无穷级数习题讲解

2023 – 04

$$1.\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)=?$$

取 $m\geq 3,\quad S_m=\sum_{n=1}^{m}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

$$=\left(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}-2\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)+$$

$$\cdots+\left(\sqrt{m}-2\sqrt{m-1}+\sqrt{m-2}\right)+\left(\sqrt{m+1}-2\sqrt{m}+\sqrt{m-1}\right)$$

$$+\left(\sqrt{m+2}-2\sqrt{m+1}+\sqrt{m}\right)=1-\sqrt{2}+\sqrt{m+2}-\sqrt{m+1}$$

$$=1-\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{m+2}+\sqrt{m+1}},$$

$\lim\limits_{m\to\infty}S_m=1-\sqrt{2}$，知级数收敛.

上页 下页 返回

判断级数的敛散性$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$

解 $u_n=\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$

$$=\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)-\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}$$

$$=\frac{-2}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+2}\right)}$$

$\therefore n\to\infty$时,$u_n\sim-\dfrac{1}{4n^{3/2}}$,而级数$\sum_{1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{3/2}}$收敛,

知原级数收敛.

2.$\left(P16/Ex.10.(7)\right)$讨论级数敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},a>0.$$

解 $u_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a}{1+a^{n+1}}=\begin{cases}a,a<1\\1/2,a=1,\\0,a>1\end{cases}$

$\therefore$级数收敛.

根值法可行么?

上页 下页 返回

2.讨论级数敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},a>0.$$

解二 $$0<u_n\le\begin{cases}a^n,a<1\\ 1/2^n,a=1\\ \dfrac{a^n}{a\cdot a^{n-1}\cdot a^n}=\left(\dfrac{1}{a}\right)^n,a>1\end{cases},$$

由不等式形式的比较判别法知原级数收敛.

上页 下页 返回

2.讨论级数敛散性$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, a>0.$

解三 $n\geq 2, u_n=\frac{1+a^n-1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$

$$=\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{n-1})}-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)},$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$$

$a>1$ 时, $0<\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}<\frac{1}{a^n},$

$a=1$ 时, $\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}=\frac{1}{2^n},$

由级数定义知原级数收敛.

$a<1$ 时, $\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\rightarrow$?如之奈何?

2.讨论级数敛散性$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}, a>0.$

解三 $n\geq 2, S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=\frac{1}{1+a}-\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$,

$0<a<1$ 时数列$\left\{\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\right\}$单调递减

且有下界,$\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}>0$,

故数列$\left\{\frac{1}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\right\}$收敛,

由级数定义知原级数收敛.

解三中 $0<a<1$ 时用定义法知原级数收敛,但级数和却求不出来.

上页 下页 返回

2.(2).讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$的敛散性.

解 $\because 0 < u_n = \frac{2+(-1)^n}{2^n} \le \frac{3}{2^n} = v_n$,

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 收敛,

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n},$$

考察 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2\left(2+(-1)^n\right)}=a_n,$

$$\lim_{n\to\infty}a_{2n}=\frac{1}{6},\lim_{n\to\infty}a_{2n+1}=\frac{3}{2}>1,$$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 不存在.

在此比值审敛法失效.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n},\because 1\le 2+(-1)^n\le 3,$$

$$1\le\sqrt[n]{2+(-1)^n}\le\sqrt[n]{3},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2}=\frac{1}{2}<1,$$

$\therefore$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$收敛.

其实,由级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}$的收敛性,由**收敛级数的线性性质**知:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}\text{收敛.}$$

上页 下页 返回

有参数就要讨论!

2.(3). $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^k}(a>0)$的敛散性.

解 由比值法 $\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}/(n+1)^k}{a^n/n^k}=a,$

或根值法 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n^k}}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k}=a,$

$\therefore\begin{cases}0<a<1\text{时},\forall k,\text{原级数收敛}.\\ a>1\text{时},\forall k,\text{原级数发散}.\end{cases}$

而 $a=1$ 时, $\frac{a^n}{n^k}=\frac{1}{n^k},\Rightarrow\begin{cases}k>1\text{时},\text{级数收敛},\\ k\le 1\text{时},\text{级数发散}.\end{cases}$

2.(4).判断级数的敛散性

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{10^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$$

解 $S_{2n}=\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{3}{10^n}$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}\right)-\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{3}{10}-\frac{3}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}$$

上页 下页 返回

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{3}{10}-\frac{3}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}\right)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} - \frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

又 $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(S_{2n}+\frac{1}{3^{n+1}}\right)=\frac{1}{6},$

$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{6},$

$\therefore$ 级数收敛.

试问,下面做法是否正确?

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{10}+\frac{1}{3^2}-\frac{3}{10^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{3}{10^3}+\cdots$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots\right)$$

$$-\left(\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots\right)$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{6}.$$

3.判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin\frac{n\pi}{9}}{3^n}$的敛散性.

注意,$\sin\frac{n\pi}{9}$是干扰项.

