– PHS1101 –
Mécanique pour ingénieurs

Cours 12

Principe travail-énergie pour les corps rigides

Jérémie Villeneuve
Département de génie physique

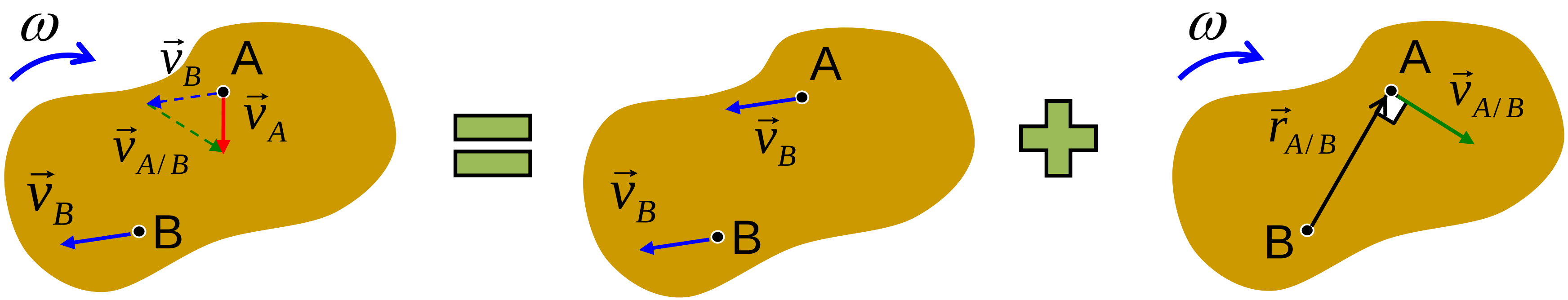
Cinématique du corps rigide

Décomposition translation + rotation

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/B}$$

Un corps rigide possède une seule vitesse angulaire.

Mouvement plan = **Translation avec B** + **Rotation par rapport à B**



$$v_{A/B} = \omega r_{A/B}$$

On peut décomposer le mouvement d'un corps rigide en une translation suivie d'une rotation autour de n'importe quel point situé sur le corps.

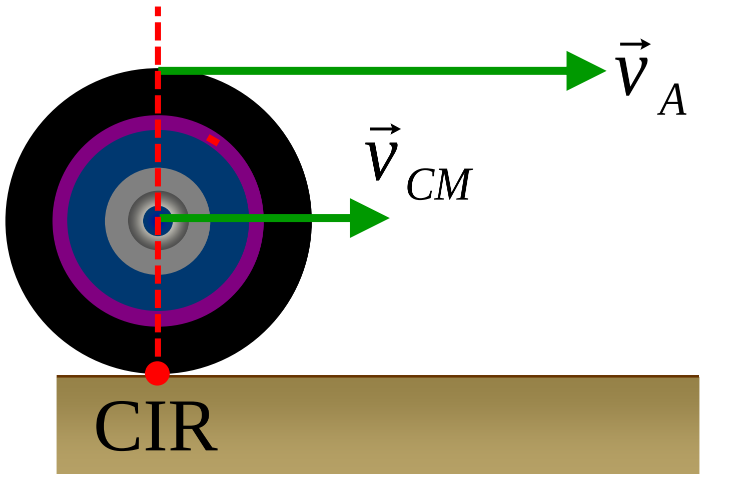
Cinématique du corps rigide

Centre instantané de rotation (CIR)

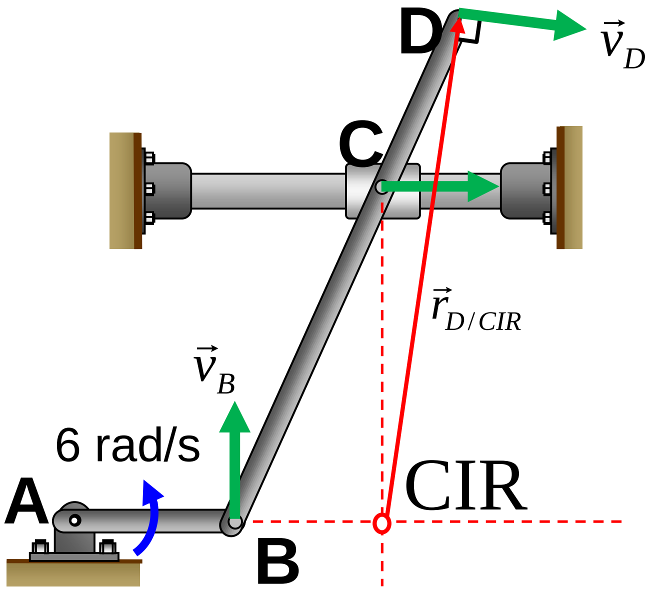
$$\vec{v}_A = \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/CIR}$$

À chaque instant, le corps semble être en rotation pure autour du CIR.

Le CIR est situé au croisement des droites perpendiculaires aux vitesses des points situés sur le corps rigide.



Le CIR est au point de contact avec le sol seulement si la roue roule sans glisser.



seulement si la roue ne glisse pas le CIR est la mais meme si glisse elle va etre sur la ligne

Roulement et glissement

Glissement sans roulement

Il n'y a pas de rotation de la roue.

$$\Delta\theta = \omega = \alpha = 0$$

Frottement cinétique entre la roue et le sol

Roulement sans glissement

$$\Delta x_{CM} = R\Delta\theta$$
$$v_{CM} = \omega R$$
$$a_{CM} = \alpha R$$

Frottement statique entre la roue et le sol

Roulement avec glissement

Translation et rotation indépendantes

Δx_{CM}, v_{CM}, a_{CM}

$\Delta\theta$, ω, α

Frottement cinétique entre la roue et le sol

Cinétique du corps rigide
(dynamique de rotation)

Par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = I_{CM}\alpha$$

OU

Par rapport au CIR

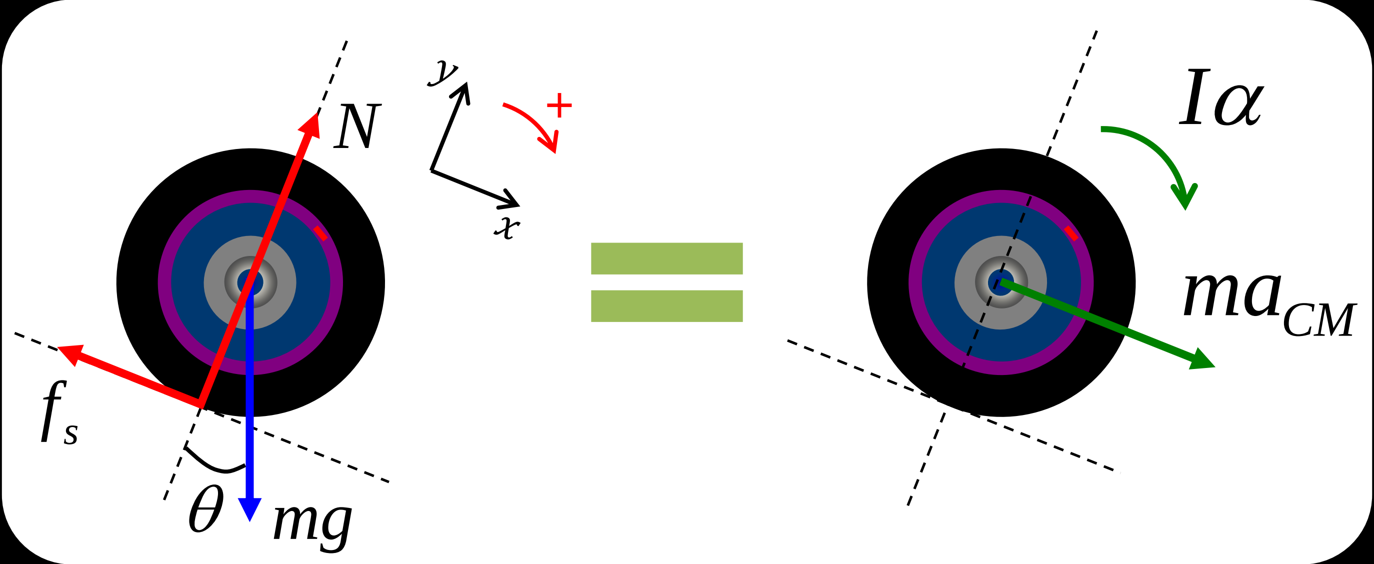
$$\sum M_{CIR} = I_{CIR}\alpha$$

Appliqué à la roue ci-dessous
(roulement sans glissement)

