

§ 16.1 多元函数的概念

一、平面点集

二、 R^2 上的完备性定理

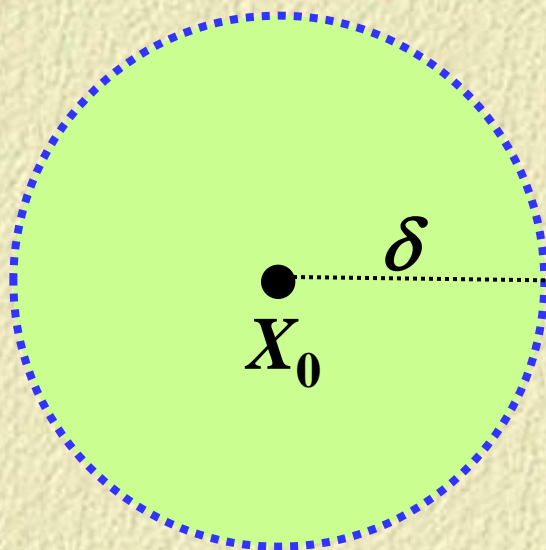
三、多元函数的概念

一、平面点集

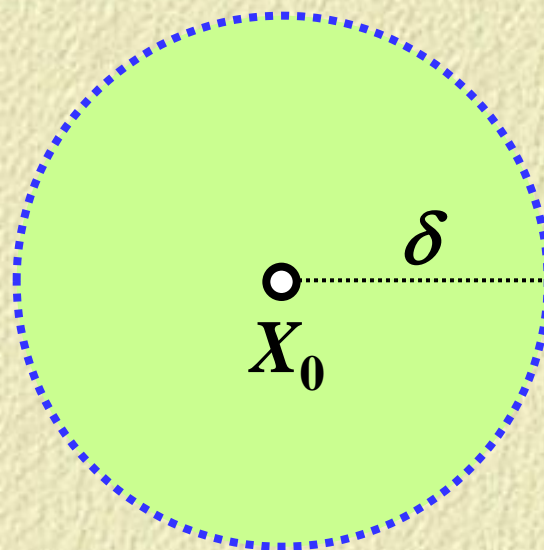
1. 邻域: 以点 $X_0 = (x_0, y_0)$ 为中心, 以 δ 为半径的圆内部点的全体称为 X_0 的 δ 邻域. 记作 $U(X_0, \delta)$,

$$\begin{aligned} \text{即 } U(X_0, \delta) &= \{(x, y) \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\} \\ &= \{X = (x, y) \mid \|X - X_0\| < \delta\} \end{aligned}$$

