PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Examen final
Hiver 2020

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

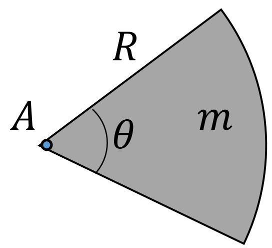
Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Soit une pièce de masse m sous forme d'une portion de disque homogène de rayon R comme représentée sur la figure ci-contre.

I. À partir des données du formulaire des moments d'inertie, déduire l'expression du moment d'inertie I_A de cette pièce par rapport à un axe perpendiculaire à la page et qui passe par le point A. (10 points)

II. Sachant que le moment d'inertie de cette pièce par rapport à un axe perpendiculaire à la page et passant pas son centre de masse est de $I_{CM} = 0.01\, mR^2$, déterminer la distance d entre le point A et le centre de masse de la pièce en fonction de R. (10 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

B. Une roue de rayon r se déplace avec une vitesse v sur une trajectoire circulaire de rayon R centrée au point fixe O. La roue roule sans glisser sur une pièce de bois fixe. La figure ci-dessous, montre deux configurations différentes de pièces de bois.

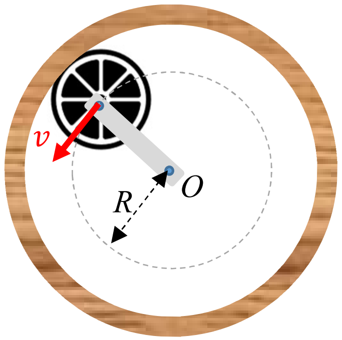
Faire une comparaison entre ces deux configurations concernant :

I. L'énergie cinétique de la roue. (10 points)

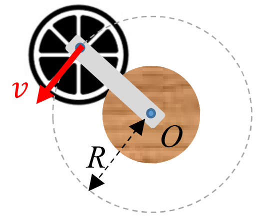
II. La quantité de mouvement de la roue. (10 points)

III. Le moment cinétique de la roue par rapport à O. (10 points)

Configuration 1



Configuration 2



Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

A. I: Si On considère le disque entier dont la pièce faisait partie, sa masse serait: $M = \dfrac{2\pi}{\theta} m$

et selon le formulaire, son moment d'inertie par rapport à A serait : $I_A^{disque} = \dfrac{1}{2} M R^2 = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2\pi}{\theta} m\right) R^2$

La fraction de la contribution de la pièce au moment d'inertie du disque est: $\dfrac{I_A}{I_A^{disque}} = \dfrac{\theta}{2\pi}$

Alors le moment d'inertie de la pièce est: $\boxed{I_A = \dfrac{1}{2} m R^2}$

A. II: Selon le théorème des axes parallèles: $I_A = I_{CM} + md^2$

$$\Longrightarrow d = \sqrt{\frac{I_A - I_{CM}}{m}} = \sqrt{\frac{0{,}5\, mR^2 - 0{,}01 mR^2}{m}} \quad \Longrightarrow \boxed{d = 0{,}7\, R}$$

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

B. I: L'énergie cinétique de la roue est donnée par : $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{CIR}\omega^2$

Dans les deux configurations, la roue a la même vitesse v et le même module de la vitesse angulaire : $\omega = \frac{v}{r}$

Donc l'énergie cinétique est la même dans les deux configurations $\boxed{T_1 = T_2}$

B. II: La quantité de mouvement de la roue ne dépond que de sa masse et de sa vitesse. Elle est donc la même dans les deux configurations $\boxed{\vec{L}_1 = \vec{L}_2}$

B. III: Le moment cinétique de la roue est donné par:

$$\vec{H} = \vec{R} \times (m\vec{v}) + I_{CM}\vec{\omega}$$

Le premier terme est le même dans les deux configurations (même module et sortant de la page).

