§16.2 二元函数的极限

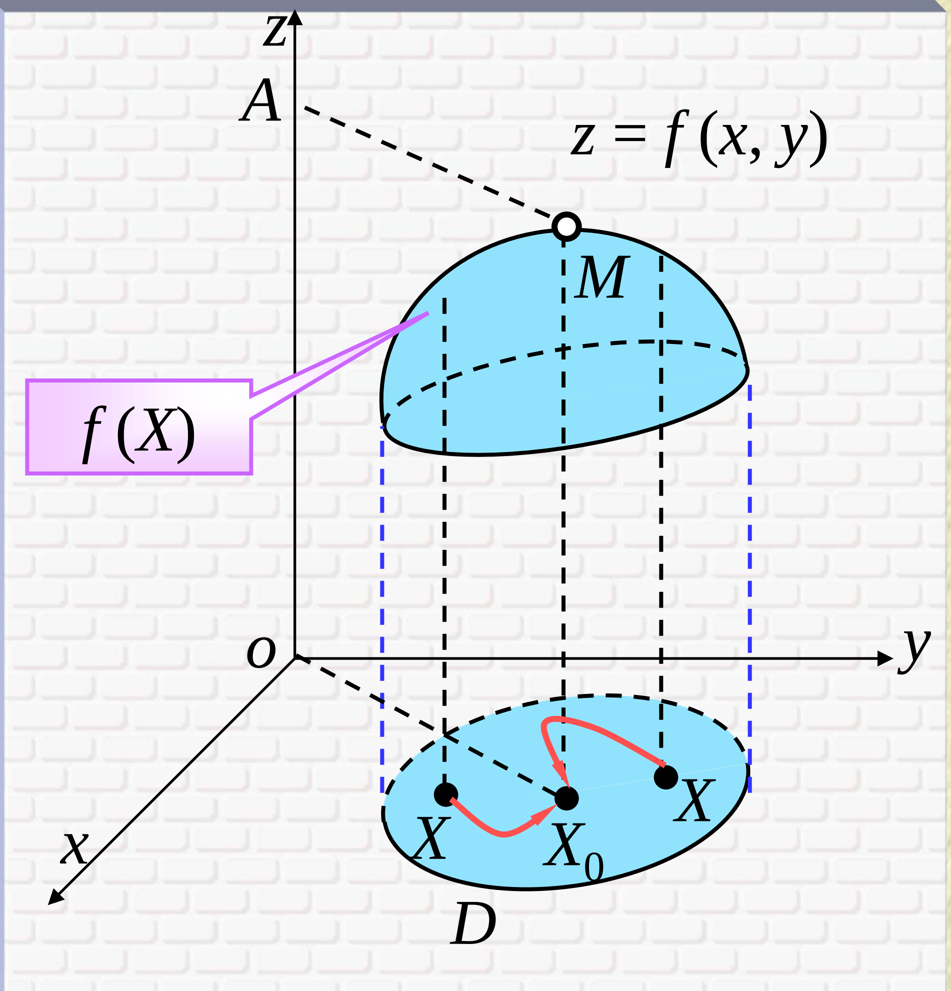
一 二元函数的极限

二 多元函数的极限

三 累次极限

一. 二元函数的极限

设二元函数 $z = f(X) = f(x, y)$, 定义域为D. 如图

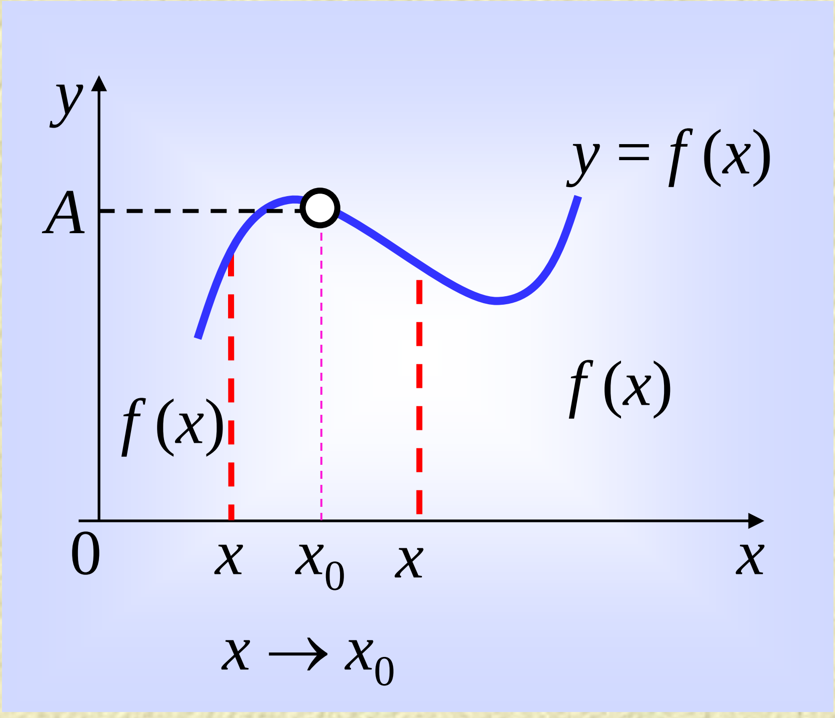


如果当X在D内变动并无限接近于X_0时（从任何方向，以任何方式），对应的函数值 $f(X)$无限接近于数 A，则称A为当X趋近于X_0时$f(X)$的极限.

回忆一元函数的极限. 设 $y=f(x)$,

所谓 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 表示

当 x 不论是从 x_0 的左边还是从 x_0 的右边无限接近于 x_0 时，对应的函数值无限接近于数 A. 如图



$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 用 $\varepsilon-\delta$ 语言表示 就是 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0.$

当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

上页 下页 返回

类似于一元函数，$f(X)$无限接近于数 A可用

$|f(X)-A|<\varepsilon$ 刻划. 而平面上的点 $X=(x,y)$ 无限接近于点 $X_0=(x_0,y_0)$ 则可用它们之间的距离

$$\|X-X_0\|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$ 来刻划

上页 下页 返回

定义1 设二元函数 $z = f(X) = f(x, y)$. 定义域为D. $X_0 = (x_0, y_0)$是 D 的一个聚点. A 为常数.

若 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < \| X - X_0 \|$ $= \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时, 对应的函数值满足

$$| f(X) - A | < \varepsilon$$

则称 A 为$z = f(X)$的, 当 X 趋近于X_0时(二重)极限.

记作 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A$,或 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$,

也可记作 $f(X) \to A(X \to X_0)$,

或 $f(x, y) \to A \ (x \to x_0, y \to y_0)$

说明：

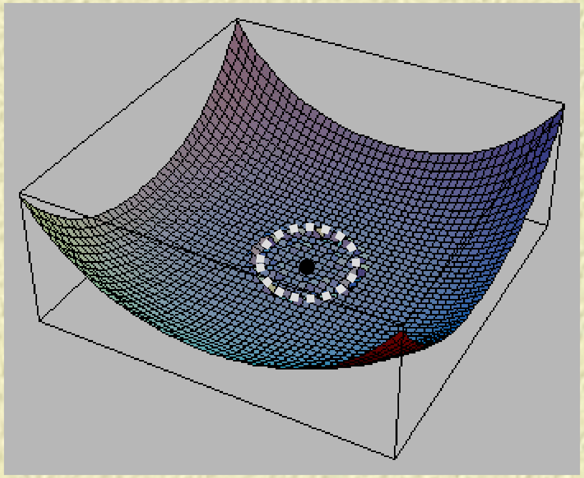
（1）定义中 $X \to X_0$ 的方式是任意的；

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$;

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

（4）二元函数的极限—二重极限—存在的判别是十分不容易的。

例1 求证 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0.$



证 $$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|$$

