Chap17 多元函数微分学

§1 可微性

§2 复合函数微分法

§3 方向导数与梯度

§4 泰勒公式与极值问题

回顾：二元函数的连续

二元函数的极限——二重极限

Def.2.设函数f的定义域$D\subset\mathbb{R}^2$,

点$P_0\left(x_0,y_0\right)$的邻域

$$U_r\left(P_0\right)=\left\{\left(x,y\right)\middle|\left|P_0P\right|<r,P(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

有$U_r\left(P_0\right)\cap D\neq\Phi$.

则 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=A\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\left(x,y\right)\in U_\delta\left(P_0\right)$,有

$$\left|f(x,y)-A\right|<\varepsilon.$$

二元函数的连续

$Def.3.$设函数f的定义域$D\subset\mathbb{R}^2$，

$(x_0,y_0)\in D.$

则函数f在点(x_0,y_0)处连续$\Leftrightarrow$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

二元初等函数：由常数与变量x, y的基本初等函数经过有限多次的四则运算与复合运算得到且能用一个式子表示的二元函数叫作二元初等函数.

Prop. 一切二元初等函数在其定义区域内都是连续的.

定义区域是指包含在函数定义域内的(开/闭)区域.

§ 17.1 可微性

一. 可微性 全微分的定义

二. 偏导数

三. 可微的条件

四. 可微性的几何意义与应用

一. 可微性 全微分的定义

1.全微分的定义

由一元函数微分学知:

若$f_x(x,y)$存在,则当$\Delta x \to 0$时

$$\boxed{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}=\boxed{f_x(x,y)\Delta x+o(\Delta x),}$$

若$f_y(x,y)$存在,则当$\Delta y \to 0$时

$$\boxed{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}=\boxed{f_y(x,y)\Delta y+o(\Delta y)}$$

二元函数的**偏增量**　　　　**偏微分**

上页 下页 返回

一.可微性 全微分的定义

实例:矩形广场延展扩大后面积的改变量.

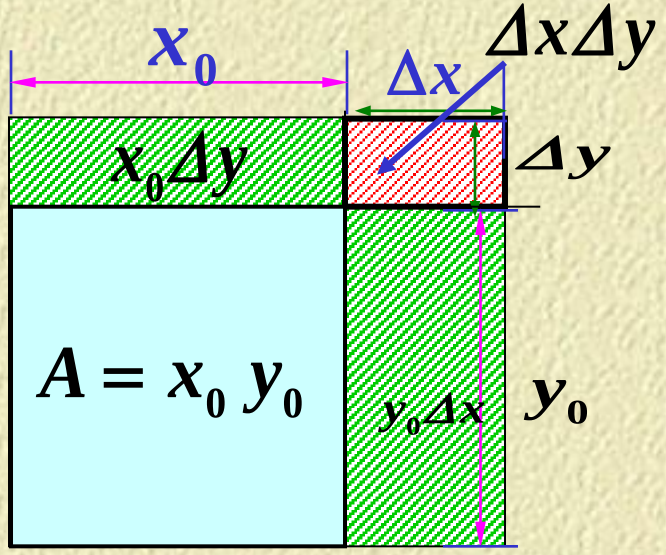
设矩形的长、宽分别由x_0

变到$x_0+\Delta x$, y_0变到$y_0+\Delta y$,

$\because$ 矩形面积 $A = xy$,

$\therefore \Delta A = (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) - x_0 y_0$

$$= \underbrace{x_0\cdot\Delta y + y_0\Delta x}_{(1)} + \underbrace{(\Delta x\Delta y)^2}_{(2)}.$$



(1).$\Delta x, \Delta y$ 的线性部分,且为ΔA 的主要部分;

(2).$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$ 的高次幂部分,当ρ

很小时可忽略.

上页 下页 返回

全增量的概念

若函数$z = f(x, y)$在点$P(x, y)$的某邻域$U(P)$内有定义，$(x+\Delta x, y+\Delta y) \in U(P)$，则称$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$为函数在点$P$处对应于自变量增量$\Delta x, \Delta y$的全增量，即

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

全微分的定义

$Def.1.$若函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处的全增量

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$可表示为

$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$,其中$A, B$与$\Delta x, \Delta y$无关

而至多与x, y有关,$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,则称函数

$z = f(x, y)$在点(x, y)处可微(分),$A\Delta x + B\Delta y$称

为函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处的(全)微分,记为

$$dz = A\Delta x + B\Delta y.$$

若函数$z = f(x, y)$在区域D内各点处处可微(分),

则称函数在区域D内可微(分).

上页 下页 返回

函数可微与函数连续的关系

若函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处可微,则函数在该点连续.

$\because \Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \lim\limits_{\rho \to 0} \Delta z = 0,$

$\therefore \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f\left(x + \Delta x, y + \Delta y\right)$

$= \lim\limits_{\rho \to 0}\left[f(x, y) + \Delta z\right] = f(x, y),$

则函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处连续.

