机器学习第二次作业

人工智能 222 杨义琦

2024 年 10 月 30 日

题目 1

题目描述：

试给出求解 and 和 or 逻辑运算的感知机，并说明感知机不能求解 xor 运算。

题解：

感知机模型为 $f(X) = \mathrm{sign}(w \cdot x + b)$，其中当输入大于 0 时输出 1，否则输出 0。

1. 求解 AND 的感知机：

   AND 运算的真值表：

x_1	x_2	AND
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

   可以设置参数：$w_1 = 1, w_2 = 1, b = -1.5$

   验证：

   - 当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时：$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1.5 = -1.5 < 0$ 输出 0
   - 当 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 时：$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1.5 = -0.5 < 0$ 输出 0
   - 当 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 时：$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1.5 = -0.5 < 0$ 输出 0
   - 当 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 时：$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 1.5 = 0.5 > 0$ 输出 1

2. 求解 OR 的感知机：

   OR 运算的真值表：

x_1	x_2	OR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

   可以设置参数：$w_1 = 1, w_2 = 1, b = -0.5$

   验证：

- 当 $x_1 = 0, x_2 = 0$ 时：$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 0.5 = -0.5 < 0$ 输出 0
- 当 $x_1 = 0, x_2 = 1$ 时：$1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 0.5 = 0.5 > 0$ 输出 1
- 当 $x_1 = 1, x_2 = 0$ 时：$1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 0.5 = 0.5 > 0$ 输出 1
- 当 $x_1 = 1, x_2 = 1$ 时：$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 0.5 = 1.5 > 0$ 输出 1

3. 为什么不能求解 XOR 运算：

XOR 运算的真值表：

x_1	x_2	XOR
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

感知机不能实现 XOR 运算的原因是它不是线性可分的。证明如下：

假设存在权重 w_1, w_2 和偏置 b，使得感知机能实现 XOR 运算，则应满足：

$$
\begin{aligned}
&w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 0 + b < 0 \quad \text{（对应 (0,0) 输出 0）} \\
&w_1 \cdot 0 + w_2 \cdot 1 + b > 0 \quad \text{（对应 (0,1) 输出 1）} \\
&w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 0 + b > 0 \quad \text{（对应 (1,0) 输出 1）} \\
&w_1 \cdot 1 + w_2 \cdot 1 + b < 0 \quad \text{（对应 (1,1) 输出 0）}
\end{aligned}
$$

由第一个不等式可以我们发现 $b < 0$

而将第二和第三个不等式相加得到 $w_1 + w_2 + 2b > 0$

可以推出 $w_1 + w_2 + b > 0$

这与第四个不等式 $w_1 + w_2 + b < 0$ 矛盾。

因此，不存在这样的权重和偏置使得单层感知机能够实现 XOR 运算。

从几何角度看，这是因为 XOR 运算的输出结果在二维平面上不能用一条直线分开。

题目 2

题目描述：

已知正样本 $x_1 = (3,3)^T$,$x_2 = (4,3)^T$ 和负样本 $x_3 = (1,1)^T$，感知机模型为 $f(x) = sign(w \cdot x - 3)$,$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，试判断该感知机模型能否正确分类 x_1,x_2,x_3，并说明理由。

题解：

题目已给出感知机模型为 $f(x) = sign(w \cdot x - 3)$,$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

验证：

- 正样本 x_1：$3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 3 = 3 > 0$ 输出 1，分类正确
- 正样本 x_2：$4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 - 3 = 4 > 0$ 输出 1，分类正确

- 负样本 x_3：$1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 3 = -1 < 0$ 输出 0，分类正确

  所以该感知机模型可以正确的分类 x_1,x_2,x_3

题目 3

题目描述：

已知 $x_1 = (2,3)^T$,$x_2 = (5,4)^T$,$x_3 = (4,7)^T$,$x_4 = (9,6)^T$,$x_5 = (8,1)^T$,$x_6 = (7,2)^T$，其对应的类别标签为 1,1,2,2,0,0，试利用 k 近邻判断点 $x = (3,4.5)^T$ 的类别信息 (要求分别使用欧式距离、曼哈顿及无穷距离三种距离度量方法)

题解：

我们将分别使用三种距离度量方法来计算目标点 $x = (3,4.5)^T$ 与已知数据点之间的距离，并选择 $k = 3$，即选取最近的 3 个点来判断类别。

1. 欧式距离

   欧式距离的公式为：

   $$d(x_i, x) = \sqrt{(x_i[1] - x[1])^2 + (x_i[2] - x[2])^2}$$

   计算每个点到目标点 $x = (3,4.5)$ 的欧式距离：

   $$d(x_1, x) = \sqrt{(2-3)^2 + (3-4.5)^2} = \sqrt{1+2.25} = \sqrt{3.25} \approx 1.80$$

   $$d(x_2, x) = \sqrt{(5-3)^2 + (4-4.5)^2} = \sqrt{4+0.25} = \sqrt{4.25} \approx 2.06$$

   $$d(x_3, x) = \sqrt{(4-3)^2 + (7-4.5)^2} = \sqrt{1+6.25} = \sqrt{7.25} \approx 2.69$$

   $$d(x_4, x) = \sqrt{(9-3)^2 + (6-4.5)^2} = \sqrt{36+2.25} = \sqrt{38.25} \approx 6.18$$

   $$d(x_5, x) = \sqrt{(8-3)^2 + (1-4.5)^2} = \sqrt{25+12.25} = \sqrt{37.25} \approx 6.10$$

   $$d(x_6, x) = \sqrt{(7-3)^2 + (2-4.5)^2} = \sqrt{16+6.25} = \sqrt{22.25} \approx 4.72$$