$$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$

$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,\delta=\sqrt{\varepsilon},$

当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时

$\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon.$ 原结论成立.

上页 下页 返回

定义中 $X \to X_0$ 的方式是任意的；

一元函数

$$\left.\begin{cases}\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A\end{cases}\right. \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

多元函数

$$\lim_{X\to X_0} f(X)=A \underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} f(X)\to A \ (X\text{ 以某种方式趋于 }X_0)$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x)=A \underset{\nLeftarrow}{\Longrightarrow} \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y=y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿平行 } x \text{ 轴} \to X_0)\\ \lim\limits_{\substack{x=x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿平行 } y \text{ 轴} \to X_0)\\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y_0+k(x-x_0)\to y_0}} f(x,y)=A & (\text{沿 } y=y_0+k(x-x_0) \to X_0)\end{cases}$$

上页 下页 返回

确定极限不存在的方法：

（1） 令 $X(x,y)$ 沿 $y = y_0 + k(x - x_0)$ 趋向于 $X_0(x_0,y_0)$，

若极限值与 k 有关，则可断言极限不存在；

（2） 找两种不同趋近方式，使 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，但

两者不相等，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $X_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

上页 下页 返回

例2 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$.

解 $\lim\limits_{\substack{x=0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0} 0=0$,

但取 $y=kx$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}} \dfrac{x\cdot kx}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$.

