PHS 1101
Mécanique pour ingénieurs
Cours 6
Cinétique du point matériel

point sans masse

Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

Maîtrisez vos bases !

Mouvement uniformément accéléré (MUA)

Accélération constante en module et en orientation

avec accélération constante sinon les formules s'appliquent pas뺭

$$\vec{a}(t) = \vec{a}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

3 équations vectorielles +
1 équation en module

Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

Cas particulier du MUA avec une accélération nulle

$$\vec{a}(t) = \vec{0} \qquad \vec{v}(t) = \vec{v} = \vec{v}_0 \qquad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}(t - t_0)$$

Variables du mouvement

Dériver ou intégrer pour passer d'une variable à une autre !

$$x(t)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$a(t)$$

Quand a ne dépend pas du temps…

$$\int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{v_0}^{v} \frac{d\nu}{a(\nu)}$$

$$\int_{v_0}^{v} \nu d\nu = \int_{x_0}^{x} a(\chi)d\chi$$

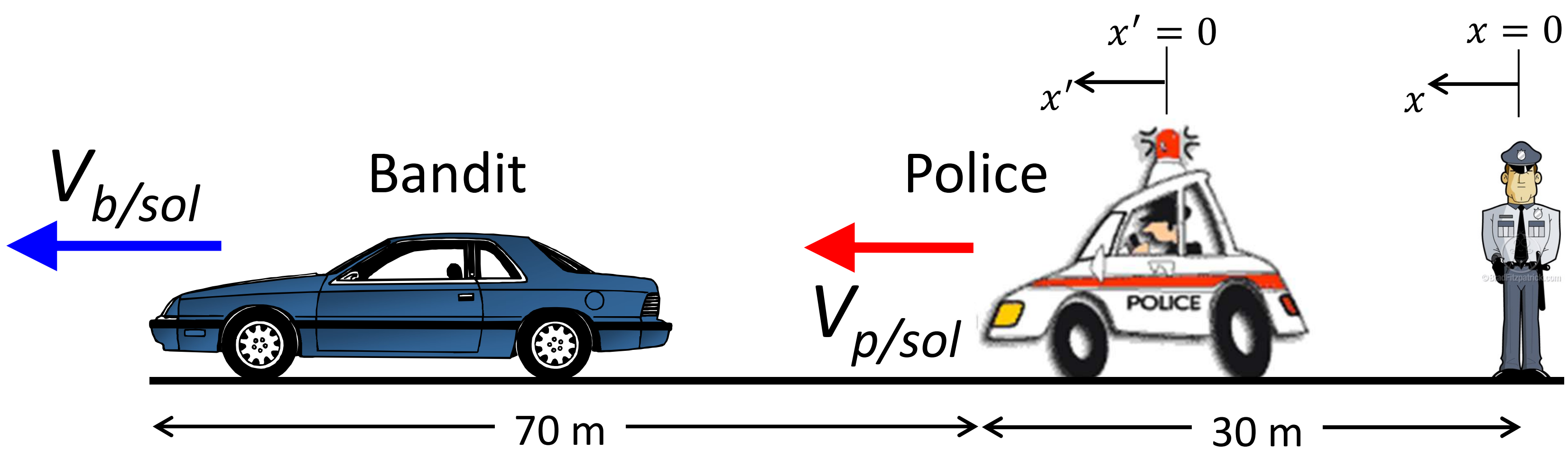
Borne inférieure : variable d'intégration à l'instant initial (t_0, x_0, v_0)
Borne supérieure : variable d'intégration à un instant quelconque (t, x, v)

Mouvement relatif

Les variables du mouvement

$$\vec{r}_{b/p} = \vec{r}_{b/sol} - \vec{r}_{p/sol}$$
$$\vec{v}_{b/p} = \vec{v}_{b/sol} - \vec{v}_{p/sol}$$
$$\vec{a}_{b/p} = \vec{a}_{b/sol} - \vec{a}_{p/sol}$$

représentent le mouvement du bandit (b) tel que perçu par le policier dans sa voiture (p).



Composantes normales et tangentielles

$\hat{u}_t$ toujours dans la direction et dans le sens du vecteur vitesse (donc tangent à la trajectoire)

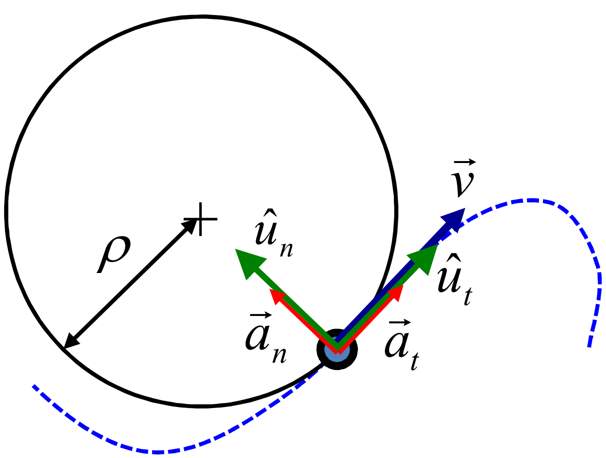
$\hat{u}_n$ toujours normal à $\hat{u}_t$ pointe vers l'intérieur du virage.

Composantes normale et tangentielle

$$\vec{v} = v_t\, \hat{u}_t$$

$$\vec{a} = a_n \hat{u}_n + a_t\, \hat{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{\rho}\hat{u}_n + \frac{dv}{dt}\hat{u}_t$$



Rayon de courbure

$$\rho(x) = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Notations équivalentes en mouvement circulaire

Vitesse angulaire	$\dot{\theta} = \omega$
Accélération angulaire	$\ddot{\theta} = \alpha$
Vitesse (module)	$v = r\omega$
Accélération radiale/normale (module)	$a_r = -\frac{v^2}{r}$
Accélération transvers./tangent. (module)	$a_\theta = r\alpha$

Plan de la semaine

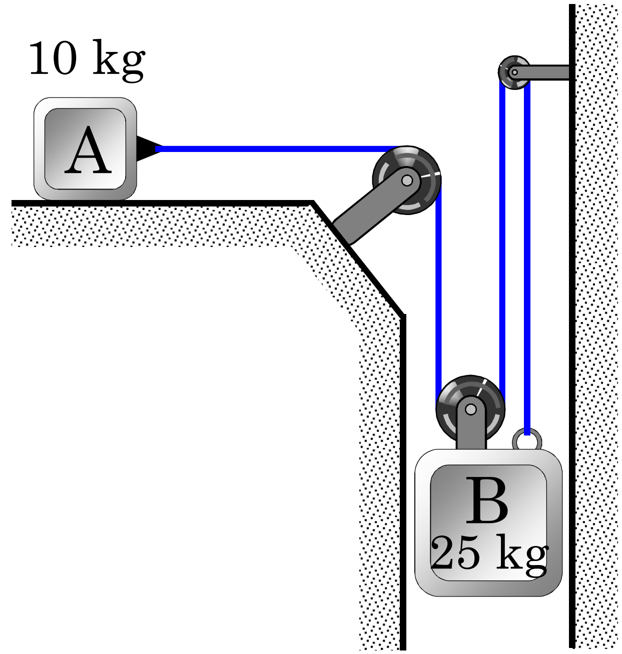
- **Diagramme cinétique équivalent (DCE)**
  - 2e loi de Newton
  - Coordonnées cartésiennes
  - Coordonnées normale et tangentielle

- Mouvement contraint
  - Relation entre le mouvement de deux corps reliés par un câble tendu

Ce que l'on souhaite résoudre

À quelle vitesse va le patineur à la tête de la course?

Photo : Bernard Brault, La Presse, 2010



Est-ce que le système suivant est immobile? S'il ne l'est pas, quelles sont les accélérations des blocs?

Après la statique, on se dirige vers la dynamique!

La (vraie) deuxième loi de Newton

La force résultante est égale au taux de variation de la quantité de mouvement.

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \cancel{\frac{dm}{dt}}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

0

Si la masse étudiée est constante, alors :

$$\boxed{\sum \vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}}$$

Coordonnées cartésiennes ?
Coordonnées normale/tangentielle ?

fonctionne pour tous les système de coordonnées

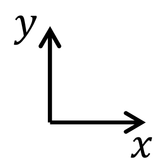
Si la masse varie, alors…

On s'en reparle à la semaine 11!

Systèmes de coordonnées et 2e loi de Newton

Coordonnées cartésiennes

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$
$$= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

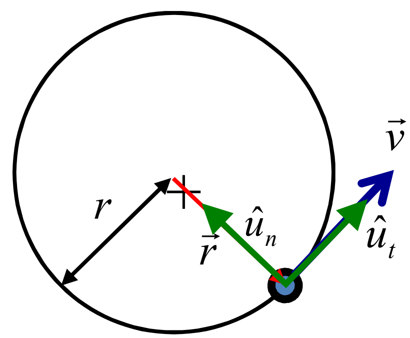


$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= m\ddot{x}\\ \sum F_y &= m\ddot{y}\\ \sum F_z &= m\ddot{z}\end{aligned}}$$

Coordonnées normale/tangentielle

(mouvement circulaire)

$$\vec{a} = a_n\vec{u}_n + a_t\vec{u}_t$$
$$= r\dot{\theta}^2\vec{u}_n + r\ddot{\theta}\,\vec{u}_t$$
$$= \frac{v^2}{r}\vec{u}_n + \frac{dv}{dt}\vec{u}_t$$



$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_n &= \frac{mv^2}{r}\\ \sum F_t &= m\frac{dv}{dt}\end{aligned}}$$

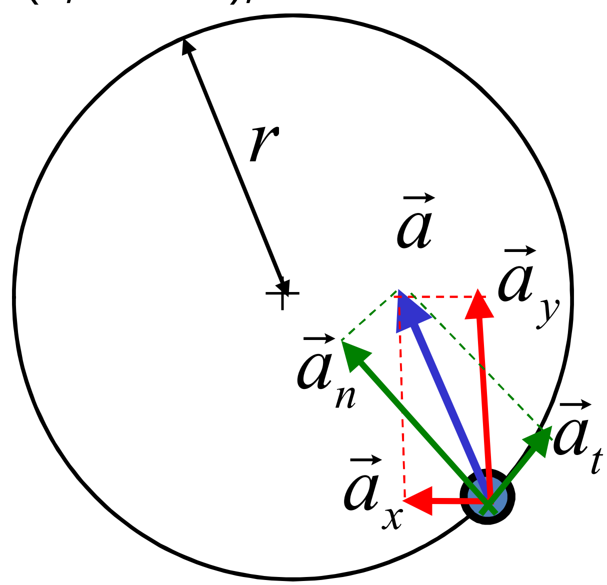
Invariance des quantités scalaires

Peu importe le système de coordonnées choisi pour traiter un problème, les quantités scalaires restent les mêmes.

