– PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs

Cours 11

Cinématique et cinétique des corps rigides dans le plan

Jérémie Villeneuve

Département de génie physique

Système de particules variables

Débits volumique et massique
pour un fluide dans une conduite

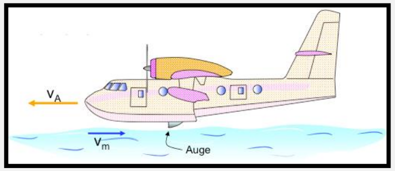
$$\left|\frac{dV}{dt}\right| = Sv_{p/s} \qquad \mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S v_{p/s}$$

Systèmes à masse variable

$$\sum \vec{F} + \frac{dm_s}{dt}(\vec{v}_p - \vec{v}_s) = m_s(t)\vec{a}_s$$

p : particules

s : système dont la masse varie



Force exercée par un courant sur un objet

Entrant

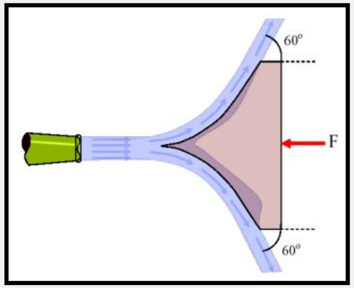
$$\vec{F}_e = \mu_e \vec{v}_e$$

Sortant

$$\vec{F}_s = -\mu_s \vec{v}_s$$

Force totale

$$\vec{F} = \sum \left(\vec{F}_e + \vec{F}_s\right)$$



Si l'objet se déplace à vitesse constante, il faut travailler dans le référentiel où l'objet est immobile
(i.e. avec les vitesses relatives à l'objet).

Plan de la semaine

- **Cinématique du corps rigide dans le plan**
  - **Décomposition translation-rotation**
  - Centre instantané de rotation
  - Roulement sans glissement
- Cinétique du corps rigide dans le plan
  - Dynamique de rotation (2e loi de Newton)

Dans un monde éloigné de tout, un haltère parfaitement rigide formé de deux masses est en mouvement…

Le centre de masse est immobile et les masses tournent autour.

Rotation autour du CM

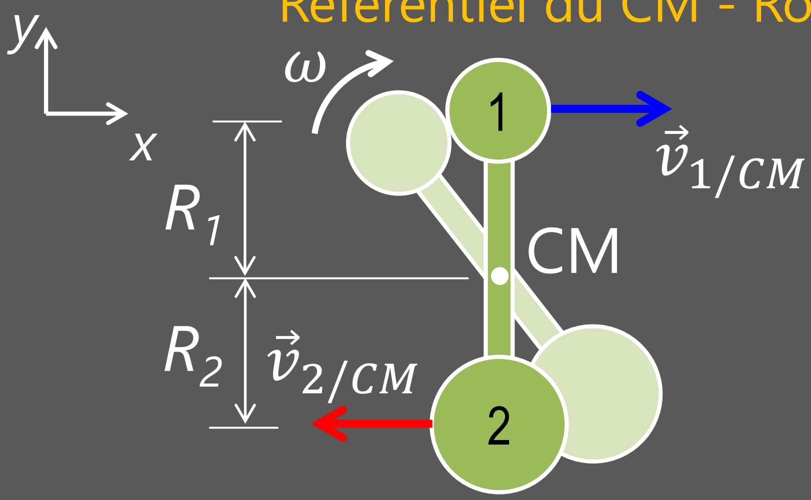
On donne une petite poussée vers la droite au centre de masse…

Translation du CM + Rotation autour du CM

Mouvement de translation indépendante du mouvement de rotation

Situation 1 – On connait $\vec{v}_{CM}$ et ω
Quelles sont les vitesses des masses quand l'haltère est vertical ?

Référentiel du CM - Rotation pure autour du CM



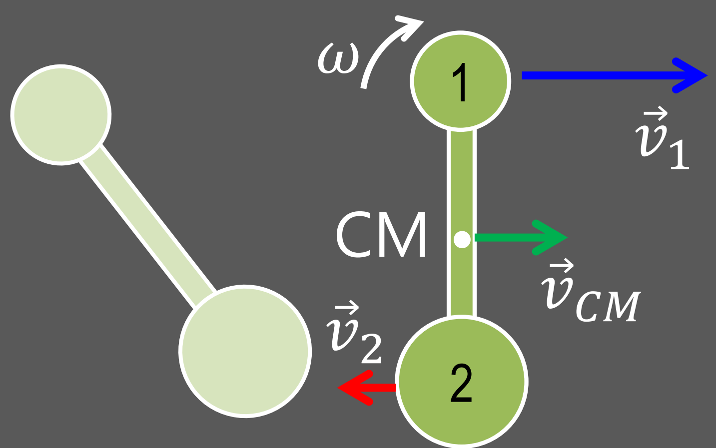
$$\vec{v}_{1/CM} = \omega R_1 \vec{\imath}$$

$$\vec{v}_{CM} = \vec{0}$$

$$\vec{v}_{2/CM} = -\omega R_2 \vec{\imath}$$

Puisque le CM est immobile, alors ce sont les vitesses relatives au CM. (mouvement circulaire)

Référentiel de « l'espace » – Translation CM + Rotation autour du CM



$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{1/CM} \\ &= (v_{CM} + \omega R_1)\vec{\imath} \end{aligned}}$$

$$\vec{v}_{CM} = v_{CM}\vec{\imath}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}_2 &= \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{2/CM} \\ &= (v_{CM} - \omega R_2)\vec{\imath} \end{aligned}}$$

Notion de corps rigide

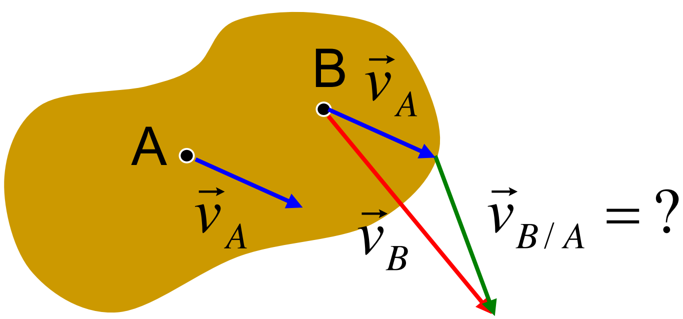
Un corps rigide est un corps qui ne se déforme pas.

Le fait que le corps rigide ne puisse pas se déformer impose des contraintes sur le mouvement de chaque point qui le compose.

Supposons que l'on connaisse le vecteur vitesse d'un point A d'un corps rigide.

Comment la vitesse d'un autre point B du corps est-elle reliée à la vitesse du point A ?

Mouvement plan d'un corps rigide



Équations du mouvement relatif du chapitre 5…

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

Comment exprimer la vitesse relative de B par rapport à A ?

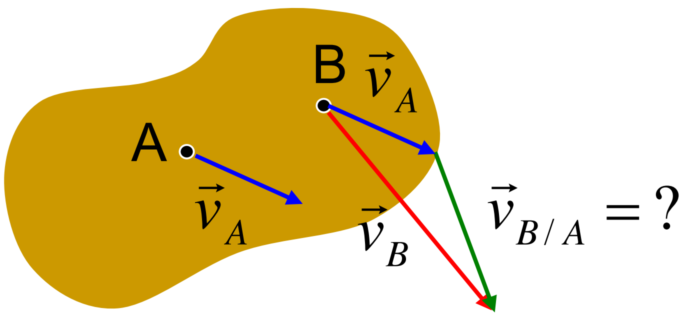
Si on pouvait exprimer $\vec{v}_{B/A}$ et que l'on connaît $\vec{v}_A$, alors on pourrait calculer la vitesse $\vec{v}_B$ de n'importe quel point B sur le corps rigide !

Corps rigide et mouvement contraint

Rappel – Chapitre 5

$\vec{v}_{B/A}$ est la vitesse de B telle que perçue par un observateur fixe au point A.

Mouvement dans le référentiel du laboratoire

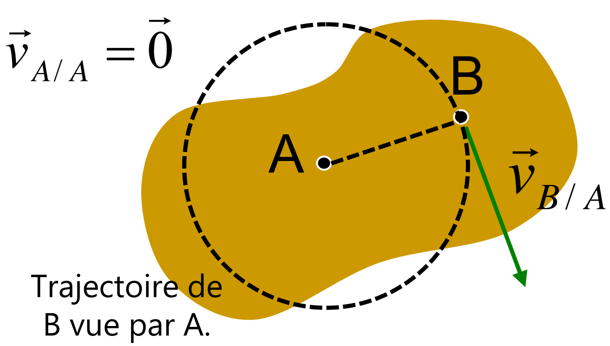


$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

Lorsque le corps rigide est en mouvement, que peut-on dire sur la distance entre les points A et B ?

Un corps rigide ne se déforme pas : la distance entre deux points du corps est toujours la même.

Mouvement dans le référentiel du point A



Conséquence : Dans le référentiel du point A (du point de vue de A), B suit une trajectoire circulaire autour de A !

Vitesse de rotation autour d'un axe

La vitesse de B est la somme d'une **translation** suivant A et d'une **rotation** autour de A.

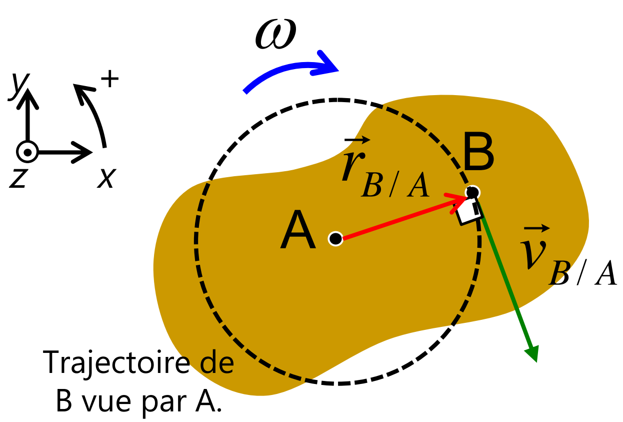
$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

Rotation de B autour d'un axe qui passe par A

Translation suivant A

Quelle est l'expression mathématique de $\vec{v}_{B/A}$?

Pour un corps rigide ayant une vitesse angulaire ω :



Vitesse relative de rotation de B par rapport à A

$$\boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}$$

C'est la généralisation vectorielle en 3D de $v = \omega r$ vue au chapitre 5.

Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ est parallèle à l'axe de rotation. Son sens est dicté par la règle de la main droite.

Exemple ci-dessus

En 2D, le vecteur $\vec{\omega}$ entre ou sort de la page. Ici, on aurait $\vec{\omega} = -\omega\vec{k}$ (sens horaire).

Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Décomposition translation-rotation

Mouvement relatif entre deux points
(relation générale qui est toujours vraie)

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}}$$

Mouvement contraint entre deux points d'un corps rigide

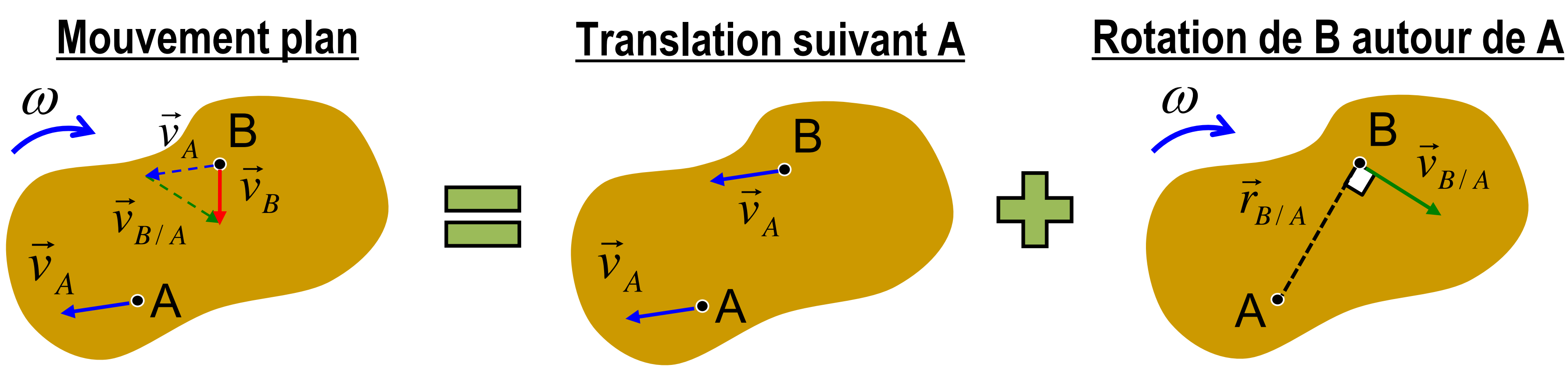
$$\boxed{\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}$$

En combinant les relations précédentes :

Décomposition translation-rotation

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}}$$

Relation qui régit le mouvement d'un corps rigide



un corps rigide peut seulement avoir une vitesse angulaire w

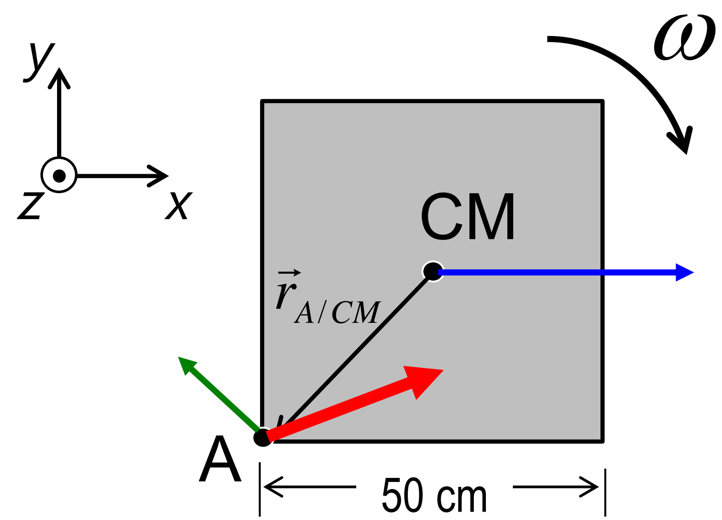
Exemple 1 – Plaque en rotation

Une plaque carrée de 50 cm de côté se déplace à 3 m/s vers la droite tout en tournant sur elle-même en sens horaire avec une vitesse angulaire de 4 rad/s. Quelle est la vitesse du coin inférieur gauche rapport au sol à l'instant représenté sur la figure ?

Signe : sens horaire

$$\vec{v}_{CM} = 3\vec{i}\ \text{m/s} \qquad \vec{\omega} = -4\vec{k}\ \text{rad/s}$$

$$\vec{r}_{A/CM} = \left(-0{,}25\vec{i} - 0{,}25\vec{j}\right)\text{m}$$



Décomposition translation-rotation

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{A/CM}$$

$$\vec{v}_{A/CM} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{A/CM} = \left(-\vec{i} + \vec{j}\right)\text{m/s}$$

$$\boxed{\vec{v}_A = 3\vec{i} + -\vec{i} + \vec{j} = \left(2\vec{i} + \vec{j}\right)\text{m/s}}$$

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

Une tige de longueur L = 1 m glisse dans les deux fentes sans frottement ci-dessous. Si la vitesse horizontale au point A est de 5 m/s à l'instant représenté sur la figure, déterminez la vitesse angulaire de la tige et la vitesse du point B.

Information connue ? $v_A = 5\ \mathrm{m/s}$ $L = 1\ \mathrm{m}$ $\vec{r}_{B/A} = L\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$

Attention : de A vers B

On cherche ? ω $\vec{v}_B$

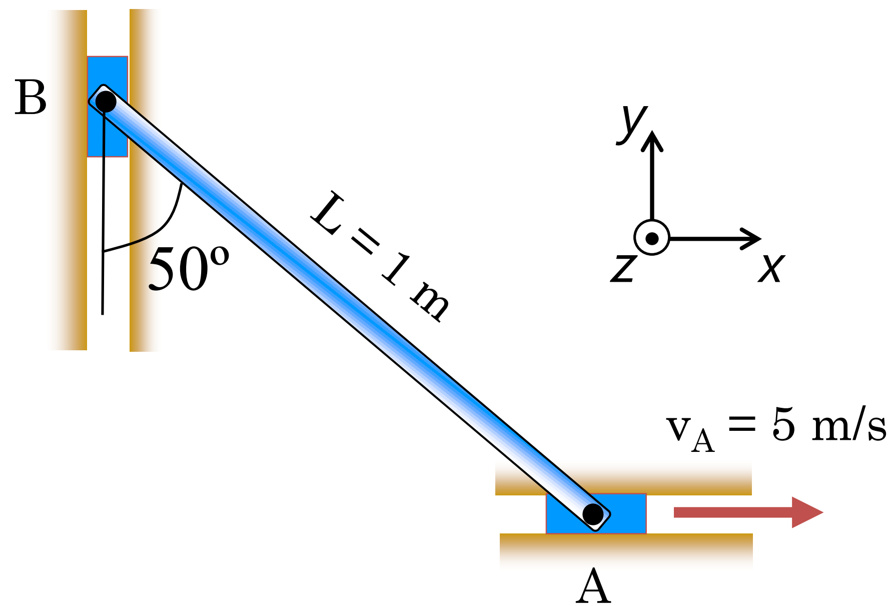
Contraintes du mouvement

A bouge horizontalement.

B bouge verticalement.

$$\vec{v}_A = 5\vec{i}\ \mathrm{m/s}$$

$$\vec{v}_B = -v_B\vec{j}$$

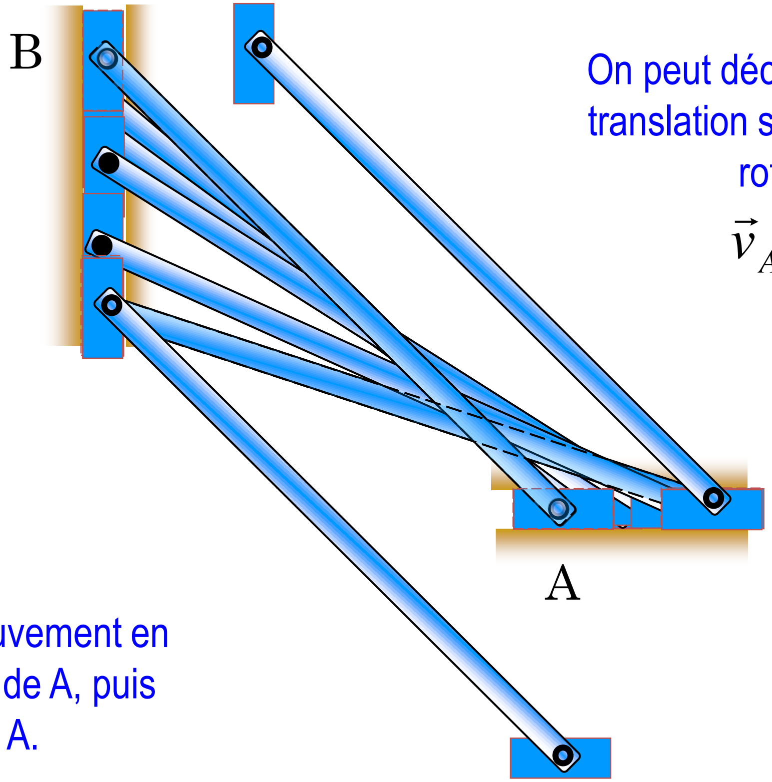


Stratégie

1. Exprimer $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$;
2. En déduire deux équations (une en x et une en y) pour trouver les deux inconnues.

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

La stratégie pour ce problème est de décomposer le mouvement plan en une translation et en une rotation.



On peut décomposer le mouvement en une translation suivant la vitesse de B, puis une rotation par rapport à B.

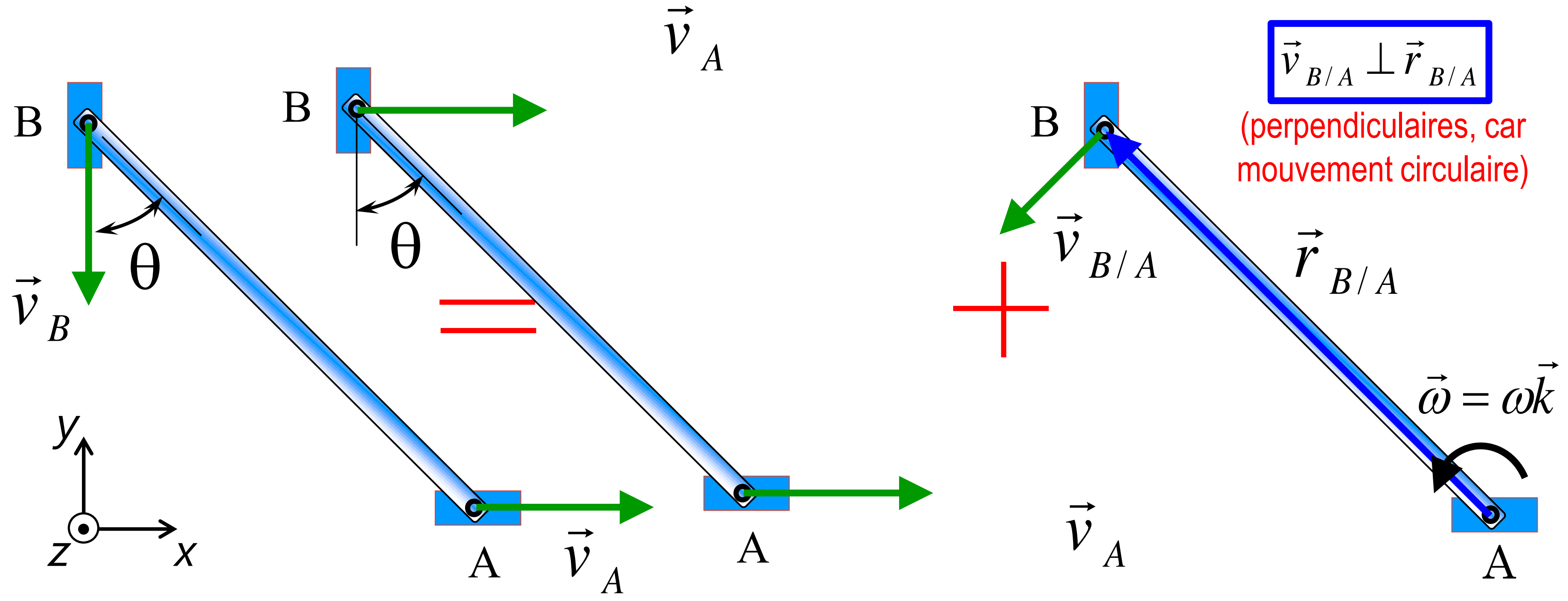
$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

On peut aussi décomposer le mouvement en une translation suivant la vitesse de A, puis une rotation par rapport à A.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Les deux approches sont équivalentes !