记 $U^0(X_0, \delta) = U(X_0, \delta) - \{X_0\}$, 称为 X_0 的去心 δ 邻域. 如图



$U(X_0, \delta)$



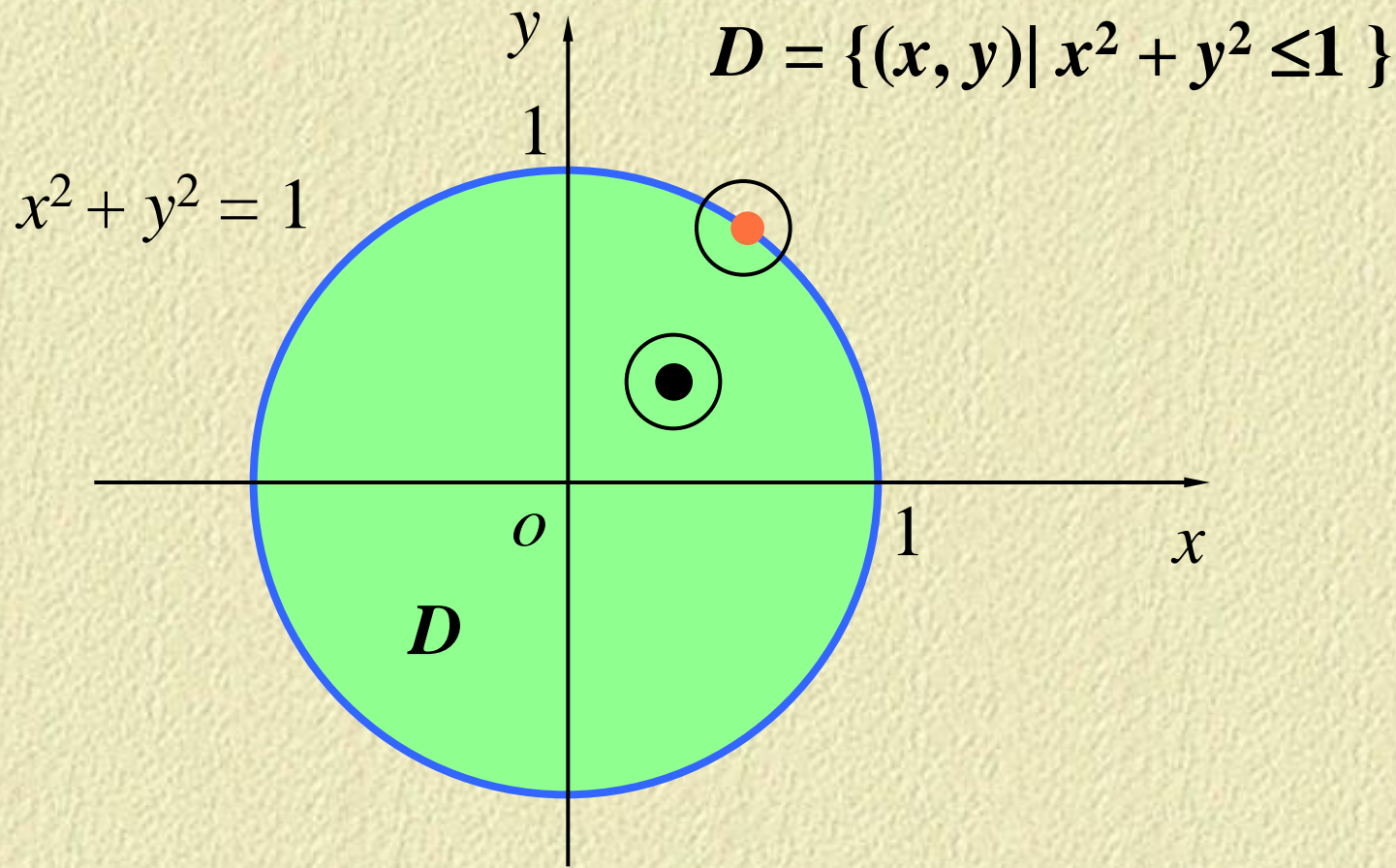
$U^0(X_0, \delta)$

当不关心邻域半径时, 简记为 $U(X_0)$ 和 $U^0(X_0)$.

2. 内点: 设 E 是一平面点集, $X_0 = (x_0, y_0) \in E$, 若存在邻域 $U(X_0, \delta) \subseteq E$, 则称 X_0 为 E 的内点.

E 的全体内点所成集合称为 E 的内部, 记为 E^0 .

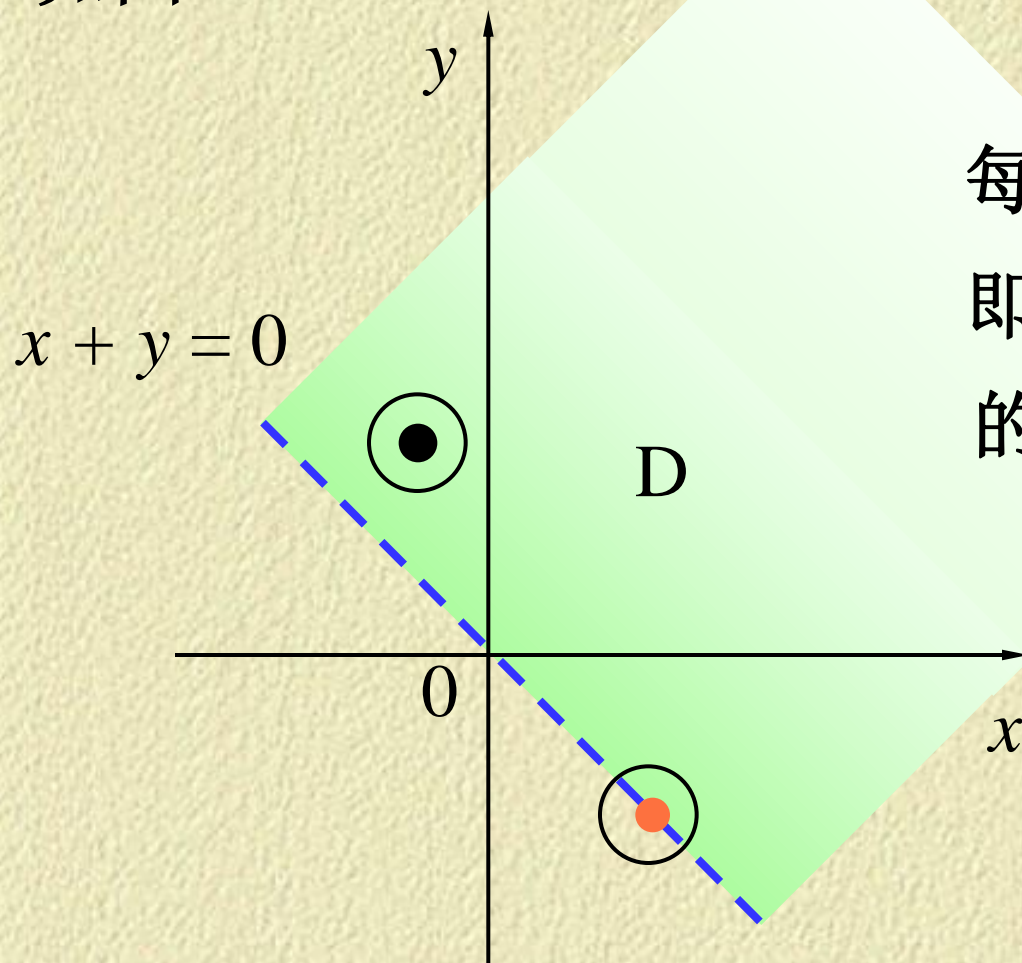
例1 比如 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 的定义域 D 为单位圆盘,
 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 如图



易知, 圆内部的每一点都是 D 的内点. 但圆周上的点不是 D 的内点.

例2 $z = \ln(x+y)$ 的定义域 $D = \{(x, y) | x+y > 0\}$

如图



易见, 直线上方
每一点都是D的内点.
即 $D=D^\circ$, 但直线上的
点不是D的内点.