- Module des forces;
- Module des variables de la cinématique (r, v et a);
- Énergie (potentielle et cinétique).

masse, force, accélération indépendant

$$\boxed{\begin{aligned} \left|\sum \vec{F}\right| &= m\sqrt{a_x^2 + a_y^2} \\ &= m\sqrt{a_n^2 + a_t^2} \\ &= m\sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} \end{aligned}}$$



Vous devez choisir le référentiel qui permet de répondre à la question le plus rapidement!

Diagramme Cinétique Équivalent = DCE

Le DCE est un outil complémentaire au DCL que vous maîtrisez déjà.

Le DCE est nécessaire en dynamique, car les corps accélèrent.

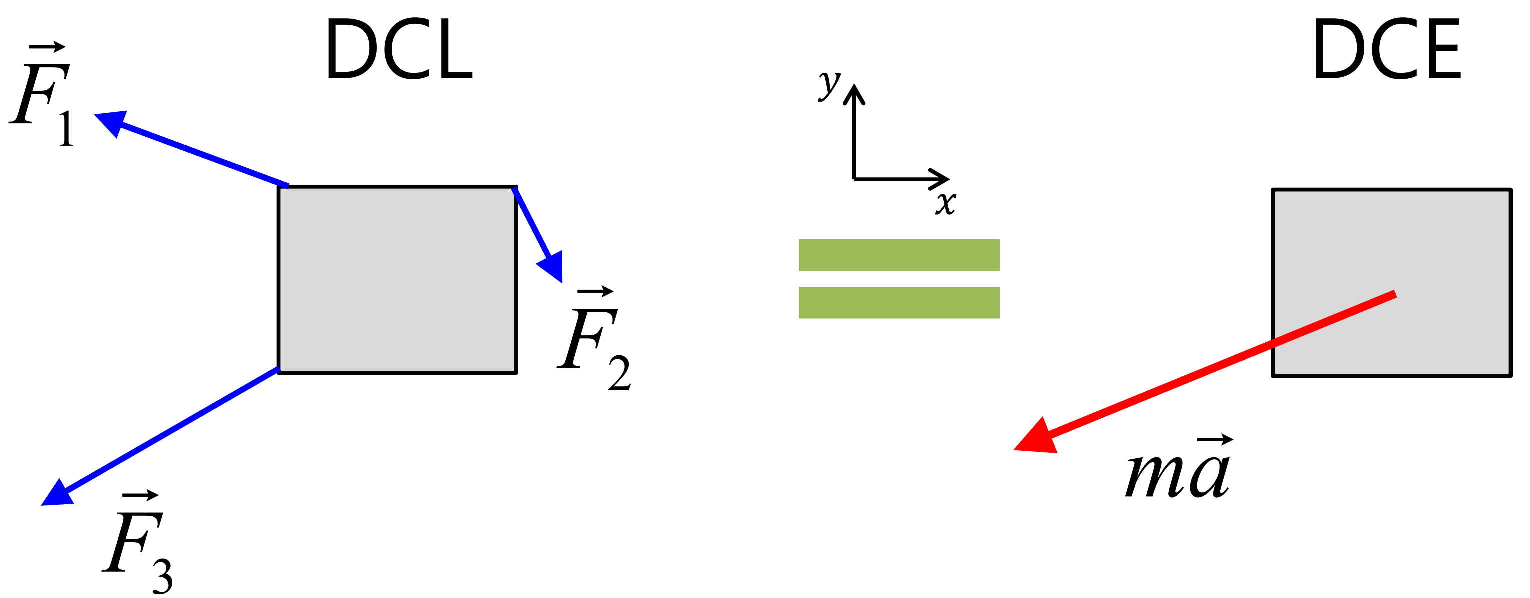
Le DCL-DCE est une représentation graphique de la 2e loi de Newton :

- Les différentes forces apparaissent dans le DCL;
- La résultante (parallèle à l'accélération) apparaît dans le DCE.

DCL – DCE

Diagramme du corps libre Diagramme cinétique équivalent

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$



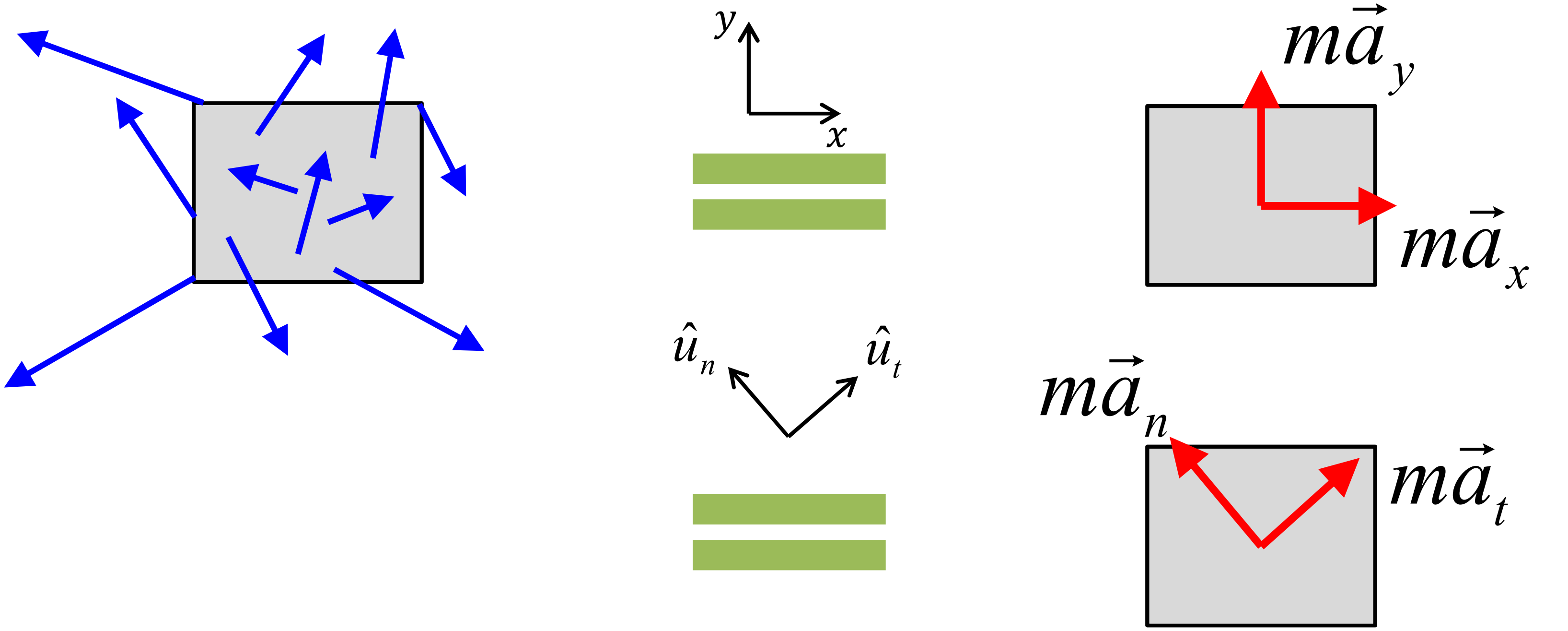
Par abus de langage, on dit souvent DCE pour référer à l'ensemble DCL-DCE.

Comment représenter la résultante ?

DCL

DCE

mettre au centre de masse



Si le sens de l'accélération n'est pas connu, orientez les composantes dans le sens positif des axes. Cela évite bien des erreurs de signe.

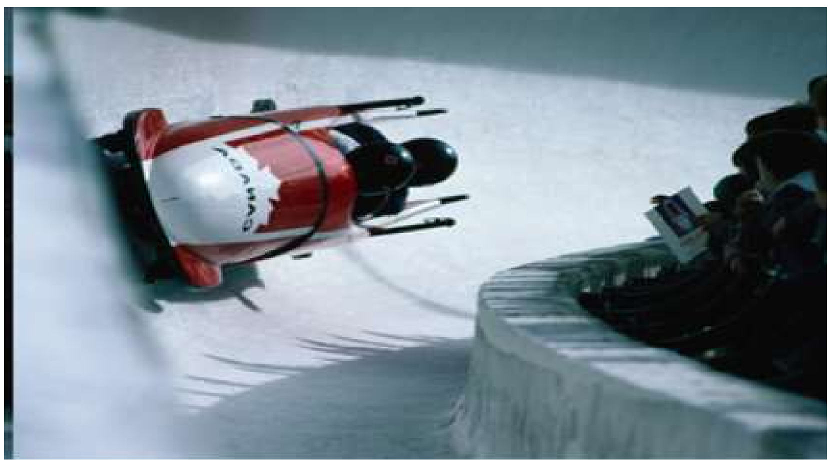
Si le contexte du problème permet de déduire qu'une composante de l'accélération est nulle, ne la dessinez pas.