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités



Mouvement plan de B	=	Translation de A	+	Rotation de B par rapport à A (A est fixe)
$\vec{v}_B$		$\vec{v}_A$		$\vec{v}_{B/A} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$

Exemple 2 – Tige guidée à ses extrémités

Une tige de longueur L = 1 m glisse dans les fentes ci-contre. Si la vitesse horizontale au point A est de 5 m/s à l'instant représenté sur la figure, déterminez la vitesse angulaire de la tige et la vitesse du point B.

$$L = 1\ \text{m}$$

$$\vec{v}_A = 5\vec{i}\ \text{m/s} \qquad \vec{v}_B = -v_B\vec{j}$$

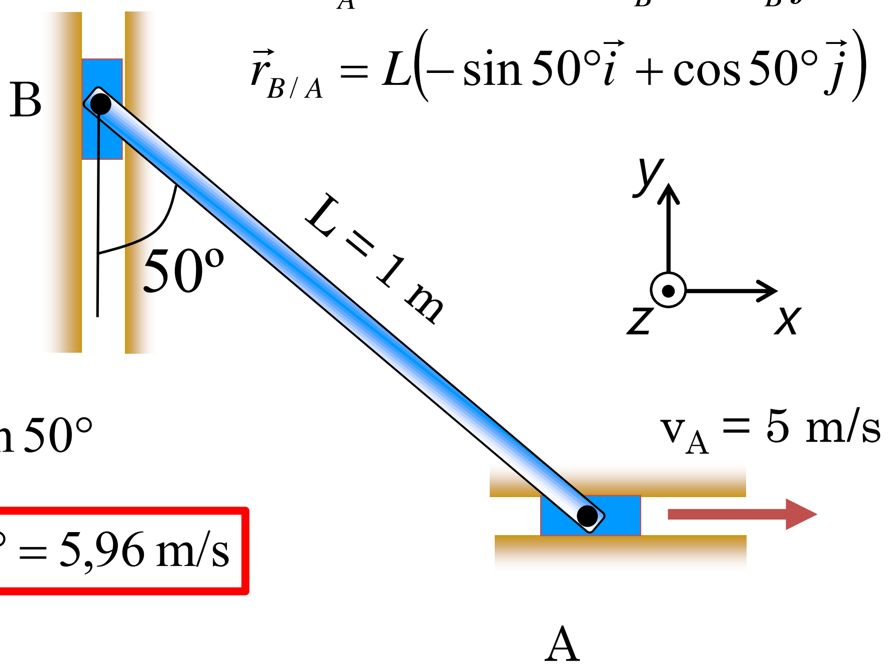
$$\vec{r}_{B/A} = L\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega\vec{k}\times L\left(-\sin 50°\vec{i} + \cos 50°\vec{j}\right)$$

$$-v_B\vec{j} = 5\vec{i} + -\omega\sin 50°\vec{j} - \omega\cos 50°\vec{i}$$

$$-v_B\vec{j} = (5 - \omega\cos 50°)\vec{i} - \omega\sin 50°\vec{j}$$



Selon x :

$$0 = 5 - \omega\cos 50°$$

$$\boxed{\omega = \frac{5}{\cos 50°} = 7{,}78\ \text{rad/s}}$$

Selon y :

$$-v_B = -\omega\sin 50°$$

$$\boxed{v_B = \omega\sin 50° = 5{,}96\ \text{m/s}}$$

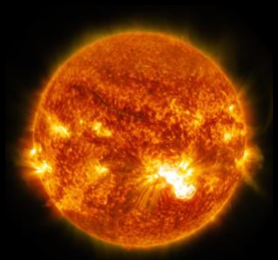
Vitesse angulaire de la Terre

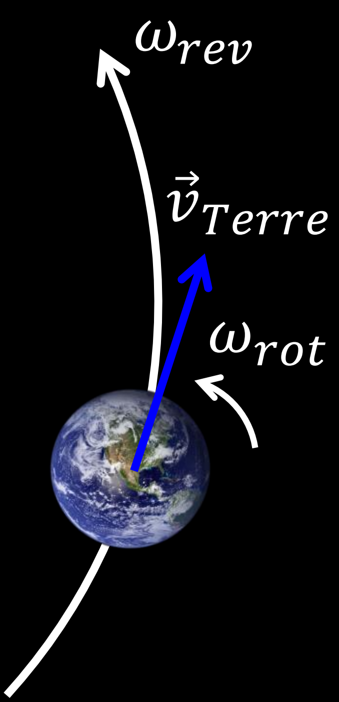
Fait #1 – La Terre tourne autour du Soleil au rythme d'une révolution par 365,25 jours.

Fait #2 – La Terre tourne sur elle-même au rythme d'une rotation par 23 h 56 m 4 s.

Fait #3 – Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Hypothèse – La Terre est un corps rigide.





Quelle est la vitesse angulaire de la Terre ?

(celle qui permet d'écrire $\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ avec A et B deux points sur la Terre)

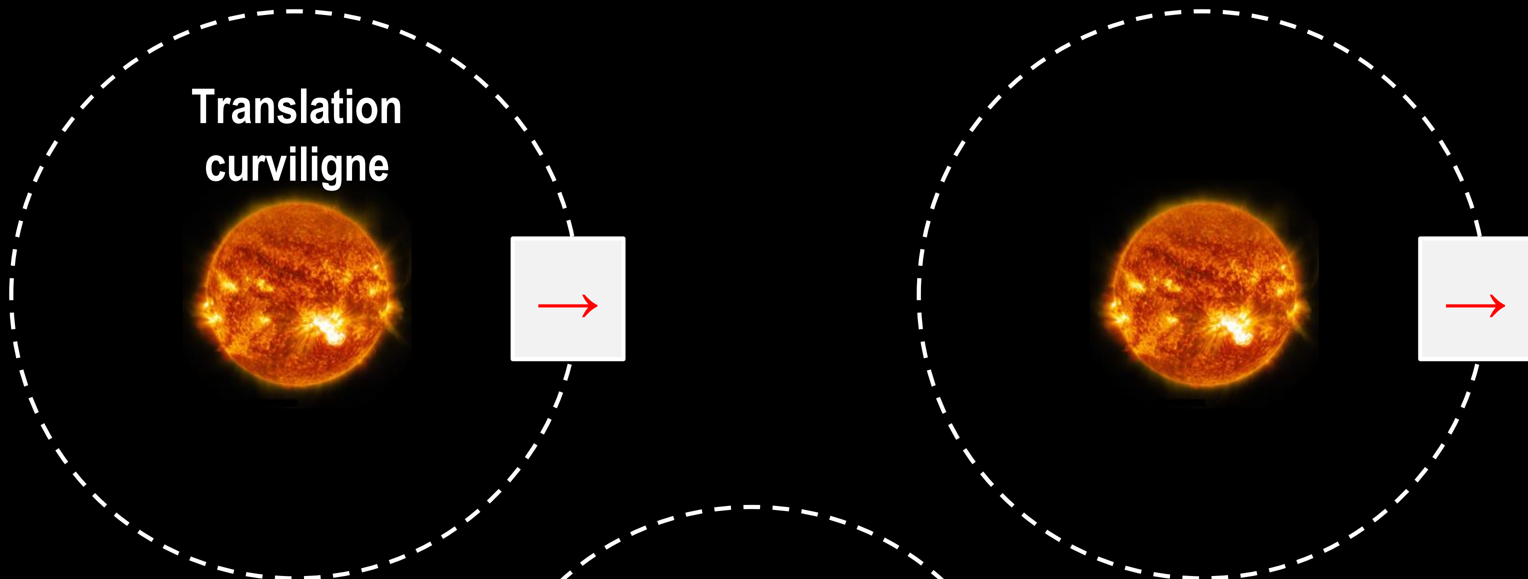
A : $\omega = \omega_{rev} = \frac{2\pi}{365{,}25 \times 24 \times 3600} = 1{,}99 \times 10^{-7}$ rad/s

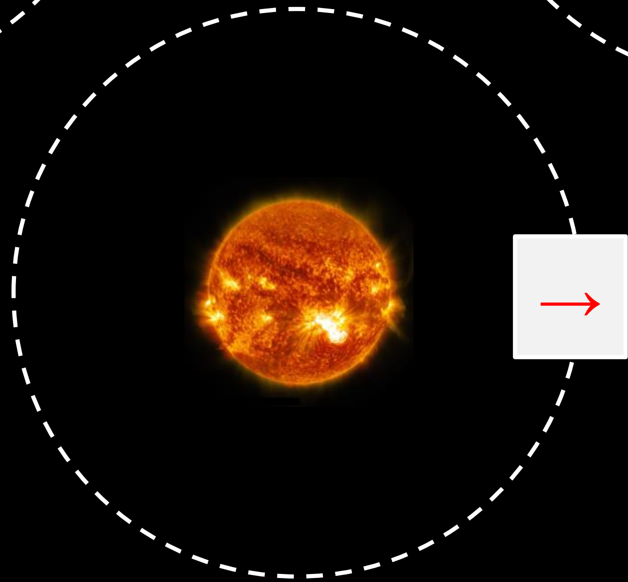
B : $\omega = \omega_{rot} = \frac{2\pi}{23 \times 3600 + 56 \times 60 + 4} = 7{,}29 \times 10^{-5}$ rad/s

C : Aucune de ces réponses.

Dans le référentiel du CM de la Terre, le CM est immobile et la vitesse relative d'un point sur la Terre par rapport au CM est donnée par $\vec{v}_{A/CM} = \vec{\omega}_{rot} \times \vec{r}_{A/CM}$.

La vitesse angulaire d’un corps est généralement indépendante de sa vitesse angulaire de révolution autour d’un autre corps.

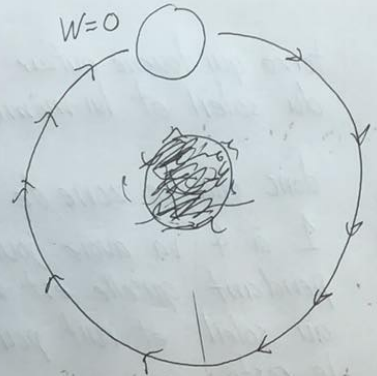




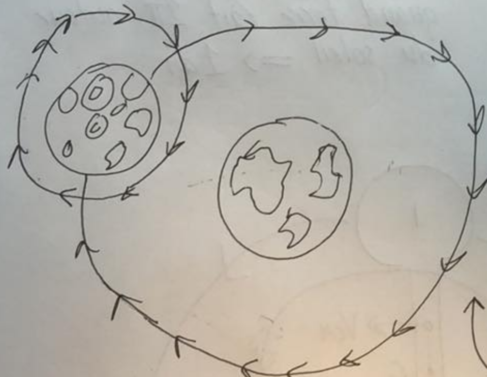
Synchronisation gravitationnelle

Effets de marées tendent à rendre égales la période de rotation à la période de révolution.

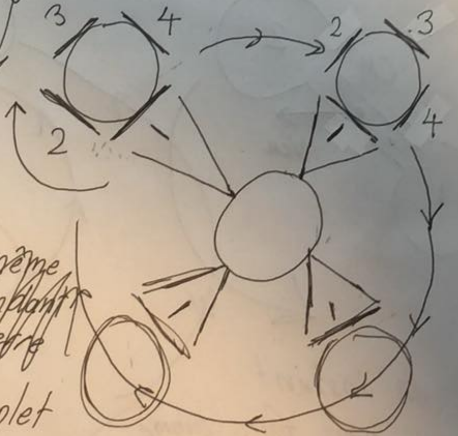
$W = 0$



$W_{lune} = W_{terre}$

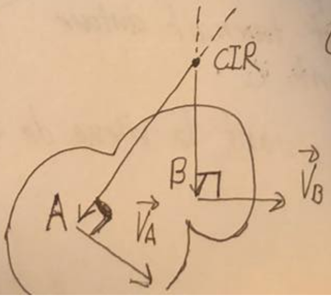


On voit donc toujours la même face de la lune sur terre car les deux vitesses de rotations sont syncronisé



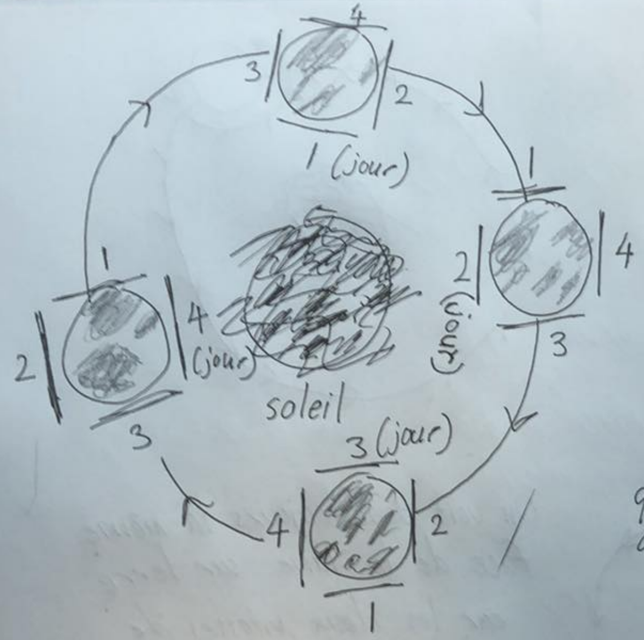
~~On voit toujours la même face de la lune dépendant de notre position sur terre~~

false la terre complet voit toujours la même face



CIR change à chaque instant

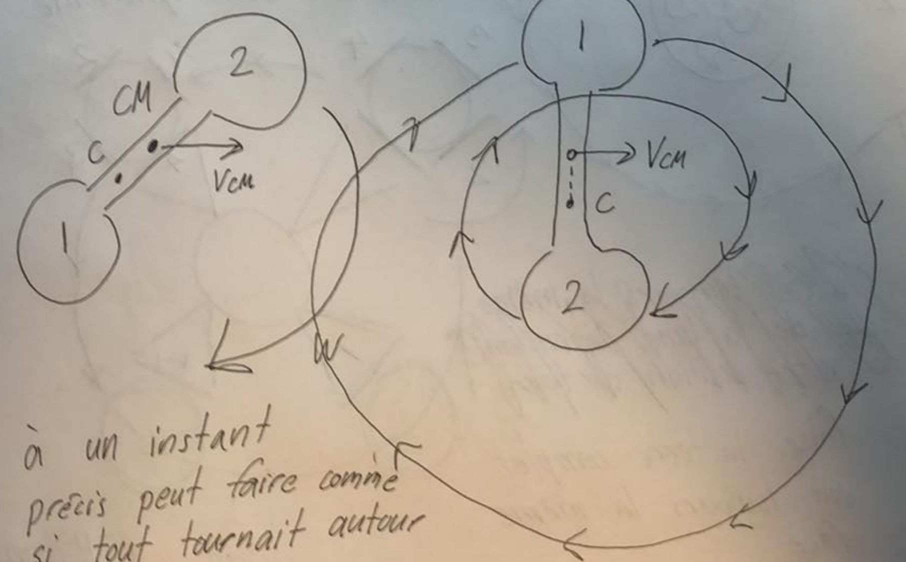
$$\boxed{W = \frac{V_A}{r_{A/CIR}} = \frac{V_B}{r_{B/CIR}}}$$