上页

下页

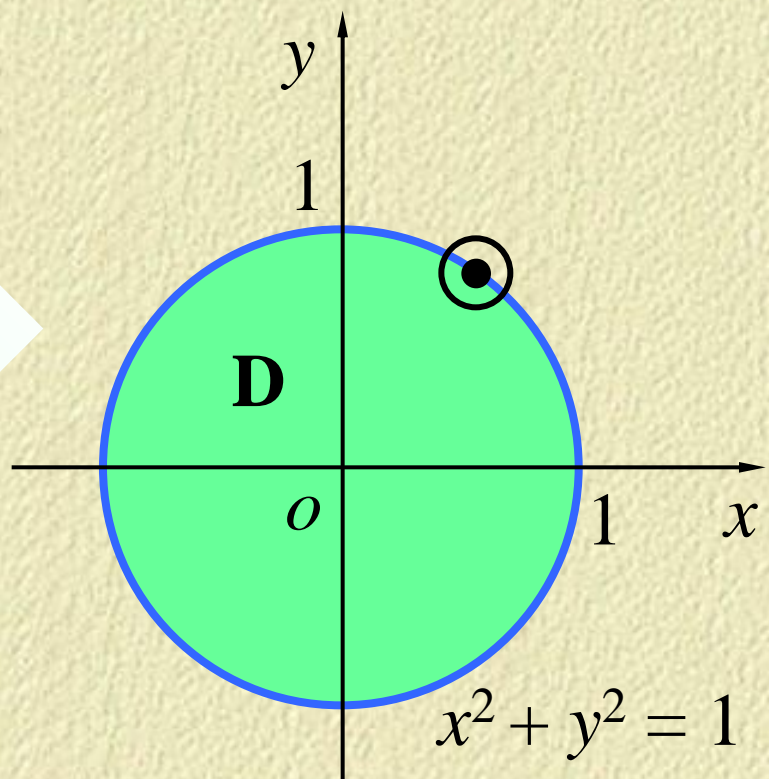
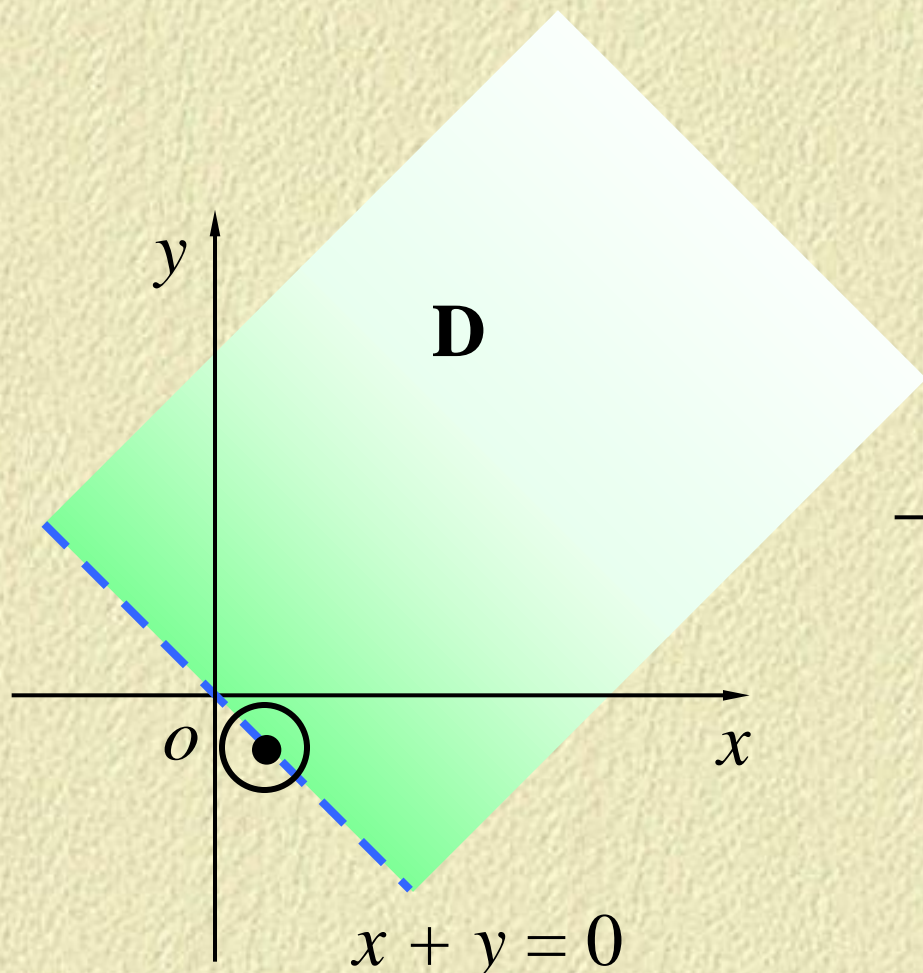
返回

3. 边界点:

设 E 是一平面点集, $X_0 = (x_0, y_0)$ 是平面上一个点. 若 X_0 的**任何**邻域 $U(X_0, \delta)$ 内既有属于 E 的点, 又有不属于 E 的点, 则称 X_0 为 E 的边界点.

E 的全体边界点所成集合称为 E 的边界. 记作 ∂E .