其值随 k 的不同而变化。

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解 $\left|\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}\right|\le\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\dfrac{1}{2}|x|\cdot\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|$

$\le\dfrac{1}{2}|x|\le\sqrt{x^2+y^2}$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sqrt{x^2+y^2}=0$,由迫敛性知

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0$.

上页 下页 返回

例4　求　$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$$

注1. 定义1中要求X_0是定义域D的聚点, 这是为了保证 X_0的任意近傍总有点X使得$f(X)$存在, 进而才有可能判断 $|f(X)-A|$ 是否小于 ε 的问题.

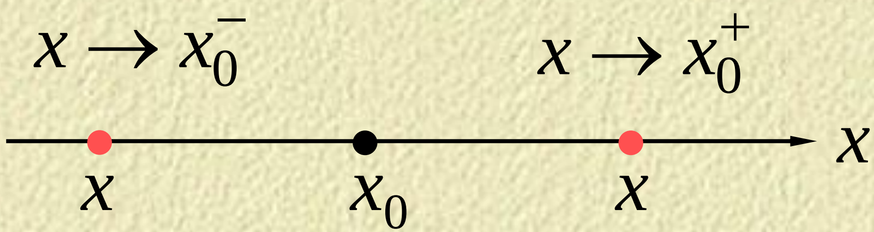
若D是一区域. 则只须要求 $X_0 \in \overline{D} = D \cup \partial D$, 就可保证 X_0 是D的一个聚点.

另外, " $0 < \|X - X_0\| < \delta$ "表示 X 不等于X_0.

2. 对一元函数 $f(x)$,

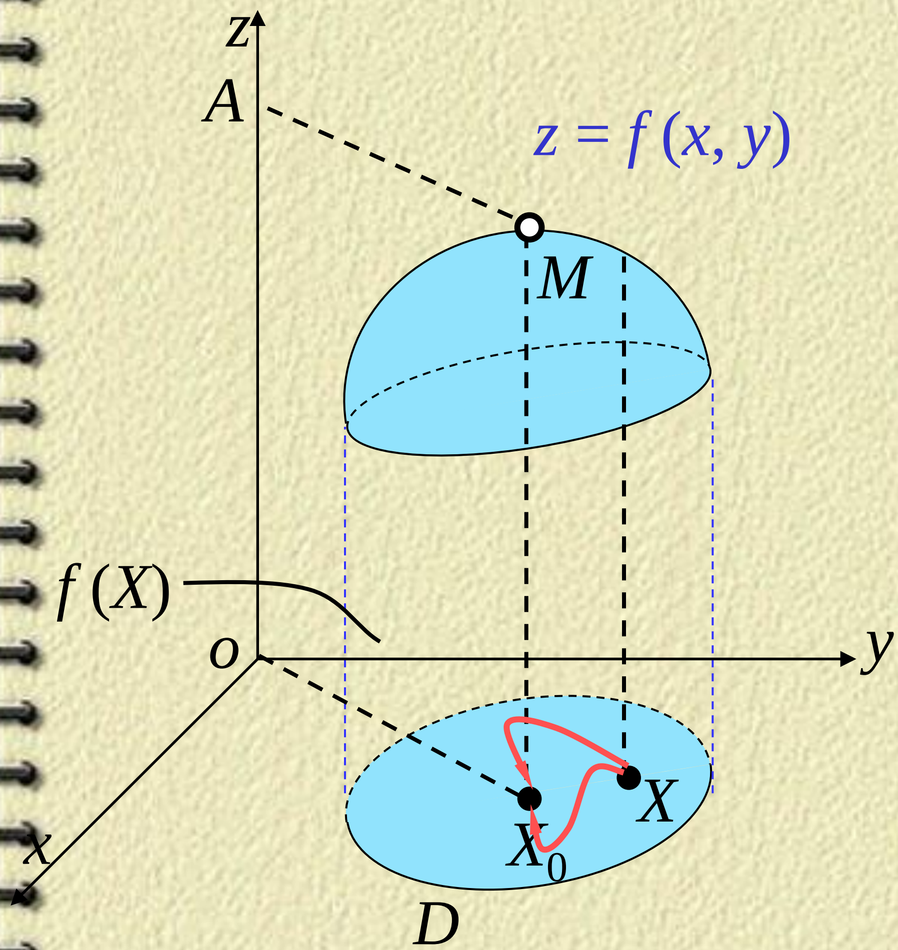
$$\text{有} \lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = A.$$

