

# Sec.14.1 幂级数及其运算

一. 幂级数及其收敛性

二. 幂级数的性质及运算

上页

下页

返回

# 一.幂级数及其收敛性

由几何级数知,在 $|x| < 1$ 时有

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \cdots \cdots (1)$$

记  $1 =: x^0$ , 那么(1)式可表示为  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ .

通常我们把形如的级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  称为幂级数.

更一般地有函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

我们可以得到函数的一种新的表示方式.



有时**幂级数**也表示成  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$   
 $= a_0 + a_1 (x - x_0) + \cdots + a_n (x - x_0)^n + \cdots$   
( $x_0 \in \mathbb{R}$ )的样子.

$x_0 = 0$  时上式就变成了

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

说明：人们为简便地表达幂级数

$$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots,$$

发明了求和号“ $\sum$ ”.

因为幂级数中可以 $x = 0$ ,

$$\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots\right)\Big|_{x=0} = a_0,$$

$$\therefore a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_nx^n,$$

尽管 $0^0$ 没有意义,为方便我们约定: $1 = x^0$ ,

$$\text{于是 } a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,$$

这样就得到了幂级数一种简练的表达法.



# 1. 幂级数的收敛性.

如(1).  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$ , 当  $|x| < 1$  时级数

收敛, 当  $|x| \geq 1$  时级数发散. 所以该幂级数的收敛点集为  $(-1, 1)$ .

(2).  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  在  $|x| \leq 1$  时级数收敛, 当  $|x| > 1$  时级

数发散, 该级数收敛点集为  $[-1, 1]$ .



(3).  $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n = 1 + x + 2!x^2 + \cdots$ , 仅当  $x = 0$  时级数收敛, 当  $x \neq 0$  时级数发散. 所以该幂级数的收敛点集为  $\{0\} = [0, 0]$ .

(4).  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  级数绝对收敛, 该级数收敛点集为  $\mathbb{R}$ .

使得函数项级数收敛的点集称为该函数项级数的收敛域.



## 定理14.1(Abel定理).

(1).若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$  ( $x_0 \neq 0$ )处收敛,则

它在满足 $|x| < |x_0|$ 的一切 $x$ 处都绝对收敛;

(2).若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处发散,则它在满

足 $|x| > |x_0|$ 的一切 $x$ 处都发散.

证明 (1).  $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ 收敛,  $\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$ ,



$\exists M$ , 使得  $|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ ,

$$|a_n x^n| = \left| a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n} \right| = |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n,$$

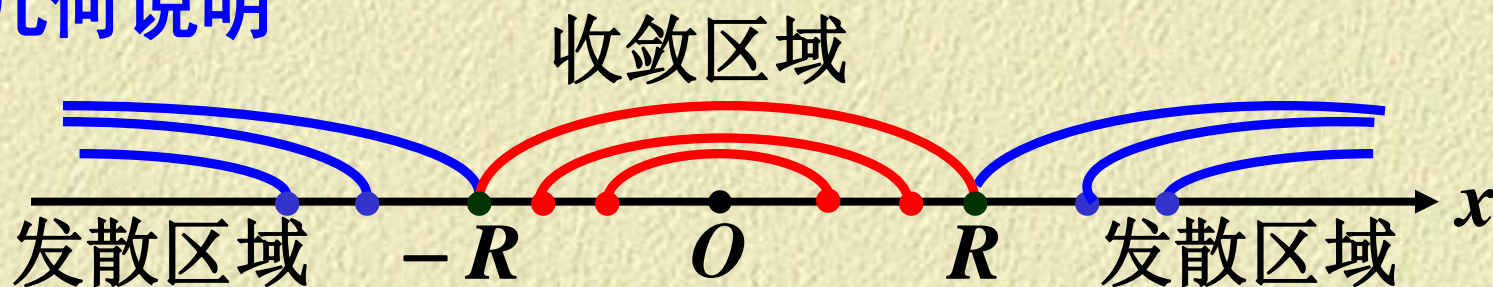
$\therefore$  当  $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$  时, 几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$  收敛,

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$  收敛, 即级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  绝对收敛.



(2).假设当 $x = x_0$ 时级数发散,而有一点 $x_1$ 适合 $|x_1| > |x_0|$ 使得级数收敛,那么由(1).结论知级数当 $x = x_0$ 时应收敛,而这与假设矛盾.

