PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 2
Automne 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

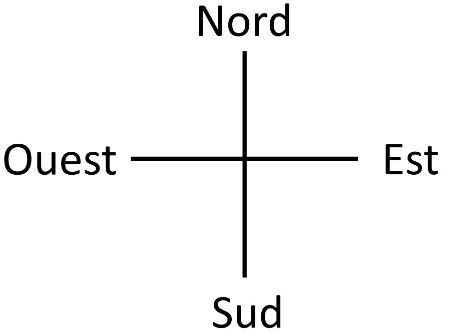
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. **Vrai ou faux.** La composante normale de la vitesse d'un objet qui se déplace sur une trajectoire curviligne peut être non nulle. (10 points)

B. Un bateau pirate (m_P = 15 000 kg) se déplace avec une vitesse de 20 km/h vers l'est. Il rencontre alors un bateau ennemi (m_E = 12 000 kg) qui se déplace à 15 km/h vers le nord. Le capitaine du bateau pirate décide d'attaquer en tirant un boulet de canon (m_B = 500 kg) qui frappe le bateau ennemi.

Quelle est le module de la vitesse (en m/s) du centre de masse du système composé des deux bateaux et du boulet après que le boulet a été tiré? (15 points)

N.B. On néglige ici toute résistance due à l'air ou à l'eau sur les bateaux et sur le boulet. La masse m_P du bateau pirate inclut la masse du boulet.

