无穷级数补遗

上页 下页 返回

关于$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$的故事.

历史上,为给出上述级数的和,*Euler*使用了类比的方法,做了一个非常大胆的猜想. *Euler*研究了方程

$$\frac{\sin x}{x}=0\cdots\cdots(1),$$

将它与一般的2*n*次方程分解为线性因子的方法作类比, 因为$\pm k\pi\left(k\in\mathbb{Z},k\neq 0\right)$均是方程(1)的根,所以$\frac{\sin x}{x}$可以分解为

$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots(2),$$

关于 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 的故事.

*Euler*猜想 $\frac{\sin x}{x}$ 可以分解为

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots\cdots(2),$$

又 $\because \frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}\cdots\cdots(3),$

比较(2),(3)式右边的 x^2 项的系数,可得

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

即 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}.$

关于 $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$ 的故事.

为给出上述级数的和,*Euler*使用了类比的方法.据说*Euler*发现上述结论后,当时并未能给出严格的证明,不免有些惊疑.于是他便对等式两边分别进行数值计算验证,算到第七位数字都一致,这才使得*Euler*确信他的发现正确无疑.后来*Euler*又为这一结论找到了一个严格的证明.

神奇的*Euler*,伟大的*Euler*!

一则奇妙的数学八卦

上页 下页 返回

以下一则引自科学网之科学博客 (2013 – 06)

The Royal Australian Air Force last week published an impressively complicated maths formula online. It invited engineers to solve the problem to find a phone number to call and apply for a job. Defence Force recruiters obtained the formula from a University of Melbourne professor. Business Insider Australia understands it was intended as a means of driving engagement, and not a formal test. The formula involves infinite sums, integrals, complicated trigonometry and imaginary numbers.

If you have what it takes to be an engineer in the Air Force call the number below.

$$\tfrac{9}{3} + 2^{13} + 14^3 + 5 + \left(\sinh x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2K+1}}{(2K+1)!}\right) \cdot \int_0^{12}\int_0^{4} \left(x^2 y^3 + y^{\frac{1}{2}} x^3 + (y+1)^6\right) dx\, dy$$

$$+ \left(\int_0^{\pi} \sin x\, dx - 2\right) \cdot \int_{-6}^{6}\int_{-6}^{6} (x+y)(x-y)\, dx\, dy + \left(\tfrac{3}{2} + \frac{i \operatorname{Log}(-1)}{2}\right) \cdot \sqrt{3^2 + 72!}$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{\pi^2}{6}\right) \cdot \int_{-2}^{6} \left(x^4 + 3x^4 + 2x^{-2}\right) dx + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - e\right) \cdot \int_4^5 \left(y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y\right) dy$$

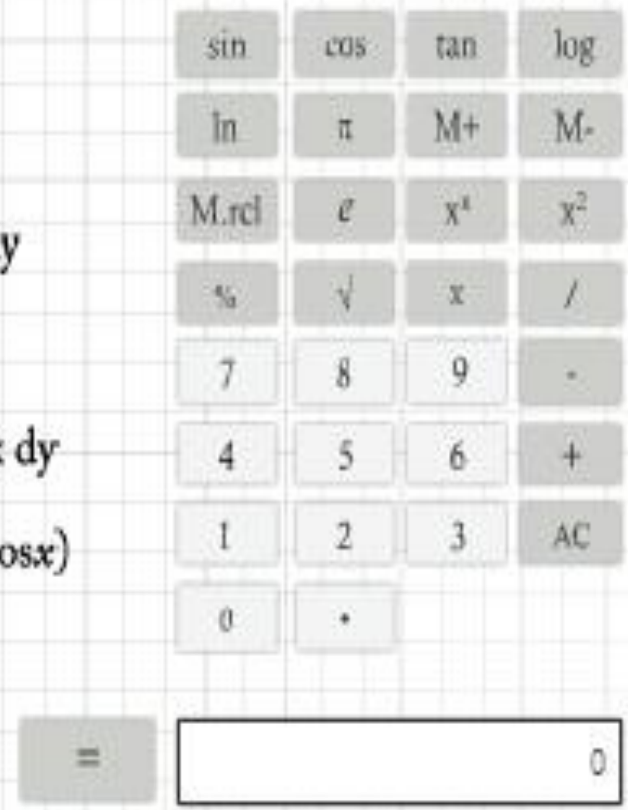
$$+ \left(\cos x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}\right) \cdot \sum_{k=20}^{20} \frac{(1+k^2)}{(1-k)} 2^k 3^{-k} + \left(2 - \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{2^k}\right) \cdot \left(3^2 + 4^3 + 5^4\right)^{16}$$

