PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs

Examen final

Automne 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (55 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

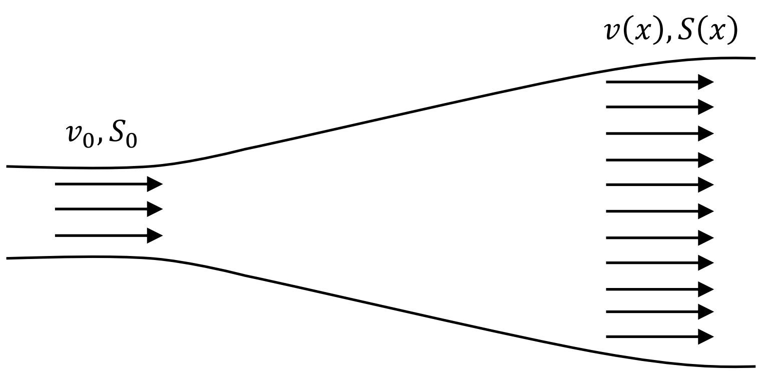
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

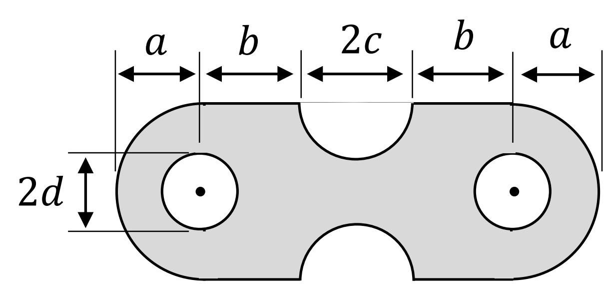
A. Vrai ou faux. Considérez une roue qui roule sans glisser sur une surface horizontale. Alors, le frottement statique qu'exerce le sol sur la roue contribue à faire ralentir la roue. (10 points)

B. Un ressort de torsion exerce un couple de 100 N·m lorsqu'il est déplacé de 360° par rapport à sa position naturelle. Quelle est l'énergie potentielle emmagasinée dans le ressort? (10 points)

C. Considérez un fluide parfait et incompressible qui circule dans une conduite de section variable $S(x)$. À x = 0 m, le fluide possède une vitesse v_0 et la conduite a une section S_0. Exprimez la vitesse $v(x)$ du fluide en fonction de sa position dans la conduite, de v_0 et de S_0. (10 points).

D. Considérez la pièce homogène ci-dessous (7850 kg/m³) qui a une épaisseur constante e = 2 mm. Toutes les lignes courbes sont des arcs de cercles. On donne a = b = 2 cm, c = 1 cm et d = 0,5 cm. Calculez le moment d'inertie de la pièce par rapport à l'axe qui sort de la page et qui passe par son centre de masse. (25 points)





Question 1 – Concepts et réponses courtes (55 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. FAUX. Le frottement statique s'applique au CIR de la roue (point de contact avec le sol) puisque la roue roule sans glisser. Le CIR ayant une vitesse nulle par rapport au sol, le frottement ne fait pas de travail et ne contribue donc pas à faire ralentir la roue.

10 points de compréhension

B.

$$M_{res} = \kappa \Delta\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{res} = \frac{1}{2}\kappa(\Delta\theta)^2 = \frac{1}{2}M_{res}\Delta\theta = \frac{1}{2}100 \cdot 2\pi = 100\pi = 314\ \mathrm{J}}$$

10 points de calculs

C. Par hypothèse de continuité, le débit du fluide doit être constant partout dans la conduite (sinon il y aurait accumulation de matière à certains endroits).

$$\frac{dm}{dt} = \rho S v = cst \quad \Rightarrow \quad \rho S_0 v_0 = \rho S(x) v(x) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(x) = \frac{S_0}{S(x)} v_0}$$

10 points de compréhension et de calculs

Question 1 – Concepts et réponses courtes (55 points)

D. Moment d'inertie de la pièce.

Décomposition en une plaque rectangulaire (1), deux demi-disques aux extrémités (2-3), deux demi-disques enlevés (4-5) et deux disques enlevés (6-7).

$$m_1 = \rho(2b+2c)(2a)e = 37{,}68\ \mathrm{g} \qquad m_4 = -\rho\frac{1}{2}\pi c^2 e = -2{,}466\ \mathrm{g}$$

$$m_2 = \rho\frac{1}{2}\pi a^2 e = 9{,}865\ \mathrm{g} \qquad m_6 = -\rho\pi d^2 e = -1{,}233\ \mathrm{g}$$

$$\bar{I}_1 = \frac{1}{12}m_1\left[(2b+2c)^2+(2a)^2\right] = 163{,}28\ \mathrm{g\cdot cm^2} \qquad I_1 = \bar{I}_1 + m_1 0^2 = 163{,}28\ \mathrm{g\cdot cm^2}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}_3 = \left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)m_2 a^2 = 12{,}62\ \mathrm{g\cdot cm^2} \qquad I_2 = I_3 = \bar{I}_2 + m_2\left(b+c+\frac{4a}{3\pi}\right)^2 = 158{,}75\ \mathrm{g\cdot cm^2}$$

$$\bar{I}_4 = \bar{I}_5 = \left(\frac{1}{2}-\frac{16}{9\pi^2}\right)m_4 c^2 = -0{,}7889\ \mathrm{g\cdot cm^2} \qquad I_4 = I_5 = \bar{I}_4 + m_4\left(a-\frac{4c}{3\pi}\right)^2 = -6{,}911\ \mathrm{g\cdot cm^2}$$

$$\bar{I}_6 = \bar{I}_7 = \frac{1}{2}m_6 d^2 = -0{,}1541\ \mathrm{g\cdot cm^2} \qquad I_6 = I_7 = \bar{I}_6 + m_6(b+c)^2 = -11{,}25\ \mathrm{g\cdot cm^2}$$

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{7} I_i = 444\ \mathrm{g\cdot cm^2} = 4{,}44\times10^{-5}\ \mathrm{kg\cdot m^2}}$$

25 points de calculs

Question 2 (55 points)

Le pendule balistique suivant permet de déterminer la vitesse du projectile qui le frappe. Le pendule est composé d'un support et d'un bloc massif qui tournent ensemble autour du pivot O. Le pendule est vertical au départ et atteint un angle maximum θ_{max} = 60° suite à l'impact avec le projectile. Après l'impact, le projectile reste incrusté dans le pendule. Toutefois, puisque la masse du projectile est beaucoup plus faible que celle du pendule, on peut négliger la masse du projectile après l'impact.