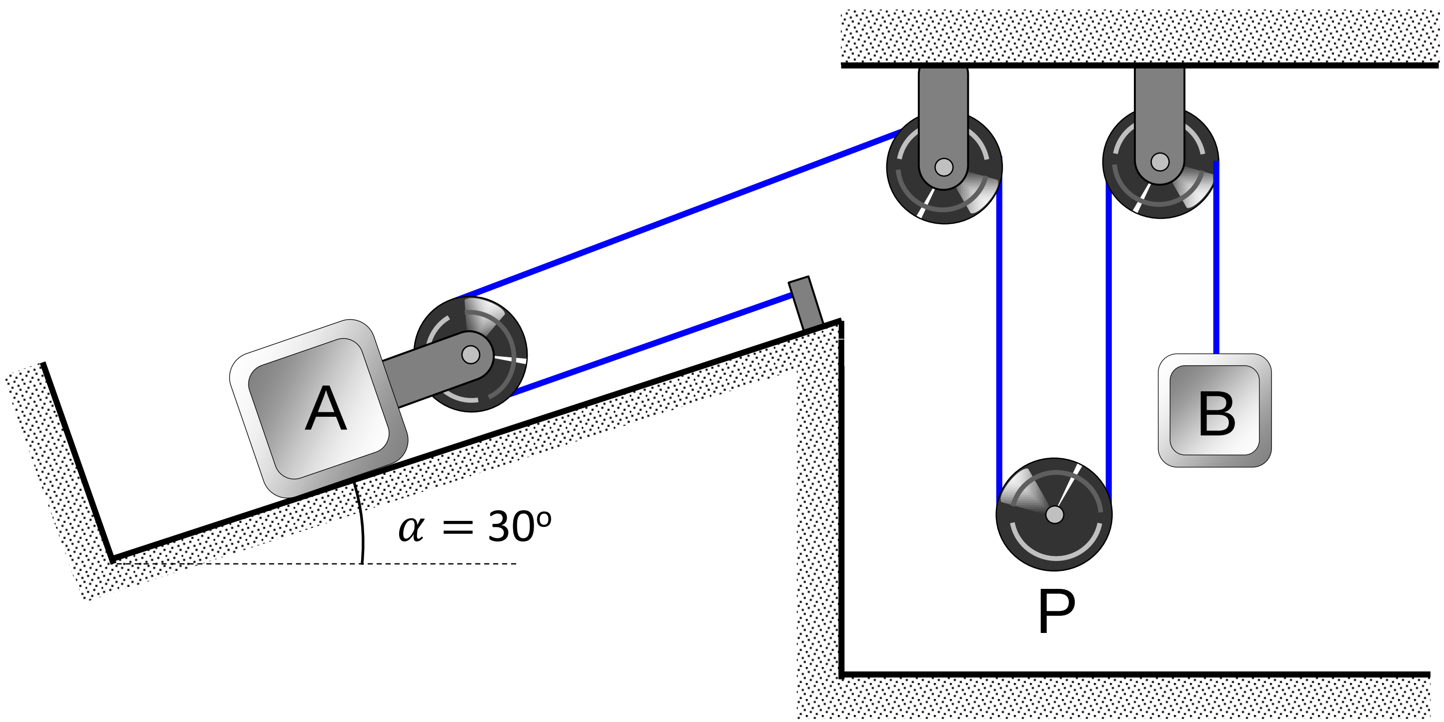


Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

C. Dans la figure ci-dessous, un câble relie deux masses A et B en passant par une poulie mobile P. Exprimez la vitesse de la poulie en fonction des vitesses de A et B. (15 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. FAUX. La vitesse est toujours orientée tangentiellement à la trajectoire. La composante normale de la vitesse donc toujours nulle.

10 points de compréhension

B. Puisque la somme des forces sur le système P + E + boulet est nulle avant, pendant et après le tir, la vitesse de son CM est constante. On a donc :

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_P \vec{v}_P + m_E \vec{v}_E}{m_P + m_E} = \frac{15000 \cdot 20\vec{i} + 12000 \cdot 15\vec{j}}{15000 + 12000} = \left(11{,}11\vec{i} + 6{,}67\vec{j}\right)\mathrm{km/h}$$

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{11{,}11^2 + 6{,}67^2} = 13{,}0\ \mathrm{km/h} = 3{,}60\ \mathrm{m/s}}$$

15 points de compréhension et de calculs

C. La somme des variations de longueur de corde due aux trois objets doit être nulle. Ici, les axes pour A, B et P sont tous choisis vers le haut. Les signes dans la réponse peuvent être différents si des axes différents ont été choisis.

$$\sum \Delta\ell_i = -2\Delta x_A - 2\Delta y_P - \Delta y_B = 0$$

$$2v_A + 2v_P + v_B = 0$$

$$\boxed{v_P = -\left(v_A + \frac{v_B}{2}\right)}$$

15 points de calculs

Question 2 (60 points)

Par une belle journée d'été, vous allez au parc d'attractions La Ronde pour faire un tour dans le Goliath, une des montagnes russes du parc. La première section du Goliath consiste en une remontée mécanique, suivie d'une descente d'une hauteur H = 52 m sur une distance horizontale L = 95 m.

En observant la trajectoire de la descente, vous remarquez qu'elle peut être modélisée par la fonction suivante :

$$y = \frac{H}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 1\right] + 10,$$

où x et y sont en mètres. On choisit $x = 0$ vis-à-vis le haut de la descente et $y = 0$ au niveau du sol (point O sur la figure).

La vitesse du chariot au sommet de la descente est de 2 m/s. La masse totale du chariot avec les passagers à l'intérieur est 800 kg. On néglige tout frottement entre le chariot et rails, ainsi que la résistance de l'air.