$$\sum M_{CM} = Rf_s = I_{CM}\alpha$$

OU

$$\sum M_{CIR} = Rmg\sin\theta = \left(I_{CM} + mR^2\right)\alpha$$



On choisit le sens positif des axes et des moments pour avoir $a_{CM} = \alpha R$ sans avoir à ajouter de signe négatif.

Plan de la semaine

- **Énergie cinétique d'un corps rigide**
- Principe travail-énergie en rotation
  - Travail effectué par un couple
  - Énergie potentielle d'un ressort de torsion
  - Puissance générée par un couple

Dans un monde éloigné de tout, un haltère parfaitement rigide formé de deux masses reliées par une tige sans masse est en mouvement…

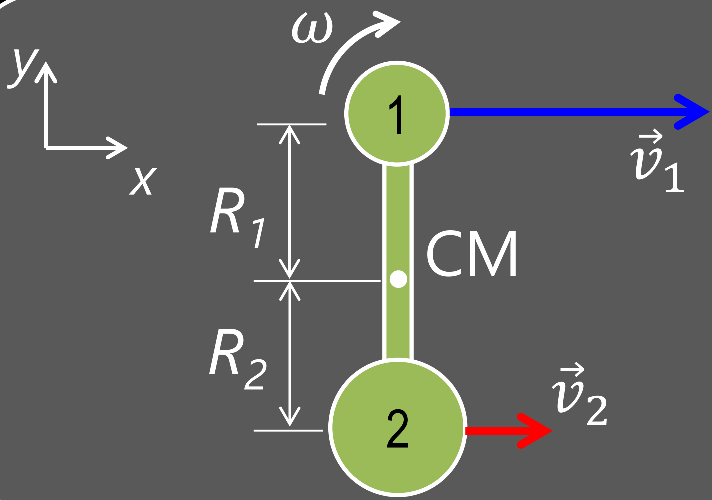
Le centre de masse est immobile et les masses tournent autour.

Rotation autour du CM

On donne une petite poussée vers la droite au centre de masse…

Translation du CM + Rotation autour du CM

Quelle est l’énergie cinétique de l’haltère ?



L’énergie cinétique totale est la somme de l’énergie cinétique des deux masses.

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

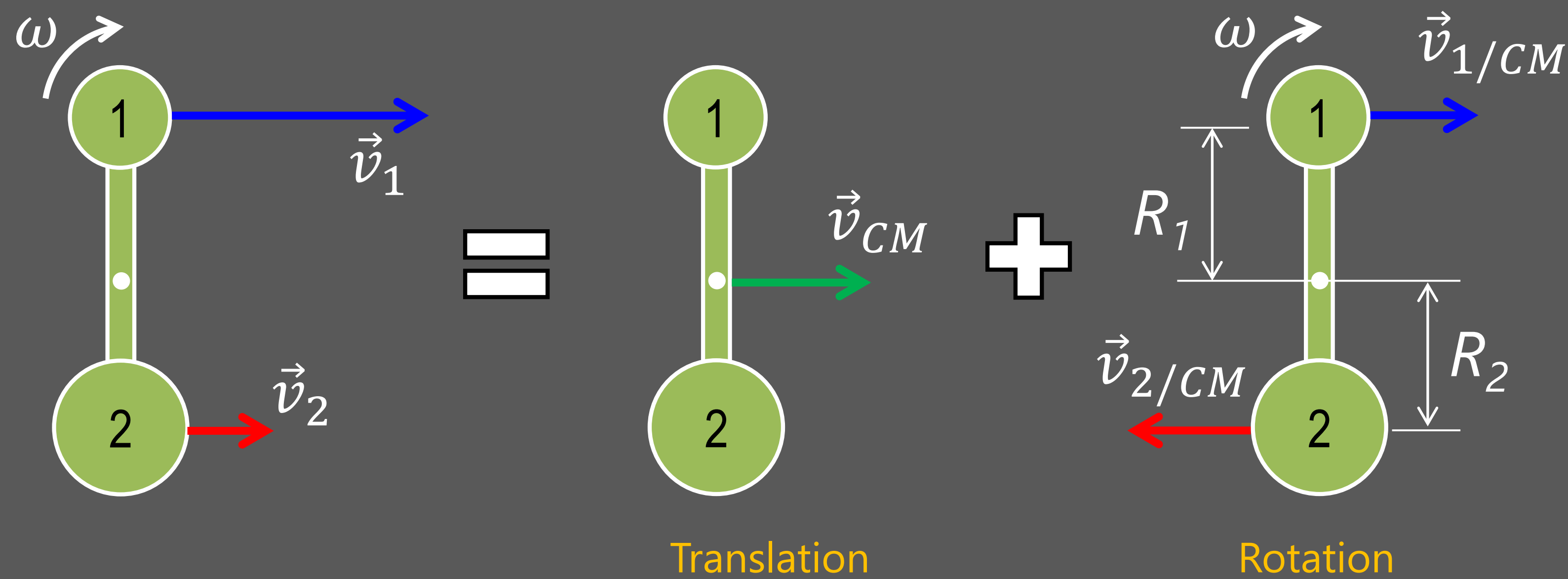
Décomposons les vitesses des masses en translation-rotation…

$$T = \frac{1}{2} m_1 (v_{CM} + \omega R_1)^2 + \frac{1}{2} m_2 (v_{CM} - \omega R_2)^2$$

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 + m_2)}_{\substack{\text{Masse totale} \\ M = m_1 + m_2}} v_{CM}^2 + \cancel{\omega v_{CM} \underbrace{(m_1 R_1 - m_2 R_2)}_{\substack{\text{Position du CM dans le} \\ \text{référentiel du CM… 0!}}}} + \frac{1}{2} \underbrace{(m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2)}_{\substack{\text{Moment d'inertie } I_{CM} \\ \text{de l'haltère par rapport} \\ \text{à son CM}}} \omega^2$$

Quelle est l'énergie cinétique de l'haltère ?

L'énergie cinétique peut être décomposée en translation-rotation.



$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

On ne peut pas utiliser cette égalité en remplaçant le CM par un autre point quelconque.

Énergie cinétique

Système de particules et corps rigide

L'énergie cinétique totale d'un système de particules est la somme des énergies cinétiques de translation de chaque particule du système.