如, 例2中定义域 D 的边界是直线 $x + y = 0$ 上点的全体. 例1中定义域 D 的边界是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 上的点的全体. 如图



E 的边界点可以是 E 中的点,
也可以不是 E 中的点.

4. 开集

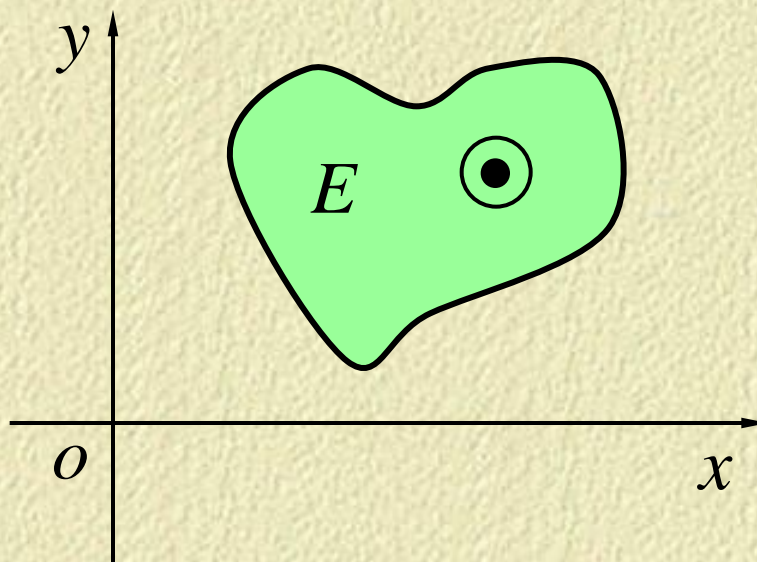
设 E 是一平面点集, 若 E 中每一点都是 E 的内点. 即 $E \subseteq E^0$, 则称 E 是一个开集. 规定, \emptyset, \mathbf{R}^2 为开集.

由于总有 $E^0 \subseteq E$, 因此, $E \subseteq E^0 \Leftrightarrow E = E^0$

故也可说, 若 $E = E^0$, 则称 E 是一个开集.

比如, 例2中 D 是开集, ($D = D^0$), 而例1中 D 不是开集.

又比如, E 如图



若 E 不包含边界, 则 E 为开集.

若 E 包含边界, 则 E 不是开集.

上页

下页

返回

结论：非空平面点集 E 为开集的充要条件是 E 中每一点都不是 E 的边界点. 即 E 不含有 E 的边界点.

证： 必要性. 设 E 为开集, $\forall X \in E$,

由开集定义知 X 为 E 的内点.

故 X 不是 E 的边界点.

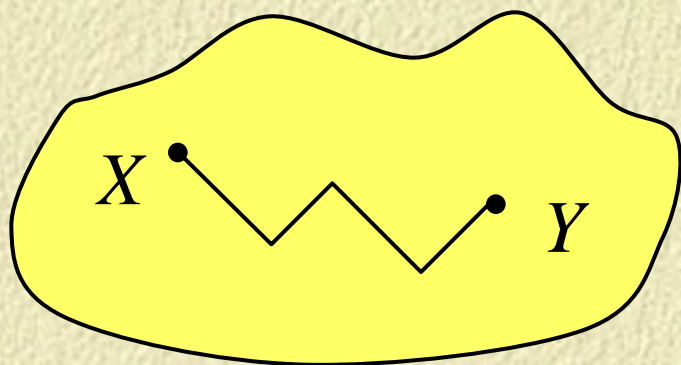
充分性. 若 E 中每一点都不是 E 的边界点.

要证 E 为开集. $\forall X \in E$, 由于 X 不是 E 的边界点.
故必存在 X 的一个邻域 $U(X, \delta)$, 在这个邻域 $U(X, \delta)$
内或者全是 E 中的点. 或者全都不是 E 中的点, 两者必居其一. 由于 $X \in E$, 故后一情形不会发生.

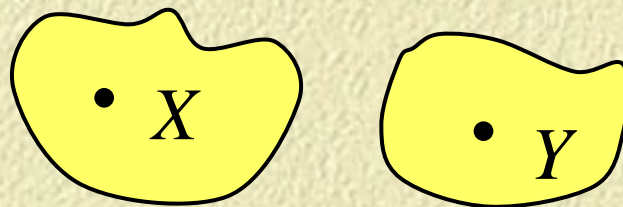
因此, $U(X, \delta)$ 内必全是 E 中的点. 故 $X \in E^0$, 即,
 $E \subseteq E^0$, 所以 E 是开集.