上页 下页 返回

例1.讨论函数$z=e^{xy}$在点(x,y)处的可微性.

解 定义法*(不要求掌握)

$$\Delta z=e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)}-e^{xy}=e^{xy}\left(e^{x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y}-1\right)$$

$$=e^{xy}\left[e^{x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y}-e^{x\Delta y+\Delta x\Delta y}+e^{x\Delta y+\Delta x\Delta y}-1\right]$$

$$=e^{xy}\left[e^{x\Delta y+\Delta x\Delta y}\left(e^{y\Delta x}-1\right)+e^{x\Delta y+\Delta x\Delta y}-1\right]$$

$$=e^{xy}\left[\begin{array}{l}\left(1+x\Delta y+\Delta x\Delta y+o(x\Delta y+\Delta x\Delta y)\right)\left(y\Delta x+o(y\Delta x)\right)\\ +x\Delta y+\Delta x\Delta y+o(x\Delta y+\Delta x\Delta y)\end{array}\right]$$

$$=e^{xy}\left(y\Delta x+x\Delta y\right)+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\right)$$

多么麻烦!

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\Delta z = e^{(x+\Delta x)(y+\Delta y)} - e^{xy}$$

$$= e^{xy}\left(y\Delta x + x\Delta y\right) + o(\rho)$$

$\therefore$ 函数在点(x, y)处可微,其全微分为

$$dz = e^{xy}\left(y\Delta x + x\Delta y\right).$$

一般而言,用定义来讨论函数的可微性是比较麻烦的、困难的,甚至是不可能的.

二. 偏导数

2.偏导数定义

定义2. 设函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的某邻域内有定义,当y固定不变而x从x变为$x + \Delta x$时,

如果$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$存在,则称该极限为函数$z = f(x, y)$在点$(x, y)$处关于$x$的偏导数,记为$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$或$z_x, f_x(x, y)$,

同理,有函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处关于y的偏导数,$\dfrac{\partial z}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$或$z_y, f_y(x, y)$.

函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

由此定义可知,在$f(x,y)$中求$\frac{\partial z}{\partial x}$时,是将$y$视为常数,因而$f(x,y)$只是$x$的函数.

偏导数 – *partial derivative*

$\frac{\partial z}{\partial x}$读作“*partial z over partial x*”.

上页 下页 返回

例2.设$z=\left(1+xy^2\right)^{\sin y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=\sin y\left(1+xy^2\right)^{\sin y-1}\cdot\left(1+xy^2\right)'_x$$

$$=y^2\sin y\left(1+xy^2\right)^{\sin y-1}$$

$$z=\left(1+xy^2\right)^{\sin y}=e^{\sin y\ln\left(1+xy^2\right)}$$

是y的幂指函数

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{\sin y\ln\left(1+xy^2\right)}\cdot\left[\sin y\ln\left(1+xy^2\right)\right]'_y$$

$$=\left(1+xy^2\right)^{\sin y}\left[\cos y\ln\left(1+xy^2\right)+\sin y\cdot\frac{2xy}{1+xy^2}\right]$$

例2.(2).设$z = xf(2x-y)+g(xy)$,其中

$f(t), g(t)$均可导.求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解　记$z = xf(u)+g(v)$, $\begin{cases} u = 2x-y \\ v = xy \end{cases}$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = 1\cdot f(u) + xf'(u)\cdot u'_x + g'(v)\cdot v'_x$$

$$= f(u) + 2xf'(u) + yg'(v)$$

$$= f(2x-y) + 2xf'(2x-y) + yg'(xy).$$

设$z = xf(2x-y) + g(xy)$,其中$f(t), g(t)$均可导.求$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解 记$z = xf(u) + g(v)$, $\begin{cases} u = 2x - y \\ v = xy \end{cases}$,

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y} = -xf'(u) + xg'(v)$$

$$= -xf'(2x-y) + xg'(xy).$$

一个笑话:

常数函数C与指数函数e^x走在大街上,远远看见微分算子向他们走来.

常数函数吓得慌忙躲藏,说:“我被他微分一下,就什么都没有啦!”$\left(\dfrac{d}{dx}(C)=0\right)$

指数函数不慌不忙道:“他可不能把我怎么样,我是e^x.”$\left(\dfrac{d}{dx}(e^x)=e^x\right)$

指数函数与微分算子相遇…

上页 下页 返回

指数函数与微分算子相遇.

指数函数很得意地自我介绍道:“你好,我是指数函数e^x.”

微分算子微微一笑,道:“你好,我是$\frac{\partial}{\partial y}$.”

