Практическое занятие № 1

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

1. Цель и план занятия

Целью практического занятия является приобретение практических навыков решения задач интерполирования и приближения функций с использованием различных методов, а также построение оценок погрешности полученных приближений.

План занятия:

1) решение задач интерполяции алгебраическими и тригонометрическими многочленами;
2) построение наилучшего приближения функций в гильбертовом пространстве;
3) построение наилучшего равномерного приближения функций.

2. Краткие теоретические сведения

2.1. Интерполяция

Пусть некоторая функция $y(x)$ задана своими значениями $y_i = y(x_i)$ в точках $x_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$. Задача построения функции $\varphi = \varphi(x;\boldsymbol{a})$, зависящей от некоторого набора (вектора) параметров $\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, приближающей функцию $y(x)$ так, что в точках $x = x_i$ обе функции совпадают, то есть выполнены равенства

$$\varphi(x_i;\boldsymbol{a}) = y(x_i),\ \ i = 0,1,\ldots,n, \tag{1.1}$$

называется *задачей интерполирования* или *интерполяции*. Точки $x_i\,(i = 0,1,\ldots,n)$ называются *узлами интерполяции*. Параметры $a_0, a_1, \ldots, a_n$ находятся из решения системы (1.1). Такой метод нахождения параметров называется *методом неопределенных коэффициентов*.

Если функция $\varphi(x;\boldsymbol{a})$ линейно зависит от $\boldsymbol{a}$, то есть представима в виде

$$\varphi(x;\boldsymbol{a}) = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k(x), \tag{1.2}$$

где $\{f_k(x)\}$ – фиксированные линейно независимые (базисные) функции, то интерполяция называется линейной. В этом случае (1.1) представляет собой систему $(n+1)$ линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров $a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Если в качестве $\{f_k(x)\}$ используются алгебраические многочлены, например $f_k(x) = x^k$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, то задача интерполяции сводится к построению *интерполяционного многочлена*. Для заданного набора значений y_i функции $y(x)$ существует единственный интерполяционный многочлен, который, однако, может быть представлен в различных формах.

Интерполяционный многочлен Лагранжа степени не выше n имеет вид

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \tag{1.3}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона

$$L_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1}) \, y(x_0, x_1, \ldots, x_k) \tag{1.4}$$

записывается через *разделенные разности*. Разделенная разность k-го порядка $(k = 1, 2, \ldots, n)$ определяется рекурсивным соотношением

$$y(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \frac{y(x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) - y(x_1, \ldots, x_k)}{x_0 - x_k}. \tag{1.5}$$

Пусть существует $(n+1)$-я непрерывная производная $y^{(n+1)}(x)$. Тогда остаточный член интерполяционного многочлена имеет вид

$$y(x) - L_n(x) = \frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \omega_{n+1}(x), \quad x, \xi \in [x_0, x_n], \tag{1.6}$$

где $\omega_{n+1}(x)$ – многочлен степени $(n+1)$, обращающийся в нуль во всех узлах интерполяции:

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i). \tag{1.7}$$

Формула (1.6) позволяет оценить погрешность интерполяции в различных метрических или нормированных пространствах. Например, если $y(x) \in C^{n+1}[a, b]$ и

$$a \le \min\{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ b \ge \max\{x_0, x_1, \ldots, x_n\},$$

то $\left|y^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}, \quad x \in [a,b],$ и для погрешности интерполяции справедлива оценка

$$\left|y(x) - L_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\,\omega_{n+1}(x)|,\ x \in [a,b]. \tag{1.8}$$

Если ввести норму для пространства ограниченных вещественных функций, определенных на отрезке $[a,b]$, как

$$\|y\| = \sup_{x\in[a,b]} \left|y(x)\right|,$$

то из (1.6) можно получить равномерную оценку погрешности в виде

$$\left\|y(x) - L_n(x)\right\| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left\|\omega_{n+1}(x).\right\| \tag{1.9}$$

За счет выбора узлов интерполяции можно добиться минимизации оценки (1.9). Многочлен (1.7) имеет старший коэффициент, равный единице, поэтому для него справедлива оценка снизу

$$\left\|\omega_{n+1}\right\| \ge \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}}. \tag{1.10}$$