La gravité s'exerce verticalement. Le centre de masse du pendule est situé en G. Le pivot O n'étant pas ideal, il génère un couple de frottement cinétique constant de module τ_f = 10 N·m lorsque le pendule est en mouvement (après l'impact).

Propriétés du pendule et du projectile :

- Pendule : masse M = 5 kg et rayon de giration par rapport à O κ_O = 60 cm
- Projectile : masse m = 100 g

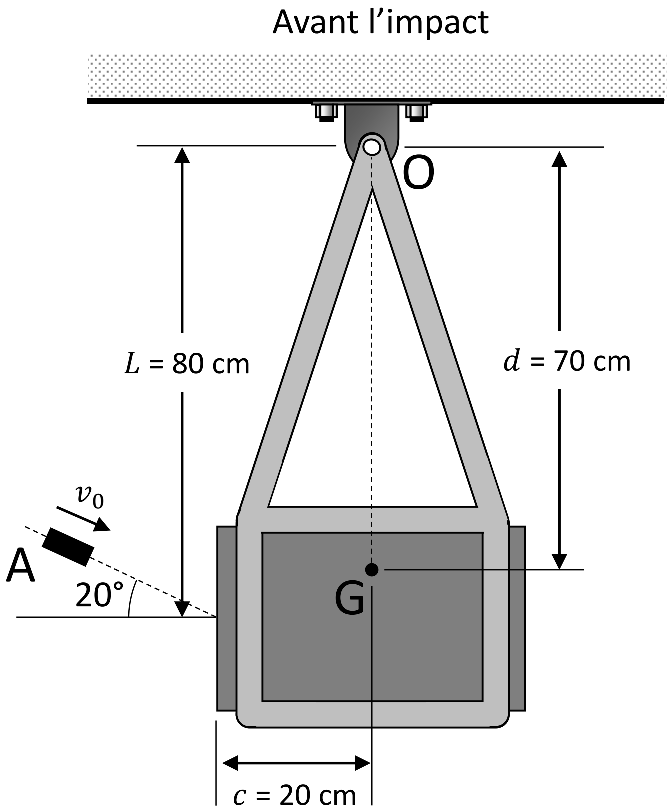
A. Faites le DCL-DCE du pendule après l'impact. (15 points)

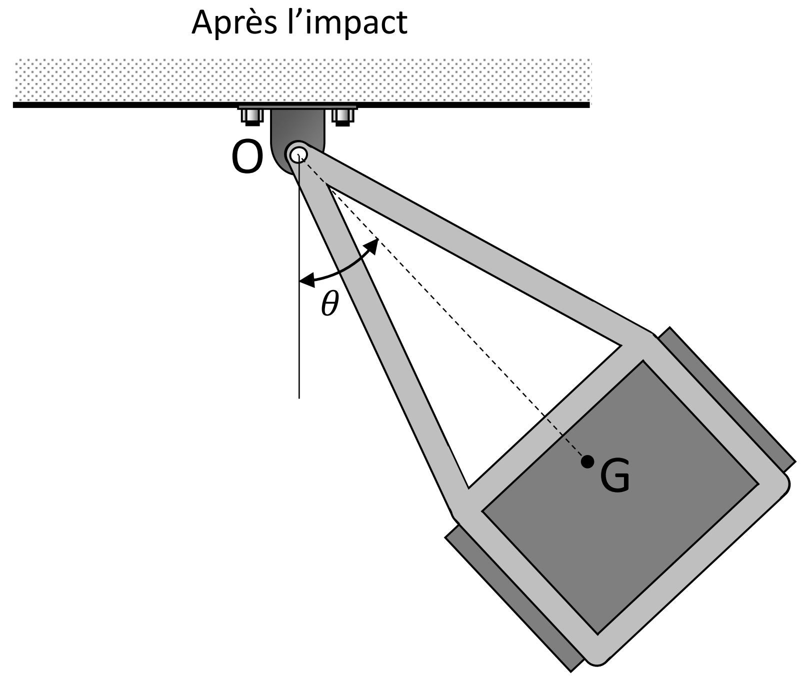
B. Déterminez l'expression algébrique de la vitesse angulaire du pendule après l'impact en fonction de l'angle θ. (Répondre avec les variables données dans l'énoncé et sur la figure, mais ne pas utiliser les valeurs numériques.) (20 points)

C. Déterminez le module de la vitesse du projectile avant l'impact. Exprimez votre réponse en km/h. (20 points)

Bonus. Déterminez l'expression du module de la réaction exercée par le pivot sur le pendule juste après l'impact. (15 points)