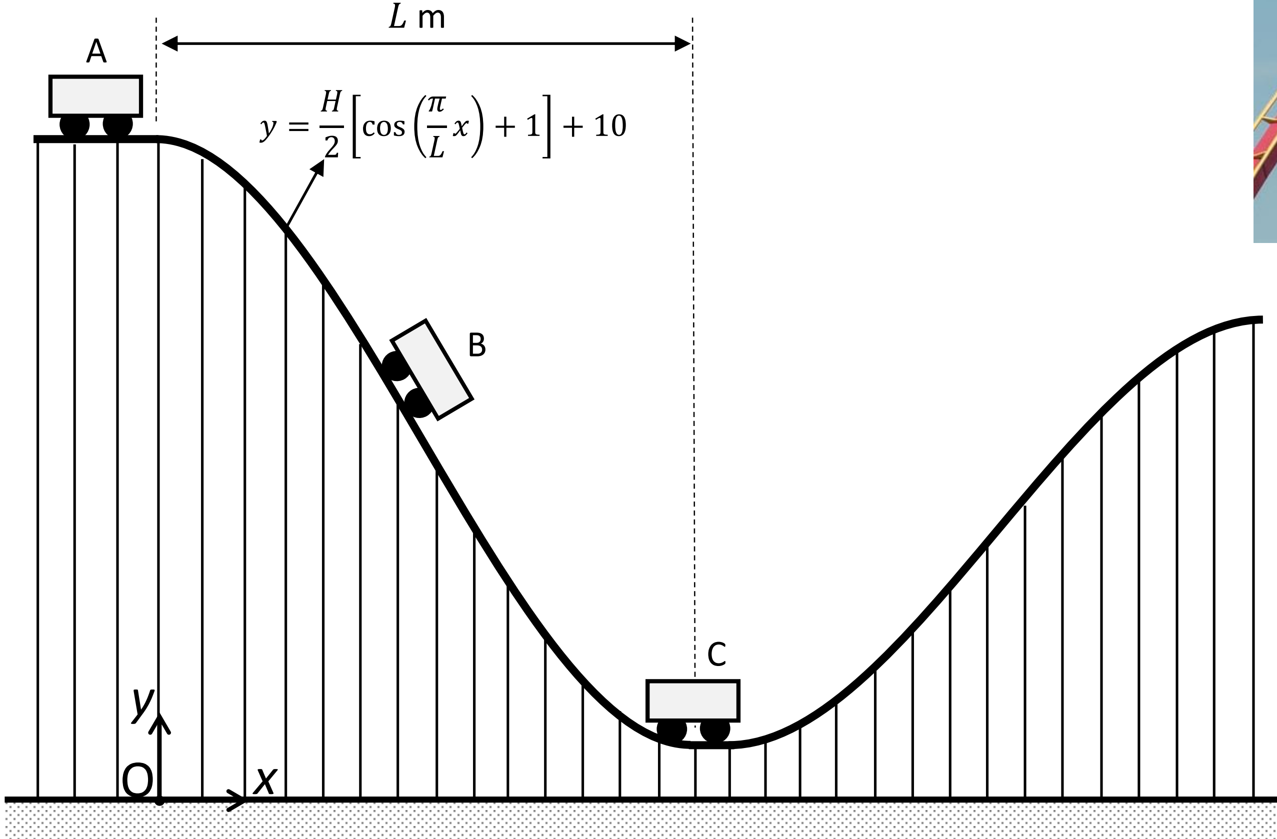
A. Faites le DCL-DCE du chariot lorsqu'il est à la position B sur le schéma en utilisant les coordonnées normale/tangentielle. (10 points)

B. Pour chaque force dans le DCL, indiquez si le travail qu'elle effectue entre les points A et C est plus petit, égal ou plus grand que zéro. Justifiez. (10 points) :

C. Déterminez la vitesse du chariot au point C, en bas de la descente. (20 points)

D. Calculez la force normale ressentie par les passagers au point C, en bas de la descente. Comparez cette force avec le poids du chariot. (20 points)

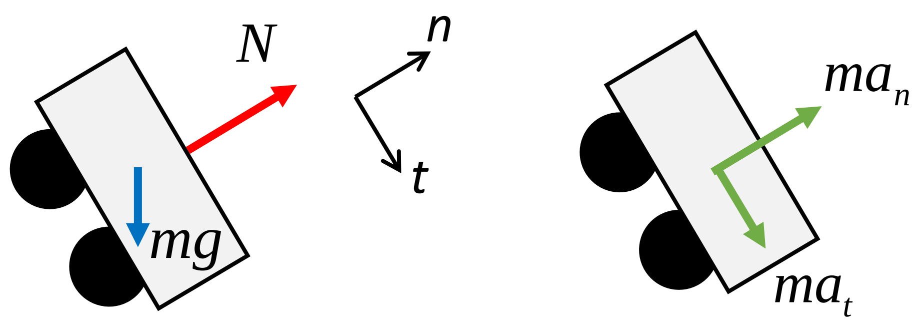
Question 2 (60 points)



Site Web de La Ronde.