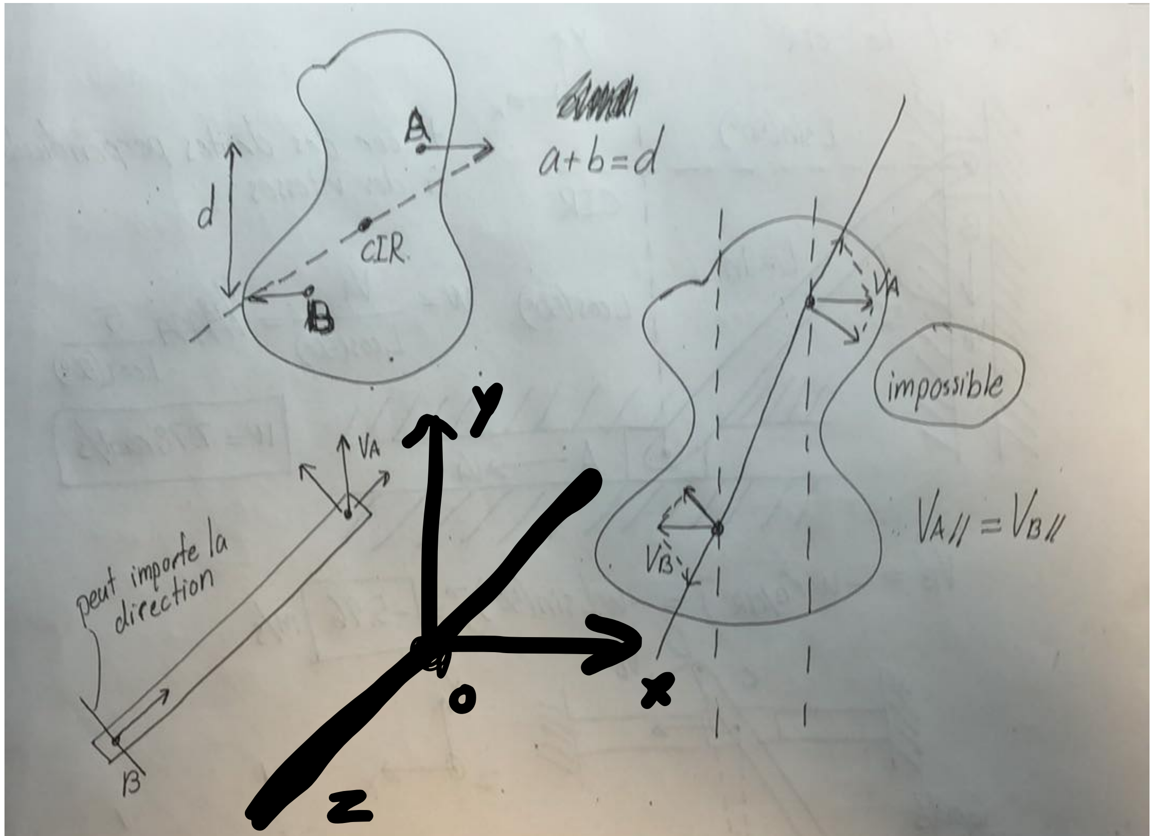
terre qui tourne autour
du soleil et lui-même

donc chaque zone de
1 à 4 va avoir jour
pendant qu'elle est ~~face~~
au soleil et nuit pour
le reste

quand terre fait 2π autour
du soleil => 1 an



à un instant
précis peut faire comme
si tout tournait autour
du point C
à cet instant la vitesse de C est nulle (0)



$$\sum M_o = I_o \vec{\alpha}$$

quand I est constant ou quand c par rapport a un point avec un axe qui le traverse perpendiculairement

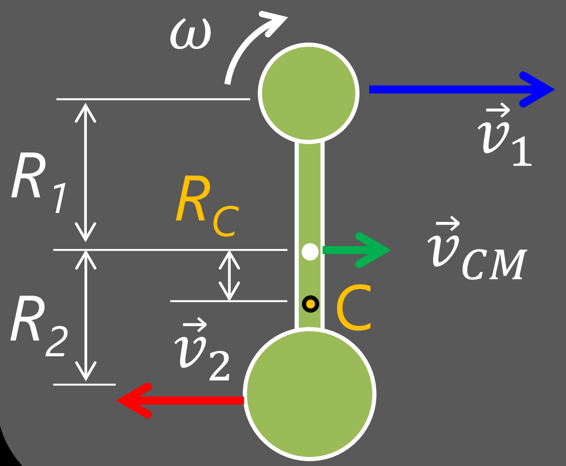
aussi

Plan de la semaine

- **Cinématique du corps rigide dans le plan**
  - Décomposition translation-rotation
  - **Centre instantané de rotation**
  - Roulement sans glissement
- Cinétique du corps rigide dans le plan
  - Dynamique de rotation (2e loi de Newton)

Le mouvement plan est une succession de rotations pures autour d'un centre qui change à chaque instant…

Référentiel de « l'espace »



Prenons un point situé à une distance R_C sous le CM de l'haltère…

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{CM} + \vec{v}_{C/CM} = (v_{CM} - \omega R_C)\vec{\imath}$$

Qu'arrive-t-il si $R_C = v_{CM}/\omega$?

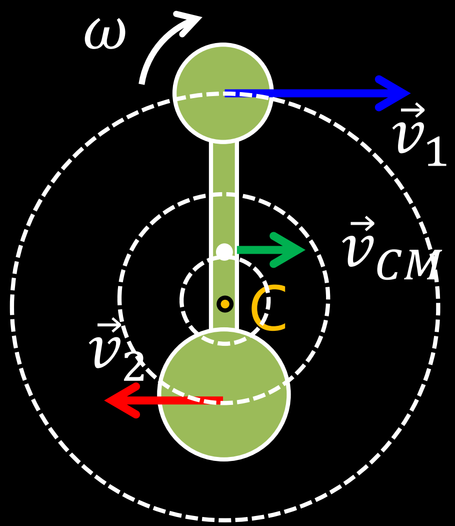
La vitesse de C est nulle <u>à cet instant</u> !

<u>À cet instant</u>, c'est comme si l'haltère tournait instantanément autour du point C !

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_C + \vec{v}_{1/C} = \left(0 + \omega r_{1/C}\right)\vec{\imath} = \omega(R_1 + R_C)\vec{\imath}$$

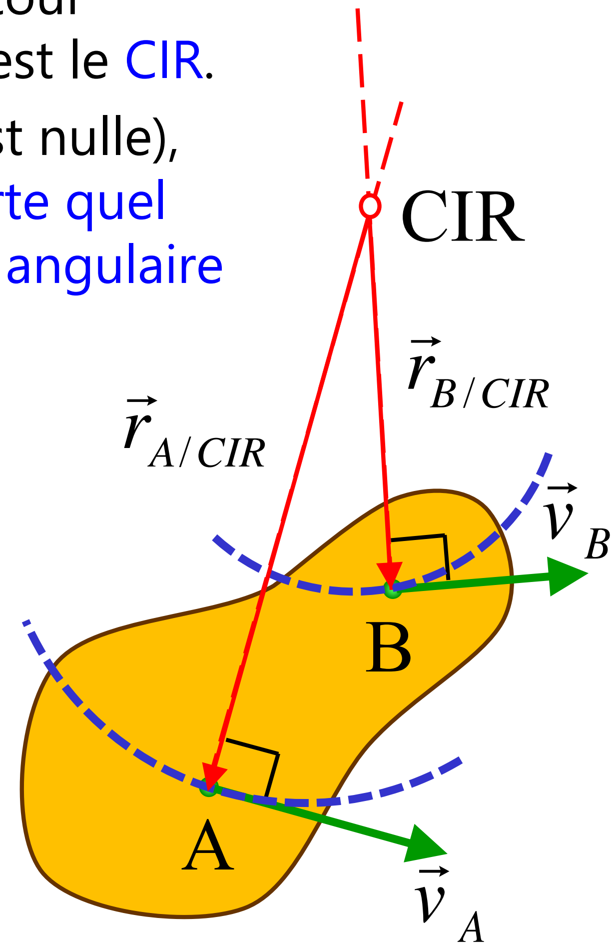
$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_C + \vec{v}_{CM/C} = \left(0 + \omega r_{CM/C}\right)\vec{\imath} = \omega R_C\vec{\imath}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_C + \vec{v}_{2/C} = \left(0 - \omega r_{2/C}\right)\vec{\imath} = -\omega(R_2 - R_C)\vec{\imath}$$



Centre instantané de rotation (CIR)

- À chaque instant, il existe un point du plan autour duquel le corps rigide est en rotation pure : c'est le CIR.
- À cet instant, le CIR est immobile (sa vitesse est nulle), ce qui permet d'exprimer la vitesse de n'importe quel point du corps rigide en fonction de la vitesse angulaire et de la distance qui le sépare du CIR.



$$\vec{v}_C = 0$$

$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{r_{A/CIR}} = \frac{v_B}{r_{B/CIR}}}$$

Remarques

1. Le CIR change à chaque instant ;
2. La vitesse d'un point du corps rigide est toujours perpendiculaire au vecteur rayon qui joint le CIR au point en question.

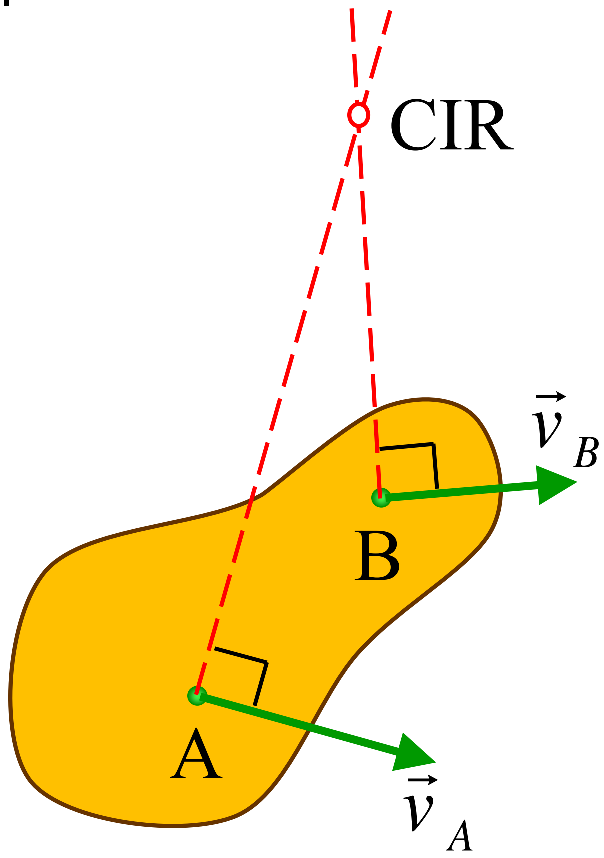
Comment identifier le CIR ?

Pour identifier le CIR d'un corps rigide, il faut connaître l'orientation des vitesses de deux points du corps.