### 几何说明





是非题.

$\sum a_n (x-1)^n$  在  $x = -3$  处收敛,  
则它在  $x = 3$  处亦收敛.

解 记  $x-1 = t$ ,

原  $\Leftrightarrow \sum a_n t^n$  在  $t = -4$  时收敛,

由 *Abel - Th.* 知在  $t = 2$  时收敛.

$A : T.$



由Abel定理知,若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是只在 $x=0$ 一点收敛,也不是在整个实数域上收敛,则必有一个确定的正数 $R$ 存在,它具有以下特点:

- (1).当 $|x| < R$ 时幂级数绝对收敛;
- (2).当 $|x| > R$ 时幂级数发散;
- (3).当 $|x| = R$ 时幂级数可能收敛可能发散.



## 2.幂级数的收敛区间与收敛域.

定义:上文所说的正数 $R$ 称为幂级数的收敛半径,开区间 $(-R, R)$ 称为幂级数的收敛区间,而收敛域是 $(-R, R), [-R, R), (-R, R], [-R, R]$ 之一(,需具体问题具体讨论).

约定:

- (1).幂级数只在 $x = 0$ 处收敛,则 $R = 0$ ;
- (2).幂级数对一切 $x \in \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ 都收敛,则 $R = +\infty$ ,收敛域 $(-\infty, +\infty)$ .

$Q$ .如何求幂级数的收敛半径?



**定理14.2.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $a_n \neq 0$ ,

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho,$$

则(1).  $\rho \neq 0, R = \frac{1}{\rho}$  ; (2).  $\rho = 0, R = +\infty$  ;

此时级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  内绝对收敛.

(3).  $\rho = +\infty, R = 0$ . 此时级数仅在  $x = 0$  收敛.



证明 对于  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $a_n \neq 0$ ,

由比值 (*D'lembert*) 判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho |x|,$$

或根值 (*Cauchy*) 判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho |x|,$$

$$\left[ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \right]$$

上页

下页

返回



(1).若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho|x|,$

或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho|x|, \rho \neq 0,$

由比/根值法, 当  $|x| < \frac{1}{\rho}$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n|$  收敛,

从而级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  绝对收敛.

当  $|x| > \frac{1}{\rho}$  时, 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_nx^n|$  发散,

并且从某个  $n$  开始  $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_nx^n|, |a_nx^n| \not\rightarrow 0$

从而级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  发散. 收敛半径  $R = \frac{1}{\rho}.$

(2). 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho |x|,$

或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho |x|,$

由比/根值法知,

若  $\rho = 0, \forall x \in \mathbb{R}, \rho |x| \equiv 0 < 1,$

从而级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-\infty, +\infty)$  上绝对收敛,

故级数收敛半径  $R = +\infty$ .



(3).若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho|x|,$

或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_nx^n|} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho|x|,$

由比/根值法知,若  $\rho = +\infty, \forall x \neq 0$ , 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \infty \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_nx^n|} = \infty$$

$\therefore x \neq 0$  时,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nx^n \neq 0$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$  发散.

$\therefore$  级数只在  $x = 0$  处收敛, 故曰级数收敛半径  $R = 0$ .



例1. 判断下列级数的敛散性：

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad (2). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad (3). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

解 (1). 当  $x = 0$  时显然级数收敛, 而当  $x \neq 0$  时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = |x| \cdot 0 = 0,$$

$$\therefore \forall x, \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1 \text{ 恒成立,}$$

故级数  $\forall x \in (-\infty, +\infty)$  绝对收敛,  $R = +\infty$ .

上页

下页

返回



$$(2). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$$

当 $x = 0$ 时显然级数收敛;而当 $x \neq 0$ 时

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} |x|^2$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{(2n+2)(2n+1)} = |x|^2 \cdot 0 = 0 < 1,$$

$\forall x \in (-\infty, +\infty)$ , 上式恒成立,

故级数 $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ 都绝对收敛,  $R = +\infty$ .



$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} |x| = |x|,$$

$\therefore |x| < 1$  时级数绝对收敛,

$|x| > 1$  时级数发散 ;(?)