5. 连通集

设 E 是一非空平面点集, 若 $\forall X, Y \in E$. 都可用完全含于 E 的折线将它们连接起来, 则称 E 为连通集. 如图



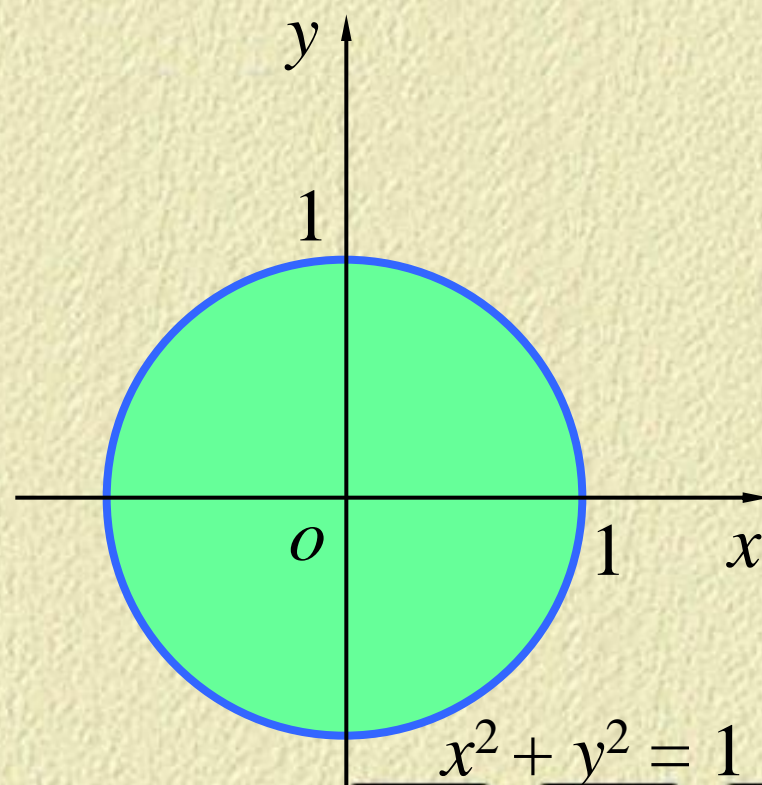
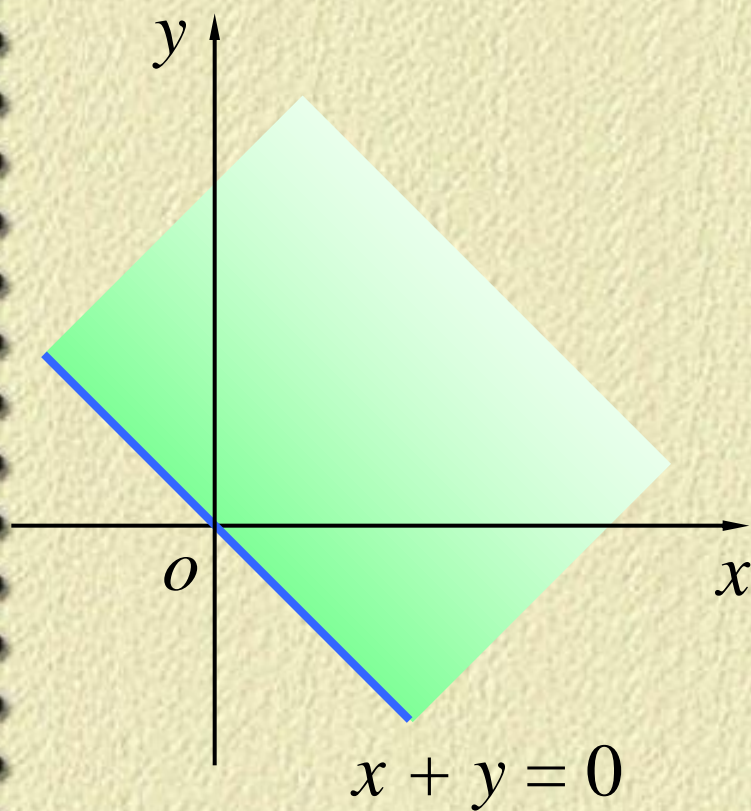
E 连通



E 不连通

从直观上看, 所谓 E 是连通集, 是指 E 是连成一片的. E 中的点都可用折线连接.

例1, 2中的 D 都是连通集. 如图



上页

下页

返回

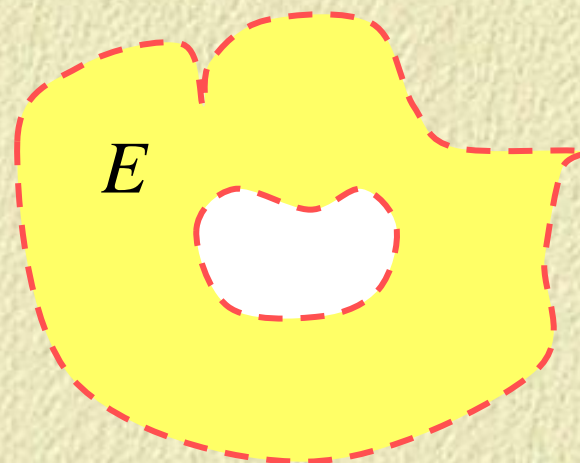
6. 开区域 (开域)

设 E 是一平面点集.

若 E 是连通的非空开集, 则称 E 是开区域.

比如, 例2中 D 是开区域. 从直观上看, 开区域是连成一片的, 不包括边界的平面点集.

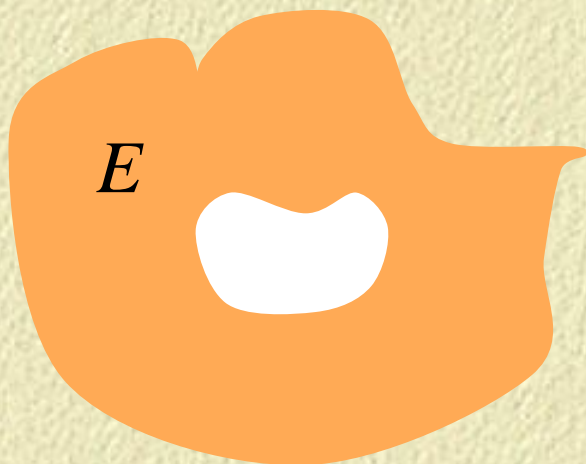
如图.