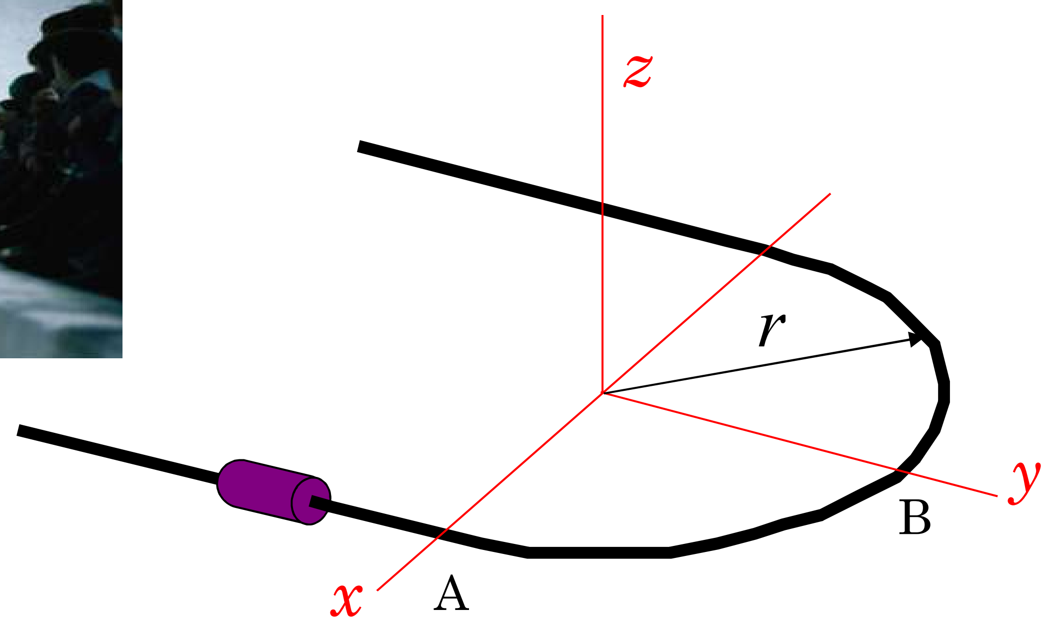
si on sait qu'une accélération est nulle on ne la met pas


adidas
CANADA
7

Exemple – Virage en bobsleigh

Un bobsleigh de masse *m* est modélisé par un chariot qui glisse sans frottement sur un guide situé dans le plan horizontal (*xy*). Si la vitesse du bobsleigh est constante (en module), déterminez le module de la force normale qui s'exerce sur lui quand il passe au point B.





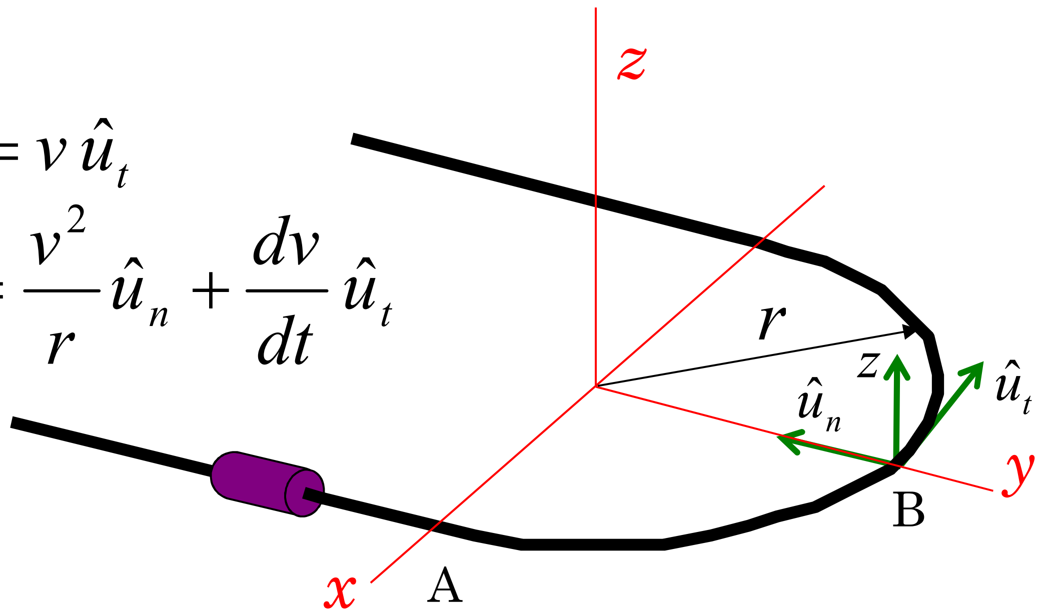
Quel système de coordonnées ?

Exemple – Virage en bobsleigh

Au point B, le bobsleigh suit un mouvement circulaire. On utilise donc le système normal/tangentiel.

$$\vec{v} = v\,\hat{u}_t$$

$$\vec{a} = \frac{v^2}{r}\hat{u}_n + \frac{dv}{dt}\hat{u}_t$$



$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_n &= ma_n = \frac{mv^2}{r}\\ \sum F_t &= ma_t = m\frac{dv}{dt}\end{aligned}}$$

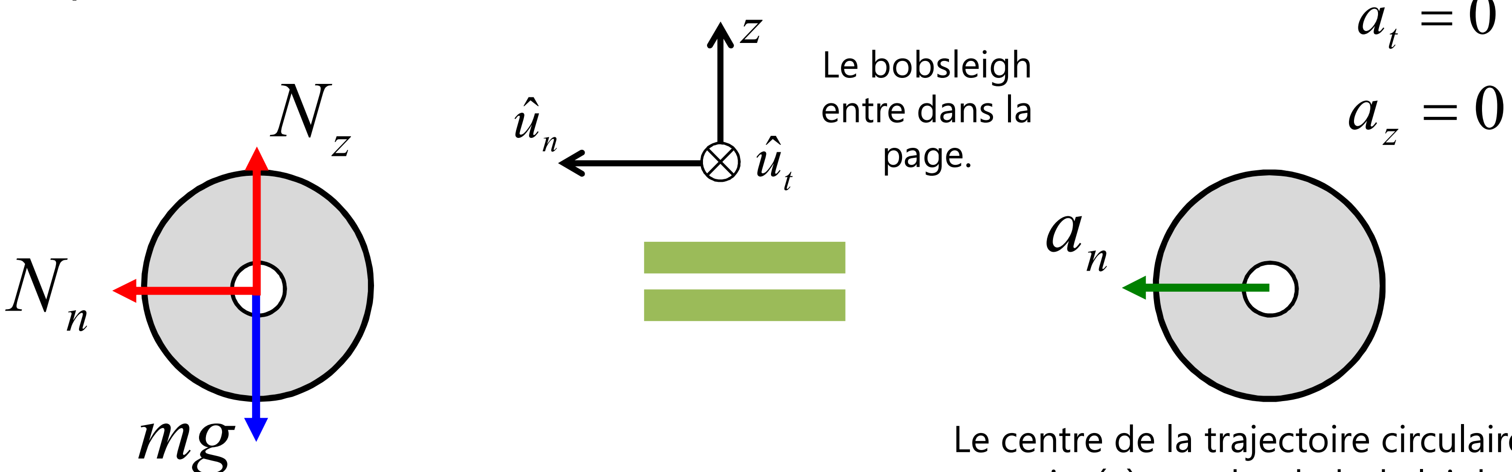
Le mouvement est dans le plan *xy* : $a_z = 0 \Leftrightarrow \sum F_z = 0$

Vitesse constante : $a_t = 0 \Leftrightarrow \sum F_t = 0$

Exemple – Virage en bobsleigh

On fait le DCL-DCE du chariot (vue « cockpit » tangente à la trajectoire).

- La normale est perpendiculaire à la surface entre le guide et le chariot. L'axe du guide suit l'axe $\hat{u}_t$: elle peut donc avoir une composante selon l'axe $\hat{u}_n$ et une composante selon l'axe z.



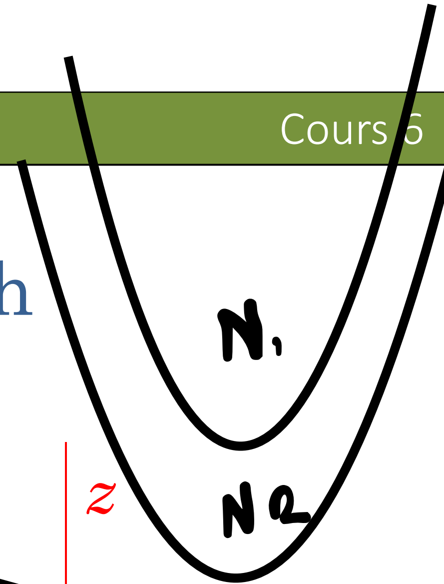
Le centre de la trajectoire circulaire est situé à gauche du bobsleigh.

$$\sum F_n = N_n = \frac{mv^2}{r} \qquad \sum F_t = 0 = 0 \qquad \sum F_z = N_z - mg = 0$$

Équation inutile, car il n'y a pas de force dans la direction du guide (on néglige le frottement).

