Трёхдиагональная прогонка

Пусть дана система линейных алгебраических уравнений специального вида

$$a_i x_{i-1} - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

Такая система называется трёхдиагональной. Решают её модификацией метода Гаусса, которая называется трёхдиагональной прогонкой.

Допустим,

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}$$

Подставим это представление в систему

$$a_i(\xi_i x_i + \eta_i) - b_i x_i + c_i x_{i+1} = d_i$$

$$(a_i \xi_i - b_i) x_i = -c_i x_{i+1} + (d_i - a_i \eta_i)$$

$$\boxed{x_i = -\frac{c_i}{(a_i \xi_i - b_i)}\, x_{i+1} + \frac{(d_i - a_i \eta_i)}{(a_i \xi_i - b_i)}}$$

Таким образом, получаем следующие формулы.

Прямой ход: полагают $\xi_1 = 0$; $\eta_1 = 0$, вычисляют

$$\xi_{i+1} = -\frac{c_i}{(a_i \xi_i - b_i)}; \quad \eta_{i+1} = \frac{(d_i - a_i \eta_i)}{(a_i \xi_i - b_i)}, \qquad i = 1, \dots, n$$

Обратный ход: далее полагают $x_{n+1} = 0$, вычисляют

$$x_i = \xi_{i+1} x_{i+1} + \eta_{i+1}, \qquad i = n, \dots, 1$$

Перепишем эти формулы для сплайн-интерполяции.

Прямой ход:

$$\xi_{i+1} = -\frac{h_{i+1}}{(h_i \xi_i + 2(h_i + h_{i+1}))}; \quad \eta_{i+1} = \frac{\left(3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right) - h_i \eta_i\right)}{(h_i \xi_i + 2(h_i + h_{i+1}))}$$

Обратный ход:

$$c_i = \xi_{i+1} c_{i+1} + \eta_{i+1}$$