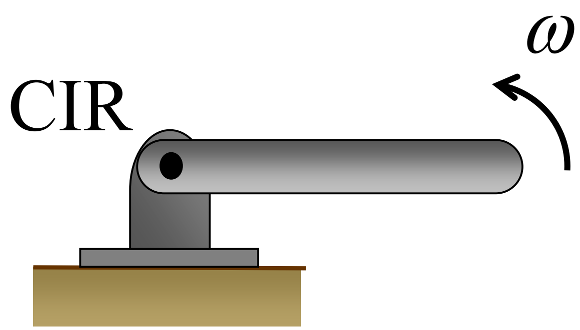
Procédure d'identification du CIR

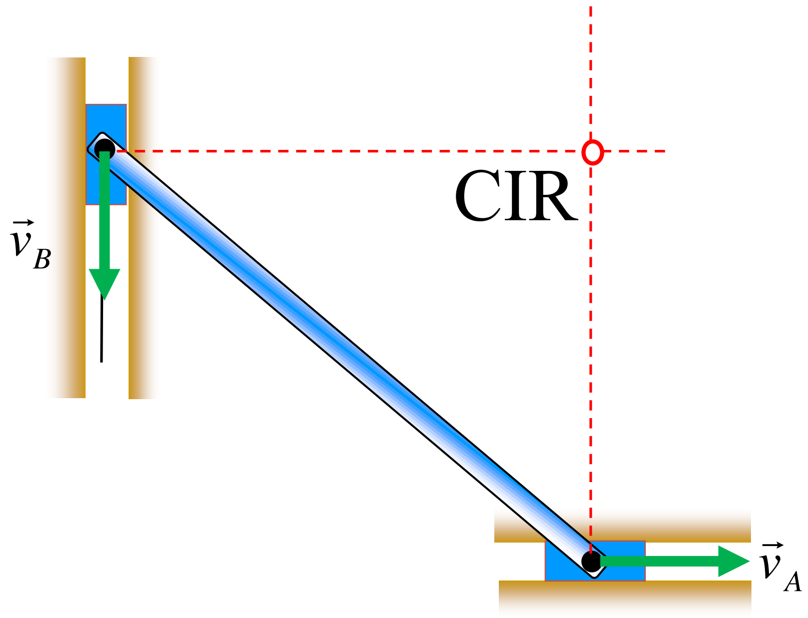
1. Tracer les droites perpendiculaires aux deux vitesses connues qui passent par les points associés à ces vitesses ;
2. Le CIR se trouve au croisement de ces droites perpendiculaires.

Le CIR n'est pas nécessairement situé sur le corps rigide.



Où est le CIR ?





Tige en rotation autour d'un pivot

La tige est forcée de tourner autour du pivot immobile.

Le CIR est donc le pivot.

Tige guidée par deux manchons

On connaît les directions des vitesses des extrémités de la tige fixées sur les manchons, ce qui permet de déterminer la position du CIR.

Exemple 2 – Tige guidée par ses extrémités
Solution par le CIR

1. On trouve la position du CIR en traçant les droites perpendiculaires aux vitesses de A et de B ;

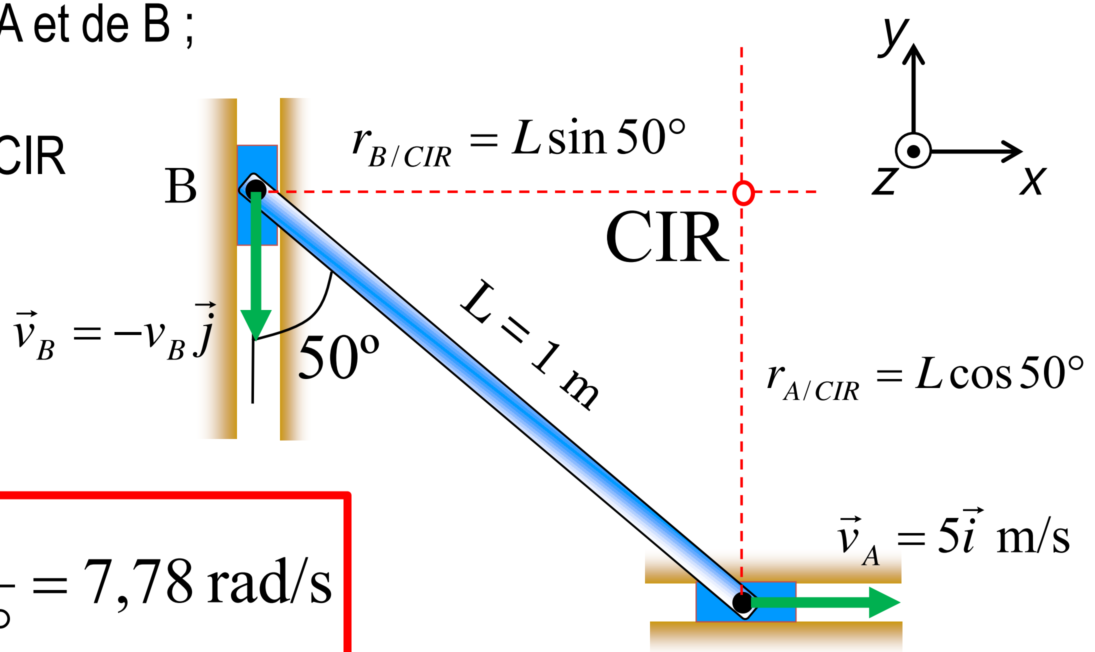
2. On calcule les distances entre le CIR et les points A et B (géométrie) ;

3. On détermine la vitesse angulaire de la tige ;

$$\boxed{\omega = \frac{v_A}{L\cos 50°} = \frac{5}{1\cdot\cos 50°} = 7{,}78\ \text{rad/s}}$$

4. On détermine le vecteur vitesse de B.

$$\boxed{\vec{v}_B = -\omega r_{B/CIR}\vec{j} = -\omega L\sin 50°\,\vec{j} = -5{,}96\,\vec{j}\ \text{rad/s}}$$



Mêmes résultats !
À vous de choisir la méthode la plus efficace…

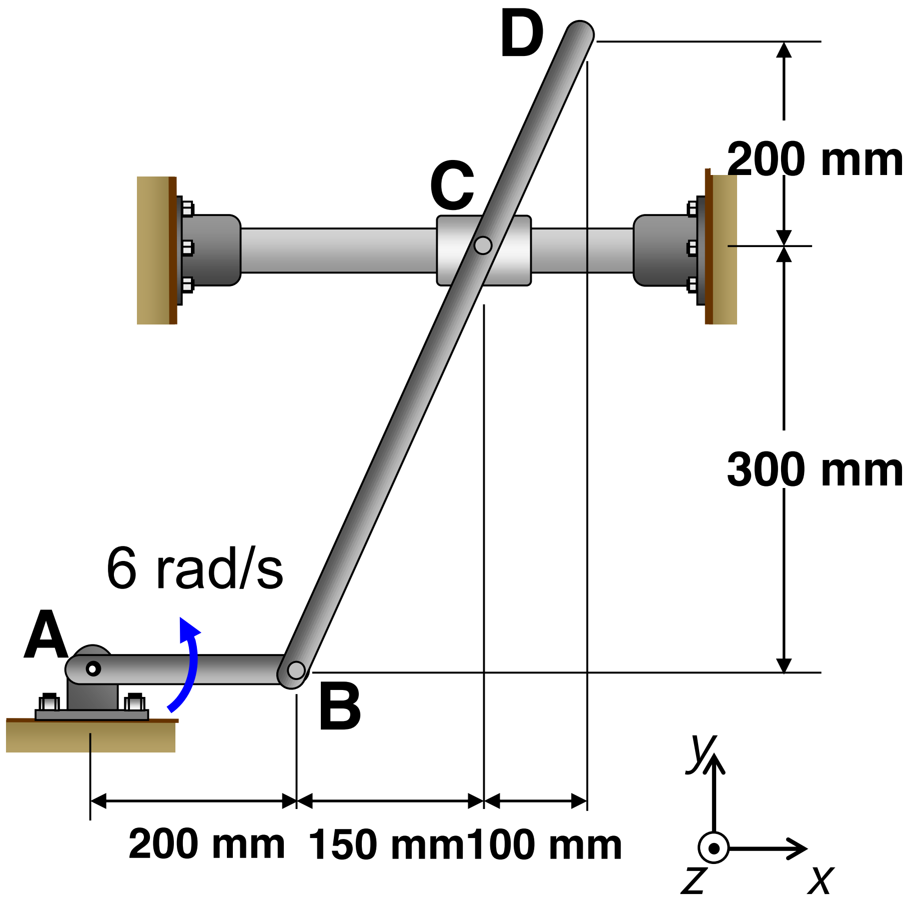
Quiz

La barre AB tourne dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire de 6 rad/s.
Déterminez le module de la vitesse du point D.

Vrai ou faux.
La vitesse angulaire de l'ensemble ABCD est 6 rad/s en sens antihoraire.

A : Vrai

B : Faux



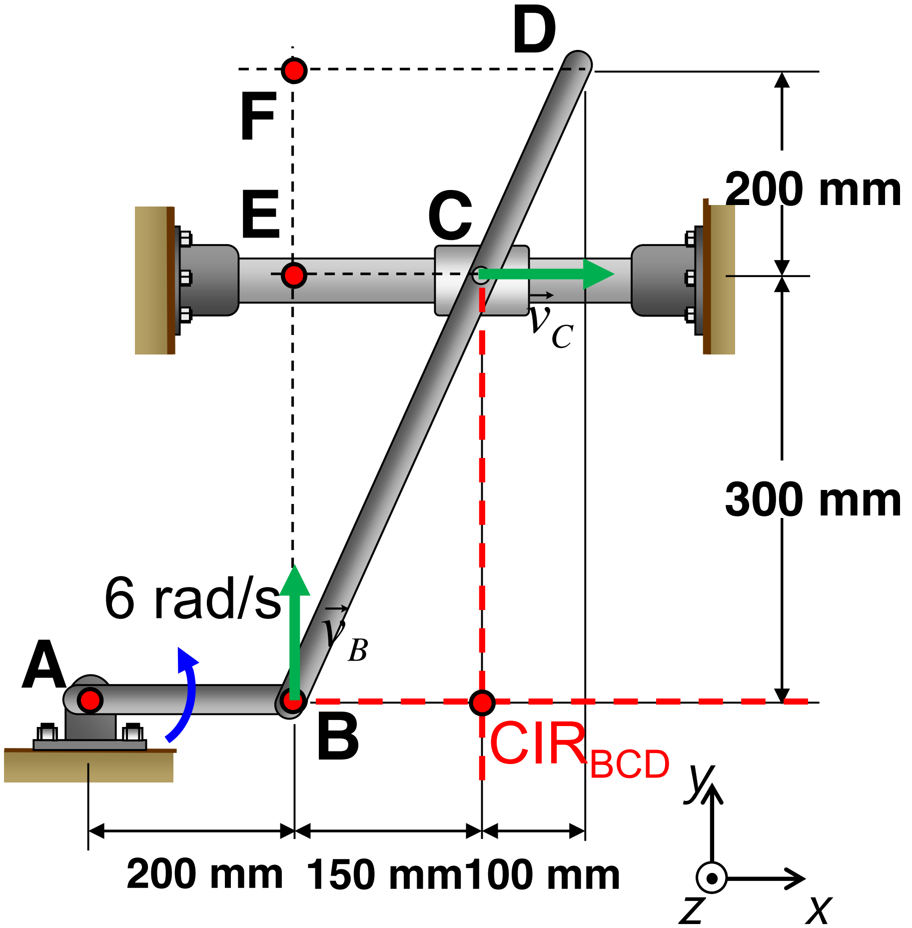
AB et BCD sont deux corps rigides distincts.
On ne peut pas supposer que $\omega_{AB} = \omega_{BCD}$.
D'ailleurs, AB et BCD n'ont pas le même CIR…

Quiz

La barre AB tourne dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire de 6 rad/s.
Déterminez le module de la vitesse du point D.

Où est le CIR de la tige BCD ?

- **A : Au point A**
- **B : Au point B**
- **C : Au point E**
- **D : Au point F**
- **E : Aucune de ces réponses**



Attention, il faut trouver le point de croisement des droites perpendiculaires aux vitesses des points sur l'objet.

Exemple 3 – Deux tiges et un manchon

La barre AB tourne dans le sens antihoraire avec une vitesse angulaire de 6 rad/s. Déterminez le module de la vitesse du point D.