****

$$\frac{d}{dx}(C)=0,\qquad \frac{d}{dx}(e^x)=e^x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(e^x)=0.\leftarrow x\text{与}y\text{无关}.$$

上页 下页 返回

偏导数的概念可以推广至三元以上的情形，

如$u = f(x,y,z)$在点(x,y,z)处：

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

有关偏导数的几点说明:

(1).由偏导数的定义知,本质上偏导数就是一元函数的导数,在$z=f(x,y)$中,x与y是两个自变量,那么对x求导,即求$\frac{\partial z}{\partial x}$或$\frac{\partial f}{\partial x}$时,$y$就是常数.反之亦然.

因此,在$z=f(x,y)$中,有$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial y}=0.$

(2).偏导数的记号$\frac{\partial z}{\partial x}$是一个整体性记号,$\partial z$或$\partial x$在此没有意义,不能与$\frac{du}{dx}$是微分$du$与$dx$的商那样来理解.

上页 下页 返回

(3).偏导数存在与函数连续的关系

一元函数可导 $\Rightarrow$ 函数连续,

二元函数可(偏)导 $\Rightarrow$ 函数连续??

例如, $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0\quad , & x^2+y^2=0\end{cases}$

由定义可得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但

$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续.

$\therefore$ 二元函数可(偏)导 $\neq>$ 函数连续.

上页 下页 返回

例3.设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

求 $f(x,y)$的偏导数.

解 当$(x,y)\neq(0,0)$时,

$$f_x(x,y)=\frac{y(x^2+y^2)-2x\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y)=\frac{x(x^2+y^2)-2y\cdot xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$

上页 下页 返回

当$(x,y)=(0,0)$时,按照定义法可得

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0,$$

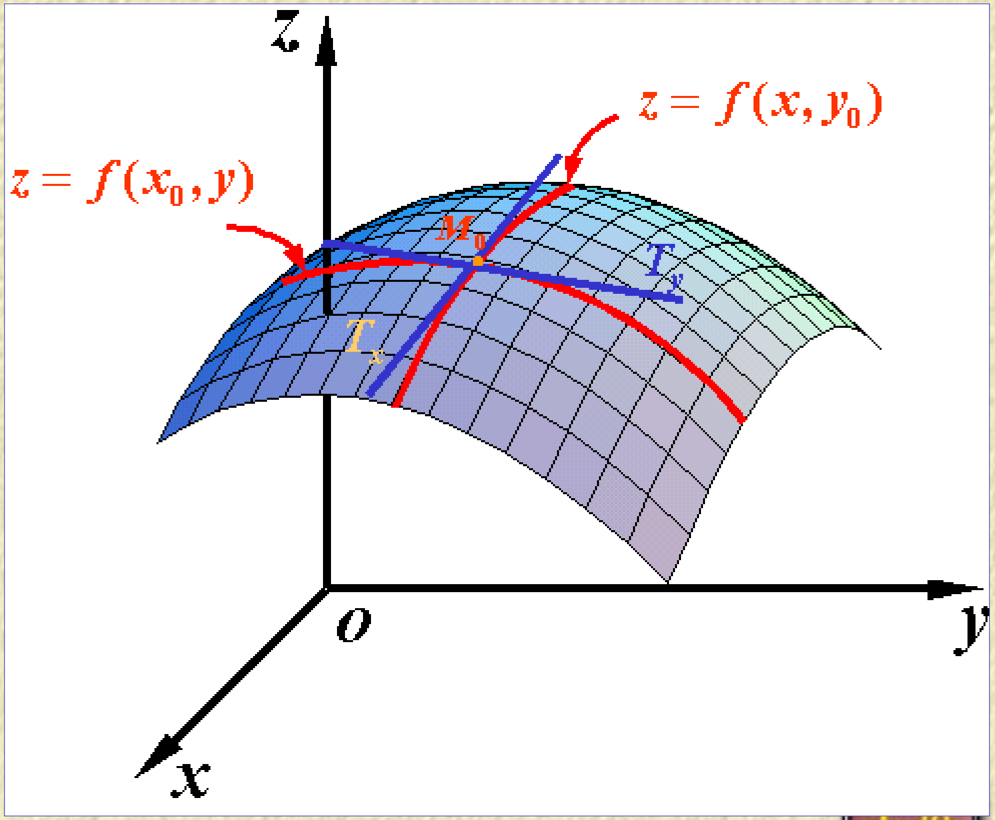
$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0}{\Delta y}=0,$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases},$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}.$$