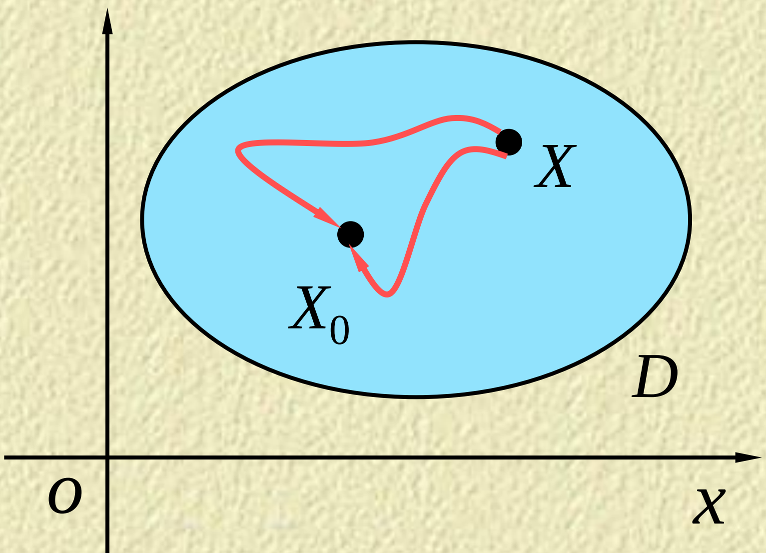
如图



上页 下页 返回

对二元函数 **f (X)**, 如图





有 $\lim\limits_{X \to X_0} f(X) = A.$

⇔ 点***X***以任何方式趋近于$\boldsymbol{X_0}$时, ***f (X)***的极限都存在且为***A***.

因此, 如果当X以某几种特殊方式趋于X_0时, $f(X)$的极限为A. 不能断定二重极限

$$\lim_{X \to X_0} f(X) = A \text{存在.}$$

若X以不同方式趋于X_0时, $f(X)$的极限不同, 则可肯定二重极限

$$\lim_{X \to X_0} f(X) \text{不存在.}$$

上页 下页 返回

例5. 设二元函数$f(X)=f(x,y)=xy\sin\dfrac{1}{x+y}$,

用定义证明: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} xy\sin\dfrac{1}{x+y}=0$

证: $\forall\varepsilon>0$, 要证$\exists\delta>0$, 使得当

$$0<\|X-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$$时,

有$|f(x,y)-0|<\varepsilon$

考虑$|f(x,y)-0|=\left|xy\sin\dfrac{1}{x+y}\right|\le|xy|\le\dfrac{x^2+y^2}{2}$

要使$|f(x,y)-0|<\varepsilon$，只须$\dfrac{x^2+y^2}{2}<\varepsilon$，

即$\sqrt{x^2+y^2}<\sqrt{2\varepsilon}$，取 $0<\delta\le\sqrt{2\varepsilon}$，

则当$\|X-(0,0)\|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，

有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\sin\frac{1}{x+y}=0$$

上页 下页 返回

二.多元函数的极限

1. 多元函数的极限定义

定义 2 设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为点集 D，P_0 是其聚点，如果对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|PP_0|<\delta$ 的一切点 $P\in D$，都有 $|f(P)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为 n 元函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

上页 下页 返回

说明：1）上述极限又称重极限或全极限，它与后面讲的逐次极限或累次极限不同；

2） 从形式上看，**n** 元函数极限的定义与一元函数的极限完全一样，但在这里 $x, a \in R^n$，$O_\delta(a)-\{a\}$ 是 **n** 维去心开球；

3） “$x \in O_\delta(a)-\{a\}$”可改写为“$0<|x-a|<\delta$”，用坐标写出来为：$0<\sqrt{(x_1-a_1)^2+\cdots+(x_n-a_n)^2}<\delta$

4） “$x \in O_\delta(a)-\{a\}$”、“$0<|x-a|<\delta$”、和下面下面的叙述是等价的：$|x_1-a_1|<\delta$，$|x_2-a_2|<\delta$，…，

$|x_n - a_n| < \delta_n$， $(x_1,\cdots,x_n) \neq (a_1,\cdots,a_n)$ （即$x \neq a$ ）；但要注意： $|x_i - a_i| < \delta$ （ $i = 1,2,\cdots,n$ ）， $x \neq a$ 和 $0 < |x_i - a_i| < \delta$ （$i = 1,2,\cdots,n$）不是一回事！

5） 和一元函数的情形一样，如果$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，则当 x 以任何点列及任何方式趋于 a 时，$f(x)$的极限都是 A；反之，x 以任何方式及任何点列趋于 a 时，$f(x)$的极限皆是 A，则 $f(x)$的极限存在且为A。但若x在某一点列或沿某一曲线$\to a$ 时，$f(x)$的极限为 A，还不能肯定 $f(x)$在 a 的极限是 A。所以说，这里的“ $x \to a$ ”要比一元函数的情形复杂得多.