Stratégie pour calculer la vitesse du point D

1. Situer le CIR de la tige BCD ;
2. Exprimer la vitesse de B en fonction de ω_{AB} et de ω_{BCD} afin de calculer ω_{BCD} ;

$$v_B = \omega_{AB} r_{AB} = 6 \cdot 0{,}200 = 1{,}2 \text{ m/s}$$

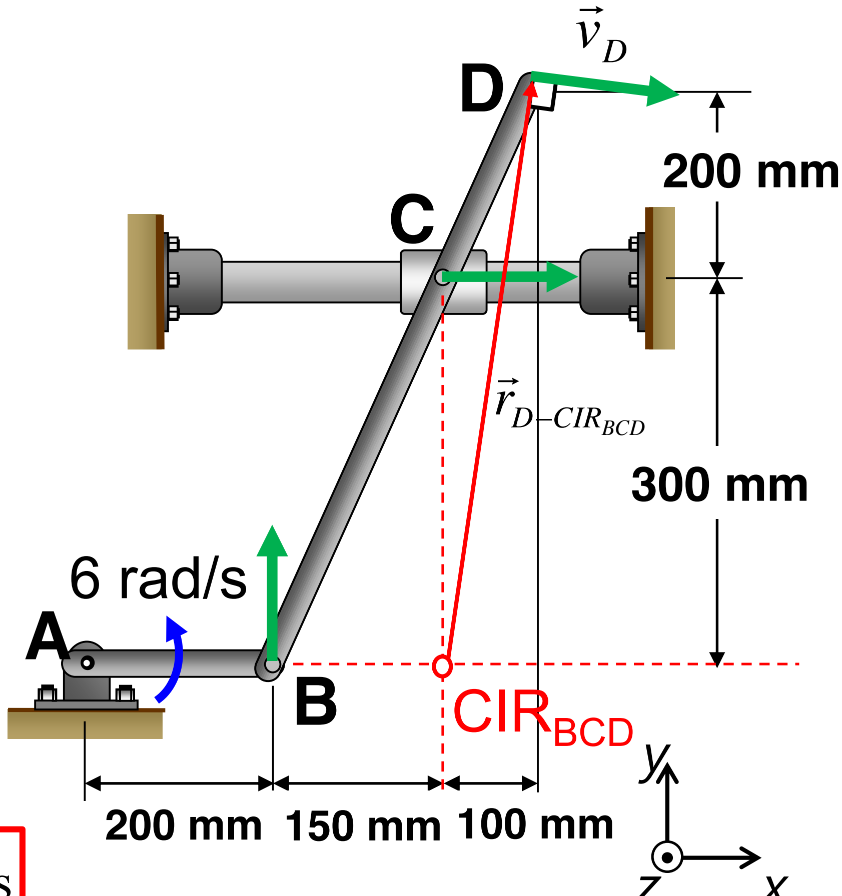
$$v_B = \omega_{BCD} r_{B-CIR_{BCD}}$$

$$\Rightarrow \omega_{BCD} = \frac{v_B}{r_{B-CIR_{BCD}}} = \frac{1{,}2}{0{,}150} = 8{,}00 \text{ rad/s}$$

3. Calculer la vitesse de D.

$$v_D = \omega_{BCD} r_{D-CIR_{BCD}}$$

$$\boxed{v_D = 8{,}00 \cdot \sqrt{0{,}100^2 + 0{,}500^2} = 4{,}08 \text{ m/s}}$$



Application – Biomécanique du genou

https://www.youtube.com/watch?v=UtdSJZn62H8&list=PL2XZgFSu6J2sMVjGX0ck__tQGqfvp6rxn

Lorsque l'on conçoit une prothèse, il faut s'assurer qu'elle ne déstabilise pas l'articulation pour éviter des chirurgies correctives suite à son implantation.

Un des éléments étudiés lors de la conception est la centrode de la prothèse lorsqu'elle bouge par rapport à l'articulation.

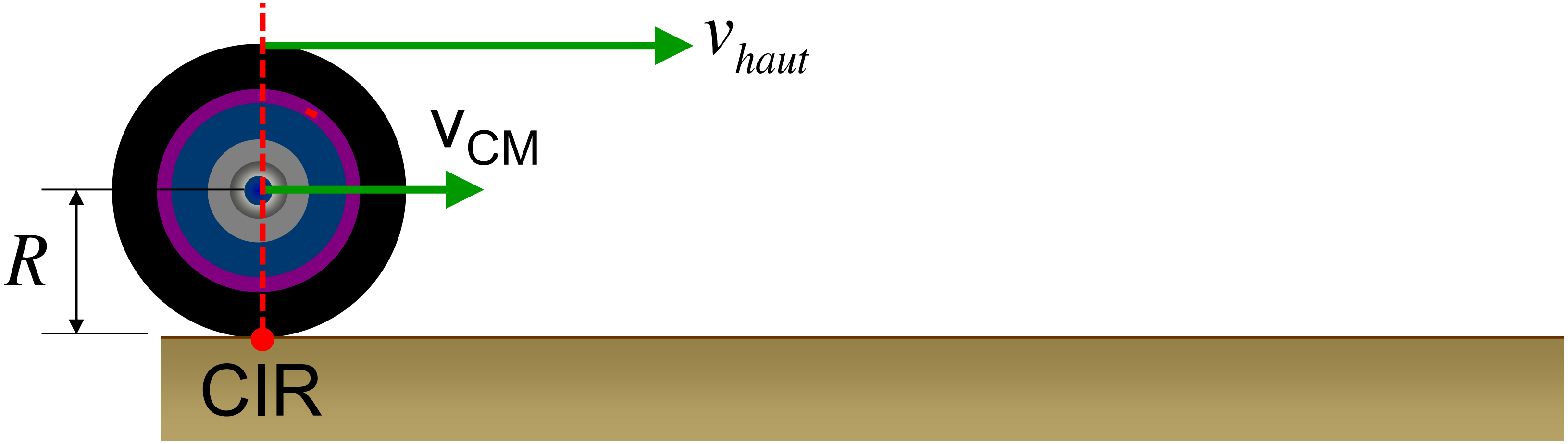
La centrode est la trajectoire du centre instantané de rotation.

Plan de la semaine

- **Cinématique du corps rigide dans le plan**
  - Décomposition translation-rotation
  - Centre instantané de rotation
  - **Roulement sans glissement**
- Cinétique du corps rigide dans le plan
  - Dynamique de rotation (2e loi de Newton)

Roulement sans glissement

Le CM d'une roue de rayon R se déplace horizontalement à une vitesse v_{CM}. Si la roue ne glisse pas en roulant, où est son CIR ? Quelle est la relation entre v_{CM} et la vitesse angulaire ω de la roue ?



Puisque le roue ne glisse pas, le point de contact avec le sol est nécessairement immobile : c'est donc le CIR de la roue !

$$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$

$$\boxed{v_{haut} = 2\omega R = 2v_{CM}}$$

Roue qui roule sans glisser
Décomposition translation-rotation

Point de vue CIR : la roue tourne autour du point de contact au sol.

Point de vue décomposition : translation du CM + rotation autour du CM

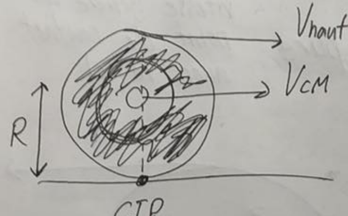
Si moment varie dans le temps $\Longrightarrow \sum \vec{M}_o = \dfrac{d\vec{H}_o}{dt}$

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}} \qquad \boxed{\sum \vec{M}_{CM} = I_{CM}\vec{\alpha}}$$

masse — moment d'inertie

$\vec{\alpha}$: accélération en rotation

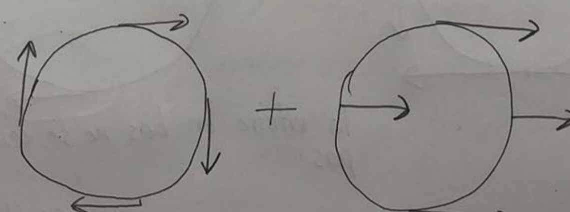
tourne plus vite à cause de α



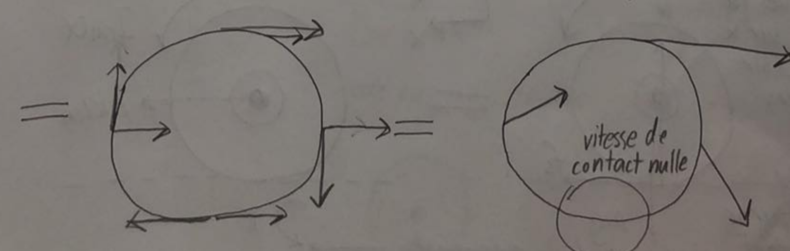
$V_{CM} = WR$

$V_{haut} = 2WR = 2V_{CM}$

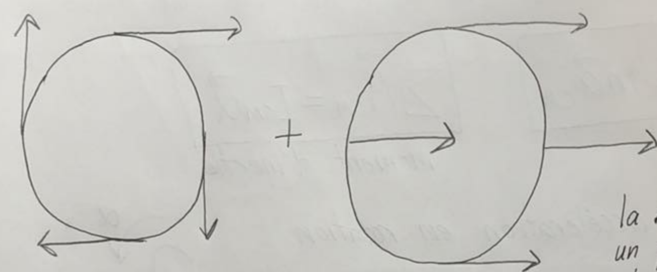
Roulement sans glissement $=$ Rotation pure + Translation pure



Rotation pure — translation pure



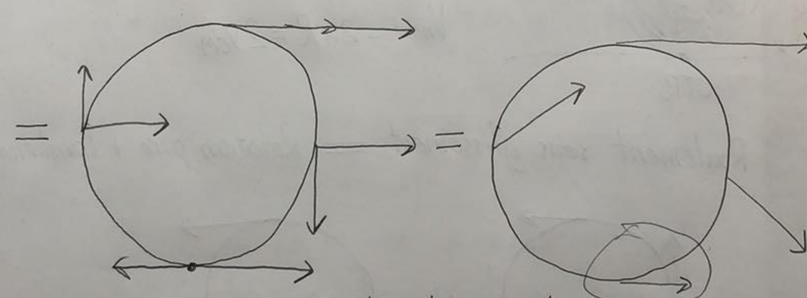
Roulement avec glissement



Rotation pure

Translation pure

la roue va glisser un peu selon la vitesse généré au point de contact avec le sol



la vitesse en bas ne se compense pas

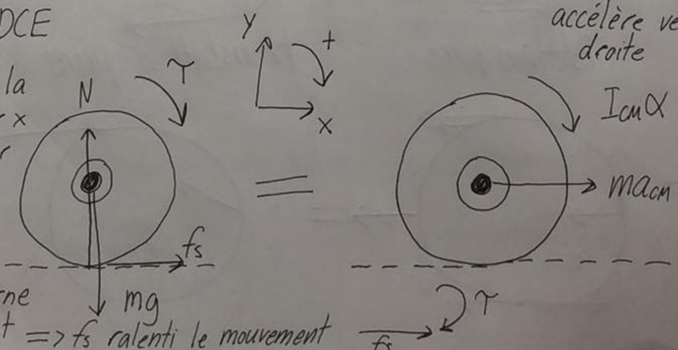
DCL-DCE

accélère vers la droite

pour que la bouge sur x il doit avoir des forces

$f_s \rightarrow$

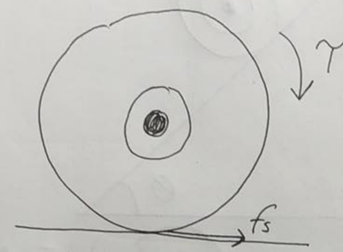
car quand la roue tourne



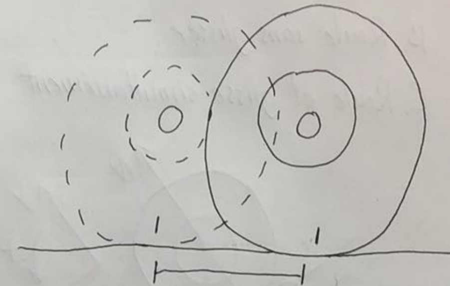
mouvement $\Rightarrow f_s$ ralenti le mouvement

Si Ø glissement $\Rightarrow$ frottement statique f_s

Si glissement $\Rightarrow$ frottement cinétique f_K



pas de mouvement de translation vers la droite



va glisser une certaine distance

$$\Sigma F_x = m a_{CM} \Rightarrow f_s = m a_{CM}$$

$$\Sigma M_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow \tau - f_s R = I_{CM}\alpha$$