(4).偏导数的几何意义

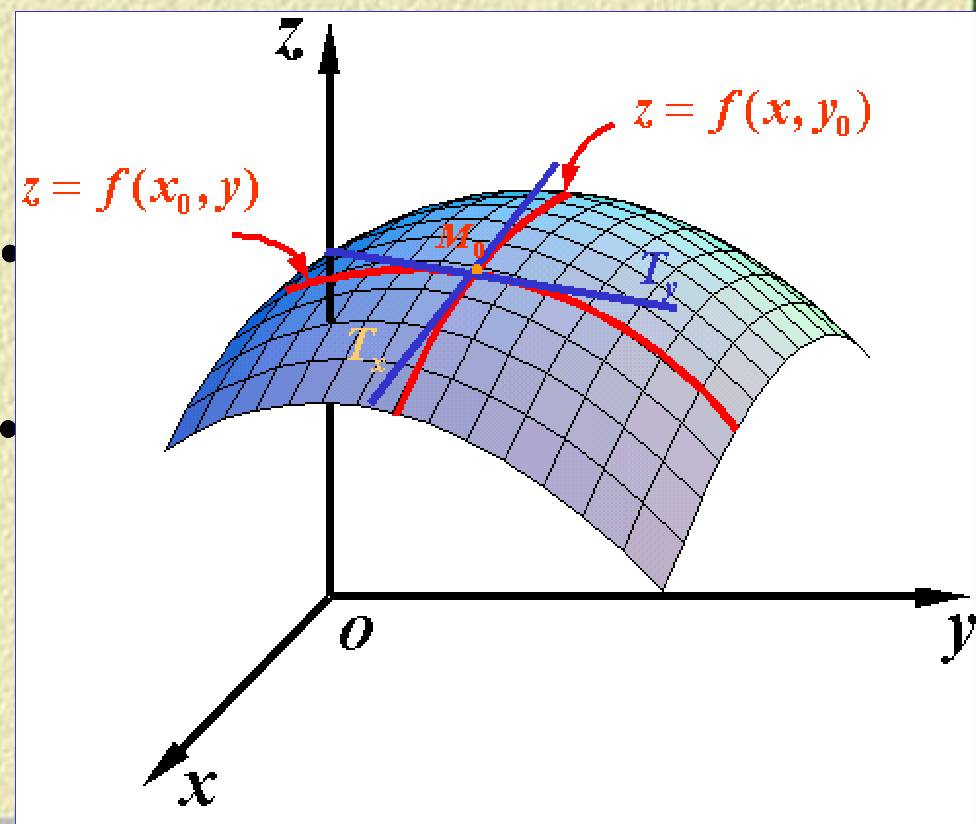
设 $M_0\left(x_0, y_0, f(x_0, y_0)\right)$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 上一点,如图



偏导数的几何意义

偏导数$f_x(x_0,y_0)$就是曲面$z=f(x,y)$被平面$y=y_0$所截得的曲线$z=f(x,y_0)$在点M_0处的切线M_0T_x对x轴的斜率.

同理理解$f_y(x_0,y_0)$.



三. 可微的条件

3.函数可微的条件

Th.17.1(函数可微的必要条件)

若函数$z = f(x,y)$在点(x,y)处可微,则函数在该点处的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$必存在,且函数$z = f(x,y)$在点$(x,y)$处的全微分为

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

上页 下页 返回

$Th.17.1$ 的证明：

若函数$z = f(x,y)$在点$P(x,y)$处可微，

当$(x+\Delta x, y+\Delta y) \in U(P)$时恒有

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho), \cdots\cdots(1)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2},$$

当$\Delta y = 0$时(1)式仍成立，此时$\rho = |\Delta x|$，

$$f(x+\Delta x, y) - f(x,y) = A\Delta x + o(|\Delta x|),$$

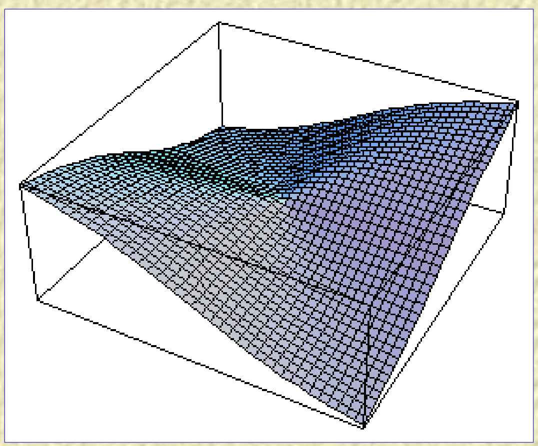
$$\therefore \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = A = \frac{\partial z}{\partial x},$$

同理得$B = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

例如，$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}.$$



在点(0,0)处有

$$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$$

$$\Delta z-\left[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\right]=\frac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}},$$

如果考虑点$P'(\Delta x,\Delta y)$沿着直线$y=x$趋近于$(0,0)$,

则
$$\frac{\dfrac{\Delta x\cdot\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\cdot\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}=\frac{1}{2},$$

$\therefore\ \rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时

$$\Delta z-\left[f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_y(0,0)\cdot\Delta y\right]\neq o(\rho),$$

$\therefore$ 函数在点$(0,0)$处不可微.

说明: 多元函数的各偏导数存在并不

并不能保证全微分存在.

又如, $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0\quad, & x^2+y^2=0 \end{cases}$

由定义可得 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 但

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

二元函数可(偏)导 $\not\Rightarrow$ 函数连续,

$\because$ 二元函数可微 $\Rightarrow$ 函数连续.

