99. 定积分的近似计算

1. 问题的提出

计算定积分的方法：

(1) 求原函数；
(2) 利用牛顿－莱布尼茨公式得结果.

问题：

(1) 被积函数的原函数不能用初等函数表示；

(2) 被积函数难于用公式表示，而是用图形或表格给出的；

(3) 被积函数虽然能用公式表示，但计算其原函数很困难.

解决办法： 建立定积分的近似计算方法.

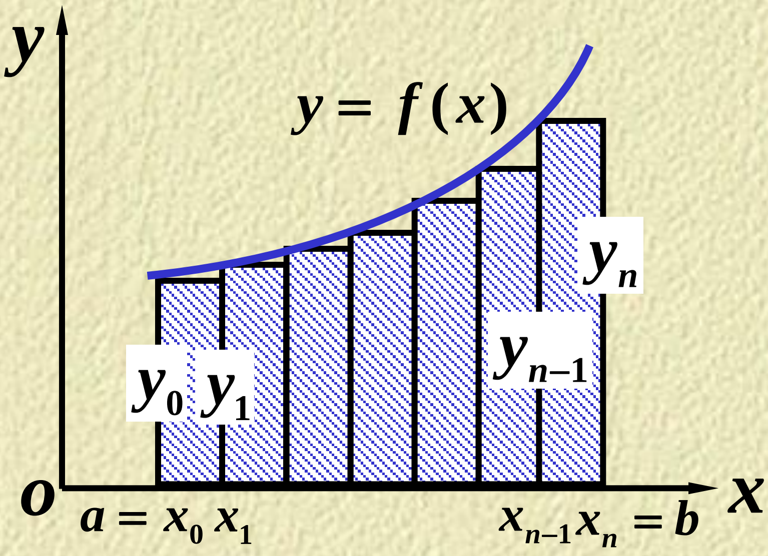
思路：

$\int_a^b f(x)dx$ $(f(x) \geq 0)$ 在数值上表示曲边梯形的面积，只要近似地算出相应的曲边梯形的面积，就得到所给定积分的近似值.

常用方法： 矩形法、梯形法、抛物线法.

2. 矩形法

用分点 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$ 将区间 $[a,b]$ n 等分，取小区间左端点的函数值 $y_i\,(i = 0,1,\cdots,n)$ 作为窄矩形的高，如图