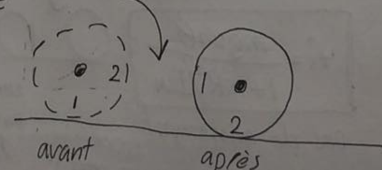
f_s va générer un moment qui va venir contrer τ

$$V_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$$

$$a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}$$

le moment ne va pas faire déplacer la roue vers la droite, mais la force f_s

Si ça glisse pas la roue va juste tourner sur lui-même et avance



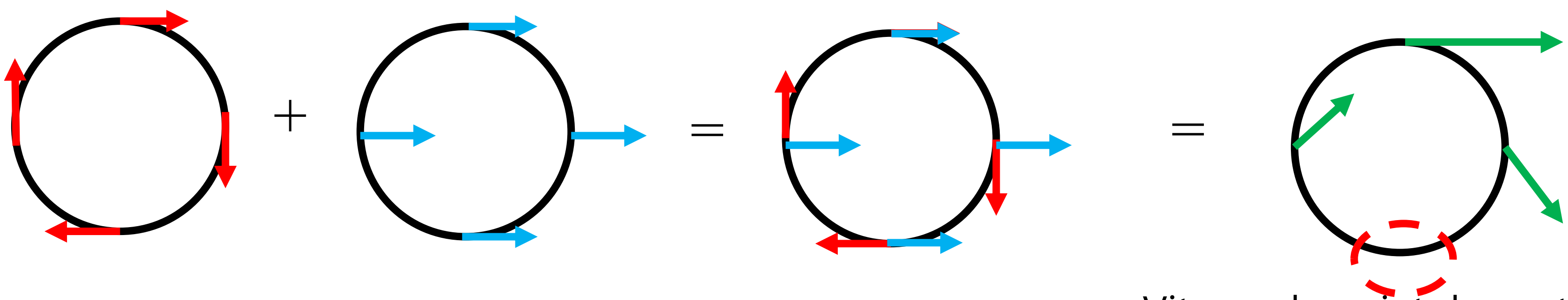
pas de frottement

$\Downarrow$

pas de déplacement

Roulement sans glissement VS roulement avec glissement

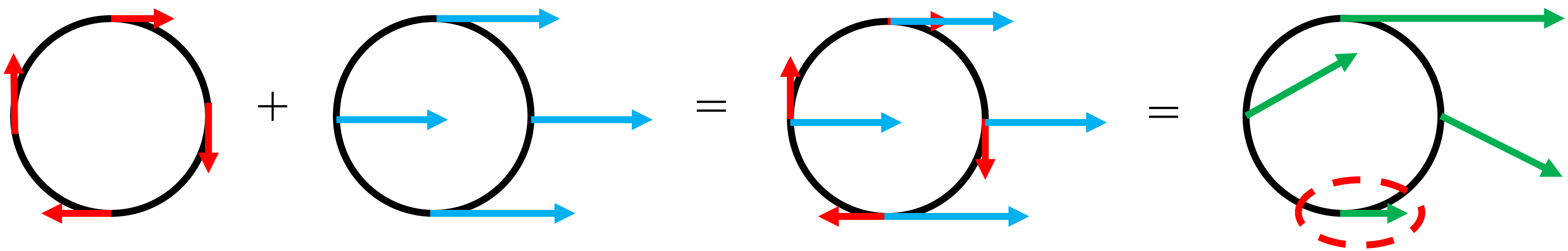
Roulement sans glissement



Rotation pure **Translation pure**

Vitesse du point de contact nulle
Le point de contact s'appuie sur le sol sans glisser.

Roulement avec glissement



Rotation pure **Translation pure**

Vitesse du point de contact non nulle
Le point de contact glisse sur le sol.

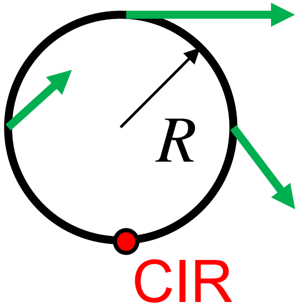
Roulement sans glissement VS roulement avec glissement

Roulement sans glissement

Pour qu'il n'y ait pas de glissement, il doit y avoir des relations précises entre le mouvement de translation et de rotation de la roue.

Conditions de roulement sans glissement

$$\Delta r_{CM} = R\Delta\theta \qquad v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$$

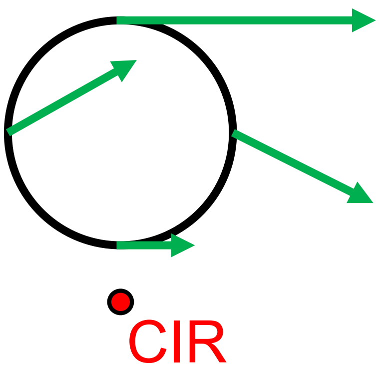


Le point de contact ne glisse pas sur le sol : il y a **frottement statique**.

Roulement avec glissement

Il n'y a **pas de relation précise** entre les variables de translation et de rotation de la roue.

$\Delta r_{CM} \quad v_{CM} \quad a_{CM}$ indépendants de $\Delta\theta \quad \omega \quad \alpha$

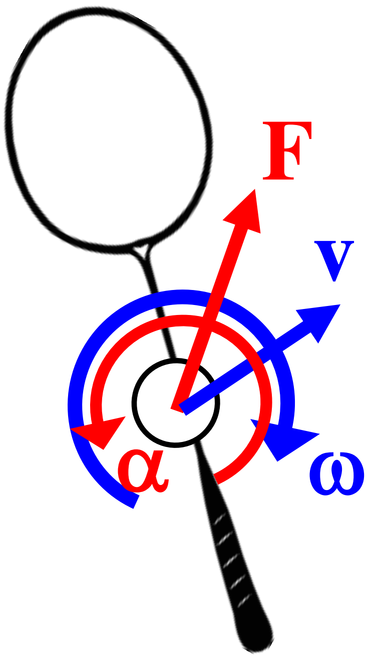


Le point de contact glisse sur le sol : il y a **frottement cinétique**.

Plan de la semaine

- Cinématique du corps rigide dans le plan
  - Décomposition translation-rotation
  - Centre instantané de rotation
  - Roulement sans glissement
- **Cinétique du corps rigide dans le plan**
  - **Dynamique de rotation (2^{e} loi de Newton)**

La dynamique de rotation



v : Vitesse du centre de masse
ω : Vitesse angulaire
α : Accélération angulaire
F : Force résultante

Comme pour la vitesse angulaire, un corps rigide possède une seule accélération angulaire.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\sum \vec{M}_O = I_O\vec{\alpha}$$

Masse
Résistance d'un corps à modifier son état de translation (inertie).

Moment d'inertie
Résistance d'un objet à modifier son état de rotation.

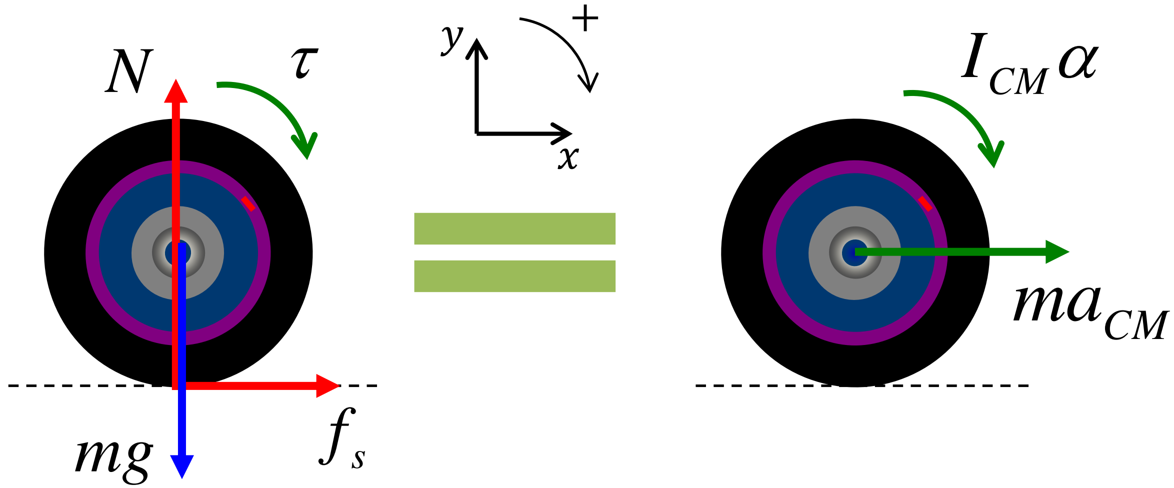
Votre boîte à outils s'élargit…

	Lois générales	Loi de conservation
Translation (vectorielle)	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{L}}{dt}$	$\vec{L}_1 = \vec{L}_2$
Rotation (vectorielle)	$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \vec{\alpha}$ $\quad \sum \vec{M}_O = \frac{d\vec{H}_O}{dt}$	$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$
Translation + rotation (scalaire)	$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$ $E = T + V$ $\quad$ Cours 12 $T = T_{CM} + T_{rot/CM}$	$E_1 = E_2$

Exemple 4 – Un roue qui accélère

La roue d'une voiture (rayon R, moment d'inertie I_{CM}) accélère vers la droite sous l'effet d'un couple externe τ produit par le moteur. Quelle est l'accélération du CM de la roue qui en résulte si la roue ne glisse pas ?

DCL-DCE de la roue



Conditions de roulement sans glissement

$$v_{CM} = \omega R$$

$$a_{CM} = \alpha R$$

$$\sum F_x = ma_{CM} \Rightarrow f_s = ma_{CM}$$

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow \tau - f_s R = I_{CM}\alpha$$

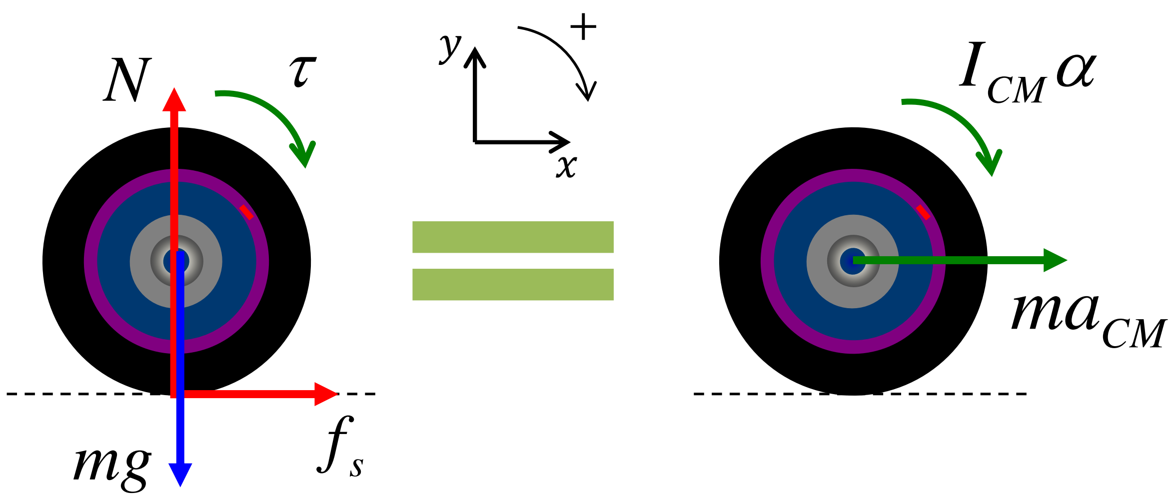
$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}}$$

Qu'est-ce qui détermine si la roue glisse ou non ?

Exemple 4 – Un roue qui accélère

Quel est le coefficient de frottement statique minimal
entre la roue et le sol qui fait que la roue ne glisse pas ?