Q2 – Solution (1/3)

A. DCL-DCE du chariot au point B



DCL : poids vers le sol, normale perpendiculaire au rail et vers le haut

DCE : une composante ma_n et ma_t dans chaque direction, appliquées au CM.

10 points de compréhension

B. Travail des forces du DCL entre A et C.

Travail : $U = \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_A^C F \cos\theta \, dr$

Poids : le poids $-mg\vec{j}$ s'applique vers le sol, soit globalement dans la même direction que le déplacement du chariot qui descend. L'angle θ est toujours entre 0 et 90 degrés. **Travail positif.**

Normale : la normale s'applique toujours perpendiculairement au rail. Elle est orientée à 90 degrés par rapport au déplacement du chariot. **Travail nul.**

10 points de compréhension

Q2 – Solution (2/3)

C. Vitesse du chariot en bas de la descente (point C).

$\sum U_{nc} = 0$ sur le chariot, donc l'énergie mécanique est conservée de A à C. $E_A = E_C$

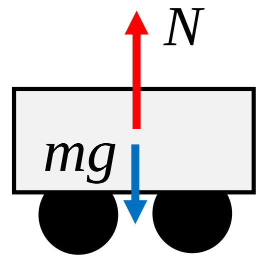
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgH = \frac{1}{2}mv_C^2 \Rightarrow v_C = \sqrt{v_A^2 + 2gH} = \sqrt{2^2 + 2 \cdot 9{,}81 \cdot 52} = 32{,}0 \text{ m/s}$$

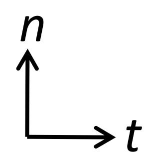
15 points de résolution de problème

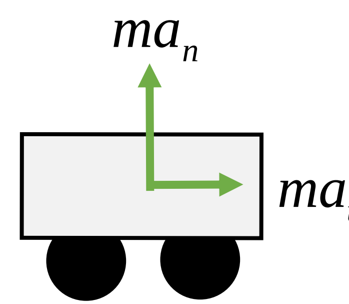
D. Force normale ressentie par les passagers en bas de la descente (point C).

$$\sum F_y = N - mg = ma_n = m\frac{v_C^2}{\rho}$$

$$N = m\left(g + \frac{v_C^2}{\rho}\right)$$







Rayon de courbure au point C

(On remarque que le point C est un minimum local de la courbe et donc que $\frac{dy}{dx} = 0$ en ce point)

$$\rho_C = \left.\frac{\left(1 + [dy/dx]^2\right)^{3/2}}{\left|d^2y/dx^2\right|}\right|_C = \frac{1}{\left|d^2y/dx^2\right|_C}$$

Q2 – Solution (3/3)

Rayon de courbure au point C (suite)

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_C = -\frac{H\pi}{2L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{x=L} = 0$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_C = -\frac{H\pi^2}{2L^2}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_{x=L} = \frac{H\pi^2}{2L^2}$$

$$\rho_C = \frac{1}{\left|d^2y/dx^2\right|_C} = \frac{2L^2}{H\pi^2} = \frac{2\cdot 95^2}{52\pi^2} \approx 35{,}17\ \mathrm{m}$$

Force normale ressentie par les passagers

$$\boxed{N = m\left(g + \frac{v_C^2}{\rho}\right) = m\left(g + \frac{v_A^2 + 2gH}{2L^2/H\pi^2}\right) = 800\left(9{,}81 + \frac{32{,}0^2}{35{,}17}\right) = 31{,}1\ \mathrm{kN}}$$

Le poids du chariot est mg = 7,848 kN.

La normale est donc 3,97 fois plus grande que le poids du chariot. Cela correspond à une accélération d'environ 4*g*.