Énergie cinétique d'un système de particules

$$\boxed{T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2}$$

Pour le cas particulier d'un corps rigide, l'énergie cinétique totale peut s'écrire comme une somme de deux termes :

- Énergie cinétique de translation du CM ;
- Énergie cinétique de rotation autour du CM.

$$M = \sum m_i$$

Masse totale du corps rigide

Énergie cinétique d'un corps rigide

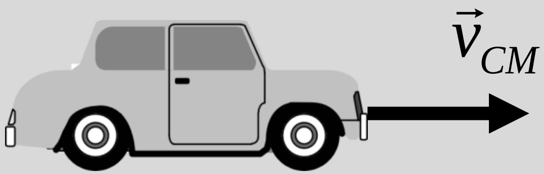
$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$

Attention à prendre le moment d'inertie par rapport au CM !

Quelques cas particuliers

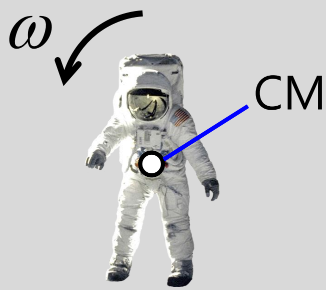
$$T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2$$

Translation pure ($\omega = 0$)



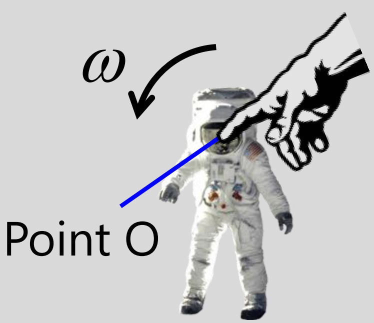
$$\boxed{T = \frac{1}{2}Mv_{CM}^2}$$

Rotation pure autour du CM ($v_{CM} = 0$)



$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2}$$

Rotation imposée autour d'un point O autre que le CM ($v_{CM} \neq 0$)



Que vaut l'énergie cinétique ?

$$\boxed{T = ?}$$

Rotation non centrale

Le corps rigide est contraint de tourner autour d'un point O (pivot) qui n'est pas son CM. Dans ce cas, le CM suit un mouvement circulaire autour du pivot.

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

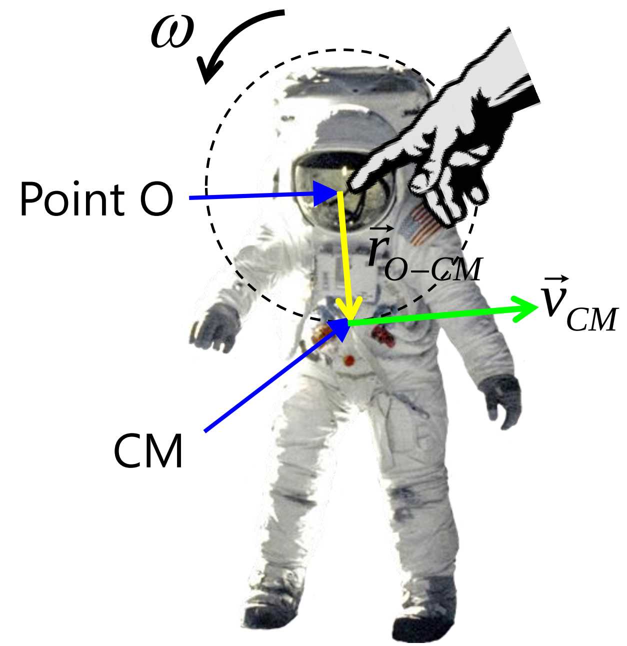
$$v_{CM} = \omega r_{O-CM}$$

Mouvement circulaire du CM autour du point O

$$T = \frac{1}{2} \underbrace{\left(M r_{O-CM}^2 + I_{CM} \right)}_{\text{Théorème des axes parallèles}} \omega^2$$

Énergie cinétique d'un corps rigide en rotation non centrale

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_O \omega^2}$$



Énergie cinétique et CIR

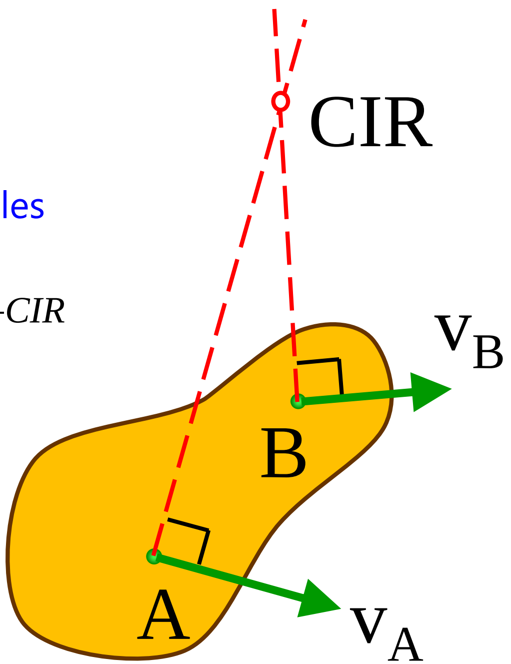
À chaque instant, un corps rigide qui suit un mouvement plan quelconque est en rotation non centrale autour de son centre instantané de rotation (CIR). On peut donc appliquer l'expression vue à la page précédente.

Énergie cinétique d'un corps rigide

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2}$$

Théorème des axes parallèles

$$I_{CIR} = I_{CM} + M r_{CM-CIR}^2$$



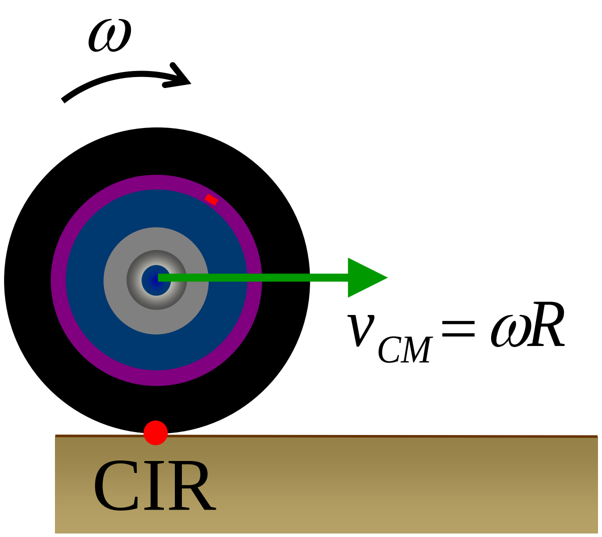
Il peut s'avérer intéressant d'utiliser le CIR pour calculer l'énergie cinétique de certains corps rigides…

Énergie cinétique d'une roue qui roule sans glisser

On peut calculer l'énergie cinétique de la roue de deux façons équivalentes :

Méthode 1 (équation générale)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2}$$



Supposons que la roue soit un disque homogène…

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$T = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{4} m v_{CM}^2$$

$$\boxed{T = \frac{3}{4} m v_{CM}^2}$$

Méthode 2 (rotation non centrale autour du CIR)

$$\boxed{T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2}$$

$$I_{CIR} = I_{CM} + mR^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{3}{4} m R^2 \omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{3}{4} m v_{CM}^2}$$

Plan de la semaine

- Énergie cinétique d'un corps rigide
- **Principe travail-énergie en rotation**
  - Travail effectué par un couple
  - Énergie potentielle d'un ressort de torsion
  - Puissance générée par un couple

Principe travail-énergie en rotation

Le principe travail-énergie vu à la semaine 8 est encore valide, sauf qu'il faut tenir compte de la rotation en calculant l'énergie cinétique.

$$\boxed{\sum U_{1\to 2} = T_2 - T_1} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1\to 2} = E_2 - E_1}$$

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2}$$

Si les forces et les couples non conservatifs ne font pas de travail entre deux configurations du système, alors l'énergie mécanique est conservée.