DCL-DCE de la roue



$$\boxed{f_s = ma_{CM}}$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}}$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

Coefficient de frottement statique minimal

La roue est sur le point de glisser.

$$f_s = f_{s,\max} = \mu_{s,\min} N$$

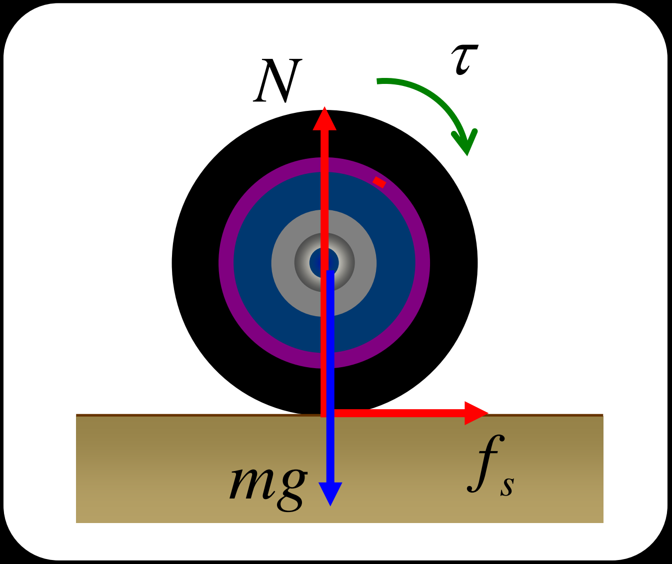
$$\Rightarrow \quad \mu_{s,\min} = \frac{f_s}{N} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu_{s,\min} = \frac{ma_{CM}}{mg} = \frac{\tau R}{g\left(I_{CM} + mR^2\right)}}$$

Quiz

$$\sum F_x = f_s = ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{\tau R}{I_{CM} + mR^2}$$

$$\mu_{s,\min} = \frac{a_{CM}}{g} = \frac{\tau R}{g\left(I_{CM} + mR^2\right)}$$



Vrai ou faux.
Lorsqu'une voiture accélère (en roulant sans glisser), la force de frottement entre les pneus et le sol effectue un travail positif.

A : Vrai

B : Faux

Le frottement est statique, car il s'applique en un point qui est immobile par rapport au sol. Puisque ce point ne se déplace pas, le travail fait par la force de frottement est nul. Le frottement est nécessaire pour accélérer, mais ce n'est pas lui qui fournit l'énergie : c'est le couple du moteur.

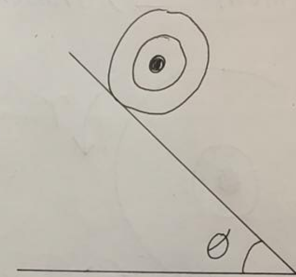
Une roue est maintenue immobile en haut d'un plan incliné. On lâche ensuite la roue: elle est libre de descendre le plan.

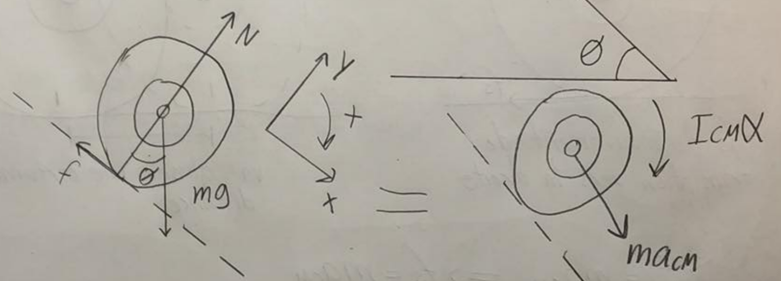
A. Glisse sans rouler

B. Roule sans glisser

C. Roule et glisse simultanément

R, m, I_{CM}





$$\sum F_x = ma_{CM} \Rightarrow mg\sin\theta - f = ma_{CM}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha \Rightarrow Rf = I_{CM}\alpha$$

Glisse sans roule

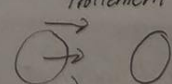
$w = 0 \quad \alpha = 0$

si $\boxed{f_k = 0}$

$Rf_K = I_{CM}\alpha = 0$

$\boxed{\mu_K = 0}$

surface sans frottement



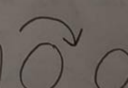
Roule sans glisse

$V_{CM} = wR \quad a_{CM} = \alpha R$

$$a_{CM} = \alpha R = \frac{R^2 f_s}{I_{CM}}$$

$$mg\sin\theta - f_s = \frac{mR^2}{I_{CM}} f_s$$

$$\boxed{f_s = \frac{mg\sin\theta}{1 + mR^2/I_{CM}}}$$



pas de glissement

$$\mu_s \geq \mu_{s\,min} = \frac{f_s}{N} = \frac{\tan\theta}{1 + mR^2/I_{CM}}$$

surface doit générer suffisamment de frottement

Roule et glisse

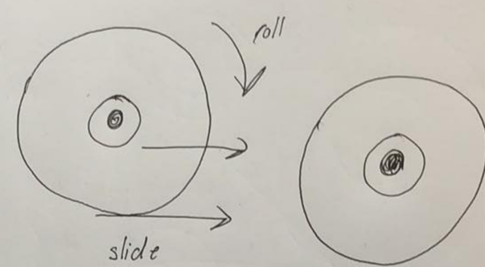
$f_K = U_K N = U_K mg\cos\theta$

$a_{CM} = g(\sin\theta - U_K\cos\theta)$

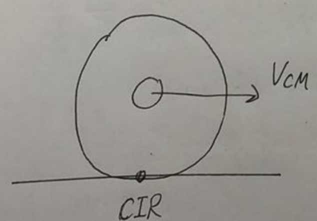
$\alpha = \dfrac{U_K mgR\cos\theta}{I_{CM}}$

$U_s < U_{s\,min}$

La surface ne génère pas suffisamment de frottement



Somme des moments par rapport à autre point que CM
- oui, objet doit être en rotation pure autour de ce point
- moment d'inertie de l'objet par rapport à ce point



$\Sigma M_{CM} = I_{CM}\alpha$ ou $\Sigma M_{CIR} = I_{CIR}\alpha$

$I_{CIR} = I_{CM} + md^2_{CM/CIR}$

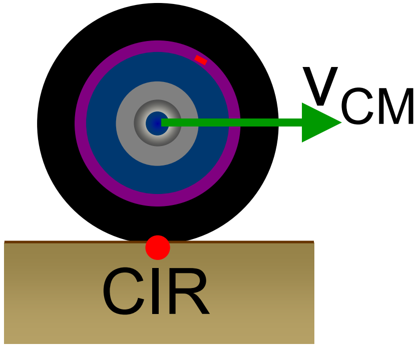
Point de référence de la somme des moments

Dans le problème de la roue accélérée par une couple, la somme des moments a été calculée par rapport au CM.

Puis-je calculer la somme des moments par rapport à un autre point ?

Oui, mais l'objet doit être en rotation pure autour de ce point.
Il faut alors utiliser le moment d'inertie de l'objet par rapport à ce point.

Ex. : Une roue qui roule sans glisser.



Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha$$

OU

Par rapport au CIR
(La roue est en rotation pure autour du CIR.)

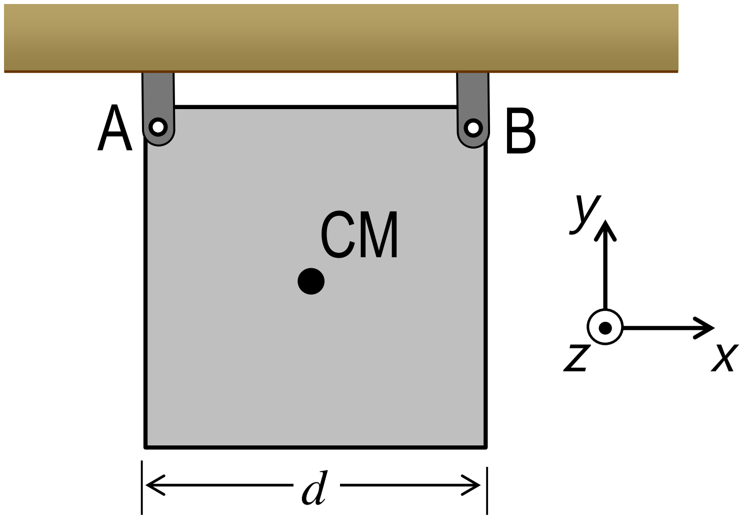
$$\sum M_{CIR} = I_{CIR}\alpha$$

$$I_{CIR} = I_{CM} + mr_{CM/CIR}^2$$

Exemple 5 – Un pivot en moins

Les coins supérieurs d'une plaque homogène carrée de 1 m de côté et de 15 kg sont fixés aux pivots A et B. Soudainement, le pivot A se rompt et la plaque se met à tourner autour du pivot B sous l'effet de son poids. Juste après le bris du pivot A, déterminez l'accélération angulaire de la plaque.

N.B. Négligez tout frottement.



Information connue

$m = 15\,\text{kg} \quad d = 1\,\text{m}$

$$I_{CM} = \frac{m}{12}\left(d^2 + d^2\right) = \frac{md^2}{6}$$

Contrainte du mouvement

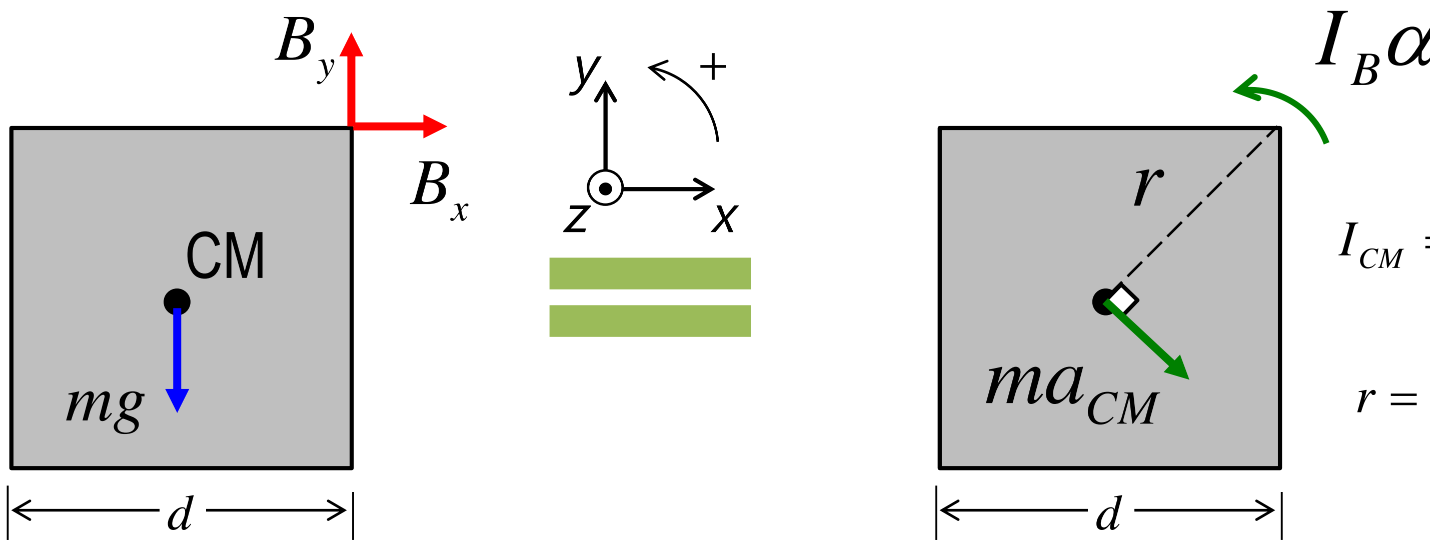
La plaque est en mouvement circulaire autour du pivot B juste après que A se soit brisé.

Stratégie de résolution

Faire le DCL-DCE de la plaque.
Faire une somme des forces et une somme des moments par rapport au point B (pivot).

Exemple 5 – Un pivot en moins

DCL-DCE de la plaque juste après que A se brise.



$$I_{CM} = \frac{md^2}{6}$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2}d$$

Mouvement circulaire autour de B : l'accélération du CM est perpendiculaire au rayon qui relie B au CM.

A. Pour trouver l'accélération angulaire, on fait la somme des moments par rapport à B.

$$\sum M_B = I_B\alpha \quad \Rightarrow \quad mg\frac{d}{2} = \left(I_{CM} + mr^2\right)\alpha \quad \Rightarrow \quad mg\frac{d}{2} = \left(\frac{md^2}{6} + m\frac{d^2}{2}\right)\alpha$$

Utiliser I_B.

$$\boxed{\alpha = \frac{3g}{4d} = \frac{3\cdot 9{,}81}{4\cdot 1} = 7{,}36\ \text{rad/s}^2}$$

Synthèse du cours

Mouvement plan d'un corps rigide

Décomposition translation + rotation

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$$

Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Centre instantané de rotation (CIR)

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

À chaque instant, le corps semble être en rotation pure autour du CIR.

Roulement sans glissement

$$v_{CM} = \omega R \qquad a_{CM} = \alpha R$$

→ f_s

Roulement avec glissement

La translation du CM est indépendante de la rotation autour du CM.

Glissement sans roulement

$$\omega = \alpha = 0$$

→ f_k

Dynamique de rotation

Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM} \alpha$$

Par rapport au centre instantané de rotation

$$\sum M_{CIR} = I_{CIR} \alpha$$