20 points de résolution de problème

Question 3 (60 points)

Vous poursuivez votre journée au parc d'attractions en allant aux autos-tamponneuses. Vous vous demandez alors quelle est la force moyenne que l'on peut ressentir lorsque deux autos entrent en contact.

Considérez une auto-tamponneuse A (150 kg) qui part du repos et se met en mouvement en ligne droite avec une accélération

$$a = \frac{3 - v}{2},$$

où a est l'accélération en m/s² et v est la vitesse en m/s.

Deux secondes après s'être mise en mouvement, A frappe une autre auto-tamponneuse B (200 kg) au point O (voir schéma). La vitesse de B avant le choc est 2,50 m/s. Tout juste après l'impact, dont la durée est de 10 ms, on observe que B devient immobile.

N.B. On néglige tout frottement dans ce problème.

A. Quelle est le module de la vitesse de l'auto A juste avant de frapper B? (20 points)

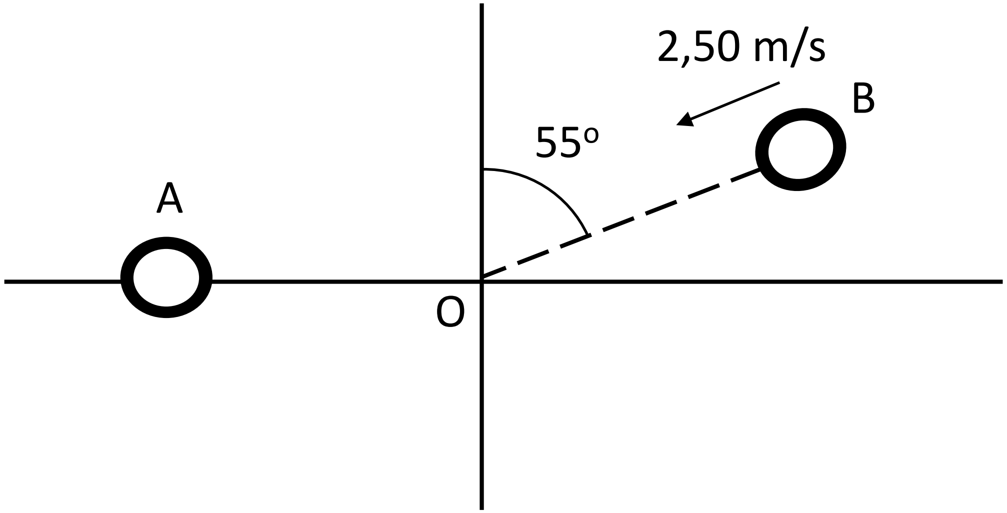
B. Quelle est la vitesse de A (module et orientation) juste après l'impact? (20 points)

C. Quelle est la force moyenne (vecteur) ressentie par A pendant l'impact? (10 points)

D. L'impact est-il élastique, inélastique ou parfaitement inélastique? Justifiez. (10 points)

Question 3 (60 points)

Site Web de La Ronde.



Q3 – Solution (1/2)

A. Vitesse de A avant de frapper B.

Puisque l'accélération dépend de la vitesse, on a

$$\int_0^t dt' = \int_0^v \frac{dv'}{a} \qquad t = \int_0^v \frac{2}{3-v'}\,dv = -2\ln(3-v')\Big|_0^v = 2\ln\left(\frac{3}{3-v}\right)$$

En isolant la vitesse *v*, on trouve : $v = 3\left(1-e^{-t/2}\right)$

Après 2 secondes, on trouve : $\boxed{v_{A0} = 3\left(1-e^{-2/2}\right) = 1{,}90\ \mathrm{m/s}}$

20 points de résolution de problème

B. Vitesse de A juste après avoir frappé B.

La quantité de mouvement du système A + B est conservée pendant l'impact (il n'y a pas de force externe impulsive, donc $\sum\vec{F} = \vec{0}$).