Le deuxième terme est différent dans les deux configurations car dans le cas 1, $\vec{\omega}$ est dans le sens antihoraire (entrant dans la page) alors qu'elle est dans le sens horaire dans le cas 2 (sortant de la page).

$$\boxed{H_1 < H_2}$$

Question 2 (50 points)

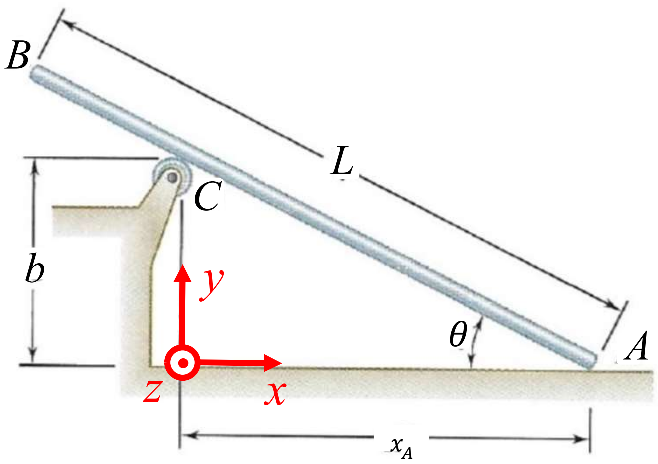
Une tige AB se déplace sur une roulette en C tandis qu'on fait glisser son extrémité A sur le plan horizontal avec une vitesse constante $v_A = 0{,}1 \text{ m/s}$ dirigée vers la droite. À l'instant initial $t = 0$, le point A se trouve à l'origine du système d'axes et la tige est à la position verticale. Le rayon r de la roulette C est négligeable devant la longueur L de la tige.

A. Exprimer les coordonnées x_{CIR} et y_{CIR} du CIR de la tige AB en fonction de x_A et b. x_A et b sont les distances que font respectivement les points A et C avec l'origine du système axes. (15 points)

B. Donner l'expression du vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ de la tige AB en fonction de x_A , b et v_A. (15 points)

C. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{v}_C$ de la tige au point C à l'instant $t_0 = 3\text{s}$? (10 points)
On donne : $L = 1 \text{ m}$ et $b = 40 \text{ cm}$.

D. Déterminer le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_C$ de la roulette en C à l'instant $t_0 = 3\text{s}$. (10 points)
On donne : le rayon de la roulette $r = 3\ cm$.



Q2 – Solution (1/2)

A. Les coordonnées du CIR: $\boxed{x_{CIR} = x_A}$

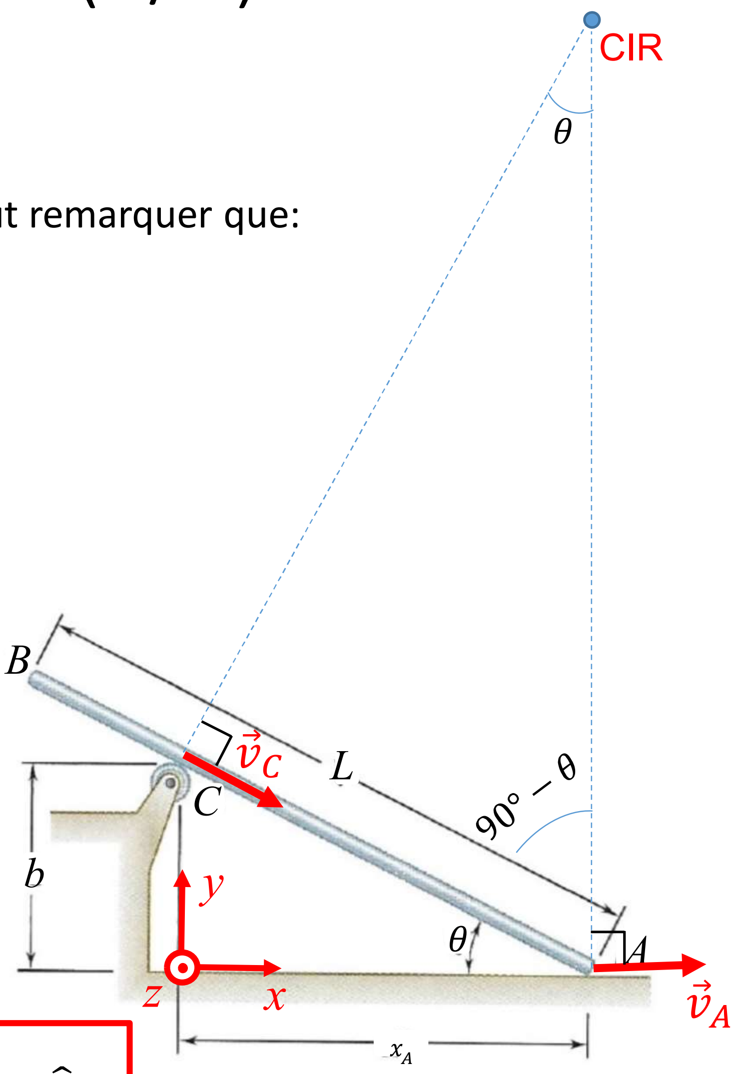
Pour y_{CIR}, en utilisant le triangle rectangle A-C-CIR, on peut remarquer que:

$$\sin\theta = \frac{\overline{AC}}{y_{CIR}} = \frac{\sqrt{b^2 + x_A^2}}{y_{CIR}}$$

D'un autre côté, du triangle OAC , on obtient:

$$\sin\theta = \frac{b}{\overline{AC}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + x_A^2}} = \frac{\sqrt{b^2 + x_A^2}}{y_{CIR}}$$

$$\boxed{\rightarrow y_{CIR} = \frac{b^2 + x_A^2}{b}}$$



B. Expression de $\vec{\omega}$: $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$

$$\omega = \frac{v_A}{r_{CIR/A}} = \frac{v_A}{y_{CIR}} = \frac{b v_A}{b^2 + x_A^2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = \frac{b v_A}{b^2 + x_A^2}\hat{k}}$$

Q2 – Solution (2/2)

C. Le vecteur vitesse $\vec{v}_c$ à $t = 3s$:

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/CIR} \qquad \text{avec:} \quad \vec{\omega} = \omega\hat{k} = \frac{bv_A}{b^2 + x_A^2}\hat{k} \quad \text{et:} \quad \vec{r}_{C/CIR} = (0 - x_{CIR})\hat{\imath} + (b - y_{CIR})\hat{\jmath}$$

$$\vec{v}_C = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -x_{CIR} & b - y_{CIR} & 0 \end{vmatrix} = (y_{CIR} - b)\omega\hat{\imath} - x_{CIR}\omega\hat{\jmath}$$

À $t = 3s$: $\quad x_A = 0{,}1 \times 3 = 0{,}3 \text{ m}, \quad x_{CIR} = 0{,}3 \text{ m}, \quad y_{CIR} = 0{,}625 \text{ m}$ et $\quad \omega = 0{,}16 \text{ rad/s}$

$$\boxed{\vec{v}_C = 0{,}036\,\hat{\imath} - 0{,}048\hat{\jmath} \ \ (\text{m/s})}$$

D. Le vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}_c$ à $t = 3s$: $\quad \vec{\omega}_C = -\frac{v_C}{r}\hat{k} = \frac{\sqrt{(0{,}036)^2 + (0{,}048)^2}}{0{,}03}\hat{k}(\text{rad/s})$

$$\boxed{\vec{\omega}_C = -2{,}00\,\hat{k}\ (\text{rad/s})}$$

Question 3 (50 points)