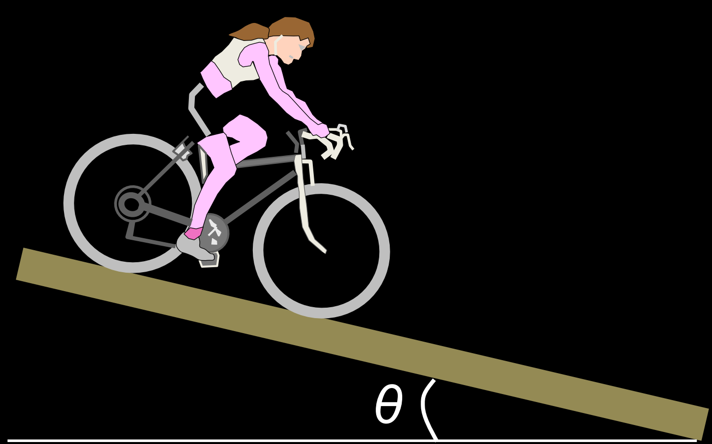
$$\boxed{\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1\to 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2}$$

Sauriez-vous dire qui arrivera en bas de la pente avec la plus grande vitesse ?

On néglige toute perte d'énergie mécanique et on roule sans glisser.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$



Vélo-ski

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux skis = $2m$

tout l'énergie potentielle est transformé en énergie cinétique de translation alors elle arrive en bas avec la plus grande vitesse

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

L'énergie potentielle gravitationnelle perdue se transforme en énergie cinétique de translation et de rotation.

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = (M+2m)gh}$$

L'énergie potentielle gravitationnelle perdue se transforme en énergie cinétique de translation seulement.

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM}^2 = (M+2m)gh}$$

Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?

Situation 1

On néglige toute perte d'énergie mécanique et on roule sans glisser.

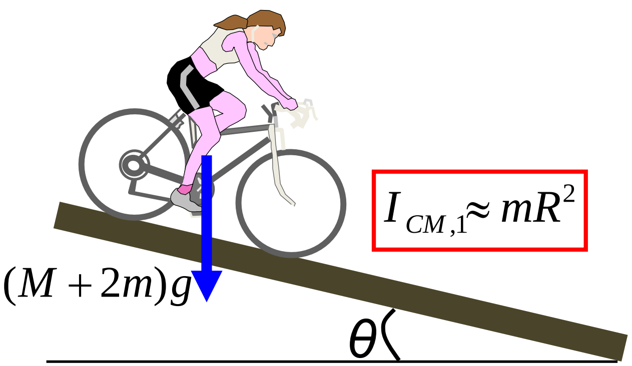
La roue pleine permet de réduire le moment d'inertie pour aller plus vite

Vélo à roues creuses

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$
Rayon des roues = R

Vélo à roues pleines

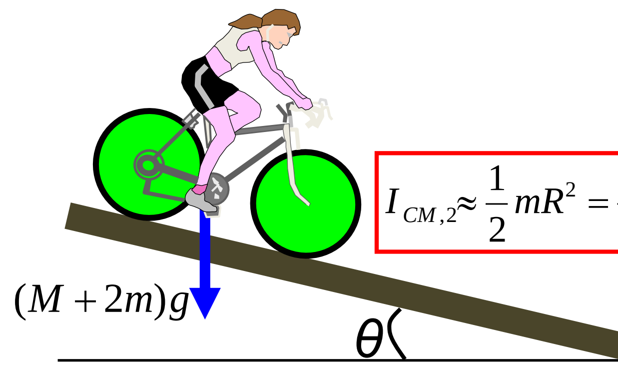
Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$
Rayon des roues = R



$$\boxed{I_{CM,1} \approx mR^2}$$

$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

$$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$



$$\boxed{I_{CM,2} \approx \frac{1}{2}mR^2 = \frac{1}{2}I_{CM,1}}$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\left(mR^2\right)\omega^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM}^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\omega^2 = (M+2m)gh$$

$$\boxed{v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2m}{(M+2m)}}}}$$

Roues pleines permettent d'aller plus vite !

$$\boxed{v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{m}{(M+2m)}}}}$$

https://www.youtube.com/watch?v=MnmtFh2f0JM

Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?
Situation 2

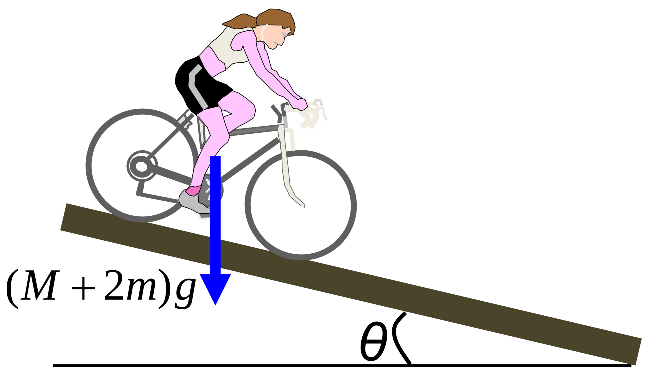
On néglige toute perte d'énergie mécanique et on roule sans glisser.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $2m$

Rayon des roues = R



$$\boxed{T_1 + V_1 = T_2 + V_2}$$

$$\boxed{v_{CM} = \omega R}$$

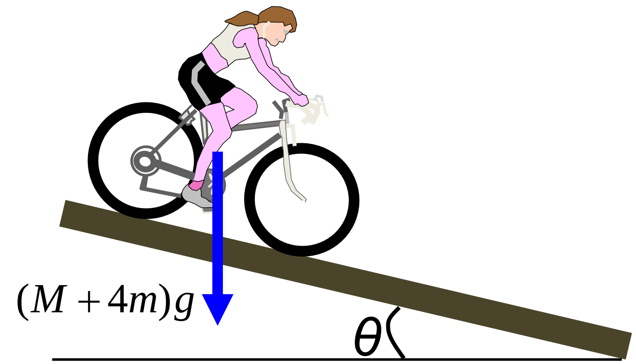
$$\boxed{I_{CM} \propto mR^2}$$

Vélo aux roues 2 fois plus massives (même distribution de masse)

Masse totale cycliste + vélo = M

Masse totale des deux roues = $4m$

Rayon des roues = R



Moment d'inertie proportionnel à la masse

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+4m)v_{CM}^2 + \frac{1}{2}(2I_{CM})\omega^2 = (M+4m)gh$$

$$\boxed{v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2}}}}$$

Quelle vitesse est la plus élevée ?

$$\boxed{v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2}}}}$$

Quelle vitesse est la plus élevée ?

$$v_{CM,1} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2}}}$$

OU

$$v_{CM,2} = \sqrt{\frac{2gh}{1+\frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2}}}$$

La vitesse la plus grande est celle dont la fraction dans le dénominateur de la fraction sous la racine carrée est la plus petite.

Lequel des termes suivants est le plus petit ?

$$\frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2} \quad \text{OU} \quad \frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2}$$

On peut calculer leur différence :

$$\frac{2I_{CM}}{(M+4m)R^2} - \frac{I_{CM}}{(M+2m)R^2} = \frac{I_{CM}}{R^2}\frac{M}{(M+2m)(M+4m)} > 0 \Rightarrow \boxed{v_{CM,1} > v_{CM,2}}$$

Conclusion

Plus les roues sont massives, moins le vélo va vite !