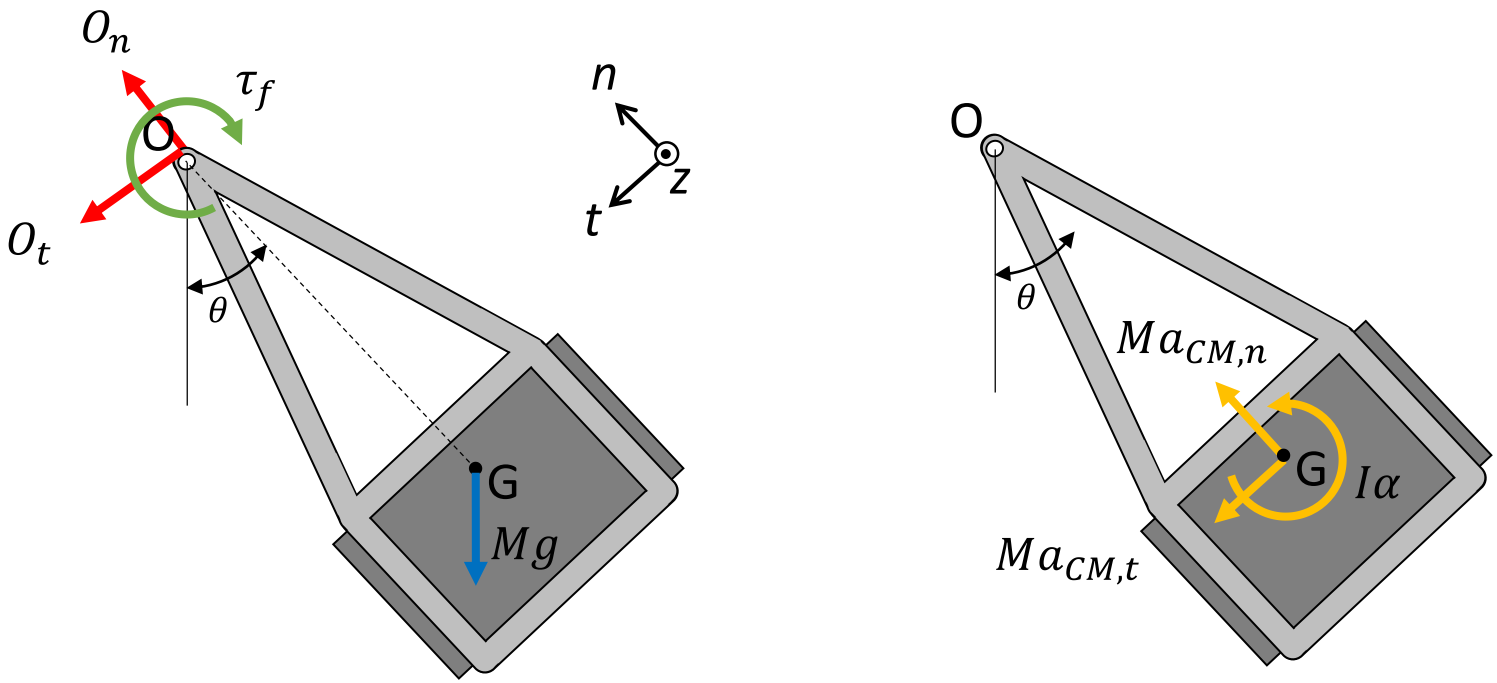
Question 2 (55 points)





Q2 – Solution (1/4)

A. DCL-DCE du pendule après l'impact



Système d'axes : peut être cartésien ou normal/tangentiel

DCL : poids vers le sol, réactions au pivot, couple du frottement en sens horaire (s'oppose au mouvement)

DCE : une composante pour $m\vec{a}$ selon chaque axe, appliquée au CM, et le couple $I\alpha$

15 points de compréhension

Q2 – Solution (2/4)

B. Expression de la vitesse angulaire du pendule après l'impact en fonction de l'angle θ.

Système : pendule

Méthode #1 – Principe travail-énergie

Forces et couples conservatifs : poids

Forces et couples non conservatifs : réactions au pivot et couple de frottement

La somme des travaux non conservatifs est non nulle, car les réactions au font un travail nul (O est immobile), mais le couple de frottement fait un travail négatif.

État 1 : le pendule fait un angle θ et a une vitesse angulaire ω

État 2 : le pendule est à son angle maximum $\theta_{\max}$ ($\omega = 0$)

Moment d'inertie du pendule

$$I_O = M\kappa_O^2$$

$$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$$

$$\Rightarrow \quad -\tau_f(\theta_{\max} - \theta) = Mgd(1 - \cos\theta_{\max}) - \left(\frac{1}{2} I_O \omega^2 + Mgd[1 - \cos\theta]\right)$$

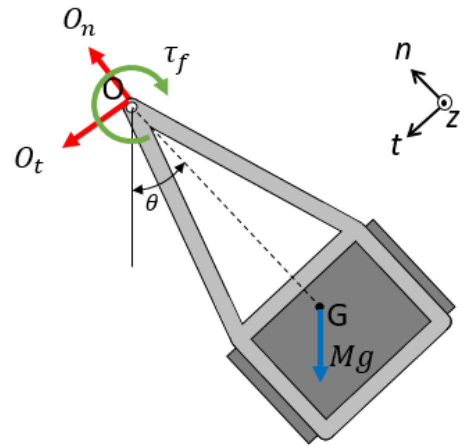
$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{M\kappa_O^2}\left[Mgd(\cos\theta - \cos\theta_{\max}) + \tau_f(\theta_{\max} - \theta)\right]}}$$

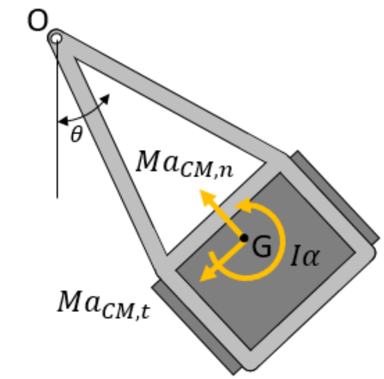
20 points de résolution de problème

Q2 – Solution (3/4)

B. Expression de la vitesse angulaire du pendule après l'impact en fonction de l'angle θ.

Système : pendule





Méthode #2 – Dynamique de rotation

$$\sum M_O = I_O \alpha$$

$$-\tau_f - Mgd\sin\theta = M\kappa_O^2 \alpha$$

$$\alpha = -\frac{\tau_f + Mgd\sin\theta}{M\kappa_O^2}$$

Moment d'inertie du pendule

$$I_O = M\kappa_O^2$$

Cinématique en rotation

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{d\omega}{d\theta}$$

$$\int_{\omega}^{0} \omega d\omega = \int_{\theta}^{\theta_{\max}} \alpha d\theta$$

$$-\frac{1}{2}\omega^2 = \frac{-\tau_f(\theta_{\max} - \theta) + Mgd(\cos\theta_{\max} - \cos\theta)}{M\kappa_O^2}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{2}{M\kappa_O^2}\left[Mgd(\cos\theta - \cos\theta_{\max}) + \tau_f(\theta_{\max} - \theta)\right]}}$$

Q2 – Solution (4/4)

C. Module de la vitesse du projectile avant l'impact

Système : pendule + projectile

Pendant l'impact, seules les forces du pivot sont impulsives (i.e. le poids et le couple de frottement sont négligeables).

On a donc que $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$ et le moment cinétique est conservé par rapport au pivot O.