而  $|x| = 1$  时,  $x = 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$  是级数,

此时级数收敛——条件收敛;

$x = -1$ , 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$ , 显然级数发散.

上页

下页

返回



$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

$$\because \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \therefore R = 1.$$

当  $x = 1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  收敛,

当  $x = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{n}$  发散,

$\therefore$  级数收敛域为  $(-1, 1]$ .



例1.(2).若  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{4}$ , 问  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n x^n}{2^n}$  收敛半径 = ?

解 不单考虑系数, 用一般法:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{a_{n+1} x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{a_n x^n}{2^n}} \right| = \frac{|x|}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 2|x|,$$

$\therefore$  当  $2|x| < 1$  即  $|x| < \frac{1}{2}$  时级数收敛,

$\therefore$  级数的收敛半径  $R = \frac{1}{2}$ .



## 回 顾

命题：对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  ( $u_n \neq 0$ )而言，

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = r$  或者  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = r$ ,

那么

(1).  $0 \leq r < 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛  $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛;.

(2).  $r > 1$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.  $\left( \because r > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = +\infty \right)$



因而,对幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 而言,  $x \neq 0$ ,

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = r \text{ 或 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = r,$$

则(1).  $0 \leq r < 1$ , 幂级数绝对收敛;

(2).  $r > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n x^n \neq 0, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  发散.



思考练习1.确定下列幂级数的收敛半径和收敛域.

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} ; \quad (2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n ;$$

$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n} ; \quad (4). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + (-1)^n}{3^n} x^{2n} ;$$

$$(5). \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n ;$$

$$(6). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2} .$$



参考解答.

$$(2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1} \left( \frac{x-1}{2} \right)^{n+1}}{\frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n} \right|$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{2(n+1)} |x-1| = \frac{3}{2} |x-1|,$$



$$(2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \frac{3}{2} |x-1|,$$

$\therefore$  当  $\frac{3}{2} |x-1| < 1$  时级数绝对收敛,

当  $\frac{3}{2} |x-1| > 1$  时级数发散,



$$(2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n;$$

而当  $\frac{3}{2}(x-1) = 1$  时, 级数为  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  发散,

当  $\frac{3}{2}(x-1) = -1$  时, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  条件收敛,

$\therefore$  级数收敛半径  $R = \frac{2}{3}$ , 级数在  $\left( \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$  内绝对收敛.

在  $x = \frac{1}{3}$  处条件收敛, 在  $x = \frac{5}{3}$  处发散.

$\therefore$  级数的收敛域为  $\left[ \frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right)$ .



不妨对(2).  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n$  作变形,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} \left( \frac{x-1}{2} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[ \frac{3}{2} (x-1) \right]^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{n}, u = \frac{3}{2} (x-1).$$



$$(3). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n}$$

若仅记得 “ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$  或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho$ ,

$R = \frac{1}{\rho}$ , 级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$  内绝对收敛.”

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

得  $R = 2 \Rightarrow$  级数在  $(-2, 2)$  内绝对收敛.

这样就错了: 可注意到上述结论是对

于级数的标准形式  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$  而言的.



(3).正解  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n}$

我们熟知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2 \sqrt[n]{n}} = \frac{x^2}{2} < 1 \text{ 时,}$$

级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n}$  绝对收敛, 此时  $x^2 < 2$ ,

$|x| < \sqrt{2}$ , 得  $R = \sqrt{2}$ .

当  $x = \pm\sqrt{2}$  即  $x^2 = 2$  时,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  是 *Leibniz* 级数,

$\therefore$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} x^{2n}$  的收敛域为  $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

上页

下页

返回



$$(4). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + (-1)^n}{3^n} x^{2n}$$

$$\frac{3}{3^n} \leq \frac{4 + (-1)^n}{3^n} \leq \frac{5}{3^n} \Rightarrow \frac{\sqrt[n]{3}}{3} \leq \sqrt[n]{\frac{4 + (-1)^n}{3^n}} \leq \frac{\sqrt[n]{5}}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4 + (-1)^n}{3^n}} = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{4 + (-1)^n}{3^n} x^{2n} \right|} = \frac{1}{3} x^2,$$



$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{4 + (-1)^n}{3^n} x^{2n} \right|} = \frac{1}{3} x^2,$$

$\therefore x^2 < 3$ , 即  $|x| < \sqrt{3}$  时级数绝对收敛.