$N_1 > N_2$

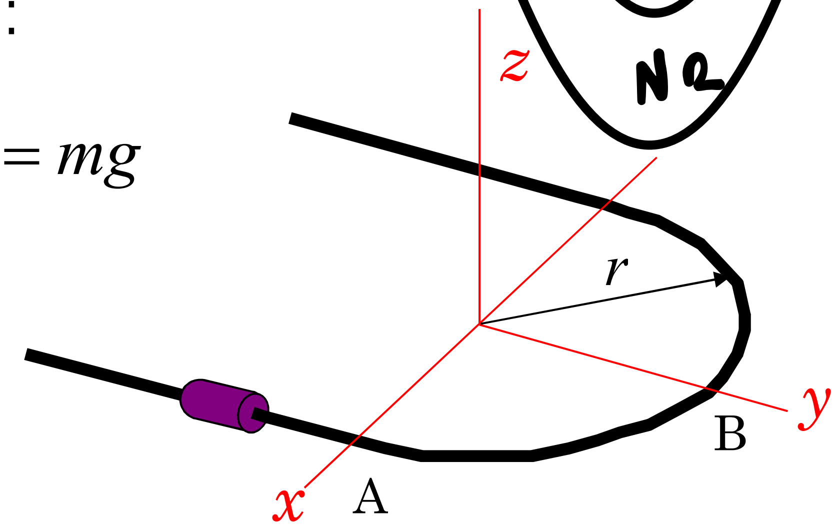
Exemple – Virage en bobsleigh



On isole les composantes de la normale :

$$\sum F_z = N_z - mg = 0 \Rightarrow N_z = mg$$

$$\sum F_n = N_n = \frac{mv^2}{r}$$



puis on calcule son module.

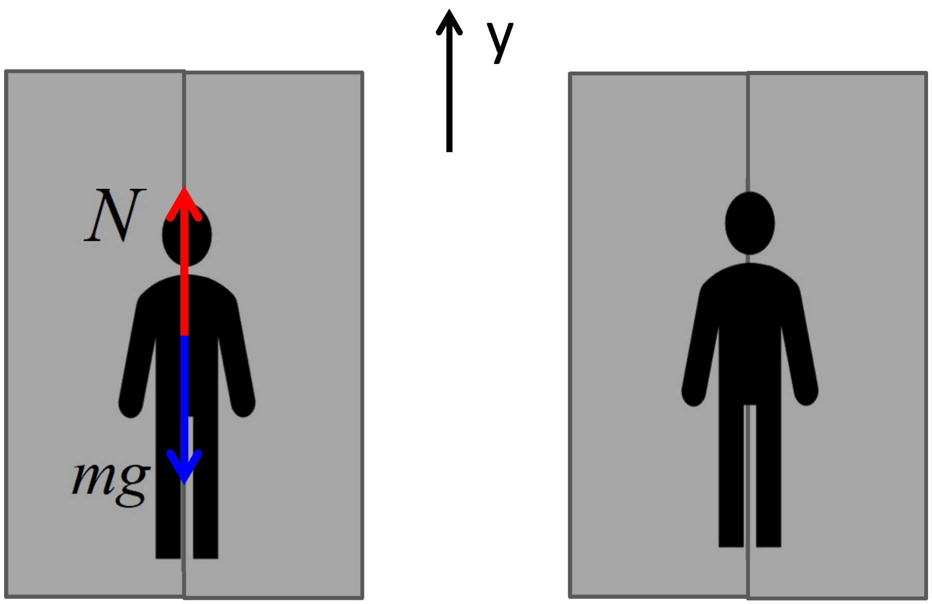
$$N = \sqrt{N_z^2 + N_n^2} = \sqrt{(mg)^2 + \left(\frac{mv^2}{r}\right)^2} \Rightarrow \boxed{N = mg\sqrt{1 + \left(\frac{v^2}{gr}\right)^2}}$$

La normale est d'autant plus grande que le bobsleigh va vite et que le virage est serré.

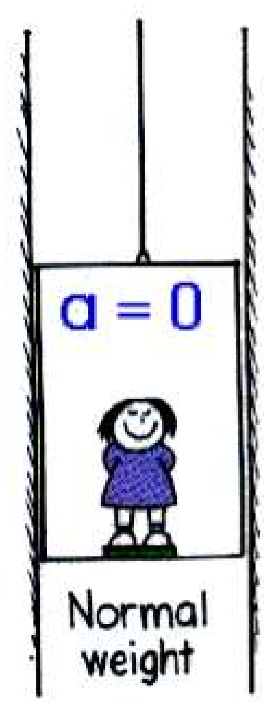
Poids apparent

La normale que l'on ressent est notre poids apparent.

- Plus la normale est grande, plus on se sent lourd.
- Plus elle est petite, plus on se sent léger.



$$N = mg$$

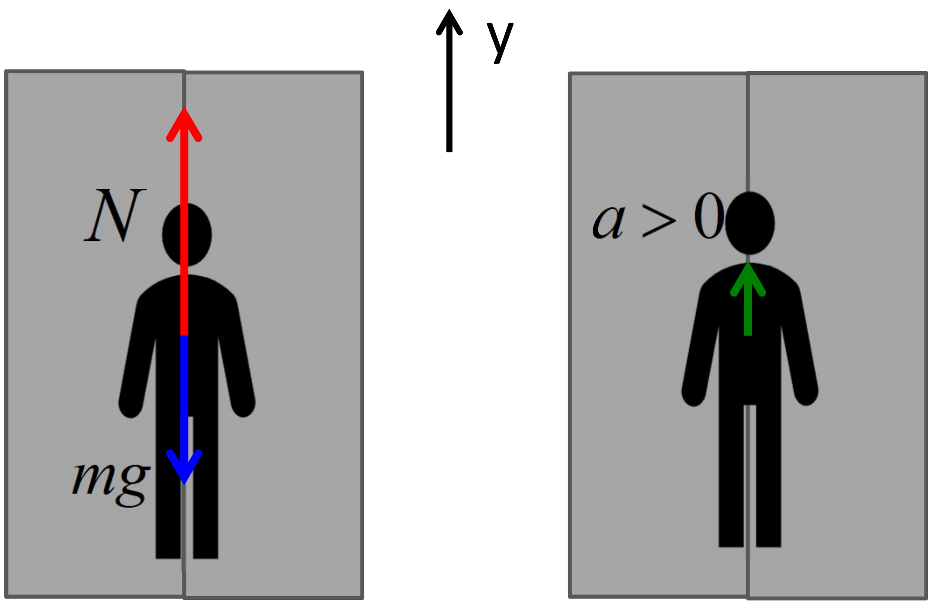


Poids apparent
=
poids réel

Poids apparent

La normale que l'on ressent est notre poids apparent.

- Plus la normale est grande, plus on se sent lourd.
- Plus elle est petite, plus on se sent léger.



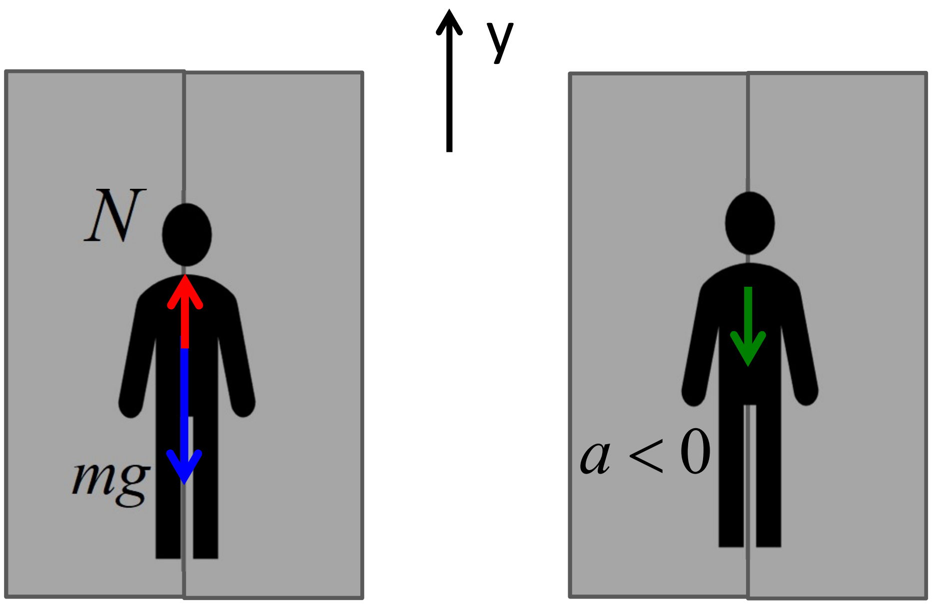
Poids apparent plus élevé que le poids réel

$$N = ma + mg = mg\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Poids apparent

La normale que l'on ressent est notre poids apparent.

- Plus la normale est grande, plus on se sent lourd.
- Plus elle est petite, plus on se sent léger.



$$N = ma + mg = mg\left(1 + \frac{a}{g}\right)$$

Poids apparent plus petit que le poids réel

Apesanteur

($a = -g$, $N = 0$)

Que ressentent les bobeurs/bobeuses ?

$$\boxed{N = mg\sqrt{1+\left(\frac{v^2}{gr}\right)^2}}$$

Les bobeurs/bobeuses ressentent un poids plus élevé que leur poids réel (qu'ils ressentent lorsqu'ils sont immobiles)!

<u>Poids apparent d'une bobeuse</u>

- Vitesse d'un bobsleigh dans un virage moyen : environ 100 km/h.
- Rayon de courbure d'un virage moyen : environ 20 m.