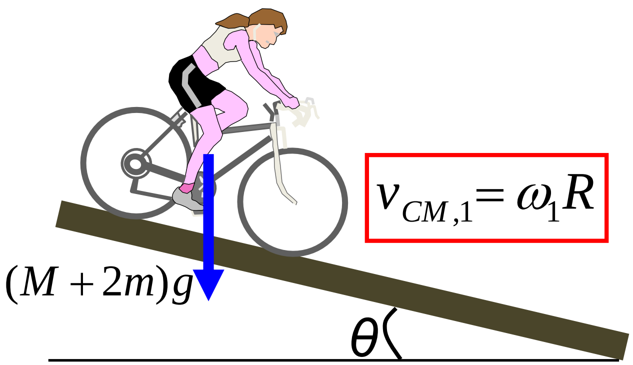
Qui arrive en bas avec la plus grande vitesse ?

Situation 3

On néglige toute perte d'énergie mécanique et on roule sans glisser.

Vélo « normal »

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$
Rayon des roues = R



$$v_{CM,1} = \omega_1 R$$

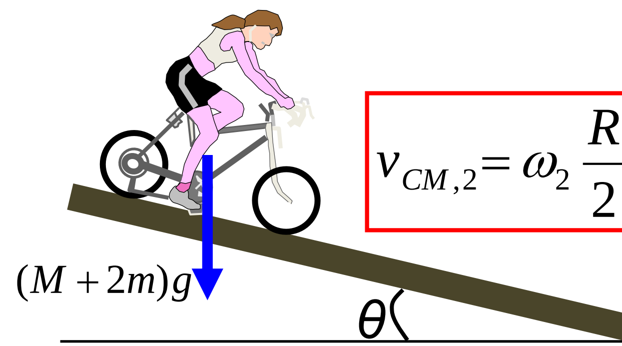
$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$I_{CM} \propto mR^2$$

$$I_{CM,2} = \frac{1}{4} I_{CM,1}$$

Vélo aux roues 2 fois plus petites (même masse)

Masse totale cycliste + vélo = M
Masse totale des deux roues = $2m$
Rayon des roues = $R/2$



$$v_{CM,2} = \omega_2 \frac{R}{2}$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,1}^2 + \frac{1}{2} I_{CM,1}\omega_1^2 = (M+2m)gh$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,1}^2 + \frac{1}{2} I_{CM,1}\frac{v_{CM,1}^2}{R^2} = (M+2m)gh}$$

$$\Downarrow$$

Les vitesses $v_{CM,1}$ et $v_{CM,2}$ respectent la même équation : elles sont donc égales !

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2} I_{CM,2}\omega_2^2 = (M+2m)gh$$

$$\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} I_{CM,1}\right)\left(\frac{2v_{CM,2}}{R}\right)^2 = (M+2m)gh$$

$$\boxed{\frac{1}{2}(M+2m)v_{CM,2}^2 + \frac{1}{2} I_{CM,1}\frac{v_{CM,2}^2}{R^2} = (M+2m)gh}$$

Récapitulatif

Nous avons démontré que :

- Masses et rayons identiques, roulement vs glissement
  → L'énergie de rotation est de l'énergie perdue en translation !
- Masses et rayons identiques, roue creuse vs roue pleine
  → Les roues creuses ralentissent !
- Rayons identiques et masses différentes
  → Les roues plus massives ralentissent !
- Masses identiques et rayons différents
  → Aucune différence !

Comment en tirer profit ?

- Roues pleines et légères pour aller plus vite !

En pratique :

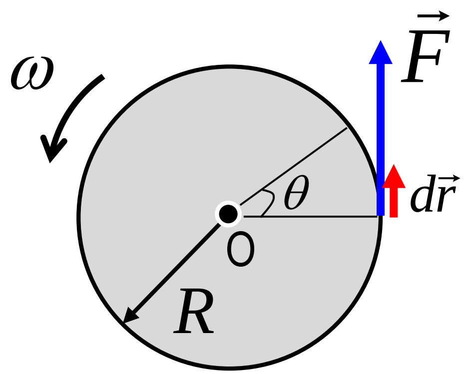
- Le profil aérodynamique (traînée et vent de travers) de la roue joue beaucoup ;
- Grand moment d'inertie → permet de conserver l'énergie cinétique une fois accumulée (volant d'inertie).

Plan de la semaine

- Énergie cinétique d'un corps rigide
- Principe travail-énergie en rotation
  - **Travail effectué par un couple**
  - **Énergie potentielle d'un ressort de torsion**
  - **Puissance générée par un couple**

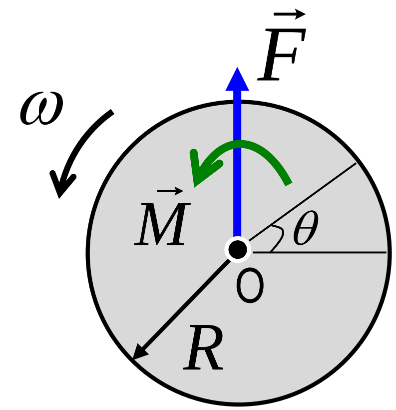
Travail effectué par un couple

On applique une force tangentielle sur une disque libre de tourner autour du pivot O situé en son centre. Calculer le travail fait sur le disque après qu'il a tourné d'un angle θ.



Système force-couple équivalent

$\equiv$



$$M = RF$$

$$U_{1\to 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{\theta} FRd\theta = FR\theta$$

Force et déplacement parallèles.

Mouvement circulaire : $dr = Rd\theta$

$$U_{1\to 2} = FR\theta = M\theta$$

C'est la même situation physique et donc le travail effectué reste le même.

Le point pivot ne se déplace pas : la force ne fait donc pas de travail !

D'où vient le travail effectué ?

Travail effectué par un couple

Un couple qui s'applique sur un corps rigide en rotation (dont la vitesse angulaire n'est pas nulle) effectue un travail.

Travail effectué par un couple

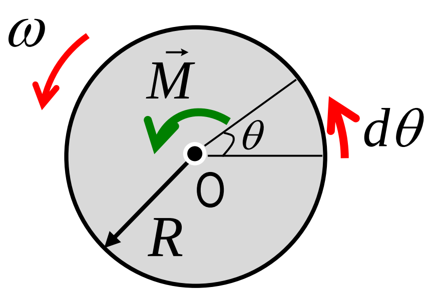
$$\boxed{U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta}$$

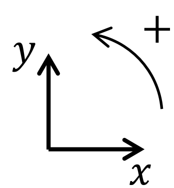
Il faut ajuster le signe du moment et des angles en fonction du sens de rotation.

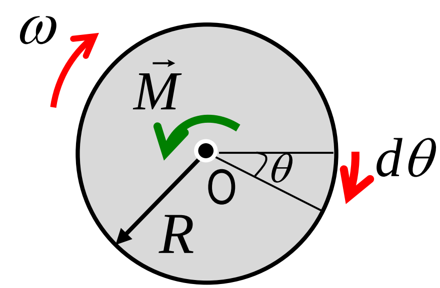
Avec les axes ci-dessous, déplacement angulaire en sens antihoraire est positif et un déplacement angulaire en sens horaire est négatif.

Exemple – Couple $\vec{M}$ **constant** appliqué sur un disque.

Rotation en sens antihoraire







Rotation en sens horaire

$$U_{1\to 2} = M\theta$$

Couple dans le même sens que la rotation du disque : travail positif

$$U_{1\to 2} = -M\theta$$

Couple en sens opposé à la rotation du disque : travail négatif

Ressort de torsion idéal

Un ressort de torsion est un ressort hélicoïdal qui s'oppose à des variations de position angulaire.

Paramètres d'un ressort de torsion			**Ressort linéaire**	
Constante du ressort :	κ	[N·m/rad]	k	[N/m]
Position angulaire naturelle :	θ_0	[rad]	L_0	[m]
Déplacement angulaire :	$\Delta\theta = \theta - \theta_0$	[rad]	$\Delta L = L - L_0$	[m]

C'est l'équivalent en rotation du ressort linéaire traditionnel.