Conservation du moment cinétique pendant l'impact

État 1 : Juste avant l'impact (pendule immobile et projectile en mouvement)

$$\vec{H}_{O1} = m v_0 \left(L \cos 20° + c \sin 20°\right) \vec{k}$$

État 2 : Juste après l'impact (pendule en position verticale avec une vitesse angulaire $\omega(\theta = 0)$, projectile négligeable)

$$\vec{H}_{O2} = I_O \omega \vec{k}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{M\kappa_O^2}\left[Mgd\left(1 - \cos\theta_{max}\right) + \tau_f \theta_{max}\right]} = 4{,}99 \text{ rad/s}$$

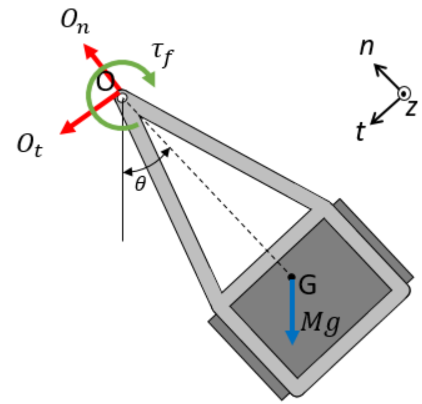
$$\vec{H}_{O1} = \vec{H}_{O2} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{M\kappa_O^2 \omega}{m\left(L \cos 20° + c \sin 20°\right)} = 109 \text{ m/s} = 394 \text{ km/h}}$$

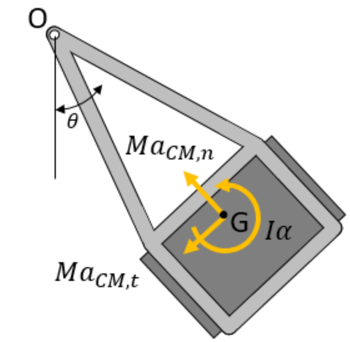
20 points de résolution de problème

Q2 – Solution (Bonus)

Bonus. Module de la force de réaction due au pivot quand $\theta = 0$.

DCL- DCE du pendule





$$\sum F_n = O_n - Mg\cos\theta = Ma_{CM,n} = M\frac{v_{CM}^2}{d}$$

$$\Rightarrow O_n = Md\omega^2 + Mg\cos\theta$$

$$\sum F_t = O_t + Mg\sin\theta = Ma_{CM,t}$$

$$\Rightarrow O_t = -Md\left(\frac{\tau_f + Mgd\sin\theta}{M\kappa_O^2}\right) - Mg\sin\theta$$

$$O_t = -\frac{d\tau_f}{\kappa_O^2} - Mg\left(1+\frac{d^2}{\kappa_O^2}\right)\sin\theta$$

$$v_{CM} = d\omega$$

$$a_{CM,t} = d\alpha$$

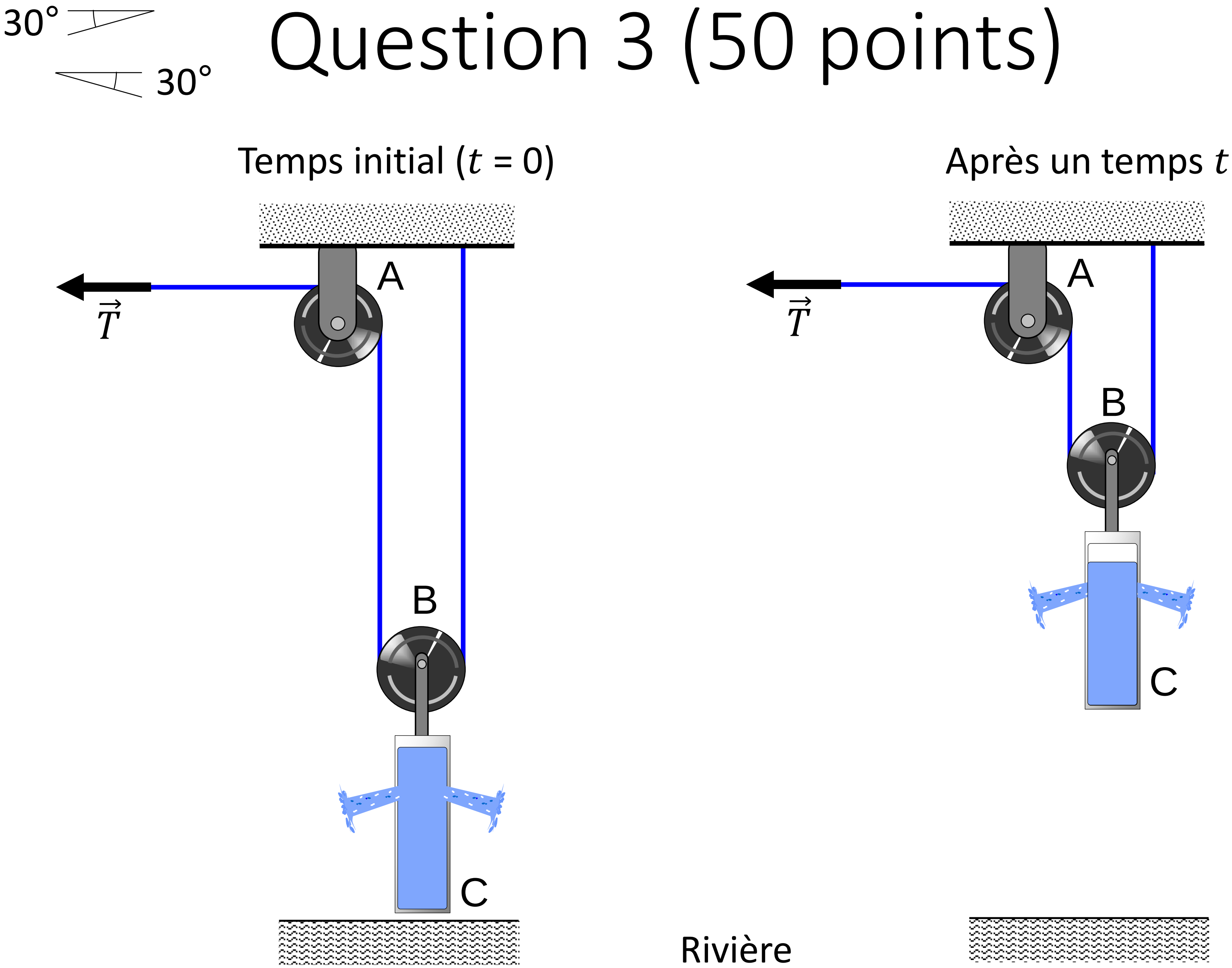
$$\alpha = -\frac{\tau_f + Mgd\sin\theta}{M\kappa_O^2}$$