7. 闭区域（闭域）

若 E 是开域, 记 $\bar{E} = E \cup \partial E = E^0 \cup \partial E$
称为闭区域.

如图



易见, 例1中的 D 是闭区域. 从直观上看, 闭区域是连成一片的. 包括边界的平面点集.

教材把开区域和闭区域都叫作区域.

8. 设 $E \subseteq \mathbb{R}^2$, 若存在 $r > 0$, 使 $E \subseteq U(O, r)$, 则称 E 为有界集. 否则称 E 为无界集.

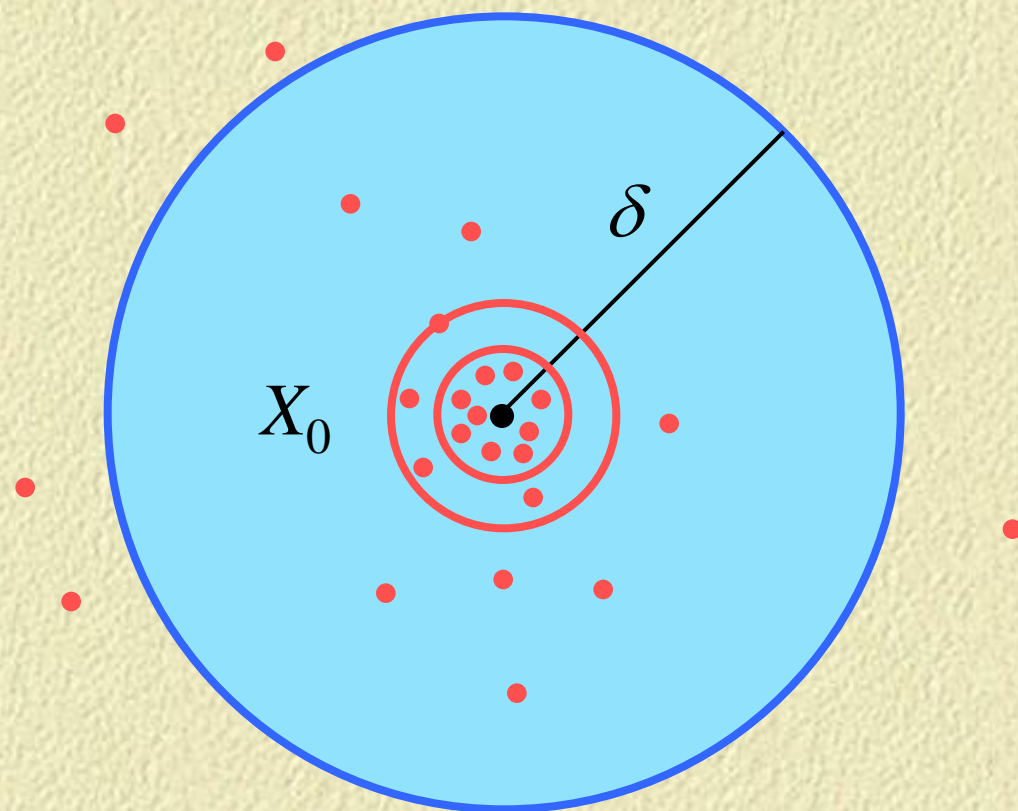
易见, 例2中 D 是无界集, 它是无界开区域,
而例1中 D 是有界集, 它是有界闭区域.

9. 聚点

设 E 是平面点集, X_0 是平面上一个点.
若 X_0 的任一邻域内总有无限多个点属于 E .
则称 X_0 是 E 的一个聚点.

从几何上看, 所谓 X_0 是 E 的聚点是指在 X_0 的附近聚集了无限多个 E 中的点. 即, 在 X_0 的任意近傍都有无限多个 E 中的点.

如图



(1) 聚点定义也可叙述为: 若 X_0 的任一邻域内至少含有 E 中一个异于 X_0 的点. 则称 X_0 为 E 的一个聚点.

(2) E 的聚点 X_0 可能属于 E , 也可能不属于 E .

(3) E 的内点一定是 E 的聚点.

(4) 若 E 是开区域. 则 E 中每一点都是 E 的聚点.
若 $\bar{E} = E \cup \partial E$ 为闭区域. 则 \bar{E} 中每一点都是 E 的聚点.
从而是 \bar{E} 的聚点. 即, 区域中的任一点都是该区域的聚点.

一般, 集合 E 的边界点不一定是 E 的聚点.
但若 E 是开集, 则 E 的边界点一定是 E 的聚点。

邻域, 内点, 边界点, 开集, 连通, 有界, 开区域, 闭区域, 聚点

这些概念都可毫无困难地推广到三维空间 R^3 中去, 且有类似的几何意义. 它们还可推广到 4 维以上的空间中去, 但不再有几何意义.

说明:

(1) 内点一定是聚点;

(2) 边界点可能是聚点;

例如, $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

$(0, 0)$ 既是边界点也是聚点.

(3) 点集 E 的聚点可以属于 E , 也可以不属于 E .

例如, $\{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$

$(0, 0)$ 是聚点但不属于集合.

例如, $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$

边界上的点都是聚点也都属于集合.