$$+ \left(\cos x - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \cdot \frac{(4^6 + 3^7)^3 (2^3 + 3^{-3})^2}{131{,}901} + \left(\cot^2 x + 1 - \operatorname{cosec}^2 x\right) \cdot \int_4^2\int_1^6 4xy^{\frac{1}{2}}\, dx\, dy$$

$$+ \left(1 + \tan^2 x - \sec^2 x\right) \cdot \int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2} \left(3xy^2 + 2x^2y^4 + 3x\right) dx\, dy + \left(\sin^2 x - 2\sin x \cos x\right)$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!} x^{2k+1} - \sin x\right) \cdot \int_4^5 \left(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x\right) dx + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - e\right) \cdot 53^{42}$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} - e\right) \cdot \int_4^5 \left(y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y\right) dy + \left(\cosh x - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}\right) \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} + 5^{\frac{1}{2}}\right)^2$$



If you have what it takes to be engineer in the Air Force call the number below.

$$\frac{9!}{3}+2^{13}+14^3+5+\left(\sinh x-\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\int_0^{12}\int_0^4\left(x^2y^3+x^3y^{\frac{1}{x}}+(1+y)^6\right)dxdy$$

$$+\left(\int_0^\pi \sin x dx-2\right)\int_{-6}^6\int_{-6}^6(x+y)(x-y)dxdy+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{iLog(-1)}{2}\right)\sqrt{3^2+72!}$$

$$+\left(\sum_1^\infty \frac{1}{n^2}-\frac{\pi^2}{6}\right)\int_{-2}^6\left(2x^{-2}+4x^4\right)dx+\left(\sum_0^\infty \frac{1}{n!}-e\right)\int_4^5\left(y+y^2+y^3+y^4+y^5\right)dy$$

$$+\left(\cos x-\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\right)\left(\sum_{n=30}^{30}\frac{1+n^3}{(1-n)!}\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)+\left(2-\sum_0^\infty \frac{1}{2^n}\right)\left(3^2+4^3+5^4\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$+\left(\cos x-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\frac{\left(4^6+3^2\right)^3\left(2^3+3^{-2}\right)^2}{131901}+\left(\cot^2 x+1-\csc^2 x\right)\int_4^2\int_1^6\left(4xy^{\frac{1}{2}}\right)dxdy$$

$$+\left(\tan^2 x+1-\sec^2 x\right)\int_{-2}^2\int_{-2}^2\left(3xy^2+2x^2y^4+3x\right)dxdy+\left(\sin^2 x-2\sin x\cos x\right)$$

$$+\left(\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n-1)!}x^{2n+1}-\sin x\right)\int_4^5\left(x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)dx+\left(\sum_0^\infty \frac{1}{n!}-e\right)53^{42}$$

$$+\left(\sum_0^\infty \frac{1}{n!}-e\right)\int_4^5\left(y+y^2+y^3+y^4+y^5\right)dy+\left(\cosh x-\sum_0^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{2}}\right)^2=?$$

If you have what it takes to be engineer in the Air Force call the number below.

$$\frac{9!}{3}+2^{13}+14^{3}+5+\left(\sinh x-\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\int_{0}^{12}\int_{0}^{4}\left(x^{2}y^{3}+x^{3}y^{\frac{1}{x}}+(1+y)^{6}\right)dxdy$$

$$+\left(\int_{0}^{\pi}\sin x dx-2\right)\int_{-6}^{6}\int_{-6}^{6}(x+y)(x-y)dxdy+\left(\frac{\pi}{2}+\frac{i\log(-1)}{2}\right)\sqrt{3^{2}+72!}$$