Quand $\theta = 0$, on a $\omega = 4{,}99\ \mathrm{rad/s}$ et donc :

$$\boxed{O = \sqrt{O_n^2 + O_t^2} = \sqrt{M^2\left(d\omega^2 + g\right)^2 + \left(\frac{d\tau_f}{\kappa_O^2}\right)^2} = \sqrt{136{,}20^2 + 19{,}444^2} = 138\ \mathrm{N}}$$

15 points de résolution de problème

Question 3 (50 points)



Question 3 (50 points)

Pour récolter un échantillon d'eau d'une rivière, on descend un contenant C dans la rivière à l'aide d'une corde et des poulies A et B, on le submerge dans l'eau pour qu'il se remplisse, puis on le remonte en tirant sur le câble horizontal avec une force T. Le contenant est percé de deux ouvertures dans ses parois latérales afin d'évacuer l'excès d'eau.

On s'intéresse au contenant lorsqu'il est dans l'air et qu'il se déplace à une vitesse constante v = 25 cm/s vers le haut. Pendant qu'il monte, l'eau en excès s'échappe par deux ouvertures circulaires de diamètre d = 50 mm. On suppose que l'eau s'échappe du contenant avec une vitesse relative constante u = 30 cm/s par rapport au contenant avec un angle de 30 degrés sous l'horizontale.

La masse initiale du contenant (au moment où l'eau commence à s'échapper) est m_0 = 8 kg. On néglige la masse de la poulie A, mais la poulie B a une masse m_B = 800 g, un rayon R = 5 cm et un moment d'inertie I_B = 1,2 g·m² par rapport à son centre. La masse volumique de l'eau est 1000 kg/m³.

N.B. On suppose que le câble ne glisse pas sur les poulies.

A. Faites le DCL-DCE (10 points):

i. Du contenant avec l'eau à l'intérieur, en incluant la tige qui relie le contenant à la poulie B ;

ii. De la poulie B seulement, sans la tige qui la relie au contenant C.

B. Déterminez la force totale (vecteur) exercée sur le contenant par l'eau qui est éjectée. (10 points)

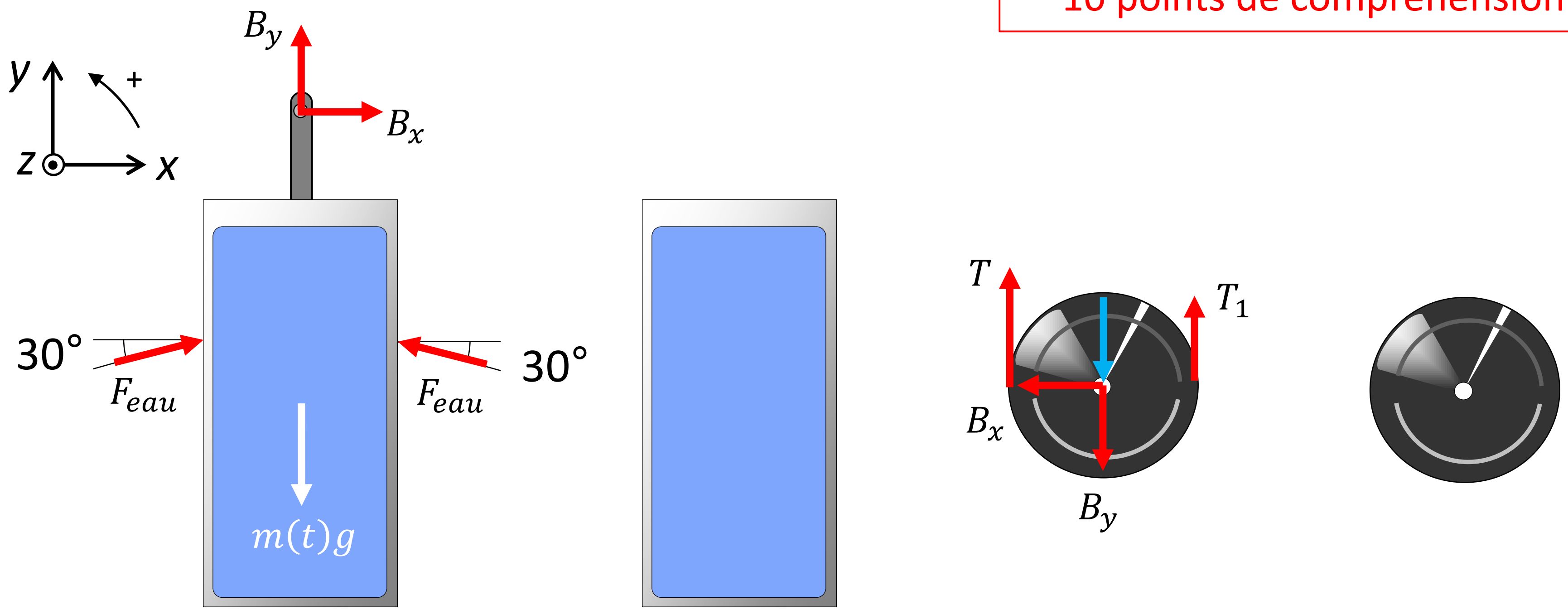
C. Déterminez la force T avec laquelle il faut tirer sur le câble pour monter le contenant à vitesse constante. Exprimez votre réponse en fonction du temps t écoulé depuis l'instant où l'eau commence à s'échapper. (20 points)

D. Quelle est la puissance développée par la force T à t = 2 s ? (10 points)

Q3 – Solution (1/4)

A. DCL-DCE du contenant, et de la poulie B.

10 points de compréhension



- Il doit y avoir au moins un système d'axes.
- Les forces dues à l'eau sont de même module, et elles doivent être dirigées vers le contenant (jets qui sortent du système).
- Le poids s'applique au centre de masse du système, vers le bas.
- Parce que la poulie B possède une masse, on ne peut pas supposer que les tensions sont les mêmes à gauche et à droite. Par contre, la tension à gauche vaut T, car la poulie A n'a pas de masse.
- Il n'y a rien dans les DCE puisque la vitesse de B et de C est constante (la vitesse angulaire de la poulie donc aussi constante).