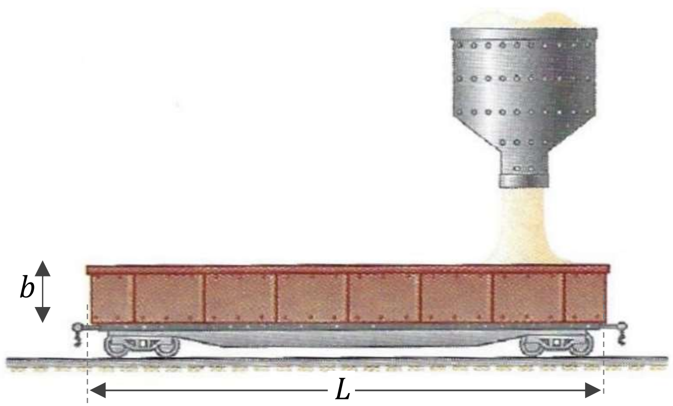
Un wagon vide de longueur $L = 50\ \mathrm{m}$ et de masse $m_0 = 30\ 000\ \mathrm{kg}$ se déplace librement sur une voie horizontale avec une vitesse v_0 initialement constante (dirigée vers la droite). Pendant son déplacement, le wagon passe sous un déversoir fixe qui le charge de liquide (voir la figure ci-dessous) au taux constant $\mu = 1500\ \mathrm{kg/s}$. La masse volumique du liquide est $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

La profondeur du wagon est $b = 2\ \mathrm{m}$ et sa largeur est $l = 3\ \mathrm{m}$ (dimension perpendiculaire à la page). On néglige tous les frottements.

Faire le DCL-DCE du wagon pendant son chargement. (10 points)

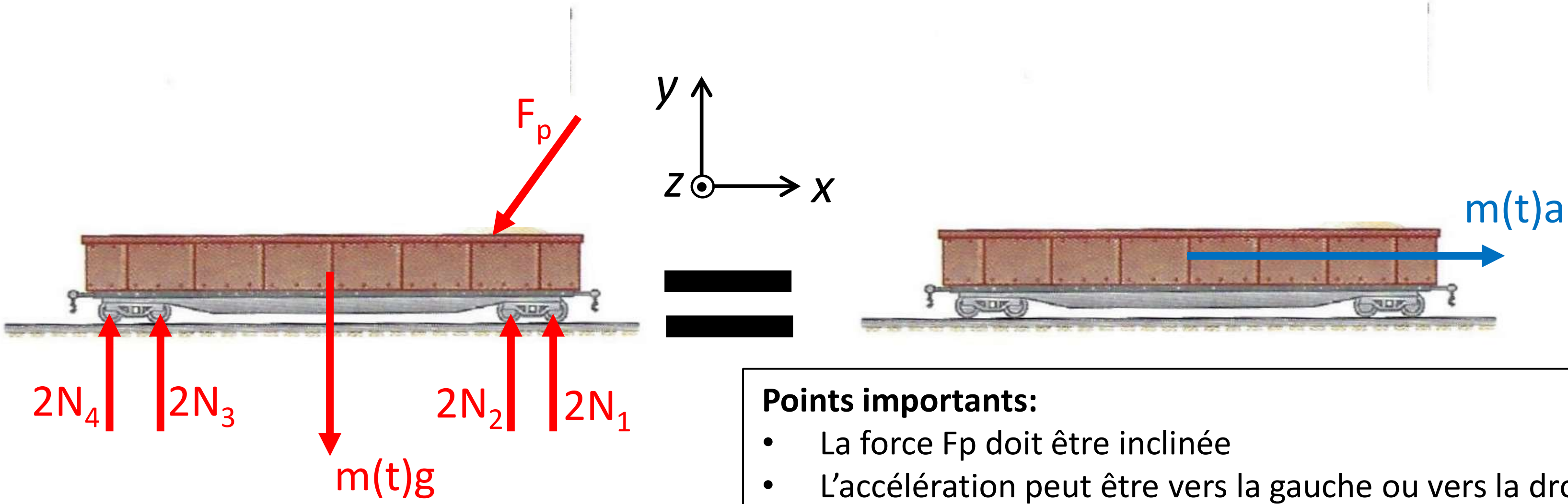
Sans faire d'application numérique, trouver l'expression de la vitesse du wagon $v(t)$ en fonction de v_0, m_0, μ et du temps t. On prend comme origine du temps ($t = 0$) l'instant du début du remplissage. (20 points)