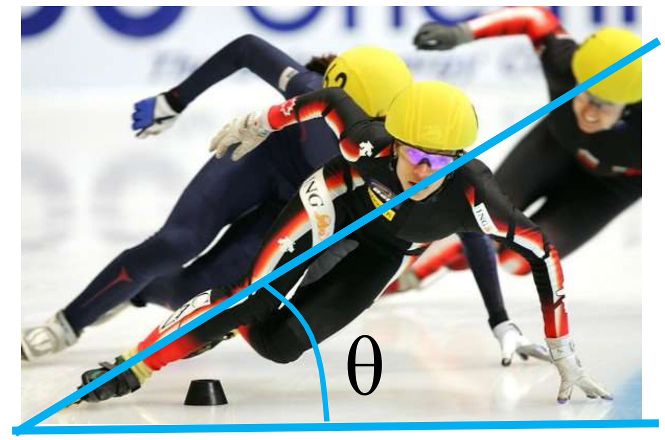
$$\boxed{N \approx 4mg}$$

Ancien examen – Patinage de vitesse

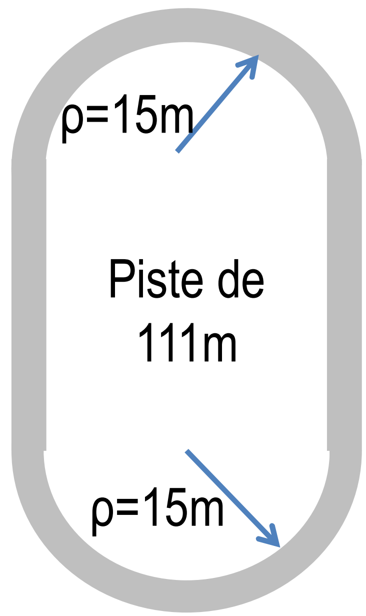
http://i.huffpost.com/gen/3440696/images/o-MARIANNESTGELAIS-facebook.jpg

Ancien examen – Patinage de vitesse

Sur la photo ci-contre, la patineuse Kalyna Roberge négocie le virage de la piste olympique dont le rayon de courbure interne vaut 15 m. On vous demande d'estimer la vitesse à laquelle se déplace la patineuse au moment où la photo a été prise. On suppose qu'elle se déplace à vitesse constante.



A. Quel système de coordonnées serait le plus approprié pour traiter ce problème? (5 points)
B. Faire le DCL-DCE de Kalyna Roberge telle que représentée sur la photo. Supposez que sa main, légèrement appuyée au sol, supporte un poids négligeable. (20 points)
C. Déterminer, en fonction de g, θ, et ρ l'expression du module de la vitesse de la patineuse à l'instant de la photo. (20 points)
D. En supposant un angle d'inclinaison θ = 45°, donnez une valeur numérique pour le module de sa vitesse. (5 points)



Ancien examen – Patinage de vitesse

A. Coordonnées normale/tangentielle.

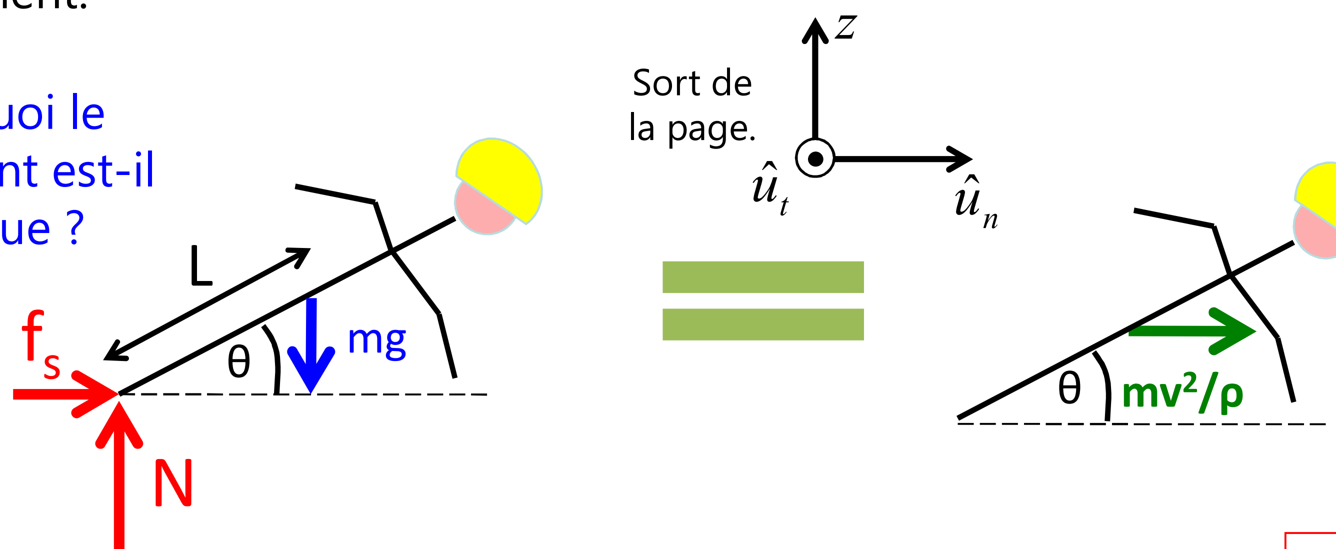
5 points

B. DCL-DCE de la patineuse

Le poids et la résultante doivent être placés au centre de masse de la patineuse.

Le contact entre la lame du patin et la glace est un appui ponctuel avec frottement.

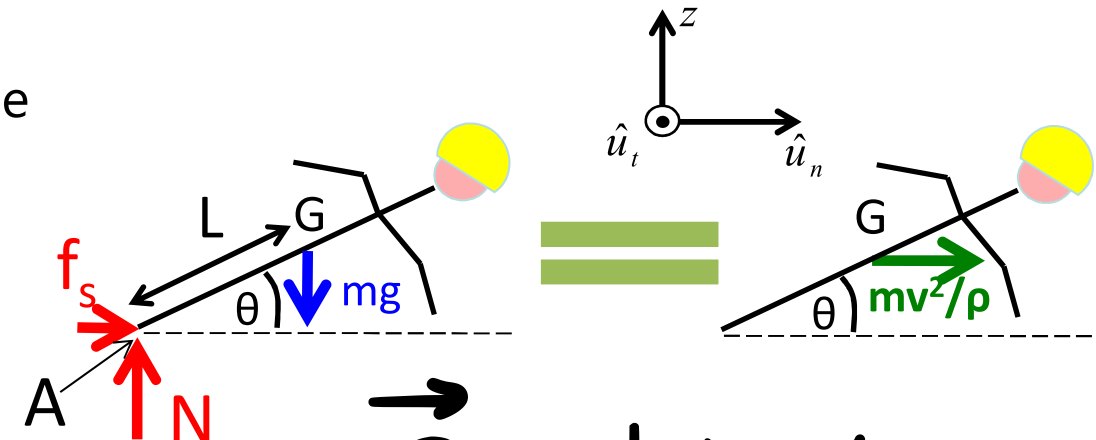
Pourquoi le frottement est-il statique ?



20 points

Ancien examen – Patinage de vitesse

C. Vitesse de la patineuse



2e loi de Newton

$$M_A = \vec{R}\, mL\sin\theta = \frac{mv^2}{\rho} L\sin\theta$$

$$\sum F_n = f_s = \frac{mv^2}{\rho}$$

$$\sum F_z = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

3 inconnues, 2 équations…

Il faut une 3e équation : laquelle ?

Une somme de moments !

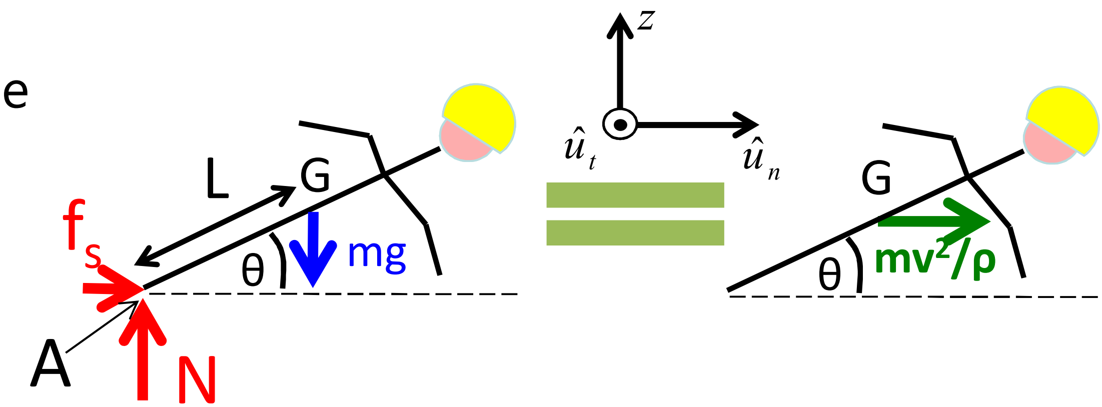
Somme de moments par rapport au CM

$$\sum M_G = f_s L\sin\theta - NL\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{N}{\tan\theta}$$

Ancien examen – Patinage de vitesse

C. Vitesse de la patineuse

$$f_s = \frac{mv^2}{\rho} \qquad N = mg \qquad f_s = \frac{N}{\tan\theta}$$



En combinant les 3 équations, on trouve :

$$\frac{mg}{\tan\theta} = \frac{mv^2}{\rho} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\rho g}{\tan\theta}}}$$

20 points

Nous avons choisi le centre de masse G pour calculer la somme des moments.