解 $\because \left|\frac{n\sin\frac{n\pi}{9}}{3^n}\right| \le \frac{n}{3^n}$,对正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$,

由根值法,$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$,

$\therefore$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$收敛,

$\therefore$ 原级数绝对收敛.

上页 下页 返回

3.(2).判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$的敛散性.

解 注意,解题不能不管不顾地一上来就通项取绝对值.

$$\left|\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}\right|<\frac{2^n}{n\cdot 3^n},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{2^n}{n\cdot 3^n}}=\frac{2}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{2}{3}<1,$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$绝对收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$收敛 .

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是交错级数,满足*Leibniz*定理条件,

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛.(需注意$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$是条件收敛的)

由收敛级数加法性质知原级数收敛.

3.(2).判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$的敛散性.

注意,解题不能不管不顾地一上来就通项取绝对值.

倘若你作$\left|\frac{2^n\cos n+(-3)^n}{n\cdot 3^n}\right|\le\left|\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}\right|+\left|\frac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}\right|<\frac{2^n}{n\cdot 3^n}+\frac{1}{n}$,

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 3^n}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$绝对收敛,故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n}{n\cdot 3^n}$收敛 .

但是,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,你就得不到有用的信息了.

3.(3).试判断级数的敛散性

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots.$$

解 $\because \left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)+\cdots$$

$$=\frac{2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}+\cdots$$

$$+\frac{2}{\left(\sqrt{n}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)}+\frac{2}{\left(\sqrt{n+1}-1\right)\left(\sqrt{n+1}+1\right)}+\cdots$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\cdots\right),$$

上页 下页 返回

$$\text{解}\because\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)+\cdots$$

$$=\frac{2}{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)}+\frac{2}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+1\right)}+\cdots$$

$$+\frac{2}{\left(\sqrt{n}-1\right)\left(\sqrt{n}+1\right)}+\frac{2}{\left(\sqrt{n+1}-1\right)\left(\sqrt{n+1}+1\right)}+\cdots$$

$$=2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\cdots\right),$$

由于调和级数发散,由级数性质4:若级数加括号后发散,则原级数发散.再由性质1:级数乘上非零数,级数的敛散性不变.故此原级数发散.

3.(4)*.试问级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$是否收敛?若收敛是条件收敛还是绝对收敛?

解 $|u_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n+(-1)^n}}>\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$发散,

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

下面判断是否条件收敛,首先认定是交错级数,但因不满足$u_{n+1}\le u_n$,所以莱布尼兹判定法无效.此处可用定义证明.

$$S_{2n}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right),$$

或 $$S_{2n}=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)+\frac{1}{\sqrt{2n+1}},$$

$\therefore S_{2n}$ 为单调减少有下界数列,

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S, \because \lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=0, \therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S,$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}S_n=S,$ 原级数收敛.

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛.

上页 下页 返回

4.若$n \geq 1$ 时有$a_n \leq b_n \leq c_n$,且$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛.试问$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$是否收敛?

答案是:$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

上页 下页 返回

解 $\forall n \geq 1, a_n \leq b_n \leq c_n$,

$\Rightarrow 0 \leq b_n - a_n \leq c_n - a_n$,

$\because$ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛,

$\therefore$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}(c_n - a_n)$收敛, ←—— 性质2

由正项级数的比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n)$收敛,

而 $b_n = (b_n - a_n) + a_n$,

由级数的线性性质知$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$收敛.

4.(2).

(A).若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,问$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$是否收敛?

(B).若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,问$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$是否收敛?

上页 下页 返回

(A).若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

证明 $\because$ 正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,

$\therefore$ 有$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$或$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$,

$\therefore \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n^2} < 1$或$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}^2}{u_n^2} < 1$,

由根/比值法知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$收敛.

请问这一做法对吗?

上页 下页 返回

前面的这一做法是错误的!

$\because$比值/根值法判断级数收敛的定理,

其条件是充分的而不是必要的.

即正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\not\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} < 1$或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

实际上,$u_n > 0$,$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,若$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = r$或

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = r\text{存在} \Rightarrow r \le 1.$$

但$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$或$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$可以不存在的,例子如下.

例如,$\frac{1}{3}+\frac{3}{10}+\frac{1}{3^2}+\frac{3}{10^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{3}{10^3}+\cdots$收敛,

但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$和$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$都不存在.

又如,$\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,但是$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$,

我们知道,根值法/比值法在极限为 1 时是失效的! 失效!

上页 下页 返回

(A).若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

正确的做法(之一)可为:

$\because u_n > 0$时, $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n^2}{u_n} = \lim_{n\to\infty} u_n = 0,$

由比较审敛法知$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

(B).若一般项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛 $\neq>$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

比如,$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$是$Leibniz$级数,条件收敛,

但$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right]^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 是调和级数,发散.

4.(3).若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛,求证$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.

证明$\because \left|(-1)^n \frac{u_n}{n}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+u_n^2\right)$,

由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$ 绝对收敛.