Quelle devrait être la valeur de v_0 pour que le wagon soit rempli de liquide juste au moment où il quitte le déversoir? (20 points)



Q3 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE du wagon



Points importants:

- La force Fp doit être inclinée
- L'accélération peut être vers la gauche ou vers la droite pourvu qu'il y ait cohérence avec les équations.
- Le nombre de réactions du sol n'est pas important dans ce contexte, on peu mettre 4 ou 2 (une avant et une arrière) ou même une seule (au centre). Le facteur 2 n'est pas obligatoire.

B. Expression de $v(t)$:

$$\sum \vec{F} + \mu(\vec{v}_p - \vec{v}) = m(t)\vec{a}$$

En projetant cette équation sur l'axe des x on obtient: $-\mu\, v = m(t)a = m(t)\dfrac{dv}{dt}$

La séparation des variables donne: $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\mu}{m(t)}\,dt$ avec: $m(t) = m_0 + \mu t$

Q3 – Solution (2/2)

$$\Longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_0^t \frac{\mu dt}{m_0 + \mu t}$$

On pose : $u = m_0 + \mu t \quad \Longrightarrow du = \mu\, dt$

$$\Longrightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{v} = -\int_{m_0}^{m_0+\mu} \frac{du}{u} \quad \Longrightarrow \quad \ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = \ln\left(\frac{m_0}{m_0 + \mu t}\right) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{v(t) = \frac{v_0 m_0}{m_0 + \mu t}}$$

C. Valeur de v_0:

Soit Δt la durée nécessaire pour remplir le wagon. On a: $\mu\, \Delta t = \rho\overbrace{(L.l.b)}^{\text{Volume du wagon}} \Longrightarrow \Delta t = \dfrac{\rho(L.l.b)}{\mu} = 200\ \mathrm{s}$

La durée parcourue par le wagon durant le remplissage est L, c'est-à-dire:

$$L = \int_0^{\Delta t} v\, dt = \int_0^{\Delta t} \frac{v_0 m_0}{m_0 + \mu t} dt = \frac{v_0 m_0}{\mu} \int_0^{\Delta t} \frac{\mu\, dt}{m_0 + \mu t}$$

On pose : $u = m_0 + \mu t \quad \Longrightarrow du = \mu\, dt$

$$L = \frac{v_0 m_0}{\mu} \int_{m_0}^{m_0+\mu\Delta t} \frac{du}{u} = \frac{v_0 m_0}{\mu} \ln\left(\frac{m_0 + \mu\Delta t}{m_0}\right)$$

$$\boxed{v_0 = \frac{\mu L}{m_0 \ln\left(\dfrac{m_0 + \mu\Delta t}{m_0}\right)} = 1{,}04\ \mathrm{m/s}}$$

Question 4 (50 points)

Une poulie double de masse $m = 1{,}5\ \mathrm{kg}$ et de rayon de giration $\kappa = 6\ c\mathrm{m}$ est composée d'un grand disque de rayon $R = 10\ \mathrm{cm}$ et d'un petit disque de rayon $r = 5\ \mathrm{cm}$ attachés ensemble de manière rigide. La poulie est posée couchée sur une surface horizontale sur laquelle elle peut glisser librement sans frottement. Des cordes de masses négligeables, sont enroulées sur chacun des disques comme le montre la figure ci-dessous. La poulie est initialement au repos. On applique une tension $\vec{T}_B = 1\hat{\imath}\ \mathrm{N}$ sur l'extrémité B et une tension $\vec{T}_C = -1{,}5\ \hat{\imath}\ \mathrm{N}$ sur l'extrémité C. Les deux tensions sont appliquées simultanément pendant une durée Δt puis relâchées. Pendant cette durée, le point B s'est déplacé d'une distance $x_B = 13{,}08\ \mathrm{m}$ vers la droite et le point C s'est déplacé d'une distance $x_C = 8{,}79\ \mathrm{m}$ vers la gauche. La gravité agit selon l'axe *z*.