Равенство в этой оценке достигается в том случае, когда в качестве узлов интерполяции выступают корни многочлена $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)$ степени $(n+1)$:

$$x_m = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{2(n+1)}\right), \quad m = 0, 1, \ldots, n. \tag{1.11}$$

Эти узлы называются *оптимальными узлами интерполяции*. В этом случае с учетом (1.10) оценка (1.9) принимает вид

$$\left\|y(x) - L_n(x)\right\| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{2n+1}} \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}. \tag{1.12}$$

Многочлен $\bar{T}_{n+1}^{[a,b]}(x)$ называется *многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на отрезке* $[a,b]$. Он является многочленом степени $(n+1)$ с единичным коэффициентом при старшей степени и определяется как

$$\bar{T}_n^{[a,b]}(x) = (b-a)^n\, 2^{1-2n} T_n\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right),\ x \in [a,b], \tag{1.13}$$

где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева, задаваемые рекуррентным соотношением

$$\begin{gathered} T_0(x)=1,\ T_1(x)=x, \\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x),\ n\geq 1. \end{gathered} \tag{1.14}$$

Если интерполируемая функция $y(x)$ обладает свойством $y(a)=y(b)$, то этим же свойством должны обладать все базисные функции $\{f_k(x)\}$. Такие функции можно рассматривать как периодические с периодом $b-a$. Линейным преобразованием

$$\overline{x}=2\pi\frac{x-a}{b-a},$$

отрезок $[a,b]$ отображается в отрезок $[0,2\pi]$. На этом отрезке в качестве $\{f_k(x)\}$ может выбрана система функций

$$1,\ \sin x,\ \cos x,\ \sin 2x,\ \cos 2x,\ldots,$$

и преобразованная функция $\overline{y}(\overline{x})$ может быть приближена тригонометрическим многочленом

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \tag{1.13}$$

Тригонометрический многочлен имеет порядок *n*, если хотя бы один из коэффициентов a_n или b_n отличен от нуля. Тригонометрический многочлен называется интерполяционным, если его коэффициенты находятся из решения системы (1.1) при $\varphi(x)=S_n(x)$.

2.2. Наилучшее приближение функции

Пусть функция $y(x)$ рассматривается как элемент некоторого линейного нормированного пространства *E*. *Задача наилучшего приближения*: построить приближение вида

$$y(x)\approx\varphi^0(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}c_k^0 f_k(x),\quad y, f_1,\ldots,f_n\in E, \tag{1.14}$$

где $\{f_k(x)\}$ – заданная система линейно независимых элементов пространства *E*, такое, что

$$\Phi\left(c_1^0,\ldots,c_n^0\right)=\inf_{c_1,\ldots,c_n}\Phi(c_1,\ldots,c_n),$$

где

$$\Phi(c_1,\ldots,c_n)=\left\|y(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k f_k(x)\right\|.$$

Такой элемент $\varphi^0\in E$ называется *элементом наилучшего приближения* (ЭНП). ЭНП может быть не единственным.

Для любого элемента гильбертова пространства *H* существует единственный ЭНП в конечномерном подпространстве пространства *H*. При этом коэффициенты $c_1^0,\ldots,c_n^0$ являются решением системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{n}c_k(f_k,f_i)=(y,f_i),\ i=1,\ldots,n, \tag{1.15}$$

где (f,g) – скалярное произведение в *H*. Примером гильбертова пространства является пространство $L_2[a,b]$ функций, заданных и интегрируемых с квадратом на отрезке $[a,b]$:

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx,\quad \|f\|^2_{L_2[a,b]}\equiv(f,f)=\int_a^b f^2(x)dx. \tag{1.16}$$