(4) n 维空间

实数 x $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 数轴点.

实数全体表示直线(一维空间) R

数组 (x, y) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面点

(x, y) 全体表示平面(二维空间) R^2

数组 (x, y, z) $\xleftrightarrow{\text{一一对应}}$ 空间点

(x, y, z) 全体表示空间(三维空间) R^3

推广:

n 维数组 (x_1, x_2, \dots, x_n) 全体称为 n 维空间, 记为 R^n .

n 维空间中两点间距离公式

设两点为 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$,

$$\|PQ\| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}.$$

特殊地, 当 $n=1, 2, 3$ 时, 便为数轴、平面、空间两点间的距离.

n 维空间中邻域概念:

$$U(P_0, \delta) = \{P: \|PP_0\| < \delta, P \in R^n\}$$

区域、内点、边界点、区域、聚点等概念也可定义.

二、 R^2 上的完备性定理

定义 1 设 $\{P_n\}$ ($\subset R^2$ 为平面点列, $P_0 \in R^2$ 为一固定点. 若对任给的正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 有 $P_n \in U(P_0; \varepsilon)$, 则称点列 $\{P_n\}$ 收敛于点 P_0 , 记作

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \quad \text{或} \quad P_n \rightarrow P_0, \quad n \rightarrow \infty.$$

定理 16.1 (柯西准则) 平面点列 $\{P_n\}$ 收敛的充要条件是: 任给正数 ε , 存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时, 对一切正整数 p , 都有

$$\rho(P_n, P_{n+p}) < \varepsilon$$

两点间的
距离

三、多元函数的概念

回忆

设 x 和 y 是两个变量。 D 是一个给定的数集，
若对于每个数 $x \in D$ ，变量

y 按照一定法则总有确定的数值和它对应，则称 y 是
 x 的函数，记作 $y = f(x)$ 。

1. 二元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集，如果对于每个点
 $P(x, y) \in D$ ，变量 z 按照一定的法则总有确定的
值和它对应，则称 z 是变量 x, y 的二元函数，记
为 $z = f(x, y)$ （或记为 $z = f(P)$ ）。

点集 D --- 定义域， x, y --- 自变量， z --- 因变量。
 $W = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ --- 值域。

上页

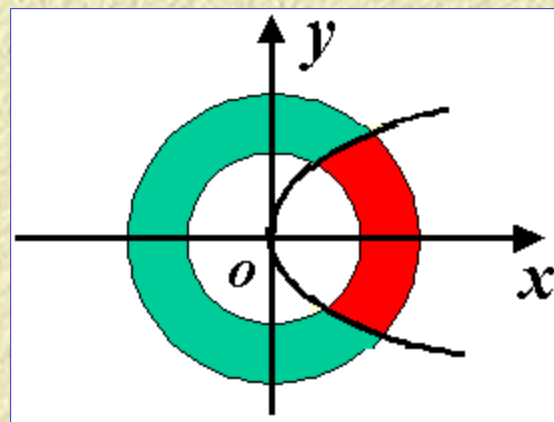
下页

返回

例1 求 $f(x, y) = \frac{\arcsin(3 - x^2 - y^2)}{\sqrt{x - y^2}}$ 的定义域.

解
$$\begin{cases} |3 - x^2 - y^2| \leq 1 \\ x - y^2 > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \\ x > y^2 \end{cases}$$



所求定义域为 $D = \{(x, y) \mid 2 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x > y^2\}$.