Couple exercé par un ressort de torsion

$$\boxed{\vec{M}_{res} = -\kappa \Delta \vec{\theta}}$$

Signe négatif : le moment s'oppose au déplacement angulaire.

Énergie potentielle élastique d'un ressort de torsion

$$\boxed{V_{res} = \frac{1}{2}\kappa(\Delta\theta)^2}$$

Il faut tenir compte de ce couple et de cette énergie potentielle dans l'application du principe travail-énergie.

Énergie mécanique

Avec l'énergie cinétique de rotation et l'énergie potentielle élastique d'un ressort de torsion, l'énergie mécanique d'un corps rigide s'écrit comme suit.

Énergie mécanique d'un corps rigide

$$\boxed{E = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + mgy + \frac{1}{2} k (\Delta L)^2 + \frac{1}{2} \kappa (\Delta \theta)^2}$$

Cinétique (translation) — Cinétique (rotation) — Potentielle (gravité) — Potentielle (ressort linéaire) — Potentielle (ressort torsion)

Le seul couple conservatif dans ce cours est le couple exercé par un ressort de torsion (il a une énergie potentielle associée).

Principe travail-énergie

$$\boxed{\sum U_{nc} = \Delta E}$$

Les autres couples (couple de frottement ou couple externe) sont des couples non conservatifs qui, s'ils font un travail, modifient l'énergie mécanique d'un corps rigide.

Puissance effectuée par un couple

La définition de la puissance moyenne ne change pas.

$$\boxed{\overline{P} = \frac{U_{1\to 2}}{\Delta t} = \frac{U_{1\to 2}}{t_2 - t_1}}$$

Le travail inclut maintenant le travail fait par les forces et les couples.

La puissance instantanée générée par un couple s'exprime de façon analogue à la puissance produite par une force.

$$\boxed{P = \frac{dU}{dt}}$$

Puissance instantanée (force)

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

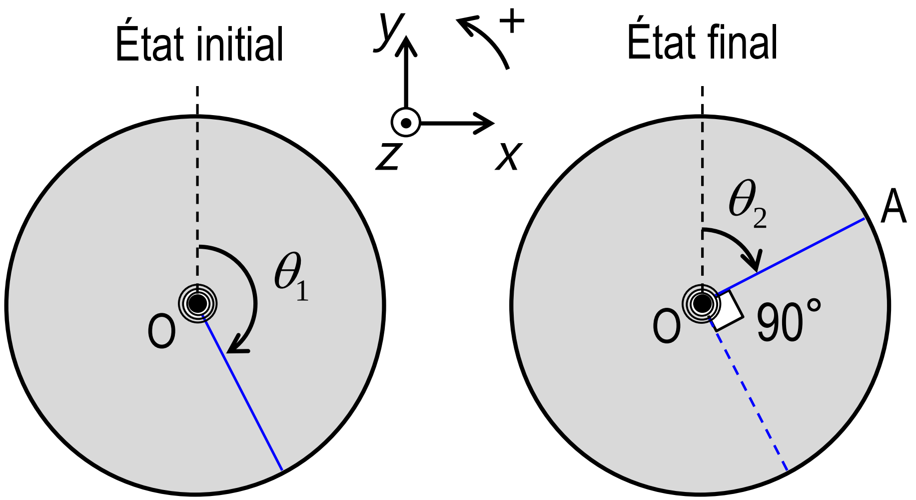
Puissance instantanée (couple)

$$\boxed{P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}}$$

Exemple 1 – Disque et ressort

Un disque homogène de 10 kg et de 50 cm de rayon pivote autour de son centre. Le pivot est légèrement rouillé : il génère un couple de frottement cinétique constant égal à 5 N·m. Un ressort de torsion est fixé au disque et l'empêche de tourner librement. La constante du ressort vaut 20 N·m/rad et sa position au repos est θ_0 = 0° mesuré par rapport à l'axe *y* positif. Le disque est tourné d'un angle de 150° en sens horaire et maintenu immobile avant d'être relâché.

Quelle est la puissance instantanée dissipée par le frottement du pivot lorsque le disque a parcouru une distance angulaire de 90° ?



Information connue

Disque $m = 10\,\text{kg}$ $R = 0{,}50\,\text{m}$

Ressort $\theta_0 = 0$ $\kappa = 20\,\text{N}\cdot\text{m/rad}$

Frottement $M_f = 5\,\text{N}\cdot\text{m}$

État initial $\theta_1 = -150° = -\dfrac{5\pi}{6}\,\text{rad}$ $\omega_1 = 0$

État final $\theta_2 = -60° = -\dfrac{\pi}{3}\,\text{rad}$ $\omega_2 = ?$

Que cherche-t-on ?

Puissance dissipée par frottement à l'état final

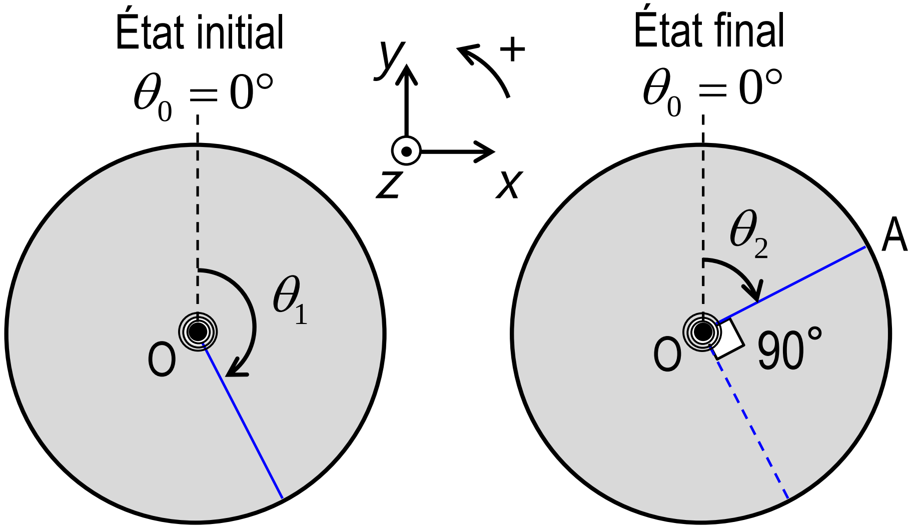
$$P_f = \vec{M}_f \cdot \vec{\omega}_2 = -M_f\,\omega_2$$

Exemple 1 – Disque et ressort

Stratégie de résolution

Un couple non conservatif (frottement) s'exerce sur le disque : l'énergie mécanique du disque n'est pas conservée.

1. Principe travail-énergie sur le disque pour trouver ω_2 ;
2. Calcul de la puissance instantanée dissipée par frottement.



