2022 级数学分析 II 阶段练习 2　　2023-05

一. 填空题或选择题（ 选择题正确选项唯一）

1. 下列无穷级数中条件收敛的是______.

$(A).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ；　$(B).\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ ；　$(C).\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ ；　$(D).\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$.

2. 级数 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=$ ________.

3. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 在p_______ 时收敛 .

4. 记级数$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{1}{16}+\cdots$的和为 A，则刻画级数和 A 大小的选项“$-1<A<0$”、“$0<A<1$”、“$1<A<2$”中正确的结果为 ________________.

5. 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n\cdot n^3}$ 的收敛域为______.

6. 试问以下论断是否正确 ？你的回答是______.

对数项级数$\sum a_n$ 而言，如果$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=r<1$，则级数$\sum a_n$ 收敛 .

二. 解答题

7. 试判断级数敛散性.(1).$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$ ；　(2).$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{3^{\ln n}}$.

8. 试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cos n+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$ 是否收敛?给出结论，说明理由 .

9. 试给出$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$的收敛域.在该收敛域内记$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.验证$S(x)$满足$S''(x)=S(x)$, $S(0)=0, S'(0)=1$.试求出$S(x)$初等函数形式的表达式.

10. 求级数的和：(1). $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n}$; (2). $\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{3^n}$.

11. 对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，(1). 举例说明: $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 未必收敛;

(2). 证明: 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 .

12. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的与 z 轴正向夹角为锐角的单位化的法向量 $\overrightarrow{n^o}=?$

13. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,试问在 $O(0,0)$ 处函数 $f(x,y)$ 是否连续?是否可微?

14. 求曲面 $\frac{x^2}{2}+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 上点与平面 $2x+2y+z+5=0$ 上点之间的最短距离.

15. 设 f'' 存在，且 $x^2+y^2+z^2=xyf\left(z^2\right)$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

16. 证明：曲面 $\Phi\left(x-az,y-bz\right)=0$ 上任一点处的切平面均与一定直线平行 .

17. 在椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 上求一点 $P\left(x_0,y_0,z_0\right)$，使该点处曲面的切平面与三个坐标平面围成的四面体体积最小，并求该最小体积 .

18. 若函数 $u=u\left(x,y,z\right),v=v\left(x,y,z\right)$ 都可微，证明：$\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(y,z\right)}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(z,x\right)}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial\left(u,v\right)}{\partial\left(x,y\right)}=0$.

19. 设函数 $z=f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微, $\forall ab\neq 0$, 若有 $b\dfrac{\partial z}{\partial x}=a\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

求证 : 必定有 $z=\varphi\left(ax+by\right)$ 的形式.