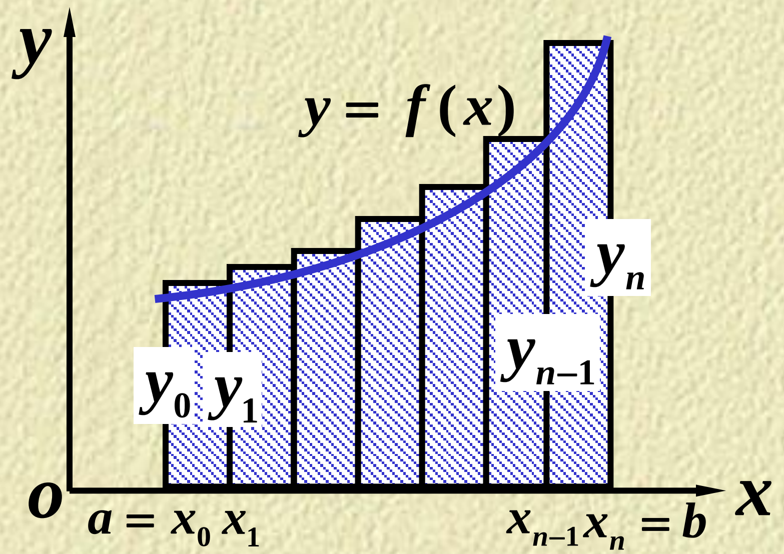
则有

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta x$$

$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} \qquad (1)$$

取右端点的函数值 $y_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 作为窄矩形的高，如图

则有



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} y_i \Delta x$$

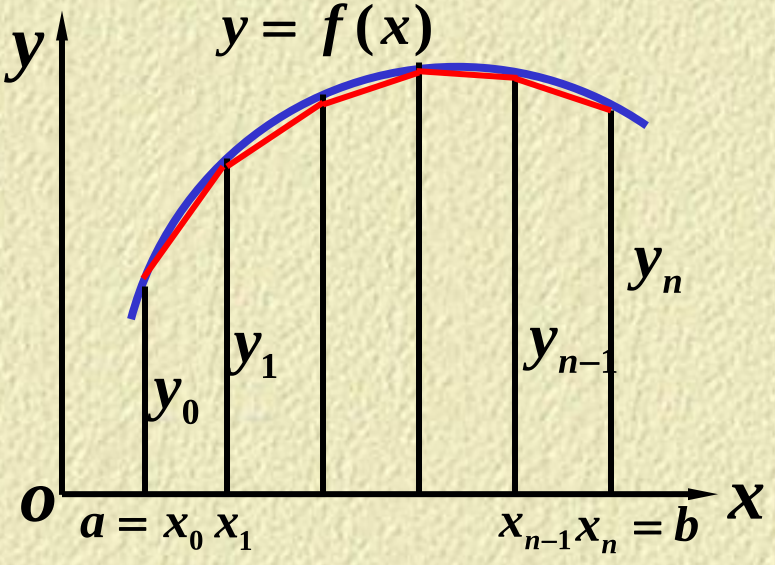
$$= \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \qquad (2)$$

(1)、(2) 称为矩形法公式.

上页 下页 返回

3. 梯形法

梯形法就是在每个小区间上，以窄梯形的面积近似代替窄曲边梯形的面积，如图



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{2}(y_0+y_1)\Delta x+\frac{1}{2}(y_1+y_2)\Delta x$$

$$+\cdots+\frac{1}{2}(y_{n-1}+y_n)\Delta x$$

$$=\frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right] \quad (3)$$

上页 下页 返回

例1. 用矩形法和梯形法计算积分 $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ 的近似值.

解 把区间十等分,设分点为 $x_i, (i=0,1,\cdots,10)$

相应的函数值为 $y_i = e^{-x_i^2}\ (i=0,1,\cdots,10)$,列表如下:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	1.00000	0.99005	0.96079	0.91393	0.85214	0.77880

上页 下页 返回

i	6	7	8	9	10
x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y_i	0.69768	0.61263	0.52729	0.44486	0.36788

利用矩形法公式（1），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \left(y_0 + y_1 + \cdots + y_9\right)\cdot\frac{1-0}{10} = 0.77782.$$

利用矩形法公式（2），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \left(y_1 + y_2 + \cdots + y_{10}\right)\cdot\frac{1-0}{10} = 0.71461.$$

利用梯形法公式（3），得

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1-0}{10}\left[\frac{1}{2}\left(y_0+y_{10}\right)+y_1+y_2\cdots+y_9\right]$$

这就是前面两个矩形法所得近似值的算术平均值，

$$\therefore \int_0^1 e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{2}\left(0.77782+0.71461\right)=0.74621.$$

4. 抛物线法

抛物线法是将曲线分为许多小段，用对称轴平行于 y 轴的二次抛物线上的一段弧来近似代替原来的曲线弧，从而得到定积分的近似值.

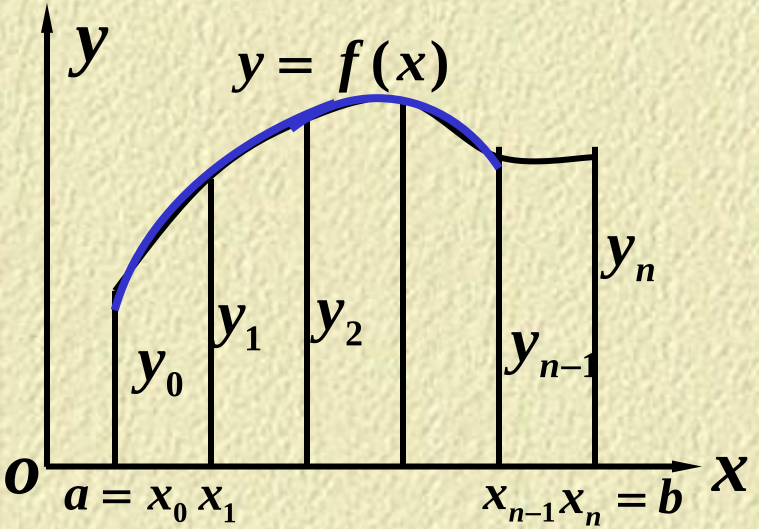
用分点 $a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b$

