2021~2022 学年第 2 学期 2021 级数学分析 II-*A* 卷解答与评分标准 2022-06

一. 填空题或选择题（每题 3 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. 若 $\int_1^A e^{x^2}dx=0$,则 $A=$ ________ .

2. 积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x(\ln x)^p}dx$ 在 p ________ 时收敛 .

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 在 p ________ 时绝对收敛 .

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{3^n\cdot n^3}$ 的收敛半径为 ________ .

5. 试问以下论断是否正确 ？你的回答是 ________ (填：正确 或 错误).

对正项级数 $\sum a_n$ 而言，如果 $\sqrt[n]{a_n}<1$，则级数 $\sum a_n$ 收敛 .

6. 设 $z=f(x+y,\ x-y)$，函数 f 有连续的偏导数，则 $\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=$ ________ .

7. 曲线 $r^2=2\cos\theta$ 围成图形的面积为 $A=$ ________ .

8. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛于 S，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+a_{n+1}-a_{n+2})$ 收敛于 ________ .

A. $S+a_1$ ； B. $S+a_2$ ； C. $S+a_1-a_2$ ； D. $S-a_1+a_2$.

9. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上可微，且对任意 (x,y) 均有 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则 ________ .

A. $f(0,0)>f(1,1)$； B. $f(0,0)<f(1,1)$； C. $f(0,1)<f(1,0)$； D. $f(0,1)>f(1,0)$.

10. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(u)=\int_1^u dy\int_y^u f(x)dx$，则 $F'(2)=$ ________ .

A. $2f(2)$； B. $f(2)$ ； C. $-f(2)$； D. 0 .

1. $\underline{1}$ ； 2. $\underline{>1}$ ； 3. $\underline{>1}$ ； 4. $\underline{\sqrt{3}}$ ； 5. 错误 ； 6. $\underline{2f_2}$ ； 7. $\underline{2}$ ；

8. $\underline{B}$ ； 9. $\underline{C}$ ； 10. $\underline{B}$.

二. 解答题 I .(每题 8 分，计 24 分)(解答题须写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

11. 试求出反常积分$\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\right)^2dx$ 的值 .

解 $\int_0^{+\infty}\left(\sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\right)^2dx\overset{\sqrt{x}=u}{=\!=\!=}2\int_0^{+\infty}u^3e^{-2u}du\overset{2u=t}{=\!=\!=}\frac{1}{8}\int_0^{+\infty}t^3e^{-t}dt=-\frac{1}{8}\left(t^3+3t^2+6t+6\right)e^{-t}\Big|_0^{+\infty}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.……8分

12. 设函数$z=z(x,y)$满足 $x^2+y^2-2z=e^{2z}$.计算 $dz,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解 $2x-2\dfrac{\partial z}{\partial x}=2e^{2z}\dfrac{\partial z}{\partial x}$,解得$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x}{e^{2z}+1}$,由形式对称性得$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{y}{e^{2z}+1}$.$\therefore dz=\dfrac{xdx+ydy}{e^{2z}+1}$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\frac{x}{e^{2z}+1}\right)_y'=\frac{-xe^{2z}\cdot 2\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left(e^{2z}+1\right)^2}=-\frac{2xye^{2z}}{\left(e^{2z}+1\right)^3}.$$……………………………………………8分

13. 试给出$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域.在该收敛域内记$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$.验证$S(x)$满足$S''(x)=1+S(x)$, $S(0)=S'(0)=0$.试求出$S(x)$初等函数形式的表达式.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\dfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0$,$\therefore$ 级数对任意的$x\in\mathbb{R}$都绝对收敛,

幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$. $S(x)=\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$,

$$S'(x)=\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}+\cdots\right)'=x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$S''(x)=\left(x+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right)'=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$\therefore S''(x)=1+S(x),S(0)=S'(0)=0$. 由 $\sum_0^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}=e^x$ 得$\sum_0^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}$,

于是$\left(e^x+e^{-x}\right)=2\sum_0^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,$\therefore S(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)-1$.…………………………………………8分

三. 解答题 II (14~17 题各 8 分，18 ,19 题各 7 分，计 46 分) (解答题须写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

14. 试通过计算证明椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1\ (a>0,b>0,c>0)$ 的体积公式为 $V_{椭球体}=\dfrac{4}{3}\pi abc$.

解 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的上半球面为 $z=c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}$, 记 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1, D_{uv}:u^2+v^2\le 1.$

则 $V_{椭球体}=2\iint\limits_{D} c\sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}}dxdy \overset{x=au}{\underset{y=bv}{=\!=\!=}} 2\iint\limits_{D_{uv}} c\sqrt{1-u^2-v^2}\cdot abdudv=2abc\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}rdr$

$=4\pi abc\left[-\dfrac{1}{3}\sqrt{\left(1-r^2\right)^3}\right]_0^1=\dfrac{4}{3}\pi abc.$ ……………………………………………………8分

15. 证明：曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\ (a>0)$ 上任一点处的切平面在三根坐标轴上的截距之和为常数.