上页 下页 返回

2. 多元函数极限的性质

性质 1（局部有界性）若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在，则存在$\delta > 0$ ，使得 $f(x)$ 在 $O_{\delta}(a)-\{a\}$ 内有界；

性质２（保号性）若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A>0$，则存在 $\delta>0$，使得在 $O_{\delta}(a)-\{a\}$ 内取正值；

性质３（保向性） 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to a} g(x)=B$，并且当 $x\in O_{\delta}(a)-\{a\}$ 时有 $f(x)\geq g(x)$，则 $A\geq B$；

上页 下页 返回

性质 4（四则运算）与一 元函数运算相同。

　　除了这些相似性之外，我们也指出，多元函数的极限较之一元函数的极限而云，要复杂得多，特别是自变量的变化趋势，较之一元函数要复杂.

上页 下页 返回

三. 累次极限:

前面讲了 $P(x,y)$ 以任何方式趋于 $P_0(x_0,y_0)$ 时的极限，我们称它为二重极限，对于两个自变量 x,y 依一定次序趋于 x_0,y_0 时 $f(x,y)$ 的极限，称为累次极限。

对于二元函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的累次极限为 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 两个，也称为二次极限。

1. $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0=\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$不存在。

2. $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}, & \begin{matrix}x\neq 0\\ y\neq 0\end{matrix}\\ 0 \quad , & x=0\ \ or\ \ y=0\end{cases}$

$\because |f(x,y)|\leq x^2+y^2, \therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

但是由于$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$不存在,故$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$

存不在,同样$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在.

3. $f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ & y\neq 0 \\ 0, x=0 \ or \ y=0 & \end{cases}$

$\because |f(x,y)|\le |y|, \therefore \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

由于$\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$不存在，故$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$

不存在,但是

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} y\sin\frac{1}{x}\right)=0$$

4. $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-0}{x^2+0}=1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\frac{0-y^2}{0+y^2}=-1,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\overset{\substack{x=r\cos\theta\\ y=r\sin\theta}}{=\!=\!=\!=}\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos 2\theta}{r^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\cos 2\theta$$

所以二重极限不存在。

5. $f(x,y)=\dfrac{y}{x}, \quad x \neq 0$

$\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，故 $\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，

但是 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 都不存在.

由此可见，二重极限与二次极限的关系是比较复杂的。

二次极限存在性与二重极限的存在性没有必然的联系。

定理 如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在，则两者必定相等。

推论　　若两个二次极限和二重极限都存在，　则它们必相等。

说明二重极限不存在的常用方法：

1.　找两种特殊的变量变化方式，使得两种方式下函数的极限值不相等；

2.　若两个二次极限存在但不相等，那么二重极限不存在。

介绍二次极限的主要目的！

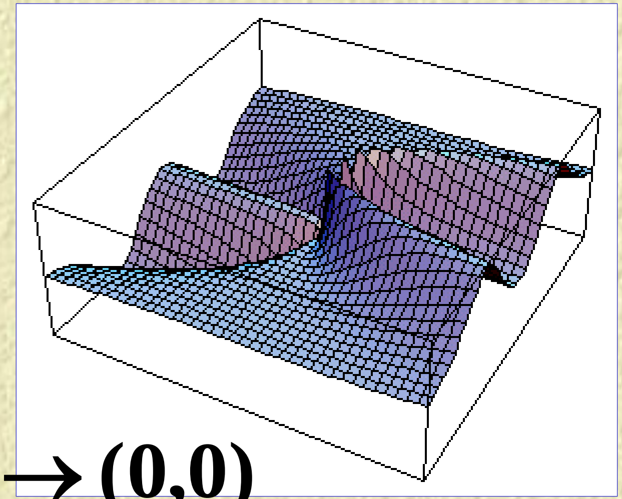
思考题

若点(x, y)沿着无数多条平面曲线趋向于点(x_0, y_0)时，函数$f(x, y)$都趋向于 A，能否断定$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = A$？

上页 下页 返回

思考题解答

不能.



例 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{(x^2+y^4)^2}$, $(x,y)\to(0,0)$

取 $y=kx$, $\quad f(x,kx)=\dfrac{x^3\cdot k^2x^2}{(x^2+k^4x^4)^2}\xrightarrow{x\to 0} 0$

但是 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ 不存在.

原因为若取$x=y^2$, $\quad f(y^2,y)=\dfrac{y^6y^2}{(y^4+y^4)^2}\to\dfrac{1}{4}$.