

## § 16.3 二元函数的连续性

一、 二元函数的连续性

二、 有界闭区域上二元  
连续函数的性质



# 一、二元函数的连续性

## 1.二元函数连续的概念

### 定义2

设  $z = f(X) = f(x, y)$ , 在区域  $D$  上有定义.

$$X = (x, y) \in D, \quad X_0 = (x_0, y_0) \in D,$$

$$\text{若 } \lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$$

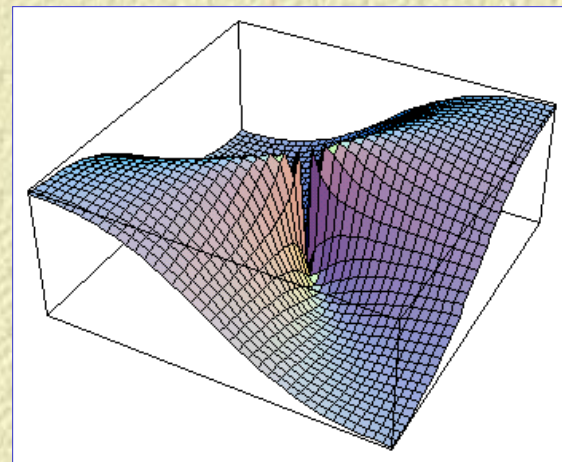
则称  $f(X)$  在  $X_0$  连续,  $X_0$  称为  $f(X)$  的连续点.

否则称  $f(X)$  在  $X_0$  间断,  $X_0$  称为  $f(X)$  的间断点.



# 例1 讨论函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

解 取  $y = kx$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

其值随 $k$ 的不同而变化, 极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.



$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

函数在(0,0)  
处不连续.

$$\begin{aligned} \forall y, \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{0 \cdot y}{0 + y^2} = 0 = f(0, y) \end{aligned}$$

所以, 对于任意的  $y$ , 函数  $f(x, y)$  在  $x=0$  处都是连续的.

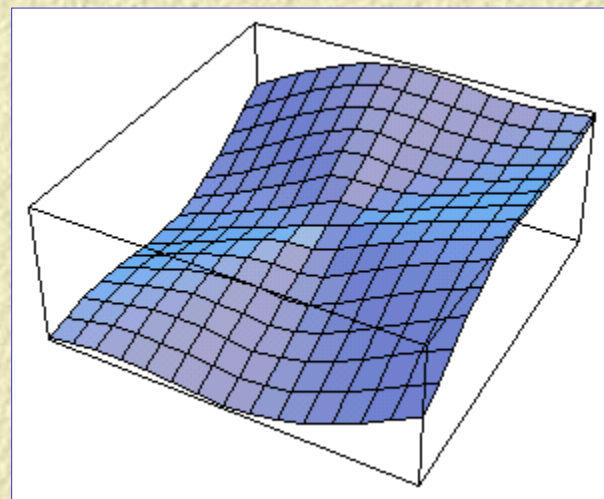
同理, 对于任意的  $x$ , 函数关于  $y$  都是连续的.



例2 讨论函数  $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$   
在 $(0,0)$ 处的连续性.

解 取  $x = \rho \cos \theta$ ,  
 $y = \rho \sin \theta$

$$\begin{aligned} & |f(x,y) - f(0,0)| \\ &= |\rho(\sin^3 \theta + \cos^3 \theta)| < 2\rho \end{aligned}$$





$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{2}, \text{ 当 } 0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \text{ 时}$

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < 2\rho < \varepsilon$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0),$$

故函数在(0,0)处连续.

若  $f(X)$  在  $D$  上每一点都连续, 则称  $f(X)$  在  $D$  上连续, 记为  $f(X) \in C(D)$ .

易知, 例1中  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  间断(极限不存在),

又如例,  $f(x, y) = xy \sin \frac{1}{x+y}$  在直线  $x+y=0$  上

每一点都间断.



注

二元函数  $f(X)$  在  $X_0$  连续必须满足三个条件. 在  $X_0$  有定义, 在  $X_0$  的极限存在, 两者相等。

定义可推广到三元以上函数中去.



## 多元函数的连续性

**定义3** 设 $n$ 元函数 $f(X)$ 的定义域为点集 $D$ ,  $X_0$ 是其聚点且 $X_0 \in D$ , 如果 $\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0)$  则称 $n$ 元函数 $f(X)$ 在点 $X_0$ 处连续.

设 $X_0$ 是函数 $f(X)$ 的定义域的聚点, 如果 $f(X)$ 在点 $X_0$ 处不连续, 则称 $X_0$ 是函数 $f(X)$ 的间断点.