$\therefore$ 二元函数可(偏)导 $\not\Rightarrow$ 函数可微.

上页 下页 返回

$Th.17.2$ （函数可微的充分条件）

若函数$z = f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x, y)$处连续，则函数在该点处必可微.

证明$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

$$= \left[f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) \right] + \left[f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \right],$$

$$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f(x,y)$$

$$= \left[f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y+\Delta y\right) \right]$$

$$+ \left[f\left(x, y+\Delta y\right) - f(x,y) \right],$$

由$Lagrange - Th.$可得

$$f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right) - f\left(x, y+\Delta y\right)$$

$$= f_x\left(x+\theta_1 \Delta x, y+\Delta y\right)\Delta x \ \left(0<\theta_1<1\right)$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x$$ (偏导数连续!)

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1\left(\Delta x, \Delta y\right), \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_1 = 0.$$

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x \quad (0<\theta_1<1)$$

$$= f_x(x,y)\Delta x + \varepsilon_1 \Delta x \quad (\text{偏导数连续!})$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Delta x, \Delta y), \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_1 = 0.$$

二元函数$f_x(x,y)$连续$\Rightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$时,

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y) + \varepsilon_1, \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_1 = 0.$$

一元函数连续,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)$

$\Leftrightarrow \Delta x \to 0$时有

$$\varphi(x+\Delta x)=\varphi(x)+\alpha,\ \lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0$$

二元函数的偏导数连续,即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)= f_x(x,y)$$

$\Leftrightarrow \Delta x \to 0, \Delta y \to 0$时有

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)= f_x(x,y)\Delta x+\varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1=\varepsilon_1(\Delta x,\Delta y),\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0.$$

同理, $f\left(x, y+\Delta y\right)-f(x, y)$

$= f_y(x, y)\Delta y+\varepsilon_2\Delta y,$

当$\Delta y \to 0$时, $\varepsilon_2 \to 0,$

$\therefore \Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y$

$$\because \left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right| \le |\varepsilon_1|+|\varepsilon_2| \xrightarrow{\rho\to 0} 0,$$

$\therefore$ 函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处可微.

$\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)-f(x, y)$

$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$

$dz = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$

上页 下页 返回

习惯上,记全微分为$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy.$

通常我们把"二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和"的结论称为二元函数的全微分符合叠加原理.

由此可知,若$u=f(x,y,z)$,则

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

(续)例1.讨论函数$z=e^{xy}$在点(x,y)处的可微性.

解二 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy},\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy},$

$\because$ 多元初等函数在其定义区域内连续.

而ye^{xy},xe^{xy}在$\mathbb{R}^2$上处处有定义,因而连续.

由多元函数可微的充分条件知:

函数$z=e^{xy}$在点(x,y)处的可微,且

$$dz=e^{xy}\left(y\Delta x+x\Delta y\right).$$

多么简单!

另外,我们在计算函数$z = e^{xy}$在点(x, y)处的全微分时还可以如下处理,感觉十分简便:

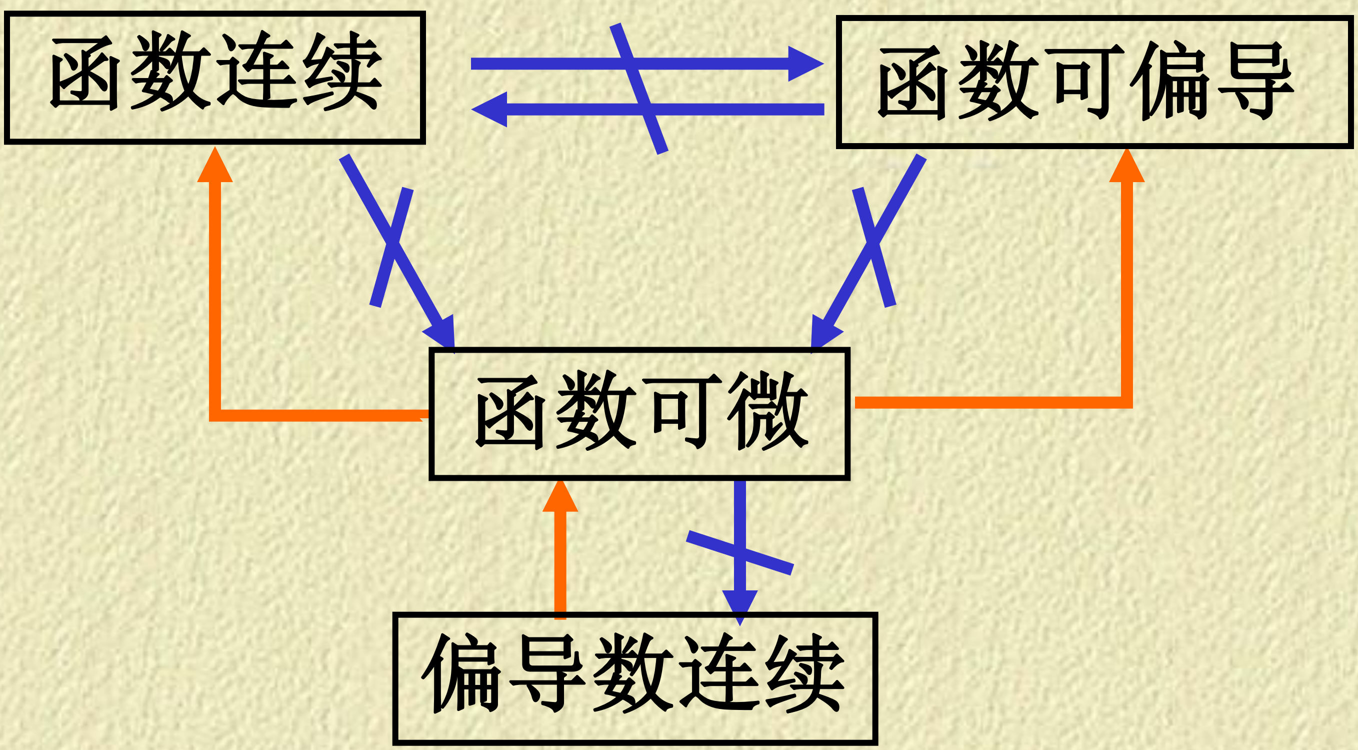
记$z = e^{u}, u = xy$,有

$$dz = d\left(e^{u}\right) = e^{u}du,$$

$$du = d\left(xy\right) = ydx + xdy,$$

$$\therefore dz = e^{xy}\left(ydx + xdy\right).$$

多元函数连续、可偏导、可微的关系



例4.试问$\left(1+x^2y\right)dx+\left(e^x-\sin y\right)dy$

是否是一个二元函数的全微分?

分析:若$\left(1+x^2y\right)dx+\left(e^x-\sin y\right)dy$

是函数$z=f(x,y)$的全微分,由$Th.2$

——函数可微的必要条件知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^x-\sin y.$$

而一个函数的两个偏导数$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

之间是有着紧密的关系的…

解　若$\left(1+x^2y\right)dx+\left(e^x-\sin y\right)dy$

是函数$z=f(x,y)$的全微分,由$Th.2$

——函数可微的必要条件知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=e^x-\sin y\cdots\cdots(1)$$

由$\dfrac{\partial z}{\partial x}=1+x^2y\Rightarrow z=x+\dfrac{1}{3}x^3y+C(y),$

$\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{3}x^3+C'(y),$而这与(1)式相矛盾.

$\therefore$题设不可能是某函数的全微分.

上页　下页　返回

定理17.3 设函数$f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内有偏导数,若点(x,y)属于该邻域,则$\exists \xi = x_0+\theta_1(x-x_0), \eta = y_0+\theta_2(y-y_0)$, $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$,使得

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=$$
$$f_x(\xi,y)(x-x_0)+f_y(x_0,\eta)(y-y_0),$$

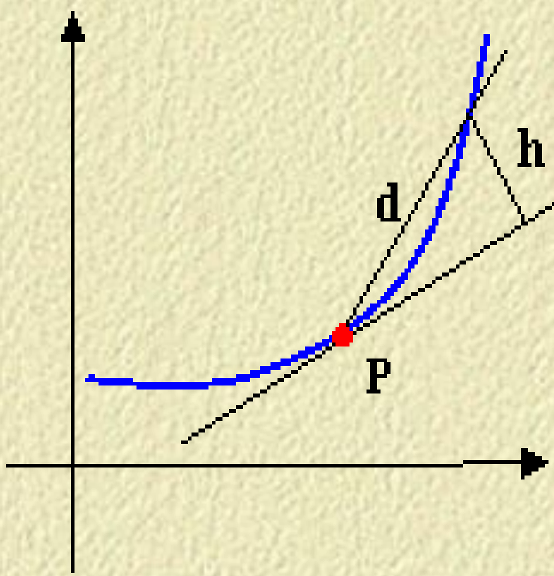
证明 $f(x,y)-f(x_0,y_0)=\left[f(x,y)-f(x,y_0)\right]$
$+\left[f(x,y_0)-f(x_0,y_0)\right]=\cdots$