   根据欧式距离的计算结果，最近的 3 个点为：x_1、x_2、x_3，它们的类别分别为 1、1、2。

   因此，使用欧式距离，点 $x = (3,4.5)$ 的预测类别为 1（因为在最近的 3 个邻居中，类别 1 出现两次，类别 2 出现一次）。

2. 曼哈顿距离

   曼哈顿距离的公式为：

   $$d(x_i, x) = |x_i[1] - x[1]| + |x_i[2] - x[2]|$$

   计算每个点到目标点 $x = (3,4.5)$ 的曼哈顿距离：

   $$d(x_1, x) = |2-3| + |3-4.5| = 1 + 1.5 = 2.5$$

   $$d(x_2, x) = |5-3| + |4-4.5| = 2 + 0.5 = 2.5$$

   $$d(x_3, x) = |4-3| + |7-4.5| = 1 + 2.5 = 3.5$$

$$d(x_4, x) = |9-3| + |6-4.5| = 6 + 1.5 = 7.5$$

$$d(x_5, x) = |8-3| + |1-4.5| = 5 + 3.5 = 8.5$$

$$d(x_6, x) = |7-3| + |2-4.5| = 4 + 2.5 = 6.5$$

根据曼哈顿距离的计算结果，最近的 3 个点为：x_1、x_2、x_3，它们的类别分别为 1、1、2。

因此，使用曼哈顿距离，点 $x = (3, 4.5)$ 的预测类别也是 1。

3. 无穷距离

   无穷距离的公式为：

$$d(x_i, x) = \max(|x_i[1] - x[1]|, |x_i[2] - x[2]|)$$

   计算每个点到目标点 $x = (3, 4.5)$ 的无穷距离：

$$d(x_1, x) = \max(|2-3|, |3-4.5|) = \max(1, 1.5) = 1.5$$

$$d(x_2, x) = \max(|5-3|, |4-4.5|) = \max(2, 0.5) = 2$$

$$d(x_3, x) = \max(|4-3|, |7-4.5|) = \max(1, 2.5) = 2.5$$

$$d(x_4, x) = \max(|9-3|, |6-4.5|) = \max(6, 1.5) = 6$$

$$d(x_5, x) = \max(|8-3|, |1-4.5|) = \max(5, 3.5) = 5$$

$$d(x_6, x) = \max(|7-3|, |2-4.5|) = \max(4, 2.5) = 4$$

   根据无穷距离的计算结果，最近的 3 个点为：x_1、x_2、x_3，它们的类别分别为 1、1、2。

   因此，使用无穷距离，点 $x = (3, 4.5)$ 的预测类别仍然是 1。

结论：无论是使用欧式距离、曼哈顿距离还是无穷距离，点 $x = (3, 4.5)$ 的预测类别均为 1。

题目 4

题目描述：

试对以下数据集构造 k-d 树。$X = (7,8), (12,3), (14,1), (4,12), (9,1), (2,7), (10,19)$，并给出 $(3.5, 7.8)$ 的搜索路径。

题解：

1. k-d 树的构造过程：

- 第 1 层 (根节点)：

  首先，确定第 1 层的分割维：

  x 维度方差：$\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i - \bar{x})^2$，$y$ 维度方差：$\sigma_y^2 = \frac{1}{n}\sum(y_i - \bar{y})^2$，计算可知 x 维的方差更大，所以选择 y 作为分割维。

  按 y 轴划分，选择中位数 y=7 作为分割点，对应点 (2,7)

  - 左子树：$\{(12,3), (14,1), (9,1)\}$
  - 右子树：$\{(7,8), (4,12), (10,19)\}$

- 第 2 层：
  - 左子树：

    计算方差可知 x 维的方差更大，所以选择 x 作为分割维。

    选择中位数 x=12，对应点 (12,3)
    - 左：$\{(9,1)\}$
    - 右：$\{(14,1)\}$
  - 右子树：

    计算方差可知 y 维的方差更大，所以选择 y 作为分割维。

    选择中位数 y=12，对应点 (4,12)
    - 左：$\{(7,8)\}$
    - 右：$\{(10,19)\}$
- 第 3 层：到达叶子节点，k-d 树构造完成

2. 搜索点 (3.5,7.8) 的路径：

(1) 从根节点 (2,7) 开始，比较 y 坐标：$7.8 > 7$，进入右子树

(2) 到达节点 (4,12)，比较 y 坐标：$7.8 < 12$，进入左子树

(3) 到达节点 (7,8)，搜索结束

3. k-d 树的示意图：