$$+\left(\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}-\frac{\pi^{2}}{6}\right)\int_{-2}^{6}\left(2x^{-2}+4x^{4}\right)dx+\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}-e\right)\int_{4}^{5}\left(y+y^{2}+y^{3}+y^{4}+y^{5}\right)dy$$

$$+\left(\cos x-\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}x^{2n}\right)\left(\sum_{n=30}^{30}\frac{1+n^{3}}{(1-n)!}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}\right)+\left(2-\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\right)\left(3^{2}+4^{3}+5^{4}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$+\left(\cos x-\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\frac{\left(4^{6}+3^{2}\right)^{3}\left(2^{3}+3^{-2}\right)^{2}}{131901}+\left(\cot^{2}x+1-\csc^{2}x\right)\int_{4}^{2}\int_{1}^{6}\left(4xy^{\frac{1}{2}}\right)dxdy$$

$$+\left(\tan^{2}x+1-\sec^{2}x\right)\int_{-2}^{2}\int_{-2}^{2}\left(3xy^{2}+2x^{2}y^{4}+3x\right)dxdy+\left(\sin 2x-2\sin x\cos x\right)$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}x^{2n+1}-\sin x\right)\int_{4}^{5}\left(x+x^{2}+x^{3}+x^{4}+x^{5}\right)dx+\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}-e\right)53^{42}$$

$$+\left(\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}-e\right)\int_{4}^{5}\left(y+y^{2}+y^{3}+y^{4}+y^{5}\right)dy+\left(\cosh x-\sum_{0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)\left(3^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{3}{2}}\right)^{2}=131901$$

澳大利亚皇家空军闹了一个大红脸，它的招募广告要求工程师申请者破解一个数学题目后给他们打电话，但数学问题由于两处输入错误而无解。数学公式里有两处写错了，如果用 $\sin(2x)$ 替代 $\sin^2 x$（倒数第三行），$(2k+1)!$ 替代 $(2k-1)!$（倒数第二行）后，那么公式能成立，否则无解。皇家空军承认并修正了错误，并对识别出错误的**Reddit**用户说，你们就是我们想要找的人。

上页 下页 返回

常系数线性微分方程求解

——代数方法

上页 下页 返回

二阶齐次线性微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

若$p(x), q(x)$退化为常数,则称之为<u>二阶常系数线性</u>微分方程.

上页 下页 返回

1.线性微分方程解的结构

A.二阶线性齐次微分方程解的结构：

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \cdots\cdots (1)$$

命题1. 如果函数$y_1(x), y_2(x)$是方程(1)的解，那么$y = C_1y_1 + C_2y_2$也是(1)的解$(C_1, C_2$是任意常数$)$.

$Q: y = C_1y_1 + C_2y_2$一定是通解吗？

上页 下页 返回

定义：设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间I内的n个函数,若存在n个不全为零的常数,使得当$x \in I$时有

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0$$

成立,则称这n个函数在区间I内线性相关,否则称线性无关.

例如：

(1).$x \in \mathbb{R}$时$x, 2x$线性相关,而x, x^2线性无关;

(2).当$x \in \mathbb{R}$时e^x, e^{-x}, e^{2x} 线性无关,

而 $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 线性相关.

函数y_1, y_2在区间I内线性无关$\Leftrightarrow$当$x \in I$时要使得 $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$成立,唯一地有$k_1 = k_2 = 0$.

函数y_1, y_2在区间I内线性相关$\Leftrightarrow$存在常数k_1, k_2不全为零,使得当$x \in I$时有 $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$.

$\longrightarrow$在区间I内$y_1 = 0$,则y_1, y_2线性相关;

$\longrightarrow$在区间I内y_1, y_2均不等于零且线性相关

$\Leftrightarrow k_1, k_2$均不为零,有 $k_1y_1 + k_2y_2 = 0$,即$y_1 = -\dfrac{k_2}{k_1}y_2$.

$\longrightarrow$在区间I内y_1, y_2线性无关$\Leftrightarrow \dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$常数.

上页 下页 返回

在区间I内y_1, y_2线性无关

$$\Leftrightarrow \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \text{常数}.$$

定理1. 若$y_1(x), y_2(x)$是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \cdots\cdots(1)$$

的两个线性无关的解.