解 曲面上点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\vec{n}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{x_0}},\dfrac{1}{\sqrt{y_0}},\dfrac{1}{\sqrt{z_0}}\right)$,

曲面在 P 点处的切平面为: $\dfrac{x-x_0}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{y-y_0}{\sqrt{y_0}}+\dfrac{z-z_0}{\sqrt{z_0}}=0$, 即 $\dfrac{x}{\sqrt{x_0}}+\dfrac{y}{\sqrt{y_0}}+\dfrac{z}{\sqrt{z_0}}=\sqrt{a}.$

切平面在 x,y,z 轴上截距依次为 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{x_0}$, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{y_0}$, $\sqrt{a}\cdot\sqrt{z_0}$,

于是,如此三个截距之和为 $\sqrt{a}\left(\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}\right)=a$, 得证. ……………………………………8分

16. 计算积分 $I=\iint_D (x-2y)^2dxdy$, 其中区域 $D:x^2+y^2\le 2y$.

解 作变换 $x=u, y-1=v, D:x^2+y^2\le 2y\Rightarrow D_{uv}:u^2+v^2\le 1$. $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1.$

$I=\iint_D (x-2y)^2dxdy=\iint\limits_{D_{uv}}(u-2v-2)^2dudv=\iint\limits_{D_{uv}}\left(u^2+4v^2+4-4uv-4u+8v\right)dudv$

$=\iint\limits_{D_{uv}}\left(4+u^2+4v^2\right)dudv+\iint\limits_{D_{uv}}(8v-4uv-4u)dudv=4\sigma(D_{uv})+\iint\limits_{D_{uv}}\left(u^2+4v^2\right)dudv+0$

由形式对称性可得 $\iint\limits_{D_{uv}}u^2dudv=\iint\limits_{D_{uv}}v^2dudv$,

$\therefore I=4\pi+\dfrac{5}{2}\iint\limits_{D_{uv}}\left(u^2+v^2\right)dudv=4\pi+\dfrac{5}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\cdot rdr=\dfrac{21\pi}{4}.$ ………………………………8分

17. (1).设函数$z=f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可微,且有$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.试给出$z$关于$x,y$的函数式.

(2).设函数$z=f(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上可微,且有$\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$.求证:必定有$z=\varphi(x-y)$的形式.

解 (1).$\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$,则函数式必定有$z=\varphi(x)$的形式.

(2).设$\begin{cases}u=x-y\\ v=x\end{cases}$,这是一个可逆的线性变换,且$\begin{cases}x=\quad\quad v\\ y=-u+v\end{cases}$.

$\because x,y$是函数$z=f(x,y)$的两个独立的自变量,$\therefore u,v$是函数$z=f(x,y)=g(u,v)$的两个独立的自变量.

$\because f$在$\mathbb{R}^2$上可微,$\therefore \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\dfrac{\partial z}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}=\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\equiv 0$,

$\therefore z$作为变量u,v的函数,z相对于变量v而言是常数,故必定有$z=\varphi(u)=\varphi(x-y)$的形式.…………8分

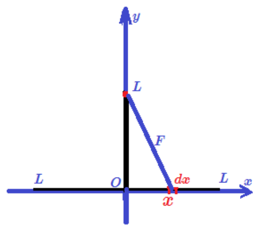
18. 求质地均匀、长为$2L\,(m)$、质量为$M\,(kg)$的均匀细杆与放置在该细杆垂直平分线上距离细杆$L\,(m)$处、质量为$m\,(kg)$的质点间的万有引力，引力常数为G.

解 在区间$[-L,L]$上取一小区间$[x,x+dx]=\Delta$.小段细杆Δ与质点m间的引力微元为$dF=G\dfrac{m\cdot\dfrac{M}{2L}dx}{\left(x^2+L^2\right)}$,

其在x轴上的分量为$dF_x=\dfrac{GmMdx}{2L\left(x^2+L^2\right)}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{x^2+L^2}}$,在$y$轴上的分量为$dF_y=\dfrac{GmMdx}{2L\left(x^2+L^2\right)}\cdot\dfrac{L}{\sqrt{x^2+L^2}}$,

$$F_x=\int_{-L}^{L}\frac{GmMx}{2L\sqrt{\left(x^2+L^2\right)^3}}dx=0,F_y=\int_{-L}^{L}\frac{GmM}{2\sqrt{\left(x^2+L^2\right)^3}}dx=\int_0^L\frac{GmM}{\sqrt{\left(x^2+L^2\right)^3}}dx\xlongequal{x=L\tan t}\int_0^{\pi/4}\frac{GmM}{L^3\sec^3 t}L\sec^2 t\,dt$$

$$=\frac{GmM}{L^2}\int_0^{\pi/4}\cos t\,dt=\frac{GmM}{L^2}\sin t\Big|_0^{\pi/4}=\frac{GmM}{L^2\sqrt{2}}(N).\qquad \therefore F=\left(0,\frac{GmM}{L^2\sqrt{2}}\right)$$ ………………………………7分



19. 试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$是否收敛?是绝对收敛还是条件收敛?给出结论，说明理由 .

$$\left(\text{提示}:\sin(\alpha-n\pi)=(-1)^n\sin\alpha\right)$$

证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\pi\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n},$

$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0,\left\{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$是单调递减数列.又$\sin t$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$内单调递增,

所以,$\forall n\in\mathbb{N}^*,\left\{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right\}$是单调递减数列.于是,根据*Leibniz th.* 知原级数收敛 .

又$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{2}$,而级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,据比较判别法知$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)\right|$发散,

$\therefore$ 原级数条件收敛 .……………………………………………………………………7分