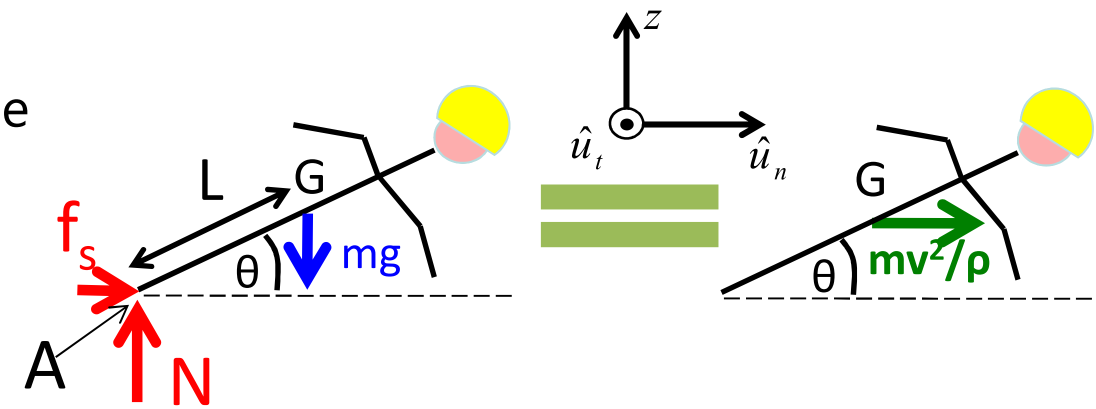
Aurait-on pu choisir le point A et, si oui, obtiendrait-on le même résultat ?

OUI, le point A aurait été un choix possible. En fait, c'est le meilleur choix pour résoudre le problème rapidement, sauf qu'il faut faire attention…

Ancien examen – Patinage de vitesse

C. Vitesse de la patineuse

Solution alternative



Il suffit de faire une somme des moments par rapport au point A, mais **il faut aussi considérer le moment engendré par la résultante dans le DCE**. Autrement dit, la somme des moments ne sera pas nulle !

$$\sum M_A = -mgL\cos\theta = -\frac{mv^2}{\rho}L\sin\theta \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\rho g}{\tan\theta}}}$$

Moments des forces et des couples du DCL

Moment de la résultante du DCE

20 points

D. Application numérique

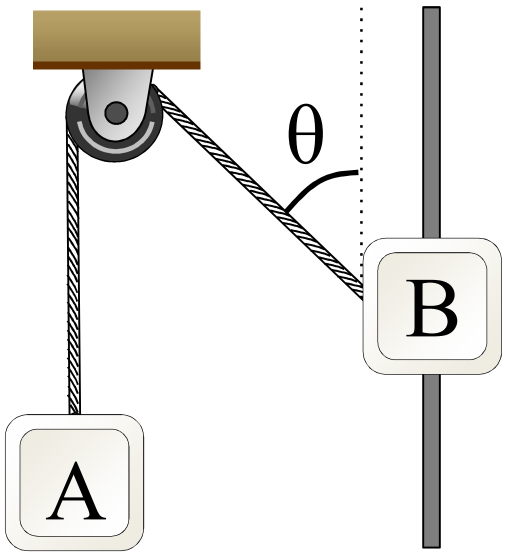
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{15\cdot 9{,}81}{\tan 45°}} = 12{,}13\ \text{m/s} = 43{,}7\ \text{km/h}}$$

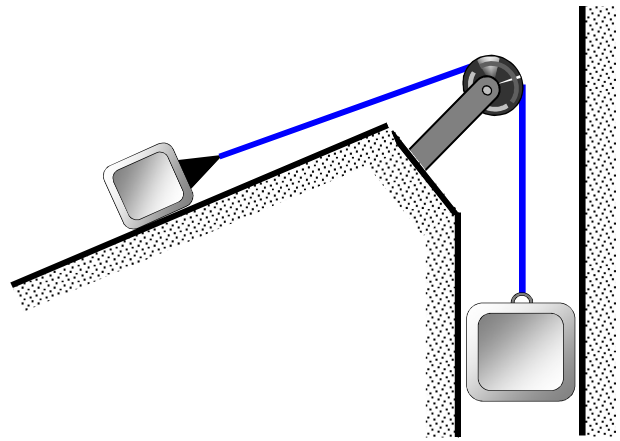
5 points

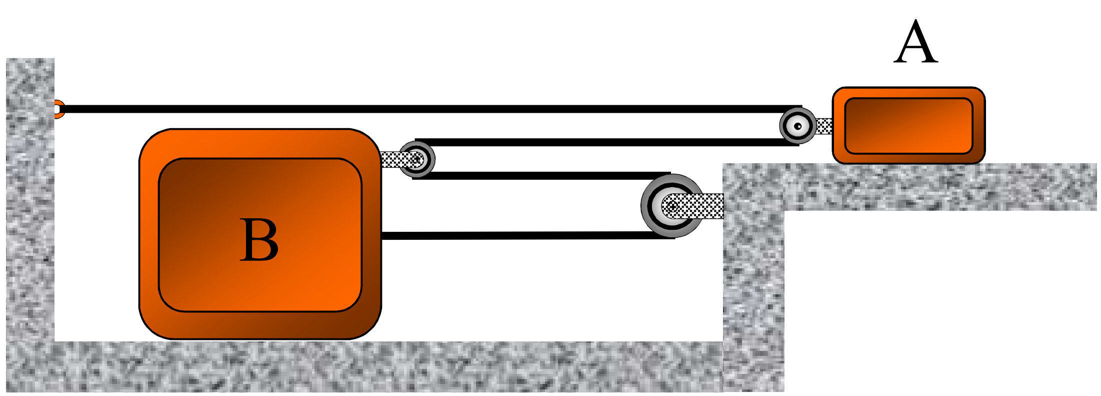
Plan de la semaine

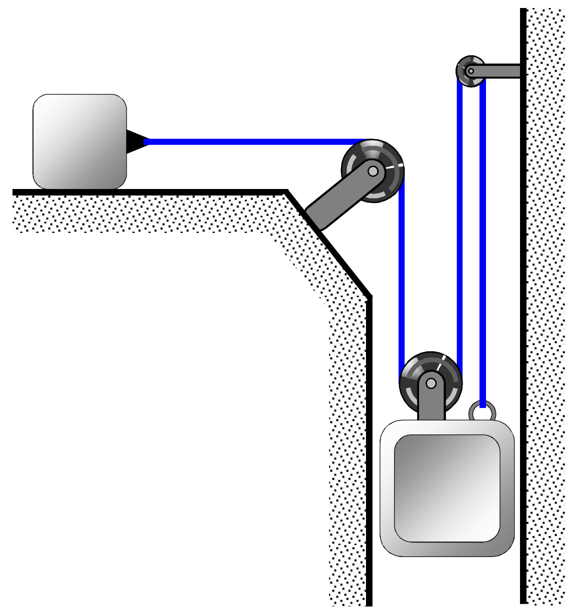
- Diagramme cinétique équivalent (DCE)
  - 2e loi de Newton
  - Coordonnées cartésiennes
  - Coordonnées normale et tangentielle
- **Mouvement contraint**
  - Relation entre le mouvement de deux corps reliés par un câble tendu

Mouvement contraint





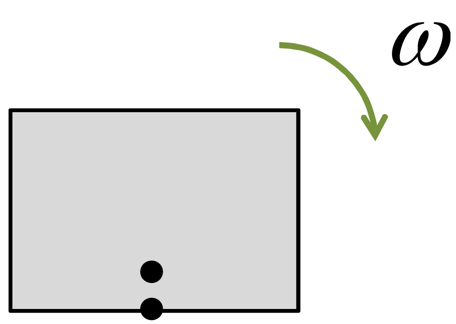




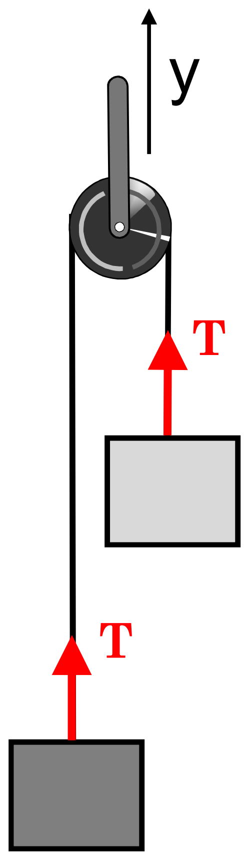
Mouvement contraint

Le mouvement d'une partie d'un système force le mouvement d'une autre partie.

- Le mouvement des points d'un même corps rigide est contraint puisque le corps ne se déforme pas;



- Le mouvement de corps liés par une corde tendue inextensible est contraint.



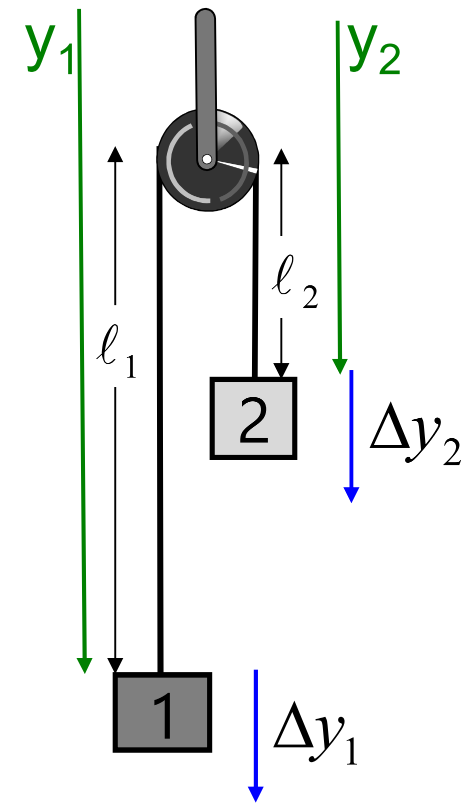
Équations du mouvement contraint

Hypothèse : la corde est tendue et inélastique.