	État initial	État final
Énergie cinétique (T)	0	$\frac{1}{2} I_{CM} \omega_2^2$
Énergie potentielle (V)	$\frac{1}{2}\kappa(\theta_1 - \theta_0)^2$	$\frac{1}{2}\kappa(\theta_2 - \theta_0)^2$
Travail des forces/couples non conservatifs (U_{nc})	$\int_{\theta_1}^{\theta_2} -M_f \, d\theta = -M_f(\theta_2 - \theta_1)$	

Exemple 1 – Disque et ressort

$$m = 10\,\text{kg} \quad R = 0{,}50\,\text{m} \quad \theta_0 = 0 \quad \kappa = 20\,\text{N}\cdot\text{m/rad} \quad M_f = 5\,\text{N}\cdot\text{m} \quad \theta_1 = -\frac{5\pi}{6}\,\text{rad} \quad \theta_2 = -\frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Principe travail-énergie

$$\sum_{\text{non conservatives}} U_{1\to 2} = E_2 - E_1 \quad \Rightarrow \quad -M_f(\theta_2-\theta_1) = \left[\frac{1}{2} I_{CM}\omega_2^2 + \frac{1}{2}\kappa(\theta_2-\theta_0)^2\right] - \left[0 + \frac{1}{2}\kappa(\theta_1-\theta_0)^2\right]$$

$$I_{CM} = \frac{1}{2} mR^2 \quad \Rightarrow \quad -5\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 0{,}50^2\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}\cdot 20\left(-\frac{\pi}{3}-0\right)^2 - \frac{1}{2}\cdot 20\left(-\frac{5\pi}{6}-0\right)^2$$

Formulaire

$$\Rightarrow \quad \omega_2 = 8{,}919\,\text{rad/s}$$

Puissance instantanée dissipée par frottement

$$\boxed{P_f = \vec{M}_f \cdot \vec{\omega}_2 = -M_f\,\omega_2 = -5\cdot 8{,}919 = -44{,}6\,\text{W}}$$

La puissance est négative parce que le frottement retire de l'énergie au disque.

Synthèse du cours

Énergie cinétique de rotation

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Il faut décomposer en translation du CM et en rotation par rapport au CM.

$$T = \frac{1}{2} I_{CIR} \omega^2$$

On peut aussi travailler avec le CIR directement (rotation pure).

Ressort de torsion

Couple exercé

$$\vec{M}_{res} = -\kappa \Delta \vec{\theta}$$

Énergie potentielle

$$V_{res} = \frac{1}{2} \kappa (\Delta \theta)^2$$

Principe travail-énergie

Travail fait par un couple

$$U_{1\to 2} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M \, d\theta$$

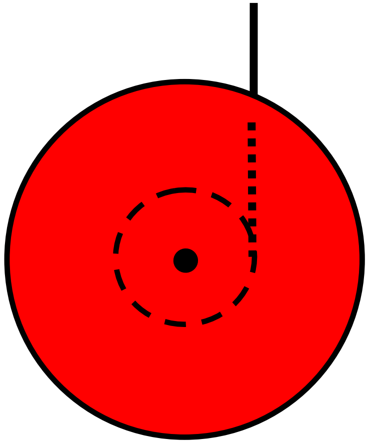
Puissance instantanée produite par un couple

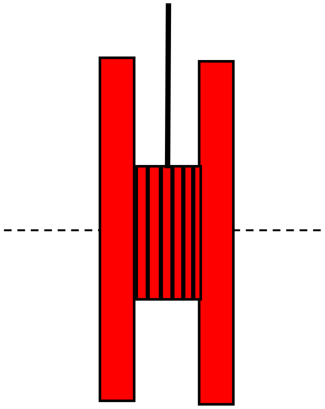
$$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

Votre boîte à outils pour l'examen final

	Lois générales	Loi de conservation
Translation **(vectorielle)**	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\qquad \sum \vec{F} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$	$\sum \vec{F} = \vec{0}$ $\vec{L}_1 = \vec{L}_2$
Rotation **(vectorielle)**	$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}_O \vec{\alpha}$ $\qquad \sum \vec{M}_O = \dfrac{d\vec{H}_O}{dt}$	$\sum \vec{M}_O = \vec{0}$ $\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2}$
Translation + rotation **(scalaire)**	$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$ $E = T + V \qquad T = \dfrac{1}{2} M v_{CM}^2 + \dfrac{1}{2} I_{CM} \omega^2$	$\sum U_{nc} = 0$ $E_1 = E_2$

Exemple 2 – Modélisation d'un yoyo





- Quelle est la vitesse du centre de masse du yoyo une fois qu'il atteint le bout de sa corde ?
- Quel est le temps nécessaire pour que le yoyo se rende au bas de sa corde ?

Exemple 2 – Modélisation d'un yoyo

Quelles propriétés du yoyo doit-on connaître pour résoudre ?

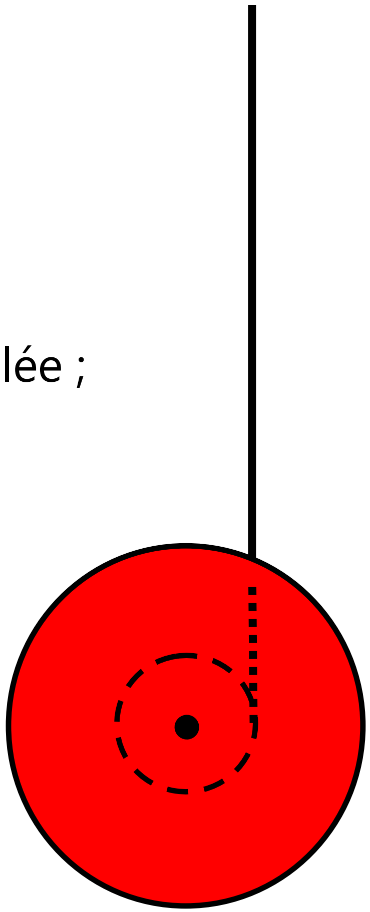
1. Masse m et moment d'inertie I_{CM} du yoyo ;
2. Rayons interne r et externe R du yoyo ;
3. Longueur L de la corde.

Que cherche-t-on ?

1. La vitesse v du yoyo une fois la corde complètement déroulée ;
2. Le temps t pour que la corde de déroule entièrement.

Quelles hypothèses peut-on poser ?

1. Le yoyo part immobile ;
2. Le yoyo est circulaire et symétrique (CM au centre) ;
3. La corde est inextensible et de masse négligeable ;
4. La corde ne glisse pas sur le yoyo lorsqu'elle se déroule ;
5. Toute forme de frottement est négligeable.



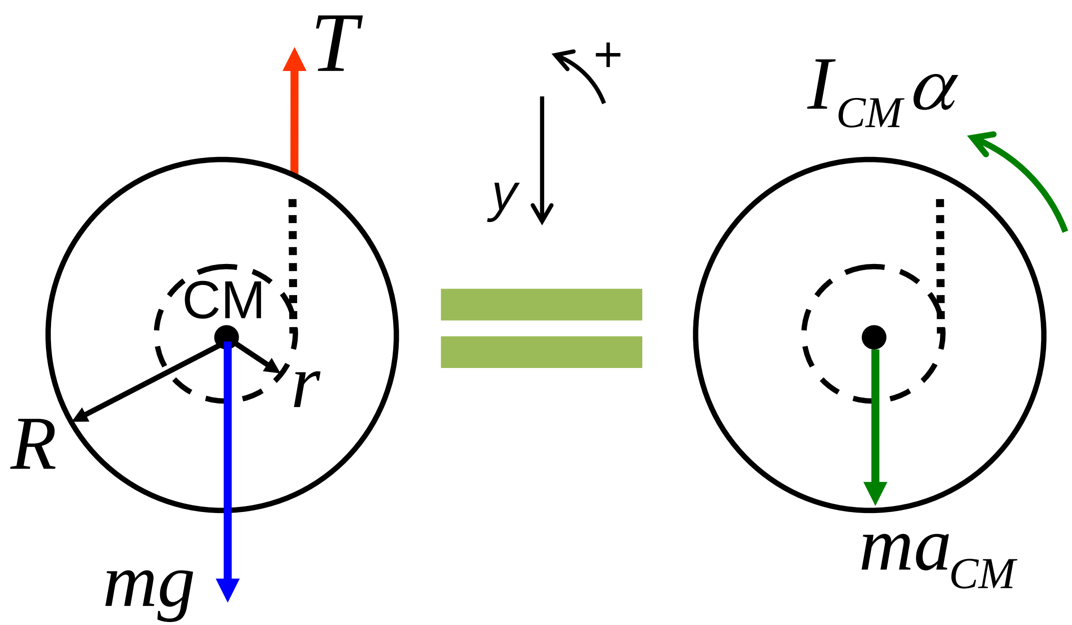
Exemple 2
1. Approche dynamique par rapport au CM

Condition de roulement sans glissement

$$a_{CM} = \alpha r$$

La corde est enroulée autour du rayon interne du yoyo.