又  $x = \pm\sqrt{3}$  时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + (-1)^n}{3^n} x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} [4 + (-1)^n] \text{ 发散.}$$

级数的收敛半径  $\sqrt{3}$ , 收敛域为  $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ .



$$(5). \sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) x^n ;$$

$$\textit{Hint} : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{\ln n} = 1.$$

$$R = 1$$



$$(6). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{2^n} x^{n^2} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{2} = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |x| = 1 \\ \infty, & |x| > 1 \end{cases}$$

$\therefore$  级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^{n^2}$  的收敛域为  $[-1, 1]$ .

上页

下页

返回



## 二. 幂级数的性质及运算

以下假设恒有 $R>0$ .

定理14.3.(1). 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续.

(2). 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间的右端点 $x = R$  (左端点 $x = -R$ ) 处收敛, 则和函数在该点处左(右)连续. [Abel第二定理]

即幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数在收敛域上连续.



**定理14.4.** 设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在收敛区间  $(-R, R)$

上的和函数为  $S(x)$ . 则

(1). 和函数  $S(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内可导, 并且有逐项求导公式:

$$S'(x) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, |x| < R$$

**级数求和运算与求导运算可交换次序**

(2). 和函数  $S(x)$  在收敛区间  $(-R, R)$  内可积, 并且有逐项积分公式:

$$\int_0^x S(t) dt = \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

$$|x| < R.$$

**级数求和运算与积分运算可交换次序**



推论14.1.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $(-R, R)$

内的和函数 $S(x)$ ,则 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内任意次可导,且都可逐项求导,

$$S(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$$S'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + na_n x^{n-1} + \cdots$$

$$S''(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \cdots + n(n-1)a_n x^{n-2} + \cdots$$

... ..



推论14.2.幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间

$(-R, R)$ 内的和函数 $S(x)$ ,则

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

即幂级数的系数由和函数 $S(x)$ 在 $x = 0$ 处的各阶导数唯一确定,



我们可以验证,

幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$

有相同的收敛半径(,但是收敛域未必相同).

如  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$  的收敛域为  $[-1,1)$ ,

$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$  的收敛域为  $(-1,1)$ ,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$  的收敛域为  $[-1,1]$ .

收敛区  
间均为  
 $(-1,1)$



## 说明:

1. 幂级数经逐项积分后,所得之幂级数的收敛半径不变,但收敛域有可能扩大.
2. 幂级数经逐项求导后,所得之幂级数的收敛半径不变,但收敛域有可能缩小.



例如,由几何级数可得以下结论:

$$-1 < x < 1 \text{ 时 } 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

两边求导,得

$$1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \frac{1}{(1-x)^2}, (-1 < x < 1)$$

$$\text{对 } 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots = \frac{1}{1+x}, (-1 < x < 1)$$

两边积分,得

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \ln(1+x),$$
$$(-1 < x \leq 1)$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln 2$$



补充内容.

命题14.1.

设幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  在  $(-R, R)$

内收敛, 若  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$  收敛,

$$\text{则 } \int_0^R \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}.$$



证明 由 $Th.14.4$ 知 $\forall x \in (-R, R)$ ,我们可以逐项积分:

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

再由 $Th.14.3$ 之 *Abel*第二定理得:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} \text{收敛} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \text{在 } x = R \text{ 处左连续,}$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow R^-} \int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} R^{n+1} = \int_0^R \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt. \end{aligned}$$



例如,  $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots = \frac{1}{1+x^2}$ ,

上述级数收敛域为  $(-1,1)$ , 但逐项积分后的级数

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

在  $x = \pm 1$  处收敛, 所以我们可对原级数在  $[-1,1]$  上逐项积分, 得

.....  $x \in [-1,1]$  时

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots = \arctan x,$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$



**定理 14.5** 若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  与  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  在  $x = 0$  的某邻域内相等，即在该邻域内它们有相同的和函数，则它们同次幂项的系数相等，即

$$a_n = b_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

若幂级数  $\sum a_n x^n$  的和函数为奇函数，则偶次幂的系数  $a_{2n} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

若幂级数  $\sum a_n x^n$  的和函数为偶函数，则奇次幂的系数  $a_{2n+1} = 0$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).