## 2. 连续函数性质:

(1) 若  $f$  在点  $X_0$  连续, 并且  $f(X_0) > 0$ , 则存在  $X_0$  的邻域  $O_\delta(X_0)$ , 当  $x \in O_\delta(X_0)$  时有  $f(x) > 0$ ;

(2) 两个连续函数的和、差、积、商 (若分母不为 0) 都是连续函数;



(3)(复合函数的连续性): 设 $D$  是 $R^2$  中的开集,  $(x_0, y_0) \in D$ 。函数 $f: D \rightarrow R$ ,  $(x, y) \rightarrow Z$  在点 $(x_0, y_0) \in D$  连续。又设 $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $x$  和 $y$  的值域在 $D$  内, 并且当 $t = t_0$  时 $x(t_0) = x_0$ ,  $y(t_0) = y_0$ , 而 $x, y$  却在 $t_0$  连续。则复合函数在 $t_0$  连续。



### 3. 多元初等函数在它有定义的区域內都是连续的.

所谓多元初等函数是指以  $x, y, z, \dots$  为自变量的基本初等函数  $f(x), \varphi(y), g(z), \dots$  以及常函数, 经有限次四则运算和复合所构成的函数.

如  $f(x, y) = e^{xy} \sin(x^2 + y),$

$$f(x, y) = \ln \sin(xy) + \frac{x - y}{x^2 + y^2}$$

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x + z} - 3 \tan(e^{\sin xy})$$



一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

定义区域是指包含在定义域内的区域或闭区域.

在定义区域内的连续点求极限可用“代入法”：

$$\lim_{X \rightarrow X_0} f(X) = f(X_0) \quad (X_0 \in \text{定义区域})$$

$$\text{如 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} e^{\sin xy} \cdot \sin(x^2 + y) = e^{\sin 0} \cdot \sin 0 = 0$$



例3 求  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}.$

解 原式 =  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$$



#### 4. 二元连续函数的几何意义:

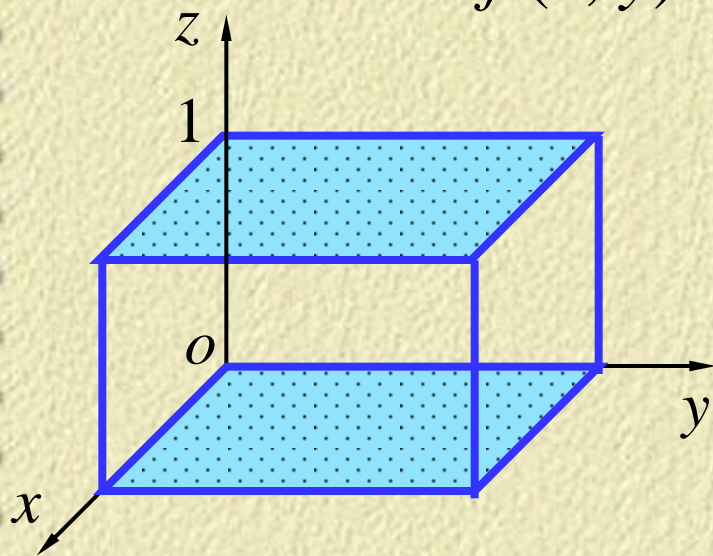
定义在区域  $D$  上的二元连续函数  $z = f(X) = f(x, y)$  表示了  $D$  上的一片没有 "空洞", 没有 "裂缝" 的连续曲面.

这里条件 " $D$  是一区域" 是必要的. 若  $D$  不是区域,  $z = f(X)$  可能不是通常意义下的连续曲面.



例. 设  $D = \{(x, y) \mid x, y \text{ 均为有理数}\} \subseteq R^2$ .  $z = f(x, y)$  是定义在  $D$  上的, 在  $D$  上恒等于1, 在别的点上无定义的函数, 即

如图



$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{当}(x, y) \in D\text{时,} \\ \text{无定义,} & \text{当}(x, y) \notin D\text{时.} \end{cases}$$

可知,  $\forall (x_0, y_0) \in D$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = 1 = f(x_0, y_0)$$

但曲面  $z = f(x, y)$  不是通常意义下的连续曲面.

上页

下页

返回



## 二、有界闭区域上二元连续函数的性质

### (1) 最大值和最小值定理

在有界闭区域 $D$ 上的二元连续函数，在 $D$ 上至少取得它的最大值和最小值各一次。

### (2) 介值定理

在有界闭区域 $D$ 上的二元连续函数，如果在 $D$ 上取得两个不同的函数值，则它在 $D$ 上取得介于这两值之间的任何值至少一次。

### (3) 一致连续性定理

在有界闭区域 $D$ 上的二元连续函数必定在 $D$ 上一致连续。



## P105 习题 6

6. 若  $f(x, y)$  在某一区域  $G$  内对变量  $x$  为连续, 对变量  $y$  满足李普希兹条件, 即对任何

$$(x, y') \in G, (x, y'') \in G$$

有  $|f(x, y') - f(x, y'')| \leq L |y' - y''|$

其中  $L$  为常数, 则此函数在  $G$  内连续。



## 证明

因为  $f(x, y)$  对变量  $x$  连续, 所以  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0,$

使得当  $|x - x_0| < \delta_1$  时,

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

取  $\delta = \min\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2L}\}$

当  $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$  时,



$$\begin{aligned} &|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = \\ &= |f(x, y) - f(x_0, y) + f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq |f(x, y) - f(x_0, y)| + |f(x_0, y) - f(x_0, y_0)| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + L|y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + L\delta < \frac{\varepsilon}{2} + L\frac{\varepsilon}{2L} = \varepsilon \end{aligned}$$