把区间分成 n(偶数)等分，

这些分点对应曲线上的点

为 $M_i(x_i, y_i), y_i = f(x_i)$.

$$(i = 0, 1, 2, \cdots n)$$



因为经过三个不同的点可以唯一确定一抛物线,

故可将这些曲线上的点 M_i 互相衔接的分成 $\frac{n}{2}$ 组,

$\{M_0, M_1, M_2\}, \{M_2, M_3, M_4\}, \cdots, \{M_{n-2}, M_{n-1}, M_n\}$.

在每组 $\{M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k}\}\left(k = 1, 2, \cdots, \frac{n}{2}\right)$ 所对应的子区间 $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ 上,用经过点 M_{2k-2}, M_{2k-1}, M_{2k} 的二次抛物线 $y = px^2 + qx + r$ 近似代替曲线弧 $y = f(x)$.

上页 下页 返回

计算在$[-h,h]$上过三点 $M_0'(-h,y_0), M_1'(0,y_1)$, $M_2'(h,y_2)$,的抛物线 $y=px^2+qx+r$ 为曲边的曲边梯形的面积.

抛物线方程中的 p,q,r 可由下列方程组确定:

$$\begin{cases} y_0 = ph^2 - qh + r \\ y_1 = r \\ y_2 = ph^2 + qh + r \end{cases},$$

由此得 $2ph^2 = y_0 - 2y_1 + y_2$.

于是所求面积为

$$A=\int_{-h}^{h}\left(px^2+qx+r\right)dx$$

$$=\frac{2}{3}ph^3+2rh=\frac{1}{3}h\left(2ph^2+6r\right)$$

$$=\frac{1}{3}h\left(y_0+4y_1+y_2\right),$$

显然,曲边梯形的面积只与 M_0', M_1', M_2' 的纵坐标 y_0, y_1, y_2 及底边所在的区间长度 $2h$ 有关.

上页 下页 返回

由此可知$\frac{n}{2}$组曲边梯形的面积为

$$A_1=\frac{1}{3}h\left(y_0+4y_1+y_2\right),\quad A_2=\frac{1}{3}h\left(y_2+4y_3+y_4\right),$$

…… …… ……

$$A_{\frac{n}{2}}=\frac{1}{3}h\left(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n\right),\text{其中 } h=\frac{b-a}{n}.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\left[\begin{array}{r}\left(y_0+y_n\right)+2\left(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2}\right)\\ +4\left(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1}\right)\end{array}\right].$$