我们知道,若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $(-R, R)$  ( $R > 0$ )内收敛,

则其和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内连续,任意多阶可导,

且 $a_0 = S(0), a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

如果一个函数 $f(x)$ 在某区间 $I$ 内可以用一个幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 来表示,即  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in I$ ,则 $f(x)$ 在区间

$I$ 内连续,且任意多阶导函数连续.所有这样的函数构成一个函数空间,记为 $C^\infty(I)$ ,可以证明,这个无穷维的函数空间 $C^\infty(I)$ 是一个向量空间.



若  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, x \in I$ , 则  $f(x)$  在区间  $I$  内连续,

且任意多阶导函数连续. 所有这样的函数构成一个无穷维的向量空间  $C^\infty(I)$ . 可以认为,

$$\{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$$

就构成了函数空间  $C^\infty(I)$  的一组基,

那么, *Th.14.5* 的结论就相当于线性代数中的结论:  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  是  $n$  维向量空间  $E^n$  的一组基,  $\alpha \in E^n$ , 那么

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_n \alpha_n \text{ 且表达式唯一.}$$



**定理14.6.**若幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  的收敛半径

分别为  $R_a, R_b$ , 则有

$$(1). \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, |x| < R_a,$$

$$(2). \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$
$$(3). \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$
$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} |x| < R_a \wedge R_b$$

其中  $c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$

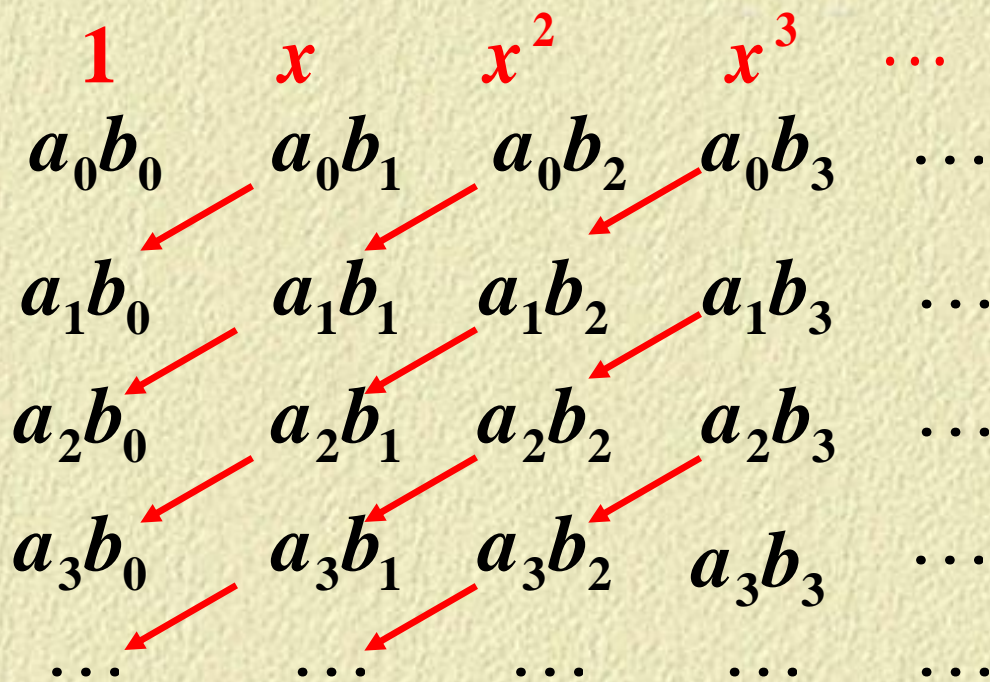


幂级数的乘积. → 按对角线法则的 *Cauchy* 乘积.

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, x \in (-R, R)$$

其中  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$ .

柯西乘积





幂级数部分常见问题：

求幂级数的和函数/数项级数的和.

特别提醒：

(1).注意是  $\sum_{n=0}^{\infty}$  还是  $\sum_{n=1}^{\infty}$  .

(2).求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  的和时, 构造幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , 但一定具体问题具体分析.



例2.求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$ 的和函数.

