛.

Ex.1.(4) .判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \cdots$$

$$\begin{aligned} \text{解} \because & \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \cdots \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) + \cdots \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots$$

$$+ \frac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} + \cdots$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots \right),$$

$$\begin{aligned}
 \text{解} & \because \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \right) + \cdots \\
 & + \left(\frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+1} \right) + \cdots \\
 & = \frac{2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)} + \cdots \\
 & + \frac{2}{(\sqrt{n}-1)(\sqrt{n}+1)} + \frac{2}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1)} + \cdots \\
 & = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \cdots \right),
 \end{aligned}$$

由于调和级数发散,由级数性质4:若级数加括号后发散,则原级数发散.再由性质1:级数乘上非零数,级数的敛散性不变.故此原级数发散.

Ex.2. 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n$ 存在, 求证级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

证明 $\because \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 u_n = a$ 存在,

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 |u_n| = |a| \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}} = |a|,$$

由正项级数的比较判别法的极限形式:

由级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 \Rightarrow 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

Ex.3. 判断级数 $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p}, (p > 0)$ 的敛散性.

要旨：
得其意
而
忘其言！

解 (1). $p > 1$ 时, $\left| \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} \right| \leq \frac{1}{(n-1)^p},$

由 p -级数 $\sum_2^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 知原级数绝对收敛.

$$(2). S_{2n} = \frac{1}{3^p} - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{5^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)^p} - \frac{1}{(2n)^p},$$

由于在 $0 < p \leq 1$ 时, $\sum_2^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 收敛, $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n}$ 存在.

$$\text{又 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{[n + (-1)^n]^p} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} \text{ 存在} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \text{ 存在.}$$

$\therefore p > 0$ 时原级数收敛.

上页

下页

返回

思考练习 3

4. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$ 是否收敛？

若收敛是条件收敛还是绝对收敛？

(此题略难，可以忽略)

Ex.3-4. 判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$ 敛散性 .

解 $|u_n| = \frac{1}{\sqrt{n + (-1)^n}} > \frac{1}{\sqrt{2n}}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n}}$ 发散,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散 .

下面判断是否条件收敛, 首先认定是交错级数, 但因不满足 $u_{n+1} \leq u_n$, 所以莱布尼兹判定法无效. 此处可用定义证明 .

$$\because S_{2n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right), \text{或}$$

$$S_{2n} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) + \frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

$\therefore S_{2n}$ 为单调减少有下界数列,

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = S, \because \lim_{n \rightarrow \infty} u_{2n+1} = 0, \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = S,$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, 原级数收敛.

\therefore 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$ 条件收敛.



上页

下页

返回