Longueur de corde constante

En se déplaçant, chaque corps modifie la longueur du segment de corde auquel il est relié d'une valeur $\Delta\ell_i$. La variation totale sur toute la corde doit être nulle, car sa longueur est fixe.

$$\boxed{\sum \Delta\ell_i = 0}$$



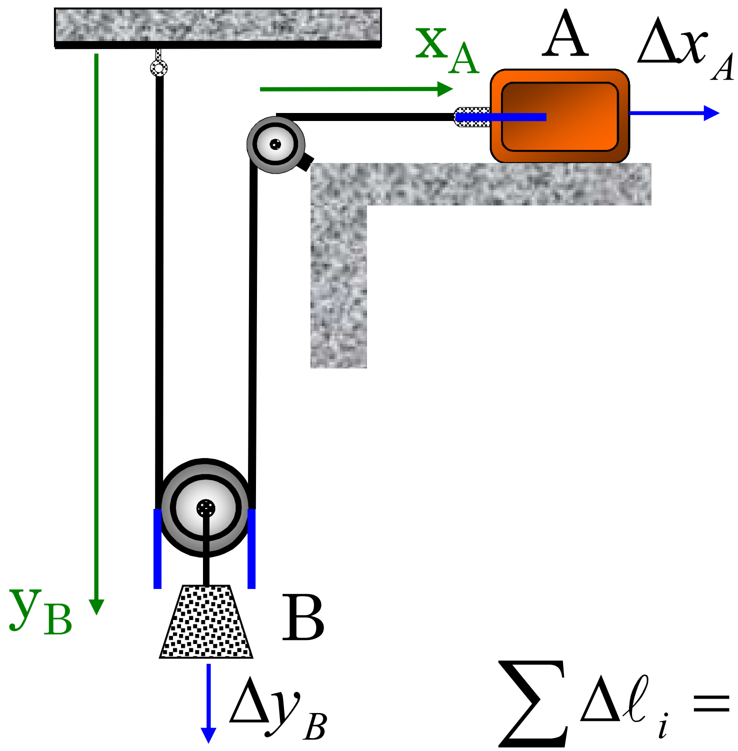
Pour évaluer les variations de longueur $\Delta\ell_i$, on déplace chaque corps d'une petite distance $\Delta\vec{r}_i$ dans le sens positif de ses axes.

$$\Delta\ell_1 = \Delta y_1 \qquad \Delta\ell_2 = \Delta y_2$$

$$\boxed{\Delta y_1 + \Delta y_2 = 0} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \boxed{v_1 + v_2 = 0} \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \boxed{a_1 + a_2 = 0}$$

Exemples de mouvement contraint

Quelle est la relation entre le mouvement des blocs A et B ?



1. Choisir un système d'axes pour chaque bloc. (Il n'y a pas de mauvais choix : il faut simplement être cohérent avec les signes.)

2. Considérer la variation de longueur de la corde qui *serait* causée par un petit déplacement de chaque bloc dans le sens positif des axes en négligeant les autres blocs.

   Bloc A – Augmentation $\Delta\ell_A = \Delta x_A$

   Bloc B – Augmentation $\Delta\ell_B = 2\Delta y_B$

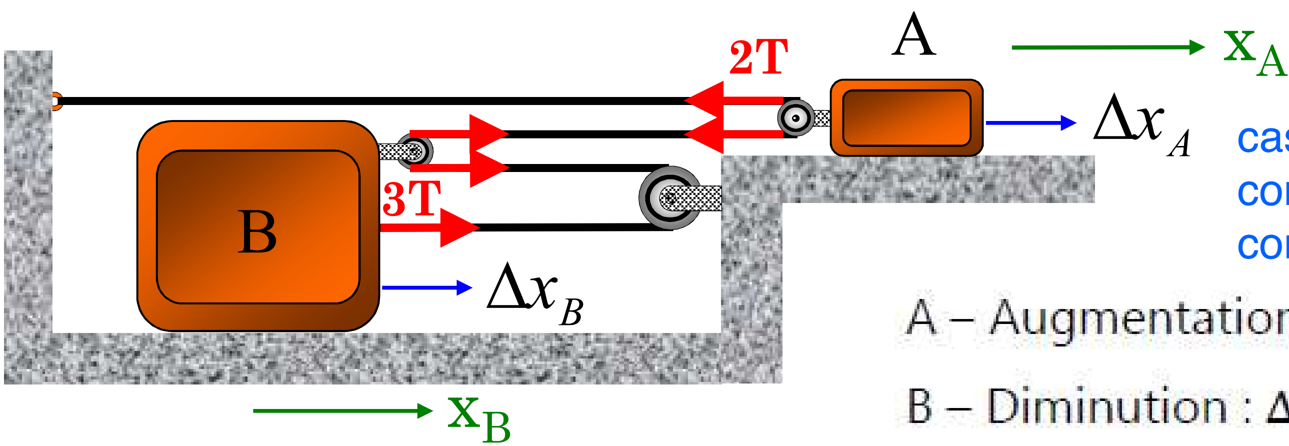
$$\sum \Delta\ell_i = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta x_A + 2\Delta y_B = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_A = -2v_B} \Rightarrow \boxed{a_A = -2a_B}$$

Signes : si A va vers la droite, alors B monte.

Exemples de mouvement contraint

Quelle est la relation entre le mouvement des blocs A et B ?



cas ou on a pas besoin de connaitre la longueur de la corde

A – Augmentation : $\Delta\ell_A = 2\Delta x_A$

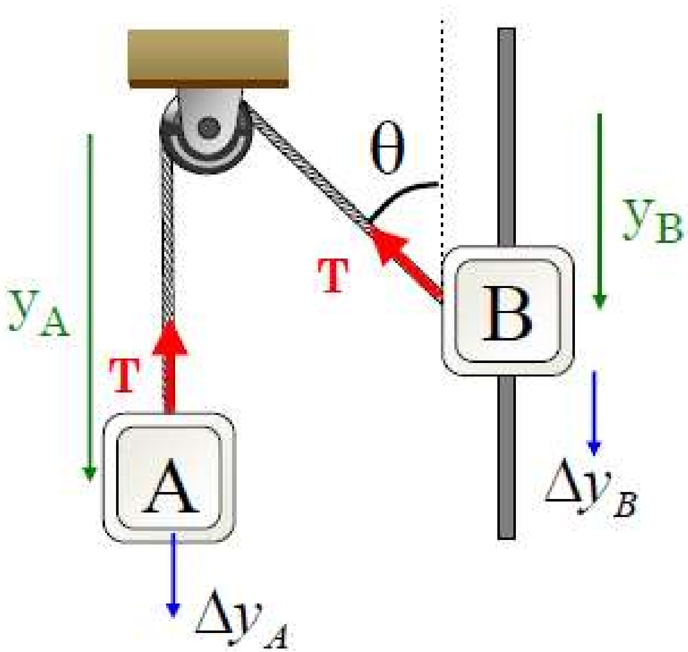
B – Diminution : $\Delta\ell_B = -3\Delta x_B$

$$\sum \Delta\ell_i = 0 \Rightarrow 2\Delta x_A - 3\Delta x_B = 0$$

$$\boxed{2\Delta x_A = 3\Delta x_B} \Rightarrow \boxed{2v_A = 3v_B} \Rightarrow \boxed{2a_A = 3a_B}$$

Exemples de mouvement contraint

Quelle est la relation entre les vitesses des blocs A et B si le bloc B bouge dans l'axe du guide vertical ?



Ici, on ne peut pas simplement écrire

$$\Delta \ell_A = \Delta y_A \qquad \Delta \ell_B \cos\theta = \Delta y_B$$

et en déduire

$$\Delta y_B = -\Delta y_A \cos\theta$$

parce que lorsque B se déplace, l'angle θ de la corde change.

Autrement dit, la variation de la longueur du segment de corde attaché à B n'est pas proportionnelle au déplacement de B.

Pour connaître la relation entre v_A et v_B, il faut trouver une expression pour la longueur de la corde à partir de la géométrie du problème, puis la dériver par rapport au temps.

Exemples de mouvement contraint

Quelle est la relation entre les vitesses des blocs A et B si le bloc B bouge dans l'axe du guide vertical ?

longueur de la corde=Ya + Lb

Longueur de corde constante

$$y_A + \ell_B = cste$$

(df/dyb)*(dyb/dt)

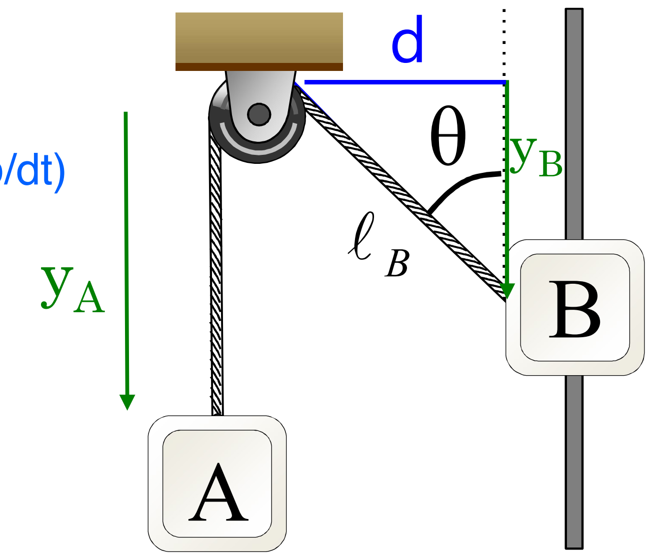
$$y_A + \sqrt{y_B^2 + d^2} = cste$$

Dérivée par rapport au temps

$$v_A + v_B \frac{y_B}{\sqrt{y_B^2 + d^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_A = -v_B \cos\theta}$$

Quand A monte, B descend.