Если *E* – пространство ограниченных вещественных функций на $[a,b]$ с нормой

$$\|y\|=\sup_{x\in[a,b]}|y(x)|,$$

то ЭНП имеет вид

$$Q_n^0(x)\equiv\sum_{k=0}^{n}c_k^0x^k,$$

то есть является многочленом степени *n*. Такой многочлен называется *многочленом наилучшего равномерного приближения* (МНРП). Для любого многочлена $Q_n(x)$ степени *n* справедливо неравенство

$$\|y-Q_n^0\|\le\|y-Q_n\|.$$

Теорема Чебышева. *Многочлен* $Q_n^0(x)$ *будет МНРП непрерывной функции* $y(x)$ *тогда и только тогда, когда на отрезке* $[a,b]$ *найдется по крайней мере* $n+2$ *точки* $x_0<x_1<\cdots<x_{n+1}$ *такие, что*

$$y(x_k)-Q_n^0(x_k)=(-1)^k\delta\|y-Q_n^0\|,\quad k=0,1,\ldots,n+1, \tag{1.17}$$

где $\delta=1$ *или* $\delta=-1$ *одновременно для всех k.*

Точки $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ называются *точками чебышевского альтернанса*.

Свойства МНРП:

1) существует единственный МНРП непрерывной функции;
2) МНРП нулевой степени имеет вид
$$Q_0^0(x) = \frac{M+m}{2},\ m = \inf_{x\in[a,b]} y(x),\ M = \sup_{x\in[a,b]} y(x);$$
3) если $y^{(n+1)}(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a,b]$, то границы этого отрезка являются точками чебышевского альтернанса;
4) если функция $y(x)$ четна/нечетна относительно середины отрезка $[a,b]$, то МНРП также четен/нечетен, то есть представляется в виде суммы четных/нечетных степеней x;
5) для любого многочлена степени $(n+1)$ МНРП степени n является интерполяционным многочленом, построенным по оптимальным узлам (1.11).

3. Примеры решения типовых задач

Пример 1.1. Построить интерполяционный многочлен функции, заданной следующими своими значениями:
$$y(0) = 1,\quad y(2) = 3,\quad y(3) = 2,\quad y(5) = 5.$$

Решение. Так как интерполяция проводится по четырем узлам, то степень интерполяционного многочлена равна трем, то есть
$$\varphi(x;\boldsymbol{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

Сначала найдем коэффициенты a_i как решение СЛАУ (1.1), которая в данном случае запишется в виде
$$\begin{aligned}
&a_0 = 1,\\
&a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 3,\\
&a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 2,\\
&a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 5.
\end{aligned}$$
Решение этой системы имеет вид
$$a_0 = 1,\ a_1 = \frac{62}{15},\ a_2 = -\frac{13}{6},\ a_3 = \frac{3}{10}.$$
Таким образом, искомый интерполяционный многочлен имеет вид

$$\varphi(x;\boldsymbol{a}) = 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3.$$

Теперь по формуле (1.3) построим интерполяционный многочлен Лагранжа:

$$L_3(x) = 1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(0-2)(0-3)(0-5)} + 3\cdot\frac{x(x-3)(x-5)}{(2-0)(2-3)(2-5)} +$$

$$+\ 2\cdot\frac{x(x-2)(x-5)}{(3-0)(3-2)(3-5)} + 5\cdot\frac{x(x-2)(x-3)}{(5-0)(5-2)(5-3)} =$$

$$= 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3.$$

Наконец, построим интерполяционный многочлен по формуле Ньютона (1.4). Для этого по (1.5) вычислим разделенные разности до третьего порядка включительно. Разделенные разности первого порядка:

$$y(x_0,x_1) \equiv \frac{y(x_0)-y(x_1)}{x_0-x_1} = \frac{1-3}{0-2} = 1,$$

$$y(x_1,x_2) \equiv \frac{y(x_1)-y(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{3-2}{2-3} = -1,$$

$$y(x_2,x_3) \equiv \frac{y(x_2)-y(x_3)}{x_2-x_3} = \frac{2-5}{3-5} = \frac{3}{2}.$$

Разделенные разности второго порядка:

$$y(x_0,x_1,x_2) \equiv \frac{y(x_0,x_1)-y(x_1,x_2)}{x_0-x_2} = \frac{1-(-1)}{0-3} = -\frac{2}{3},$$

$$y(x_1,x_2,x_3) \equiv \frac{y(x_1,x_2)-y(x_2,x_3)}{x_1-x_3} = \frac{-1-\frac{3}{2}}{2-5} = \frac{5}{6}.$$