则$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$是该方程的通解.

例如,$\cos x,\sin x$是$y''+y=0$的两个线性无关的解,即$\dfrac{\cos x}{\sin x}=\cot x\neq$常数,

当C_1,C_2是两任意常数时,

$y=C_1\cos x+C_2\sin x$为方程的通解.

但是 $y=C_1\cos x+C_2(2\cos x)$就不是方程的通解.

上页 下页 返回

例1. 已知函数 e^x, xe^x 是微分方程

$y''-2y'+y=0$的解.能否给出方程的通解?

解 $\because y_1=e^x, y_2=xe^x$是方程的解,

且 $\frac{y_2}{y_1}=x$不是常数,故e^x, xe^x是方程两个线性无关的解,由定理1知,微分方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x\right)e^x.$$

上页 下页 返回

2. 二阶常系数齐次线性方程的求解

$$y'' + py' + qy = 0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

在所有的函数中,人们发现:只有形如Ce^{rx},$C\cos ax$,$C\sin bx$ $(C,a,b,r$为常数$)$的函数,才可能满足方程(3).又由伟大的*Euler*给出的*Euler*公式:

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}.$$

$$\therefore a,b \in \mathbb{R}, e^{a+bi} = e^{a}(\cos b + i\sin b).$$

由此可知:$C\cos ax$,$C\sin bx$可表示为复数形式的指数函数.故而猜想方程的解只具有 $y = e^{rx}$ 之形式.

上页 下页 返回

$$y = e^{rx}, a, b, x \in \mathbb{R}, r = a + bi \in \mathbb{C}$$

$$e^{rx} = e^{(a+ib)x} = e^{ax}\left(\cos bx + i\sin bx\right),$$

$$\left(e^{rx}\right)'_x = \cdots = re^{rx} \cdots$$

$$e^{xi} = \cos x + i\sin x, x \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1},$$

共轭复数 $\overline{e^{xi}} = e^{-xi} = \cos x - i\sin x,$

$$\therefore \cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}, \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$$

$$y'' + py' + qy = 0 \cdots\cdots\cdots(3)$$

设 $y = e^{rx}$是方程的解,$r \in \mathbb{C}$,

代入方程(3),得

$$\left(r^2 + pr + q\right)e^{rx} = 0 \ , \because e^{rx} \neq 0,$$

得特征方程 $r^2 + pr + q = 0,$

求得特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$

上页 下页 返回

(a).设方程(3)有两个不相等的实特征值$(\Delta > 0)$，$r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$，

得方程的两个线性无关的解

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x},$$

$\therefore$ 方程的通解为$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$；

(b).方程(3)有两个相等的实特征值$\left(\Delta=0\right)$

$r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}=r$,一个解为 $y_1=e^{rx}$,

设另一解为 $y_2=u(x)e^{rx}$,

将 y_2 , y_2' , y_2'' 代入原方程并化简,

$$u''+\left(2r+p\right)u'+\left(r^2+pr+q\right)u=0,$$

知 $u''=0$,取 $u(x)=x$,则 $y_2=xe^{rx}$,

得方程的通解 $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{rx}$;

(c).方程(3)有一对共轭复特征值$(\Delta<0)$

$$r_1=\alpha+\beta i, r_2=\alpha-\beta i,$$

$$y_1=e^{(\alpha+\beta i)x}, y_2=e^{(\alpha-\beta i)x},$$

重新组合 $\overline{y}_1=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\overline{y}_2=\frac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得方程的通解

$$y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

归纳小结：

二阶常系数齐次线性微分方程求通解一般步骤：

(1).写出相应的特征方程;

(2).求出特征根;

(3).根据特征根的不同情况,给出相应的通解.(见下表)

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

上页 下页 返回

例3.求方程

$y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2 + 4r + 4 = 0$，

解得特征值 $r_1 = r_2 = -2$，

$\therefore$ 方程所求通解为

$$y = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-2x}.$$

例3.(2).求方程

$y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

解　特征方程为$r^2 + 2r + 5 = 0$,

解得特征值　$r_{1,2} = -1 \pm 2i$,

$\therefore$ 方程所求通解为

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right).$$

上页　下页　返回

例4. 求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$的收敛域与和函数.