$$L_{0x} = L_{1x}$$

$$m_A v_{A0} - m_B v_{B0}\sin\theta = m_A v_{Ax}$$

$$v_{Ax} = v_{A0} - \frac{m_B}{m_A} v_{B0}\sin\theta = -0{,}831\,\mathrm{m/s}$$

$$L_{0y} = L_{1y}$$

$$-m_B v_{B0}\cos\theta = m_A v_{Ay}$$

$$v_{Ay} = -\frac{m_B}{m_A} v_{B0}\cos\theta = -1{,}91\,\mathrm{m/s}$$

Q3 – Solution (2/2)

B. Vitesse de A juste après avoir frappé B.

$$\boxed{v_A = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = 2{,}08\,\mathrm{m/s}}$$

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{v_{Ay}}{v_{Ax}}\right) + 180° = 246°}$$

Juste après l'impact A, se déplace à 2,08 m/s à 246 degrés par rapport à l'axe *x*.

20 points de résolution de problème

C. Force moyenne (vecteur) ressentie par A.

$$\vec{L}_{A1} - \vec{L}_{A0} = \vec{F}_{moy}\Delta t \Rightarrow \vec{F}_{moy} = \frac{\vec{L}_{A1} - \vec{L}_{A0}}{\Delta t} = \frac{m_A v_{Ax}\vec{i} + m_A v_{Ay}\vec{j} - m_A v_{A0}\vec{i}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{F}_{moy} = \left(-41{,}0\vec{i} - 28{,}7\vec{j}\right)\mathrm{kN}}$$

10 points de calculs

D. La collision est-elle élastique, inélastique ou parfaitement inélastique ?

On vérifie si l'énergie cinétique de A + B varie pendant la collision.

$$T_1 = \frac{1}{2}m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B0}^2 = 896\,\mathrm{J}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m_A v_A^2 = 325\,\mathrm{J}$$

$\Rightarrow$ **Puisque l'énergie cinétique n'est pas conservée pendant l'impact et que les autos ne demeurent pas solidaires, la collision est inélastique.**

10 points de calculs

Question 4 (40 points)

Vous terminez votre journée au parc en grand en allant faire le Slingshot. Le Slingshot est une attraction dans laquelle vous êtes assis dans une capsule et projeté dans les airs à une vitesse vertigineuse grâce à des câbles élastiques (voir figure).
La capsule C (200 kg) est d'abord maintenue immobile au sol et les câbles sont tendus. Ensuite, la capsule est lâchée dans les airs et se déplace verticalement, de haut en bas.