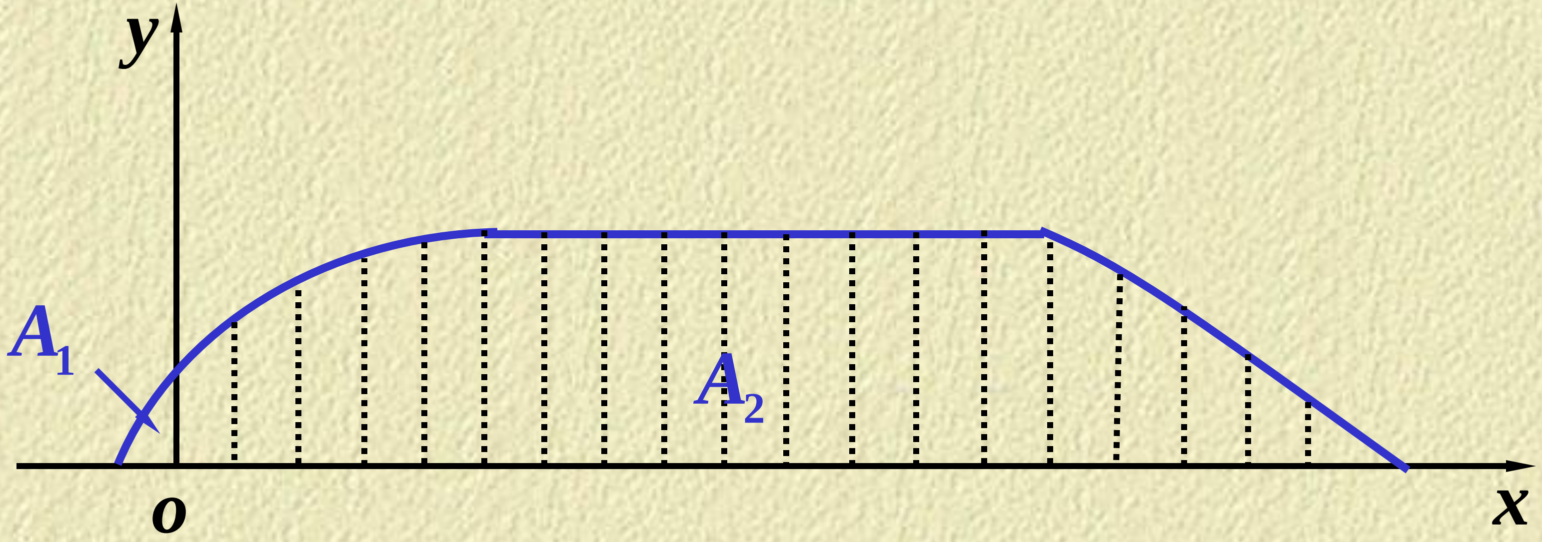
上页 下页 返回

例2. 对如图所示的图形测量所得的数据如下表所示,用抛物线法计算该图形的面积A .

站号	-1	0	1	2	3	4	5	6
高 y	0	2.305	4.865	6.974	8.568	9.559	10.011	10.183

站号	7	8	9	10	11	12	13
高 y	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200	10.200

站号	14	15	16	17	18	19	20
高 y	10.400	9.416	8.015	6.083	3.909	1.814	0



这里, 0 站到 20 站之间的距离为 147.18米, 相邻两站之间的距离(站距)为 $147.18 \div 20 = 7.359$.

而 -1 站到 0 站之间的距离为 5米.

解 从 -1 站到 0 站这一段的面积用 A_1 表示. 它可以用曲线同坐标轴的交点的连线与坐标轴构成的三角形的面积来近似表示，即

$$A_1 \approx \frac{1}{2} \times 5 \times 2.305 = 5.763 \ (\text{平方米}).$$

根据抛物线公式(4),得

$$A_2 \approx \left[(y_0 + y_{20}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{19}) \right.$$

$$\left. +2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{18}) \right] \frac{\Delta x}{3} = 1194.839 (\text{平方米}).$$

$$\therefore A = A_1 + A_2 \approx 5.768 + 1194.839 = 1200.602 (\text{平方米}).$$

5. 小结

求定积分近似值的方法:

矩形法、梯形法、抛物线法

注意：对于以上三种方法当 n 取得越大时近似程度就越好.

练 习 题

1.某河床的横断面如教材图5－12所示，为了计算最大排洪量，需要计算它的断面积. 试根据图示的测量数据（单位为米）用梯形法计算其断面积.

2.用三种积分近似计算法计算

$$s=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{2}\sin^2 t}\,dt\,,$$

（取 $n=6$，被积函数值取四位小数）.

练习题答案

1. 145.6(平方米).

2. (1).1.3890;

   (2).1.3506;

   (3).1.3506.