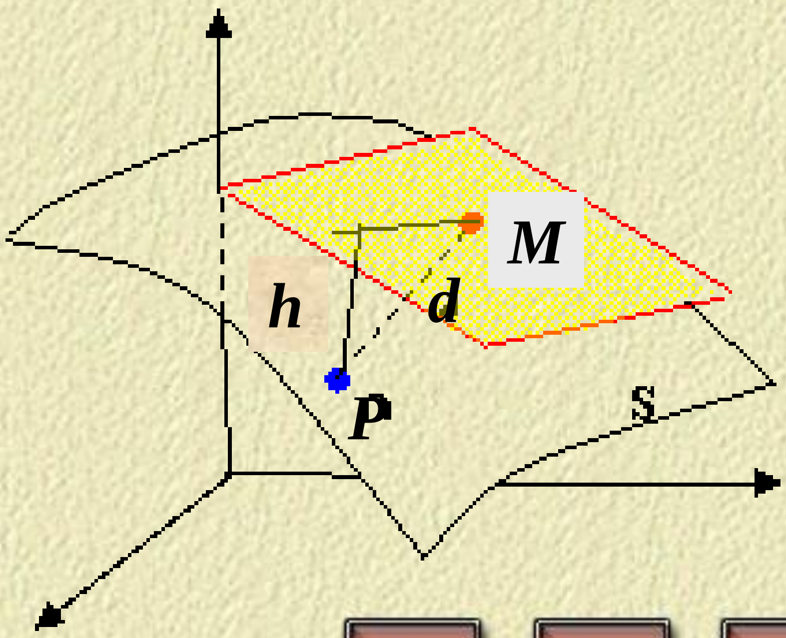
上页 下页 返回

四. 可微性的几何意义与应用

4. 切平面的定义

一元函数可微性，在几何上反映为曲线存在不平行于Y轴的切线，二元函数可微性的几何意义则反映的是曲面与其切平面的类似关系.





上页 下页 返回

定义3（切平面）　设M是曲面S上一点，H为通过M的一个平面，曲面S上的动点P到M和到平面H的距离分别为d和h，当P在S上以任何方式趋于M时，恒有$h/d\to 0$，则称平面H为曲面S在点M处的切平面，M为切点.

定理 17.4　曲面$z=f(x,y)$在点$M(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$存在不平行于Z轴的切平面的充要条件是函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$可微．　（证略）

可微性的几何意义

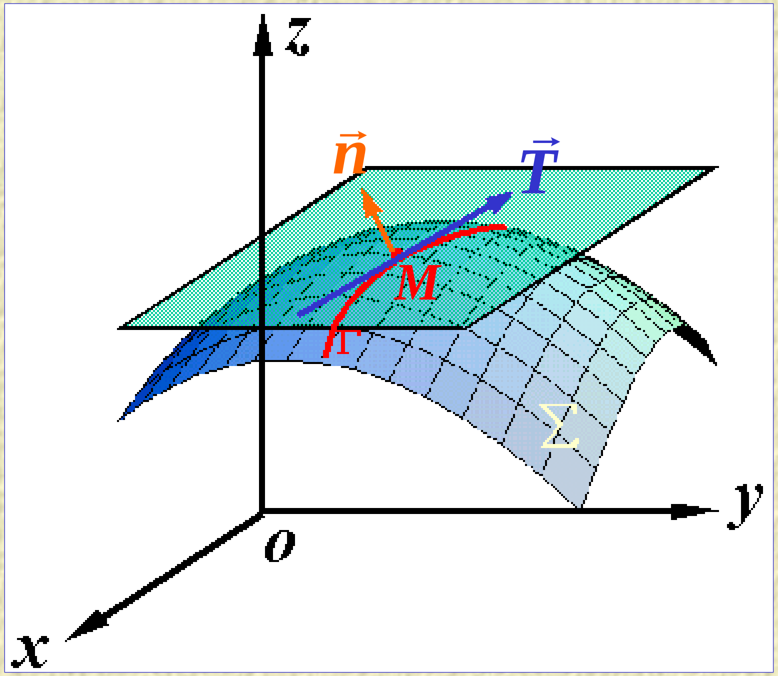
函数可微 ⟹ 曲面有切平面 ⟹ 曲面光滑

上页　下页　返回

曲面的切平面与法线

(1). 设曲面方程为

$$z = f(x, y)$$



曲面在M处的切平面方程为

$$f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) = z - z_0,$$

曲面在M处的法向量为 $\vec{n} = \pm\left(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1\right)$

曲面在M处的法线方程为

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

若α、β、γ 表示曲面的法向量的方向角，并假定法向量的方向是向上的，即使得它与 z 轴的正向所成的角γ 是锐角，则法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\cos\beta=\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\text{其中}\begin{cases}f_x=f_x(x_0,y_0)\\f_y=f_y(x_0,y_0)\end{cases}.$$

曲面在M处的单位法向量为

$$\vec{n^o}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

(2). 全微分的几何意义

因为曲面在M处的切平面方程为

$$\boxed{z - z_0} = \boxed{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}$$

切平面上点的竖坐标的增量

函数$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0)的全微分

$z = f(x, y)$在(x_0, y_0)的全微分，表示曲面$z = f(x, y)$在点(x_0, y_0, z_0)处的切平面上的点的竖坐标的增量.

5.全微分在函数值近似计算中的应用

若函数$z = f(x,y)$在点(x,y)处可微,

$$\Delta z = dz + o(\rho), \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

$$dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

当$|\Delta x|,|\Delta y|$都较小时,有近似等式

$$\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

或表示为:$|\Delta x| << 1,|\Delta y| << 1$时,

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

返回

例5.要在高为$H=20cm$,底半径$R=4cm$的圆柱体表面均匀地镀上一层厚度为$0.1cm$的黄铜,问需要耗费多少黄铜?