DCL-DCE du yoyo



Somme des forces

$$\sum F_y = mg - T = ma_{CM}$$

Somme des moments par rapport au CM

$$\sum M_{CM} = rT = I_{CM}\alpha$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}}$$

Exemple 2
1. Approche dynamique par rapport au CM

L'accélération du CM est constante : on utilise les équations du MUA pour déterminer la vitesse et le temps après avoir parcouru une distance L.

Module de la vitesse Le yoyo est initialement immobile.

$$v_{CM}^2 = v_{CM,0}^2 + 2a_{CM}\left(y_{CM} - y_{CM,0}\right) \Rightarrow v_{CM} = \sqrt{2a_{CM}L}$$

$$a_{CM} = \frac{g}{1+\dfrac{I_{CM}}{mr^2}} \Rightarrow \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1+\dfrac{I_{CM}}{mr^2}}}}$$

Temps de chute

$$v_{CM} = v_{CM,0} + a_{CM}\left(t - t_0\right) \Rightarrow t = \frac{v_{CM}}{a_{CM}} \Rightarrow \boxed{t = \sqrt{\frac{2L}{g}\left(1+\frac{I_{CM}}{mr^2}\right)}}$$

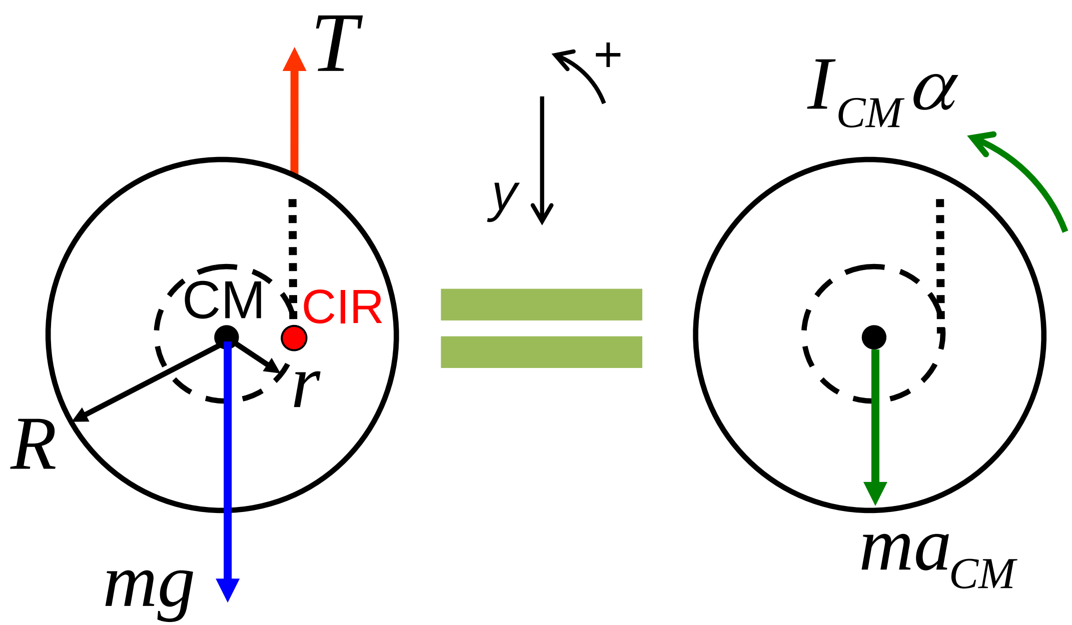
Exemple 2
2. Approche dynamique par rapport au CIR

Le CIR du yoyo est le point de contact avec la corde.

Condition de roulement sans glissement

$$a_{CM} = \alpha r$$

DCL-DCE du yoyo



Somme des moments par rapport au CIR

$$\sum M_{CIR} = mgr = \underbrace{\left(I_{CM} + mr^2\right)}_{I_{CIR}}\alpha \Rightarrow$$

On trouve la même accélération !

$$a_{CM} = \frac{g}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}$$

Exemple 2
3. Approche par la méthode de l'énergie

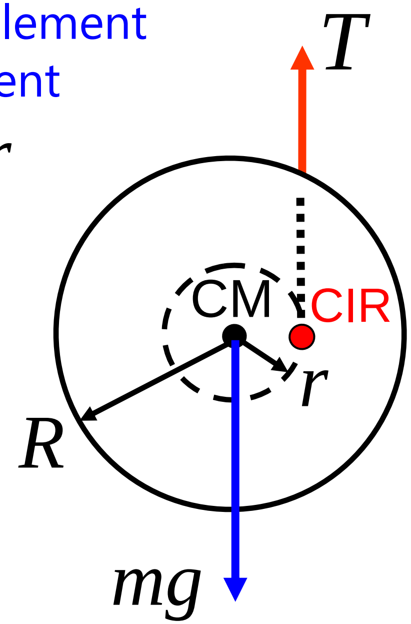
Forces et couples sur le yoyo

Poids : force conservative

Tension : force non conservative

Condition de roulement sans glissement

$$v_{CM} = \omega r$$



Travail non conservatif

Le point auquel la tension s'applique ne se déplace pas (CIR du yoyo : point immobile).

Sans déplacement, il n'y a pas de travail.

$$\sum_{\text{non conservatifs}} U_{1\to 2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 = E_2$$

Conservation de l'énergie V_g : On pose $y = 0$ quand le yoyo est au plus bas.

$$E_1 = mgL$$

$$E_2 = \frac{1}{2} I_{CIR}\omega^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{I_{CM}}{r^2}\right) v_{CM}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I_{CM}}{mr^2}}}}$$

Même résultat qu'avec la dynamique !

Exemple 2 – Application numérique

Valeurs numériques

$$r \approx 1\,\text{cm} \qquad R \approx 3\,\text{cm}$$

$$L \approx 110\,\text{cm} \qquad g = 9{,}81\,\text{m/s}^2$$

$$\boxed{v_{CM} = \sqrt{\frac{2gL}{1+\frac{I_{CM}}{mr^2}}}}$$

$$\boxed{t = \sqrt{\frac{2L}{g}\left(1+\frac{I_{CM}}{mr^2}\right)}}$$

Le yoyo contient 4 billes de métal situées à r_B=1,2 cm centre, toutes enchâssées dans du plastique. Il contient également un essieu en métal. Le métal est beaucoup plus dense que le plastique rouge autour (environ 10 pour 1) …

Moment d'inertie

Hypothèse : la masse du plastique est négligeable devant celle des billes et de l'essieu en métal.

$$I_{CM} \approx mr_B^2 = 0{,}012^2\,m$$

Module de la vitesse

$$\boxed{v_{CM} \approx 2{,}97\,\text{m/s}}$$

Temps de chute

$$\boxed{t \approx 0{,}740\,\text{s}}$$

Valeurs en chute libre ($I_{CM} = 0$)

$$v_{CM} = 4{,}65\,\text{m/s}$$

$$t = 0{,}474\,\text{s}$$