解 显然,级数收敛域为 $(-1,1)$ ,

$$\text{设 } S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n,$$

$$\text{则 } \int_0^x S(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} = \frac{x}{1-x}, x \in (-1,1)$$

$$\therefore S(x) = \left( \frac{x}{1-x} \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1)$$



用“+”号替代符号“ $\Sigma$ ”,过程更直观:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, x \in (-1,1),$$

$$\therefore S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$$

$$= \left( x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots \right)' = \left( \frac{x}{1-x} \right)'$$

$$= \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$



求  $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, x \in (-1,1)$ , 可用错位相减法:

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \cdots$$

$$xS(x) = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$$

$$\therefore (1-x)S(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x},$$

$$\therefore S(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, x \in (-1,1).$$

但是显然, 逐项求导/逐项积分的方法更具有推广价值.



例2.(2).求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ 的和函数.

解 易知级数收敛域为 $(-1, 1]$ ,

$$\because S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \text{显然 } S(0) = 0,$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right]' = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \right]' \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-x)^{n-1} = \frac{1}{1+x}, \quad \dots\dots (-1 < x < 1) \end{aligned}$$

$$\therefore S(x) = S(0) + \int_0^x S'(t) dt, \quad \Rightarrow$$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), \quad (-1 < x \leq 1).$$



$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots, (-1 < x \leq 1), S(0) = 0.$$

$$S'(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}, (-1 < x < 1),$$

$$\therefore \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x),$$

$$\text{即 } x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1+x), (-1 < x \leq 1).$$



在幂级数求和过程中,无非是

$$\text{用到了: } (n+1)x^n = (x^{n+1})',$$

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = x^{2n},$$

$$(2n+1)x^{2n} = (x^{2n+1})', (n \in \mathbb{N}).$$



例3.求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 的和.

苏轼\_\_文与可画筧簞谷偃竹记：  
…故画竹必先得成竹于胸中…

解 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n},$$

考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) x^{2n} = S(x),$

上页

下页

返回



$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} = S(x), S(0) = 1,$$

显然该幂级数的收敛域为 $(-1,1)$ ,

$$S(x) = 1 + 3x^2 + 5x^4 + \cdots + (2n+1)x^{2n} + \cdots$$

$$= \left( x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots \right)'$$

$$= \left( \frac{x}{1-x^2} \right)' = \frac{(1-x^2) - x(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3.$$



例3.求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ 的和.

法二 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n},$$

而 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ 既可用错位相减法求之,

亦仍然可用构造幂级数,逐项求导法解得.



直接用错位相减法求  $A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3^n}$ .

$$A = 1 + \frac{3}{3} + \frac{5}{3^2} + \frac{7}{3^3} + \frac{9}{3^4} + \cdots,$$

$$3A = 3 + 3 + \frac{5}{3} + \frac{7}{3^2} + \frac{9}{3^3} + \cdots$$

下式减上式得

$$2A = 3 + 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \cdots = 3 + \frac{2}{1 - \frac{1}{3}} = 6,$$

$$\Rightarrow A = 3.$$



例4.试确定幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛域,在该

收敛域内记 $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ .验证 $u(x)$ 满足

微分方程 $u''(x) = u(x), u(0) = 1, u'(0) = 0$ .

解 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0,$$

$\therefore$  级数对任意的 $x \in \mathbb{R}$ 都绝对收敛,

$\therefore$  幂级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ .



幂级数的收敛域为  $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ .

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, u'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$\begin{aligned} u''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!} = u(x) \end{aligned}$$

且  $u(0) = 1, u'(0) = 0$ .

幂级数中

$$x^0 = 1$$

上页

下页

返回



为了更直观,我们用 “+” 号替代 “ $\Sigma$ ”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = u(x)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots,$$

$$u'(x) = 0 + x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots,$$

$$u''(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots,$$

显然,  $u''(x) = u(x)$ , 且  $u(0) = 1, u'(0) = 0$ .



例4.(2).求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  的收敛域与和函数.

解 易得幂级数收敛域为  $(-\infty, +\infty)$ ,

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$S(0) = 1$ , 可以发现  $S'(x) = S(x)$ ,

由此不难得到  $S(x) = e^x$ .