解 设黄铜的比重$\rho = c\left({}^{g}\!/_{cm^3} \right)$,

圆柱体体积$V=\pi R^2 H$,

$R=4, H=20, \Delta R=0.1, \Delta H=0.2$时,要求$\Delta V$.

由于$\dfrac{\partial V}{\partial R}=2\pi RH, \dfrac{\partial V}{\partial H}=\pi R^2$,

于是$\Delta V \approx dV = \dfrac{\partial V}{\partial R}\cdot \Delta R + \dfrac{\partial V}{\partial H}\cdot \Delta H = 19.2\pi$

从而需要耗费黄铜 $19.2\pi c(g)$.

全微分在函数值近似计算中的应用

当$|\Delta x|,|\Delta y|$都较小时,有

$$\Delta z \approx dz = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y.$$

亦即 $z - z_0 \approx$

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0),$$

其几何直观的理解就是在切点附近,

我们用切平面片去近似替代曲面片.

以直代曲

小结

1.多元函数全微分的概念与求法;

2.多元函数的连续,可导,可微的关系;

(与一元函数的情形有很大的区别!)

异

3.一元函数可微 $\Rightarrow$ 平面曲线光滑,

二元函数可微 $\Rightarrow$ 空间曲面光滑;

同

4.一元函数微分在近似计算中的应用

$\Leftrightarrow$ 以切线段替代曲线弧,

二元函数全微分在近似计算中的应用

$\Leftrightarrow$ 以切平面片替代曲面片.

思考题

1.记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,对于函数$u=\dfrac{1}{r}$,

计算$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

2.设$\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)dy$

是一个二元函数$z=f(x,y)$的全微分.试确定a,b

的值,并求出函数$z=f(x,y)$.

3.试问:以下所列各项是函数$z=f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处可微的什么条件?

(1). $f(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处连续.

(2). $f_x\left(x_0,y_0\right), f_y\left(x_0,y_0\right)$存在.

(3). $f_x(x,y), f_y(x,y)$在点$\left(x_0,y_0\right)$处连续.

(4).在$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时

$$\Delta z-f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x-f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y\to 0.$$

(5).在$\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$时

$$\frac{\Delta z-f_x\left(x_0,y_0\right)\Delta x-f_y\left(x_0,y_0\right)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\to 0.$$

参考解答

1.记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$,对于函数$u=\dfrac{1}{r}$,

计算$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$.

解 $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\dfrac{x}{r}$,

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{1}{r}\right)'\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=-\frac{x}{r^3},$$

由形式对称性得

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{z}{r^3}.$$

上页 下页 返回

2.设$\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)dy$是一个二元函数$z=f(x,y)$的全微分.试确定$a,b$的值,并求出函数$z=f(x,y)$.

解 $\because\left(axy^3-y^2\cos x\right)dx$

$+\left(1+by\sin x+3x^2y^2\right)dy=dz,$

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2\end{cases},$$

上页 下页 返回

$$\left(axy^3 - y^2\cos x\right)dx + \left(1 + by\sin x + 3x^2y^2\right)dy = dz,$$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = axy^3 - y^2\cos x, \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + by\sin x + 3x^2y^2,$$

$$z = \frac{1}{2}ax^2y^3 - y^2\sin x + C(y) \qquad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = C'(y) - 2y\sin x + \frac{3}{2}ax^2y^2 = 1 + by\sin x + 3x^2y^2,$$

$$\therefore a = 2, b = -2, C'(y) = 1.$$

上页 下页 返回

$$\left(2xy^3 - y^2\cos x\right)dx + \left(1 - 2y\sin x + 3x^2y^2\right)dy = dz,$$

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3 - y^2\cos x \cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1 - 2y\sin x + 3x^2y^2 \cdots(2) \end{cases},$$

由(1)得$z = x^2y^3 - y^2\sin x + C(y)\cdots(3)$,

对(3)计算$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2 - 2y\sin x + C'(y)$,

与(2)比较得:$C'(y) = 1, \therefore C(y) = y + C$,

$\therefore z = x^2y^3 - y^2\sin x + y + C$,

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(其中$C$为任意常数).

3.试问：以下所列各项是函数$z = f(x,y)$在点(x_0, y_0)处可微的什么条件？

(1). $f(x,y)$在点(x_0, y_0)处连续.　　必要

(2). $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$存在.　　必要

(3). $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$在点(x_0, y_0)处连续.　　充分

(4).在$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时

$$\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y \to 0.$$　　必要

(5).在$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \to 0$时

$$\frac{\Delta z - f_x(x_0, y_0)\Delta x - f_y(x_0, y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \to 0.$$　　充分必要

上页 下页 返回