Разделенная разность третьего порядка:

$$y(x_0,x_1,x_2,x_3) \equiv \frac{y(x_0,x_1,x_2)-y(x_1,x_2,x_3)}{x_0-x_3} = \frac{-\frac{2}{3}-\frac{5}{6}}{0-5} = \frac{3}{10}.$$

Подставляя найденные значения в (1.4), находим

$$L_3(x) = y(x_0) + (x-x_0)\,y(x_0,x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\,y(x_0,x_1,x_2) +$$

$$+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\,y(x_0,x_1,x_2,x_3) =$$

$$= 1 + x - \frac{2}{3}x(x-2) + \frac{3}{10}x(x-2)(x-3) = 1 + \frac{62}{15}x - \frac{13}{6}x^2 + \frac{3}{10}x^3.$$

Таким образом, все три метода привели к одному и тому же результату.

Пример 1.2. Функция $y(x)=e^{2x}$ приближается на отрезке $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ интерполяционным многочленом второй степени по трем узлам: $x_0=-\frac{1}{2},\ x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2}$. Оценить погрешность интерполяции в равномерной норме.

Решение. Воспользуемся оценкой (1.9) при $n=2$:

$$\left\|y(x)-L_2(x)\right\|\le\frac{M_3}{3!}\left\|\omega_3(x)\right\|.$$

Имеем

$$M_3=\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left|y^{(3)}(x)\right|=\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left|8e^{2x}\right|=8e,$$

$$\omega_3(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)x\left(x-\frac{1}{2}\right),$$

$$\left\|\omega_3(x)\right\|=\sup_{x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]}\left|\omega_3(x)\right|=\frac{1}{12\sqrt{3}}.$$

В результате приходим к оценке

$$\left\|y(x)-L_2(x)\right\|\le\frac{e}{9\sqrt{3}}\approx 0,06415.$$

Пример 1.3. Оценить наименьшее из возможных число узлов интерполяции функции $y(x)=\cos x$ на отрезке $[0,\pi/4]$, обеспечивающее погрешность интерполяции $\varepsilon\le 10^{-2}$.

Решение. Наименьшая оценка погрешности интерполяции соответствует оптимальному расположению узлов (1.11) и имеет вид (1.12). Подстановка в (1.12) параметров задачи приводит к следующему неравенству для определения *n*:

$$\left\|y(x)-L_n(x)\right\|\le\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\frac{M_{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}\le\varepsilon,$$

где

$$M_{n+1}=\sup_{x\in[0,\pi/4]}\left|(\cos x)^{(n+1)}\right|.$$

При $n=1$ имеем $M_2=1$ и

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\frac{M_{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}=\frac{\pi^2}{256}\approx 0{,}0386>10^{-2},$$

то есть требуемое условие в данном случае не выполнено.

При $n=2$ имеем $M_2=1/\sqrt{2}$ и

$$\left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}\frac{M_{n+1}}{2^{2n+1}(n+1)!}=\frac{\pi^3}{12288\sqrt{2}}\approx 0{,}00178<10^{2}.$$

Таким образом, требуемому условию удовлетворяет интерполяционный многочлен второй степени, построенный по трем оптимально расположенным узлам.

Пример 1.4. Среди всех многочленов вида

$$P_3(x)=5x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

найти наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[1,2]$.

Решение. Искомый многочлен имеет вид

$$\bar{P}_3(x)=5\bar{T}_3^{[1,2]}(x),$$

где многочлен $\bar{T}_3^{[1,2]}(x)$ определяется по (1.13). Таким образом, задача сводится к построению этого многочлена. Подставляя параметры задачи в (1.13), находим

$$\bar{T}_3^{[1,2]}(x)=\frac{T_3(2x-3)}{32}.$$

По формулам (1.14) строим многочлен Чебышева третьей степени: $T_3(x)=4x^3-3x$. Подставляя полученные результаты в исходное соотношение, окончательно находим

$$\bar{P}_3(x)=\frac{5}{32}\left(32x^3-144x^2+210x-99\right).$$

Пример 1.5. Построить наилучшее приближение функции $y(x)=x^3$ в пространстве $L_2[-1,1]$ многочленом первой степени.