Q3 – Solution (2/4)

B. Force totale exercée par l'eau éjectée sur le contenant.

Vitesse relative de l'eau par rapport au contenant :

$$v_{eau/C} = u = 0{,}300 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{eau/C} = v_{eau}\left(\pm\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right) = \left(\pm 0{,}2598\vec{i} - 0{,}150\,\vec{j}\right)\text{m/s}$$

Débit massique :

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S u = \rho\frac{\pi d^2}{4}u = 0{,}5890 \text{ kg/s}$$

Force exercée par les deux jets d'eau :

$$\vec{F}_{eau,totale} = -\left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_{g,eau/C} - \left|\frac{dm}{dt}\right|\vec{v}_{d,eau/C} = -\rho\frac{\pi d^2}{4}u^2\left(-\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j} + \cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{j}\right)$$

$$\boxed{\vec{F}_{eau,totale} = \rho\frac{\pi d^2}{2}u^2\sin\theta\vec{j} = 0{,}177\,\vec{j}\text{ N}}$$

15 points de calculs

Q3 – Solution (3/4)

C. Force T pour faire monter le contenant à vitesse constante.

La somme des forces sur le contenant et sur la poulie B sont nulles puisque leurs centres de masse se déplacent à vitesse constante. La somme des moments sur la poulie B est également nulle puisque la corde ne glisse pas sur la poulie (sa vitesse angulaire est constante et reliée à la vitesse de son CM).

Contenant C : $$\sum F_y = B_y + \rho \frac{\pi d^2}{2} u^2 \sin\theta - m(t) g = 0$$

Poulie B : $$\sum F_y = -B_y + T + T_1 - m_B g = 0$$

$$\sum M_{CM} = TR - T_1 R = 0 \quad \Rightarrow \quad T = T_1$$

On ne peut pas supposer que $T = T_1$ sans expliquer/calculer que la somme des moments sur la poulie B est nulle.

Parce qu'on suppose que u est constante, le débit massique est constant (facteur 2 pour les deux ouvertures) et la masse du contenant est :

$$m(t) = m_0 + \frac{dm}{dt} t = m_0 - 2\rho \frac{\pi d^2}{4} ut$$

La tension vaut donc :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\left[m_0 + m_B - 2\rho \frac{\pi d^2}{4} ut \right] g - \rho \frac{\pi d^2}{4} u^2 \sin\theta = 43{,}1 - 5{,}78t \text{ N}}$$

20 points de résolution de problème

Q3 – Solution (4/4)

D. Puissance exercée par la force T après 2 secondes.

Vitesse du segment de câble tiré par T (mouvement contraint) :

$$\sum \Delta\ell_i = \Delta x_T - 2\Delta y_C = 0 \quad \Rightarrow \quad v_T = 2v_C$$

Puissance instantanée :

$$P_T = \vec{T}\cdot\vec{v}_T = \left(-T\vec{i}\right)\cdot\left(-2v_C\vec{i}\right) = 2v_C T$$

À t = 2 s, on a :

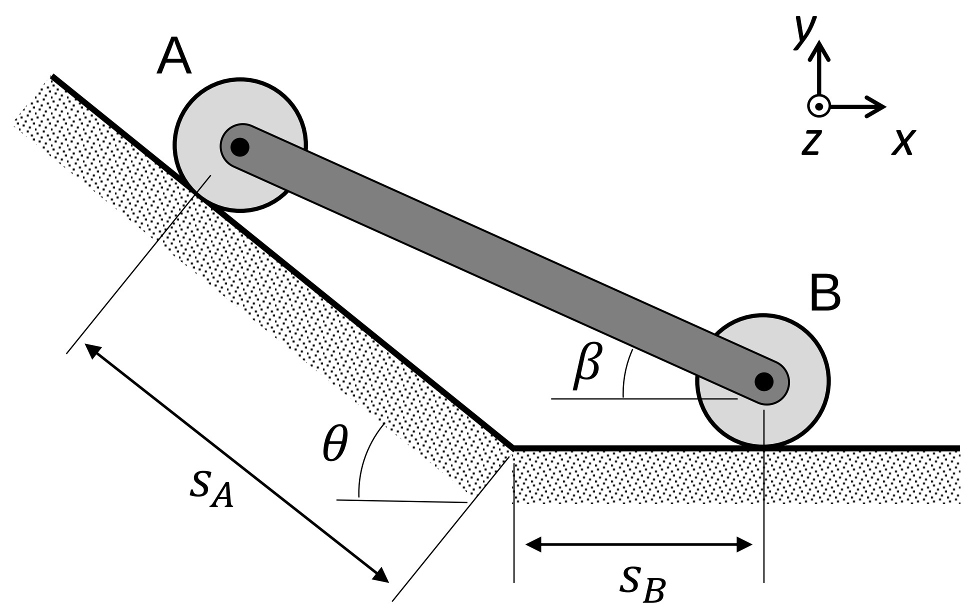
$$\boxed{P_T(t = 2\ \mathrm{s}) = 2\cdot 0{,}25\left(43{,}1 - 5{,}78\cdot 2\right) = 15{,}8\ \mathrm{W}}$$

10 points de calculs

Question 4 (40 points)

La tige homogène AB est reliée à deux roulettes identiques A et B à ses extrémités. À l'instant illustré sur la figure, la tige se déplace vers le bas du plan incliné et elle fait un angle β = 30° avec l'horizontale. Le centre de la roulette B possède une vitesse de 1,50 m/s à cet instant. Les roulettes sont des disques homogènes et elles roulent sans glisser.