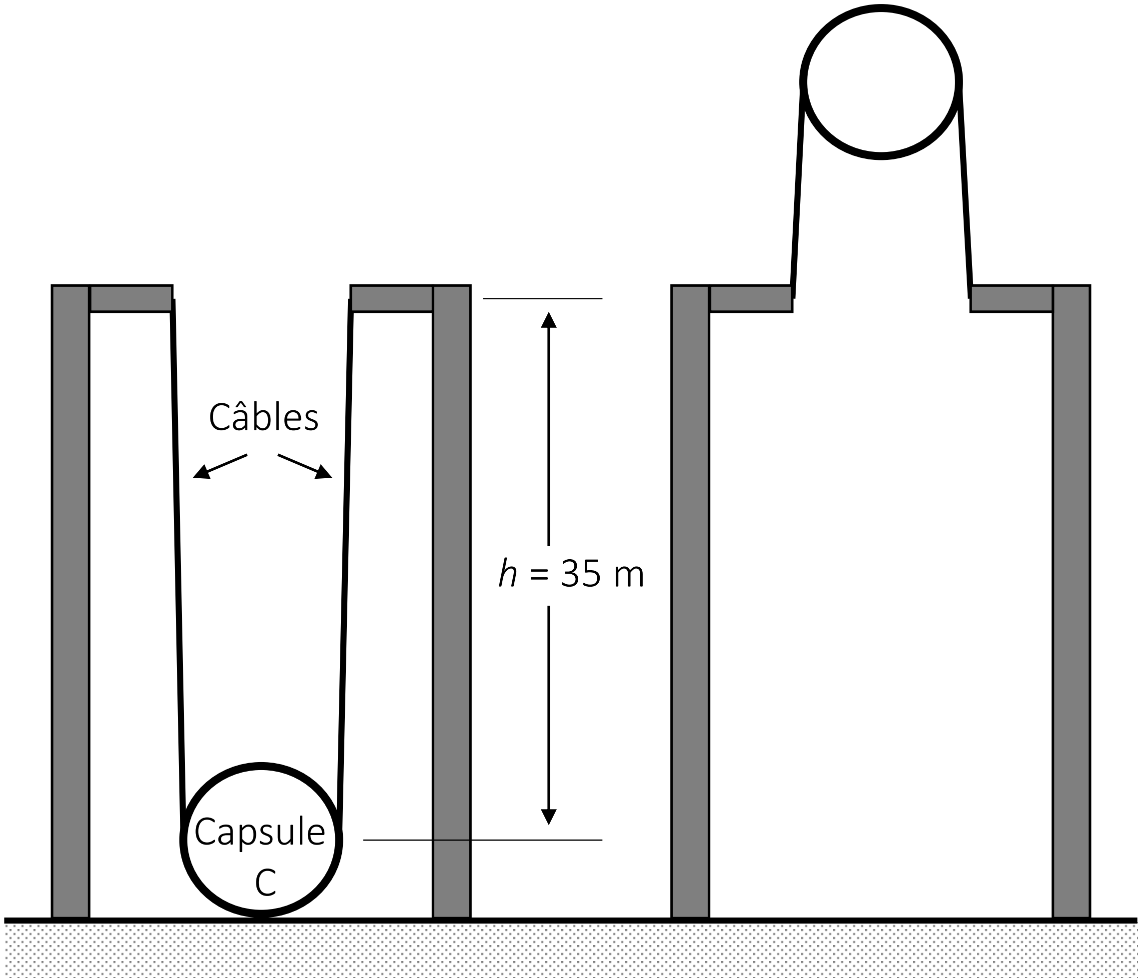
Chaque câble est modélisé par un ressort idéal de longueur naturelle nulle (le câble ne peut pas être comprimé) et de constante de rappel k = 1000 N/m. On néglige la masse des câbles et on suppose qu'ils s'étirent seulement dans la direction verticale.

Considérez que la résistance de l'air exerce une force constante de 600 N sur la capsule lorsqu'elle est en mouvement.

A. Pour le système formé de la capsule seulement (15 points) :
   i. Est-ce que l'énergie mécanique est conservée?
   ii. Est-ce que la quantité de mouvement est conservée?

B. Quelle est la hauteur maximale atteinte par la capsule? Négligez les dimensions de la capsule. (25 points)

Question 4 (40 points)



Joe Schwarz, Flickr.

Q4 – Solution (1/1)

A. i. L'énergie mécanique de la capsule n'est pas conservée, car la force de résistance de l'air fait un travail non conservatif non nul. Le poids et la force des câbles sont des forces conservatives.

ii. La quantité de mouvement de la capsule n'est pas conservée, car la somme des forces sur celle-ci est non nulle. On peut aussi dire que sa QM change, car sa vitesse change.

15 points de compréhension

B. Hauteur maximale atteinte par la capsule.

On applique le principe travail-énergie à la capsule.

Principe travail-énergie

État 1 : capsule immobile au sol ($y = 0$)

État 2 : capsule est immobile à la hauteur maximale y.

$$\sum U_{nc} = \Delta E \qquad -f_r y = \left(mgy + 2\cdot\frac{1}{2}k(y-h)^2 \right) - 2\cdot\frac{1}{2}kh^2$$

$$0 = -(f_r + mg)y - k(y-h)^2 + kh^2$$

$$0 = y\left[-ky + (2kh - f_r - mg)\right]$$

$$\boxed{y = 2h - \frac{f_r + mg}{k} = 67{,}4\ \mathrm{m}}$$

25 points de résolution de problème