做法(1).用 *Lagrange Th.* 的推论;

(2).微分方程法解之.



$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = S(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$S'(x) = \left[ 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots \right]'$$

$$= 0 + 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = S(x),$$

$$\therefore S'(x) = S(x), S(0) = 1.$$



$$S'(x) = S(x), S(0) = 1,$$

$$\left( \text{猜想 } S(x) = e^x, \text{ 故 } \frac{S(x)}{e^x} \equiv 1 \right)$$

解法一 设  $\varphi(x) = \frac{S(x)}{e^x}$ , 则

$$\varphi'(x) = \frac{S'(x)e^x - S(x)e^x}{e^{2x}} \equiv 0,$$

$$\therefore \varphi(x) \equiv C, S(0) = 1 \Rightarrow S = e^x.$$



$$S'(x) = S(x), S(0) = 1,$$

解二 微分方程—变量分离法解之.

$$\frac{dS}{dx} = S, \frac{dS}{S} = dx \Rightarrow \int \frac{dS}{S} = \int dx,$$

$$\ln|S| = x + C_1 \Rightarrow S = Ce^x,$$

$$S(0) = 1 \Rightarrow S(x) = e^x.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x.$$



思考练习2.利用幂级数的性质  
求下列级数的和：

$$(1). \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{2^n} ; \quad (2). \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n} ;$$

$$(3). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} ;$$

$$(4). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3^n} .$$



(2).  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$  : 利用  $\left(\frac{x^n}{n}\right)' = x^{n-1}$ ,

考虑  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = S(x), x \in [-1, 1)$ ,

用 “+” 号  $S(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ ,

$$\therefore S'(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x},$$

$$S(0) = 0, S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t) dt = \dots$$

上页

下页

返回



$$(3). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} ; \quad (4). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3^n}.$$

$$\text{解(3).} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1},$$

$$\text{考察幂级数} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = S(x),$$

$$S(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots, x \in [-1, 1].$$

$$\therefore S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

$$S(0) = 0,$$

$$\therefore S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$$

$$(3). \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1},$$

考察幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = S(x), S(0) = 0.$

$$S(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots, x \in [-1, 1].$$

$$\therefore S'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}, x \in (-1, 1).$$

$$\therefore S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x.$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = \sqrt{3} S\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \sqrt{3} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$$



(4).求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3^n}$ 的和.

解(4). $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n},$

考察幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n} = S(x),$

$$S(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots, x \in (-1, 1).$$

$$\therefore S(x) = \left( x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots \right)' = \left( \frac{x}{1+x^2} \right)',$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{2n},$$

考察幂级数  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) x^{2n} = S(x)$ ,

$$S(x) = 1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \cdots, x \in (-1, 1).$$

$$\therefore S(x) = (x - x^3 + x^5 - x^7 + \cdots)' = \left( \frac{x}{1+x^2} \right)',$$

$$= \frac{1+x^2 - x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow S = S\left(1/\sqrt{3}\right) = \frac{3}{8}.$$

上页

下页

返回



思考练习3.求下列级数的和函数：

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad (2). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

解 易知两幂级数收敛域都是 $(-\infty, +\infty)$ .

$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = C(x)$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$C'(x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

$$C''(x) = -1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$$

$$\therefore C''(x) + C(x) = 0, C(0) = 1, C'(0) = 0.$$

上页

下页

返回



$$(1). \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = C(x),$$

$$C''(x) + C(x) = 0, C(0) = 1, C'(0) = 0,$$

由二阶线性常系数齐次微分方程解法得

$C''(x) + C(x) = 0$  的特征方程为  $\lambda^2 + \lambda = 0$

得特征方程的特征根  $\lambda = \pm i$ ,

方程通解为  $C(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ .

$$\because C(0) = 1, C'(0) = 0,$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = C(x) = \cos x.$$

上页

下页

返回



记 
$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = C(x),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = S(x),$$

则  $C'(x) = -S(x), S'(x) = C(x),$

$$\therefore C''(x) + C(x) = 0, C(0) = 1, C'(0) = 0,$$

$$\therefore S''(x) + S(x) = 0, S(0) = 0, S'(0) = 1,$$

$$\Rightarrow C(x) = \cos x, S(x) = \sin x.$$