On donne : M = 5 kg la masse de la tige AB
L = 4 m la longueur de la tige AB
m = 1 kg la masse d'une roulette
r = 6 cm le rayon d'une roulette
θ = 50°



A. Déterminez la vitesse angulaire de la tige et le vecteur vitesse de son centre de masse à l'instant représenté sur la figure. Utilisez le système d'axes de la figure. (20 points)

B. Quelle est l'énergie cinétique de la tige et des deux roulettes à cet instant ? (20 points)

Bonus. Exprimez le module de la vitesse du centre de la roulette A en fonction du module de la vitesse du centre de la roulette B et des positions s_A et s_B <u>à un instant quelconque</u> (β n'est plus égal à 30°). (10 points)

Q4 – Solution (1/2)

A. Vitesse angulaire de la tige AB et vitesse de son CM

Distances entre A, B et le CIR de AB

$$\frac{L}{\sin\theta} = \frac{d_A}{\sin(90° - \beta)} = \frac{d_B}{\sin(90° - \theta + \beta)}$$

$$d_A = 4{,}522\ \text{m} \qquad d_B = 4{,}907\ \text{m}$$

Vitesse angulaire de la tige AB

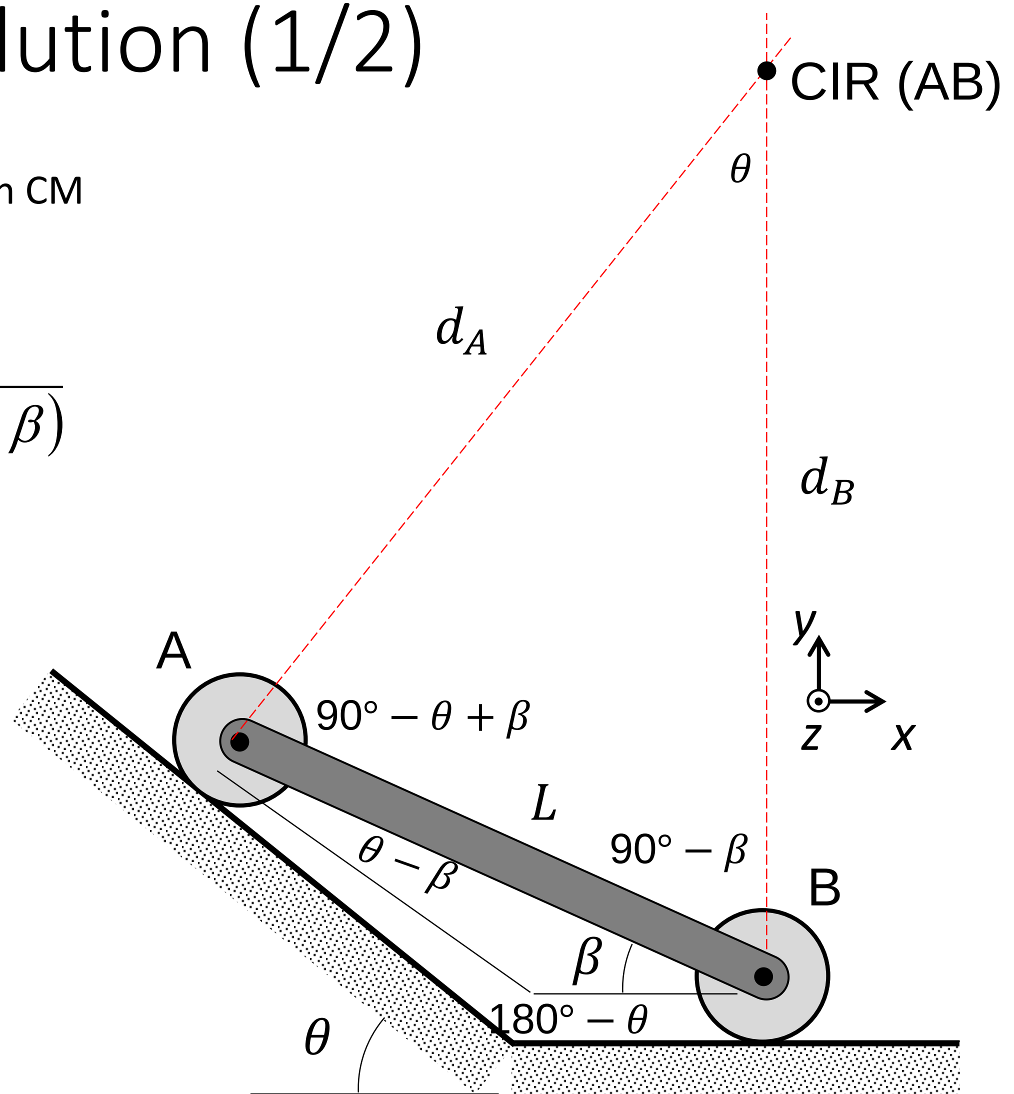
$$\boxed{\omega_{AB} = \frac{v_B}{d_B} = \frac{1{,}50\ \text{m/s}}{4{,}907\ \text{m}} = 0{,}306\ \text{rad/s}}$$

Vitesse du CM de la tige AB

$$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_B + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{CM/B}$$

$$\vec{v}_{CM} = v_B\vec{i} + \omega_{AB}\vec{k} \times \frac{L}{2}\left(-\cos\beta\vec{i} + \sin\beta\vec{j}\right)$$

$$\vec{v}_{CM} = \left(v_B - \frac{L}{2}\omega_{AB}\sin\beta\right)\vec{i} - \frac{L}{2}\omega_{AB}\cos\beta\vec{j}$$



$$\boxed{\vec{v}_{CM} = \left(1{,}194\vec{i} - 0{,}530\,\vec{j}\right)\text{m/s}}$$

20 points de résolution de problème

Q4 – Solution (1/2)

B. Énergie cinétique de la tige et des deux roues

Moments d'inertie de la tige et d'une roulette p/r a leur CM (formulaire)

$$\bar{I}_{AB} = \frac{1}{12} ML^2 = 6{,}667 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \qquad \bar{I}_A = \bar{I}_B = \frac{1}{2} mr^2 = 0{,}00180 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Vitesses du CM et vitesses angulaires des roulettes

$$v_{CM} = \sqrt{1{,}194^2 + 0{,}530^2} = 1{,}306 \text{ m/s}$$

$$\omega_B = \frac{v_B}{r} = \frac{1{,}50 \text{ m/s}}{0{,}06 \text{ m}} = 25{,}0 \text{ rad/s}$$