Решение. Искомое приближение имеет вид $\varphi(x)=c_1+c_2x$, то есть в (1.14) имеем две базисные функции: $f_1=1$ и $f_2=x$. Искомые коэффициенты c_1^0 и c_2^0 находятся из решения системы (1.15). Для ее формирования необходимо вычислить соответствующие скалярные произведения. В силу (1.16) имеем

$$(f_1, f_1) = \int_{-1}^{1} 1dx = 2,\ (f_1, f_2) = \int_{-1}^{1} xdx = 0,\ \ (f_2, f_2) = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3},$$

$$(y, f_1) = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0, \quad (y, f_2) = \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{5}.$$

В результате из решения соответствующей системы (1.15) находим

$$c_1^0 = 0, \quad c_2^0 = \frac{3}{5}.$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид $\varphi^0(x) = 3x/5$.

Пример 1.6. Построить многочлен наилучшего равномерного приближения первой степени для функции $y(x) = x^3 - 3x$ на отрезке $[-1,1]$.

Решение. Существует по меньшей мере два способа решения данной задачи. Прежде всего заметим, что функция $y(x)$ непрерывна на заданном отрезке и, следовательно, по свойству 1) для нее существует единственный МНРП данной степени. Далее, функция $y(x)$ является нечетной относительно нуля, являющегося серединой заданного отрезка, т. е. $y(x) = -y(-x)$, поэтому по свойству 4) он должен иметь вид $Q_1^0(x) = a_1 x$.

Способ 1. Заметим, что, в силу нечетности функции $y(x)$, ее МНРП любой степени не может содержать четных степеней, а значит ее МНРП первой и второй степени совпадают: $Q_2^0(x) = Q_1^0(x)$. Но так как $y(x)$ сама является многочленом третьей степени, то по свойству 5) ее МНРП $Q_2^0(x)$ может быть построен как интерполяционный многочлен с оптимальными узлами, определяемыми по (1.11). Имеем

$$x_m = \cos\left(\frac{\pi(2m+1)}{6}\right), \quad m = 0,1,2$$

или

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y(x_0) = -\frac{9\sqrt{3}}{8}, \quad y(x_1) = 0, \quad y(x_2) = \frac{9\sqrt{3}}{8}.$$

Строим интерполяционный многочлен по формуле Лагранжа:

$$L_3(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}x\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{3\sqrt{3}}{4}x\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{9}{4}x.$$

Способ 2. Воспользуемся теоремой Чебышева. Необходимо найти по крайней мере три точки чебышевского альтернанса. Так как $y'' = 6x$ меняет знак на отрезке $[-1,1]$, то свойство 5) непосредственно не применимо для построения $Q_1^0(x)$. Однако $y''' = 6$ знакопостоянна и, следовательно, свойство 5) применимо для построения $Q_2^0(x)$. Но, как было показано выше, $Q_2^0(x) = Q_1^0(x)$. Таким образом, точки $x_0 = -1$ и $x_3 = 1$ являются точками чебышевского альтернанса, которых для построения $Q_2^0(x)$ должно быть не менее четырех. Из (1.17) имеем систему

$$\begin{aligned}
&2 + a_1 = A,\\
&x_1^3 - 3x_1 - a_1x_1 = -A,\\
&x_2^3 - 3x_2 - a_1x_2 = A,\\
&-2 - a_1 = -A,
\end{aligned}$$

где обозначено $A = \delta y(x) - Q_1^0(x)$. Данная система оказывается незамкнутой, поскольку содержит четыре неизвестных x_1, x_2, a_1, A и только три линейно независимых уравнения. Недостающее уравнение получается из условия, что точки x_1 и x_2 являются точками экстремума разности $y(x) - Q_2^0(x)$, то есть удовлетворяют уравнениям $y'(x_i) - Q_2^0{}' = 0$ или

$$3x_1^2 - 3 - a_1 = 0,\ 3x_2^2 - 3 - a_1 = 0.$$

Решение полученной системы имеет вид

$$x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2},\ A = -\frac{1}{4},\ a_1 = -\frac{9}{4}.$$

Таким образом, $Q_1^0 = -\frac{9}{4}x$, что совпадает с полученным первым способом. Заметим, что в силу совпадения $Q_2^0(x)$ с $Q_1^0(x)$, можно было ограничиться тремя точками чебышевского альтернанса.