解 易得幂级数收敛域为$(-\infty,+\infty)$,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$S(0)=1$,可以发现$S'(x)=S(x)$,

由此不难得到 $S(x)=e^x$.

做法(1).用*Lagrange th.*的推论;

(2).微分方程法解之.

上页 下页 返回

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=S(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

$$S'(x)=\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots\right]'$$

$$=0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=S(x),$$

$$\therefore S'(x)=S(x), S(0)=1.$$

$$S'(x)=S(x),S(0)=1,$$

$$\left(\text{猜想}S(x)=e^{x},\text{故}\frac{S(x)}{e^{x}}\equiv 1\right)$$

解法一　设$\varphi(x)=\dfrac{S(x)}{e^{x}}$,则

$$\varphi'(x)=\frac{S'(x)e^{x}-S(x)e^{x}}{e^{2x}}\equiv 0,$$

$$\therefore \varphi(x)\equiv C, S(0)=1\Rightarrow S=e^{x}.$$

$$S'(x)=S(x), S(0)=1,$$

解二 微分方程—变量分离法解之.

$$\frac{dS}{dx}=S, \frac{dS}{S}=dx \Rightarrow \int \frac{dS}{S}=\int dx,$$

$$\ln|S|=x+C_1 \Rightarrow S=Ce^x,$$

$$S(0)=1 \Rightarrow S(x)=e^x.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x.$$

例4.(2).试确定幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$的收敛域,在收敛域内记$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.验证$u(x)$满足微分方程$u''(x)=u(x), u(0)=1, u'(0)=0$.

解 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)}=0,$

$\therefore$ 级数对任意的$x\in\mathbb{R}$都绝对收敛,

$\therefore$ 幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

上页 下页 返回

幂级数的收敛域为$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},\quad u'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$u''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=u(x)$$

幂级数中

$x^0=1$

且 $u(0)=1, u'(0)=0.$

为了更直观,我们用“+”号替代“Σ”:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=u(x)$$

$$=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,$$

$$u'(x)=0+x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,$$

$$u''(x)=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots,$$

显然,$u''(x)=u(x)$,且$u(0)=1,u'(0)=0.$

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$u''(x)=u(x)$,且$u(0)=1, u'(0)=0.$

解法一 由例4.(1)结论$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x\cdots(1)$ 得

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}=e^{-x}\cdots(2)$,将结论(1),(2)相加得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=chx\ ,$$

这是双曲余弦函数 ,其图像就是著名的悬链线 .

$u''(x)=u(x)$,且$u(0)=1, u'(0)=0$.

解二　微分方程 $u''(x)-u(x)=0 \quad \cdots(1)$

的特征方程为 $r^2-1=0$,

解得特征值 $r_1=-1, r_2=1$.

方程(1)通解为 $u(x)=C_1e^{-x}+C_2e^{x}$,

由条件$u(0)=1, u'(0)=0$ 解得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}=u(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right).$$

上页　下页　返回

例4.(3). 求下列级数的和函数：

$$(A).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!};\quad (B).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

解 易知两幂级数收敛域都是$(-\infty,+\infty)$.

$$(1).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x)$$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$C'(x)=-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots$$

$$C''(x)=-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!}+\cdots$$

$\therefore C''(x)+C(x)=0, C(0)=1, C'(0)=0.$

$$(A).\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x),$$

$$C''(x)+C(x)=0, C(0)=1, C'(0)=0,$$

由二阶线性常系数齐次微分方程解法得

$C''(x)+C(x)=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$

得特征方程的特征根 $r=\pm i$,

方程通解为 $C(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

$$\because C(0)=1, C'(0)=0,$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=C(x)=\cos x.$$

$(B).\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=S(x),$

有$S''(x)+S(x)=0, S(0)=0, S'(0)=1,$

由二阶线性常系数齐次微分方程解法得

$S''(x)+S(x)=0$ 的特征方程为 $r^2+1=0$

得特征方程的特征根 $r=\pm i,$

方程通解为 $S(x)=C_1\cos x+C_2\sin x.$

$\because S(0)=0, S'(0)=1,$

$\therefore S(x)=\sin x.$