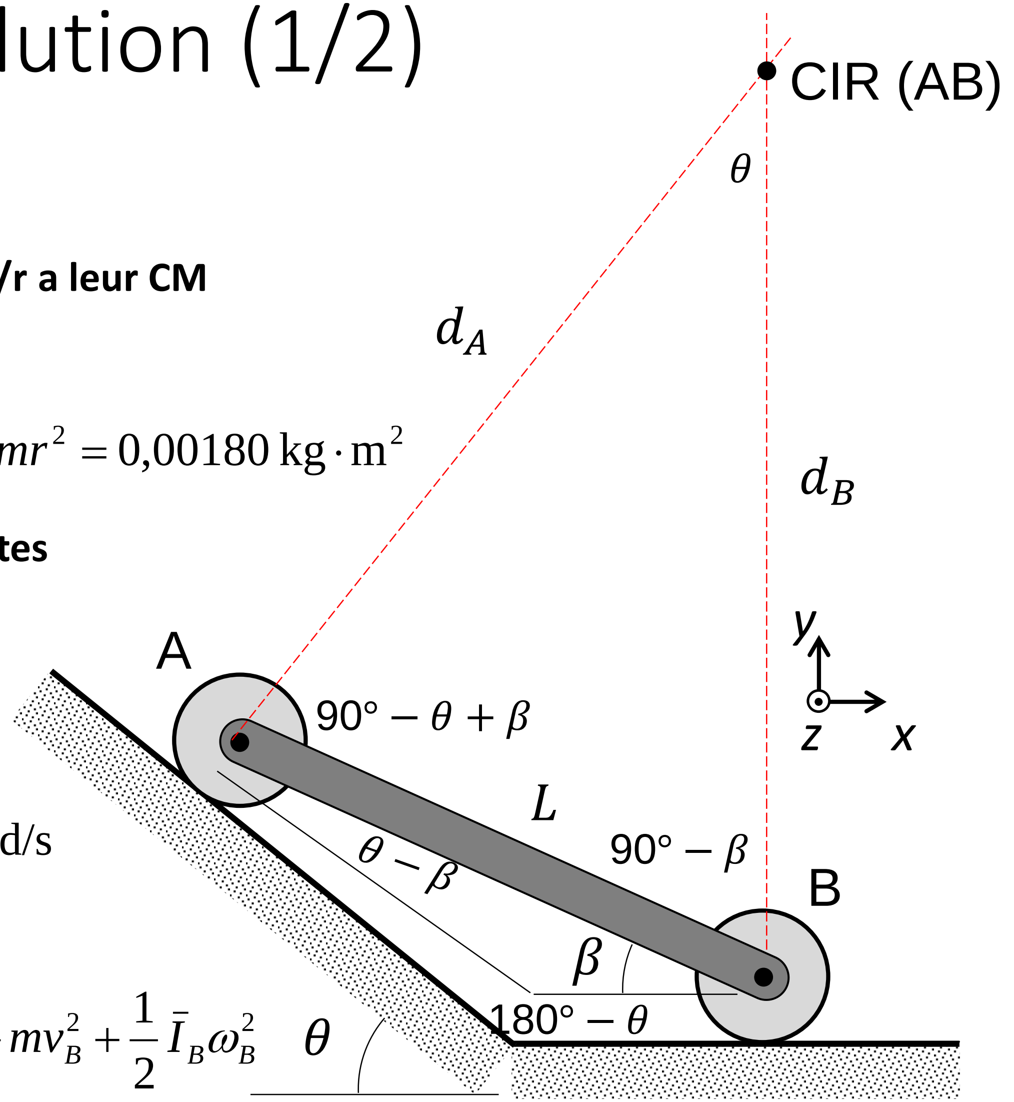
$$v_A = \omega_{AB} d_A = 1{,}384 \text{ m/s} \qquad \omega_A = \frac{v_A}{r} = 23{,}07 \text{ rad/s}$$

Énergie cinétique totale

$$T = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_{AB} \omega_{AB}^2 + \frac{1}{2} m v_A^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2} \bar{I}_B \omega_B^2$$

$$T = (4{,}266 + 0{,}3121 + 0{,}958 + 0{,}479 + 1{,}125 + 0{,}5625) \text{ J}$$

$$\boxed{T = 7{,}70 \text{ J}}$$



20 points de résolution de problème

Q4 – Solution (Bonus)

Bonus. Relation entre les modules des vitesses des deux roulettes en fonction de leurs positions s_A et s_B.

Loi des cosinus dans le triangle AB-s_A-s_B

$$L^2 = s_A^2 + s_B^2 - 2s_A s_B \cos(180° - \theta)$$

$$L^2 = s_A^2 + s_B^2 + 2s_A s_B \cos\theta$$

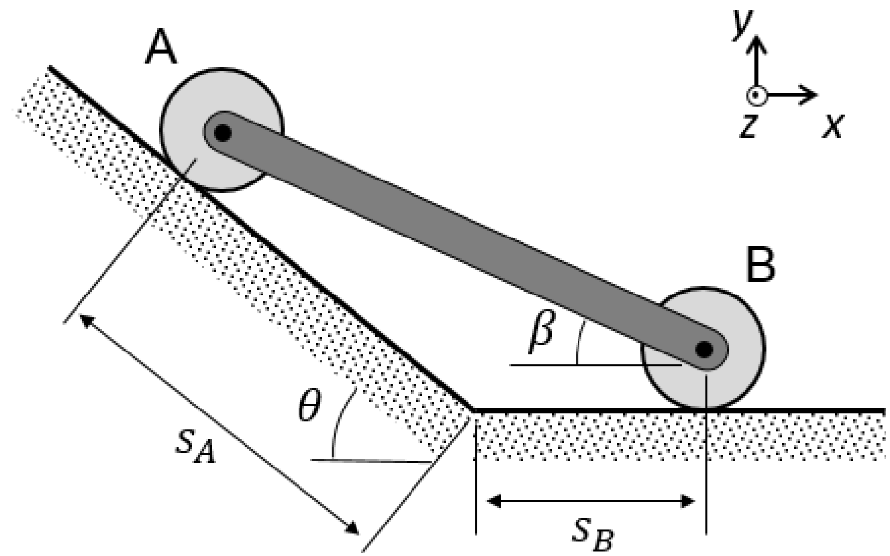
Relation entre les vitesses de A et de B

On dérive par rapport au temps la relation précédente (L et θ sont constants) :

$$0 = 2s_A v_A + 2s_B v_B + 2s_A v_B \cos\theta + 2s_B v_A \cos\theta$$

$$0 = (s_A + s_B \cos\theta)v_A + (s_B + s_A \cos\theta)v_B$$

$$\boxed{|v_A| = \left(\frac{s_A + s_B \cos\theta}{s_B + s_A \cos\theta}\right)|v_B|}$$



10 points de calculs