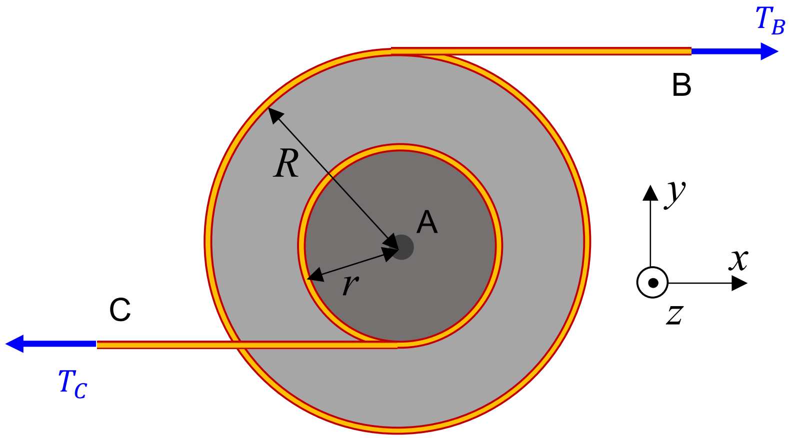
Déterminer :

A. La distance x_A parcourue par l'axe A ainsi que son sens. (15 points)

B. La vitesse finale $\vec{v}_A$ de l'axe A de la poulie. (15 points)

C. La vitesse angulaire finale $\vec{\omega}$ de la poulie. (20 points)

D. (Bonus) Le vecteur position $\vec{r}_{CIR/A}$ du CIR par rapport au point A. (10 points)

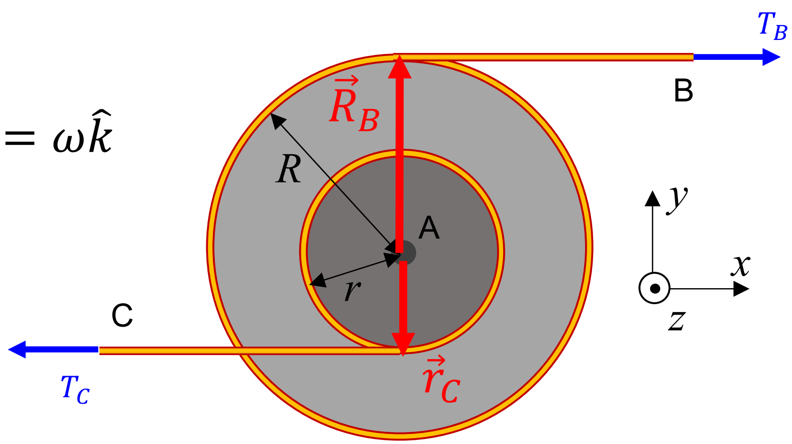


Q4 – Solution (1/3)

A. Distance parcourue par l'axe A:

Nous avons vu en classe qu'on peut écrire:

$$\begin{cases} \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{R}_B & \text{avec} \quad \vec{R}_B = R\hat{\jmath} \quad \text{et } \vec{\omega} = \omega\hat{k} \\ \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_C & \text{avec} \quad \vec{r}_C = -r\hat{\jmath} \end{cases}$$



La projection sur l'axe x donne:

$$\begin{cases} v_B = v_A - \omega R & (1) \\ v_C = v_A + \omega r & (2) \end{cases}$$

On veut écrire v_A en fonction de v_B et v_C, alors on fait $r \times (2) + R \times (1)$:

$$\Longrightarrow \quad Rv_C + rv_B = (R + r)v_A \quad \Rightarrow v_A = \frac{Rv_C + rv_B}{R + r}$$

En intégrant dans le temps on obtient: $x_A = \dfrac{Rx_C + rx_B}{R + r}$ avec $x_B = 13{,}08\ \mathrm{m}$ et $x_C = -8{,}79\ \mathrm{m}$

$$\boxed{x_A = -1{,}5\ \mathrm{m}}$$

B. Vitesse finale de l'axe:

La poulie est soumise à une force résultante constante $\vec{T}_B + \vec{T}_C = -0{,}5\ \hat{\imath}\ (N)$. Elle décrit donc un mouvement uniformément accéléré sur l'axe des x.