二元函数 $z = f(x, y)$ 的图形

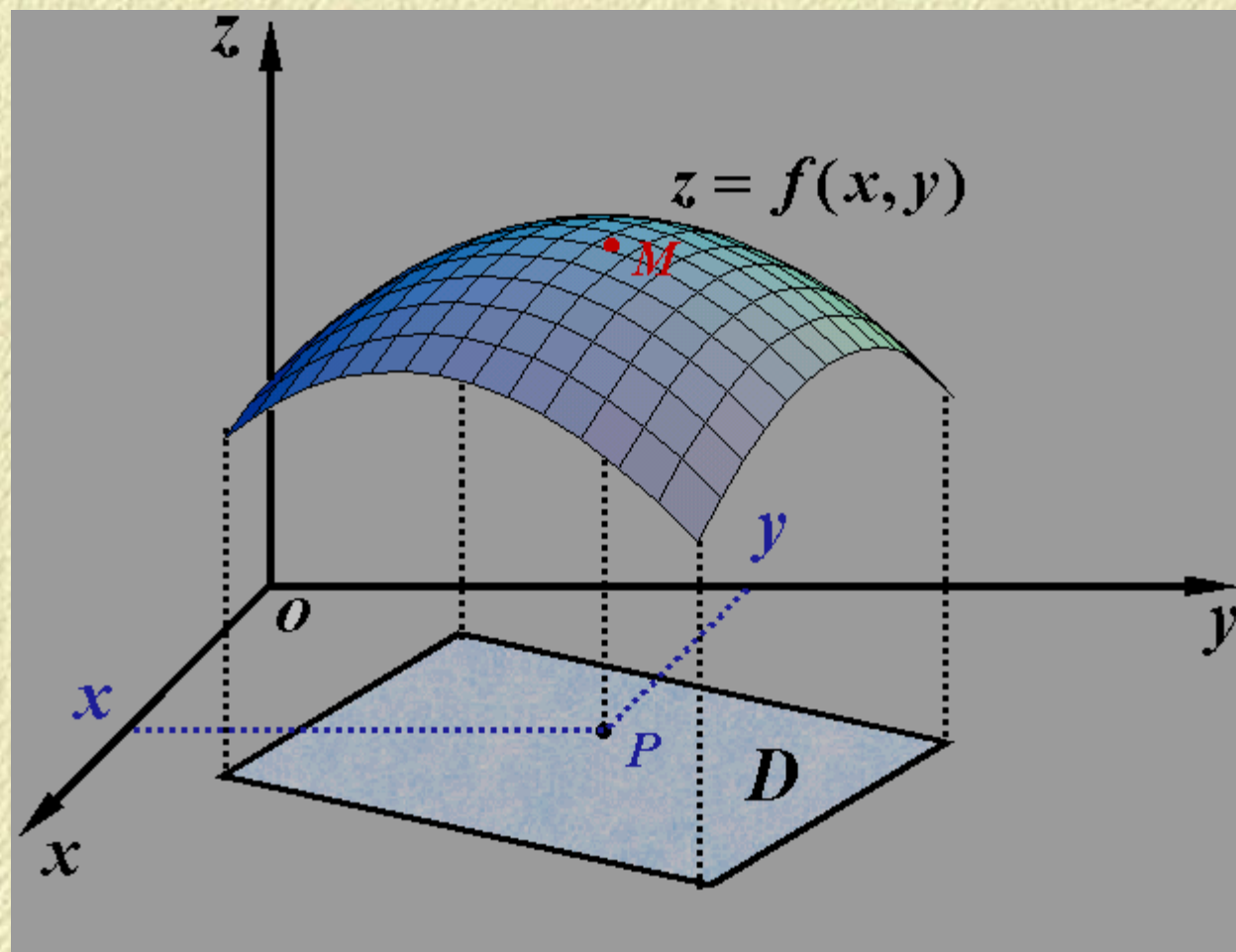
设函数 $z = f(x, y)$ 的定义域为 D ，对于任意取定的 $P(x, y) \in D$ ，对应的函数值为 $z = f(x, y)$ 。

以 x 为横坐标、 y 为纵坐标、 z 为竖坐标在空间就确定一点 $M(x, y, z)$ ，当 (x, y) 取遍 D 上一切点时，得一个空间点集

$$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\},$$

这个点集称为二元函数的图形。

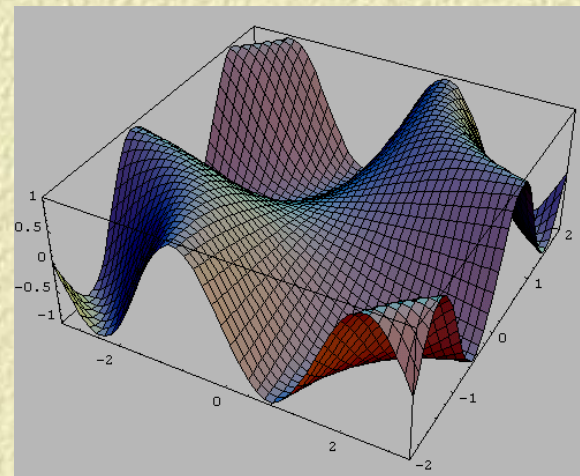
(如下页图)



二元函数的图形通常是一张曲面.

例如 $z = \sin xy$

图形如右图.



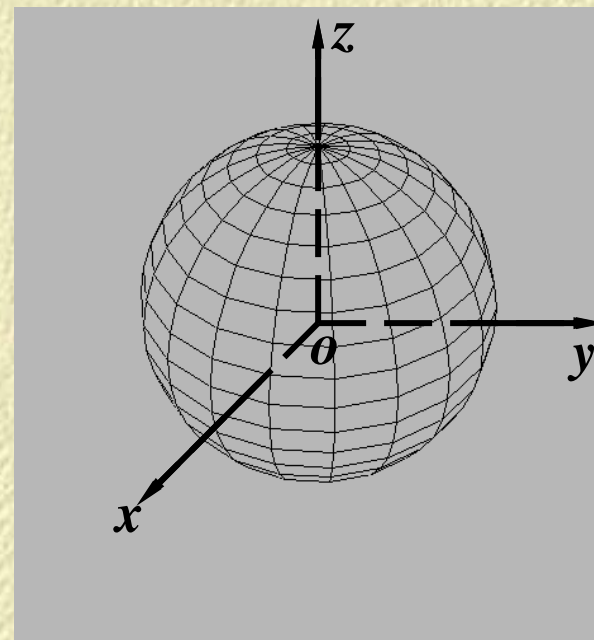
例如 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$

左图球面.

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

单值 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

分支: $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$



2.多元函数的概念

定义 设 D 是 R^n 的一个非空子集, f 从 D 到实数集 R 的任一映射称为定义在 D 上的一个 n 元 (实值) 函数, 记作 $f: D \subset R^n \rightarrow R$
或 $y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n), x \in D$
其中 x_1, x_2, \dots, x_n 称为自变量, y 称为因变量,
 D 称为函数的定义域, $f(D) = \{f(x) | x \in D\}$
称为函数的值域, 并且称 R^{n+1} 中的子集
 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, y) | y = f(x), x \in D\}$ 为函数
 $y = f(x)$ (在 D 上) 的图形 (或图像)。