Q4 – Solution (2/3)

La composante de l'accélération de A sur l'axe des x : $a = \dfrac{-0{,}5\ (\mathrm{N})}{1{,}5\ (\mathrm{kg})} = -\dfrac{1}{3}\ (m/s^2)$

La 4^e équation du MUA donne:

$$v_A^2 = 2ax_A \quad \Rightarrow \quad v_A = -\sqrt{2(-1{,}5)(-\frac{1}{3})} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_A = -1\hat{\imath}\ \mathrm{m/s}}$$

B. Solution alternative:

La durée de l'accélération Δt: $\quad x_A = \dfrac{1}{2}a\Delta t^2 \qquad$ Avec $\vec{a} = \dfrac{-0{,}5\ (\mathrm{N})}{1{,}5\ (\mathrm{kg})}\hat{\imath} = -\dfrac{1}{3}\hat{\imath}(m/s^2)$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2x_A}{a}} = 3\ \mathrm{s} \qquad \boxed{\vec{v}_A = \vec{a}\Delta t = -1\hat{\imath}\ \mathrm{m/s}}$$

C. Vitesse angulaire finale de la poulie:

Le principe travail énergie donne: $\quad U_{nc} = \Delta E \quad \Longrightarrow T_B x_B + T_C x_C = \dfrac{1}{2}mv_A^2 + \dfrac{1}{2}I_A\omega^2$

avec $I_A = m\kappa^2 = 5{,}4 \times 10^{-3}\ \mathrm{kg.m^2}$

$$\Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{2}{I_A}\left(T_B x_B + T_C x_C - \frac{1}{2}mv_A^2\right)} \quad \Longrightarrow \omega = 97{,}2\ \mathrm{rad/s}\text{ dans le sens horaire.}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -97{,}2\hat{k}\ \ (\mathrm{rad/s})}$$

Q4 – Solution (3/3)

C. Solution alternative:

Le principe impulsion en rotation- moment cinétique autour de A donne selon l'axe z: $\Delta t = \sqrt{\frac{2x_A}{a}} = 3\text{ s}$

$$\int_0^{\Delta t} \sum \vec{M}_A \, dt = \Delta \vec{H}_A \quad \Longrightarrow (-rT_B - RT_C)\Delta t \hat{k} = I_A \vec{\omega} \Longrightarrow \vec{\omega} = -\frac{rT_B + RT_C}{I_A} \Delta t \hat{k}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -97{,}2\hat{k} \ \ (\text{rad/s})}$$

D. (Bonus) Position du CIR de la poulie:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CIR} = -\vec{\omega} \times \vec{r}_{CIR/A}$$

On pose $\vec{r}_{CIR/A} = x_{CIR/A}\hat{\imath} + y_{CIR/A}\hat{\jmath}$ et $\vec{\omega} = \omega\hat{k}$ Mouvement plan → $z_{CIR/A} = 0$

$$\vec{v}_A = -\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_{CIR/A} & y_{CIR/A} & 0 \end{vmatrix} = y_{CIR/A}\,\omega\hat{\imath} - x_{CIR}\omega\hat{\jmath} \quad \Longrightarrow y_{CIR/A}\hat{\imath} - x_{CIR/A}\hat{\jmath} = \frac{\vec{v}_A}{\omega} = \frac{\hat{\imath}}{97{,}2} \ \ (\text{m})$$

$$\boxed{\begin{cases} x_{CIR/A} = 0 \\ y_{CIR/A} = 1{,}03\text{ cm} \end{cases}}$$