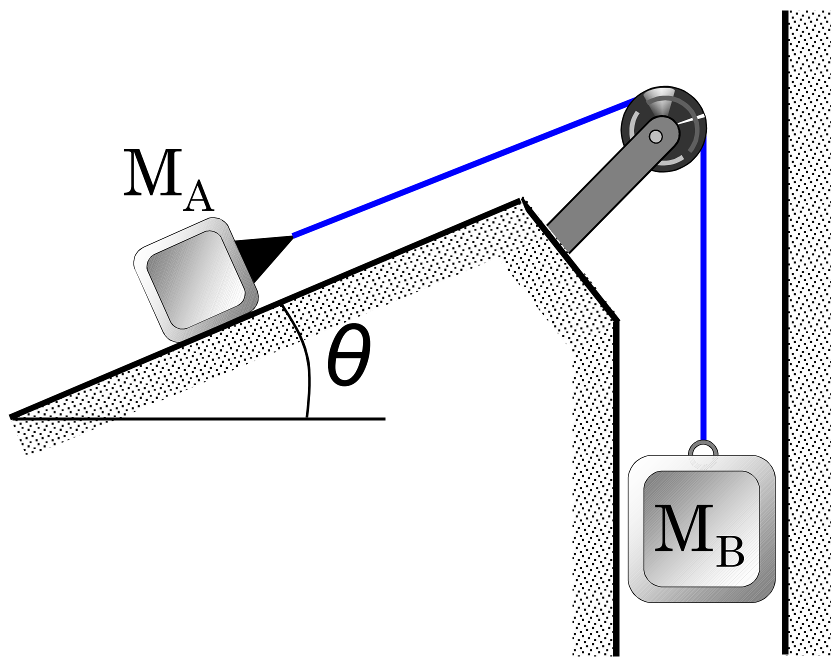
Le bloc B se déplace toujours plus vite que le bloc A.

Quand la corde reliant B est horizontale (90°), A est momentanément immobile.

Exemple – Deux blocs et une corde

Sachant qu'il n'y a aucun frottement dans le système, calculez l'accélération de chaque bloc. La masse du bloc A est inférieure à celle du bloc B.

$M_B > M_A$

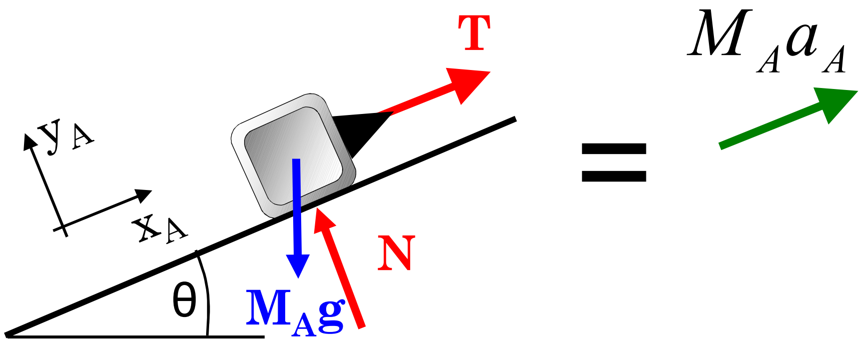


Stratégie

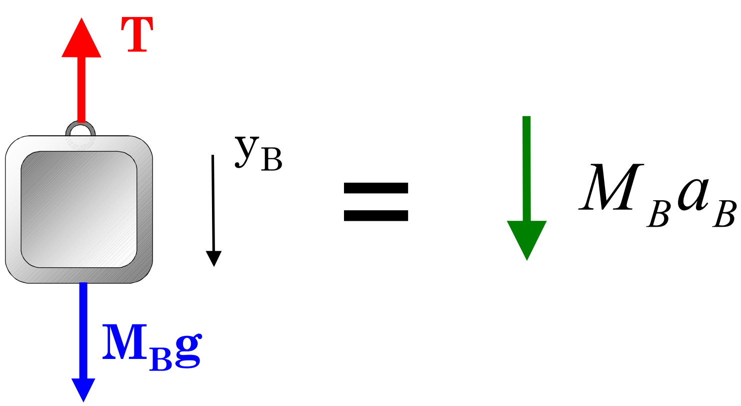
1. Faire le DCL-DCE de chaque bloc;
2. Déterminer l'équation du mouvement contraint;
3. Résoudre les équations pour déterminer les accélérations.

Exemple – Deux blocs et une corde

DCL-DCE du bloc A



DCL-DCE du bloc B

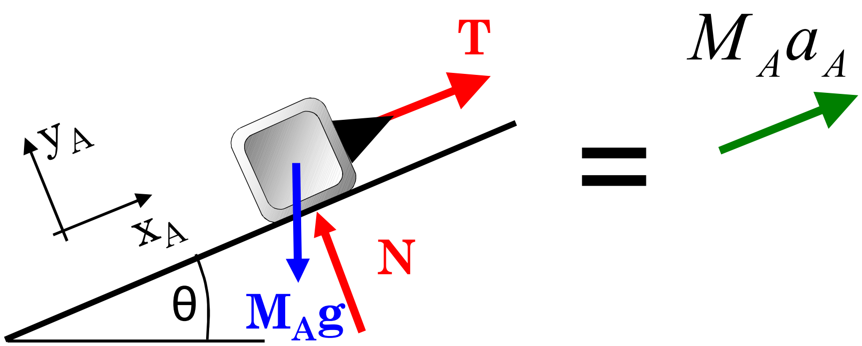


Quelques précisions

- Un système d'axes par bloc;
- La tension dans la corde est uniforme;
- On sait que le bloc A ne bouge pas selon y_A : on a posé a_A dans le sens positif de x_A;
- L'accélération a_B est dans le sens positif de y_B;
- Attention aux indices sur les masses et les accélérations.

Exemple – Deux blocs et une corde

DCL-DCE du bloc A

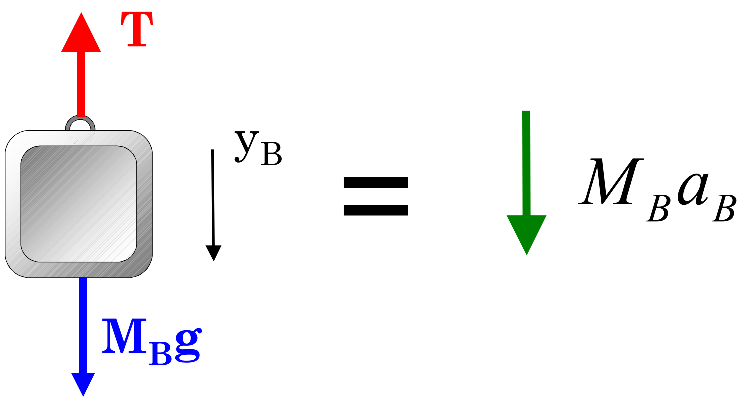


2^e loi de Newton

$$\sum F_x = T - M_A g \sin\theta = M_A a_A$$

$$\sum F_y = N - M_A g \cos\theta = 0$$

DCL-DCE du bloc B



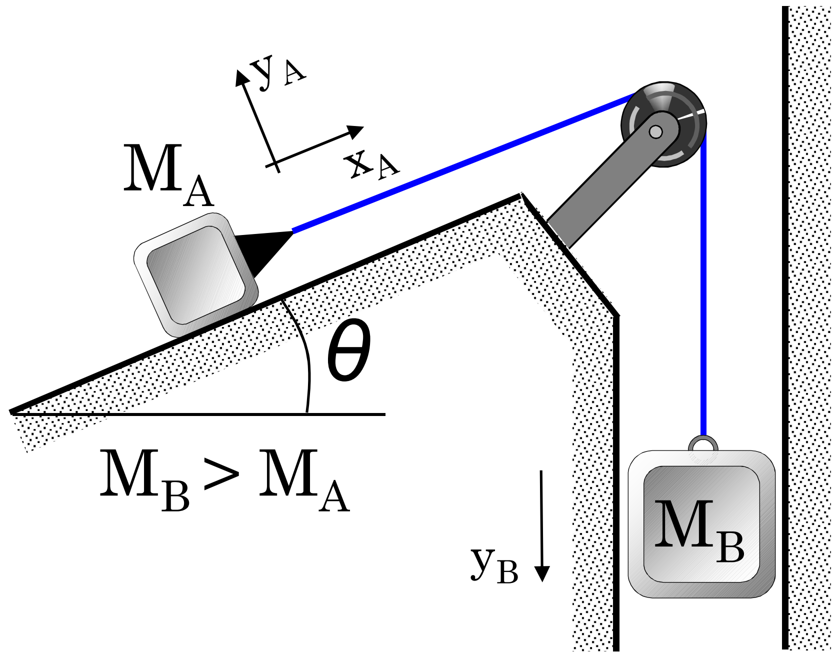
$$\sum F_y = M_B g - T = M_B a_B$$

Trois équations pour quatre inconnues (T, N, a_A et a_B)

Équation du mouvement contraint

Exemple – Deux blocs et une corde

$$\boxed{\begin{aligned} T - M_A g \sin\theta &= M_A a_A \\ N - M_A g \cos\theta &= 0 \\ M_B g - T &= M_B a_B \end{aligned}}$$



Mouvement contraint

Bloc A – Diminution $\Delta\ell_A = -\Delta x_A$

Bloc B – Augmentation $\Delta\ell_B = \Delta y_B$

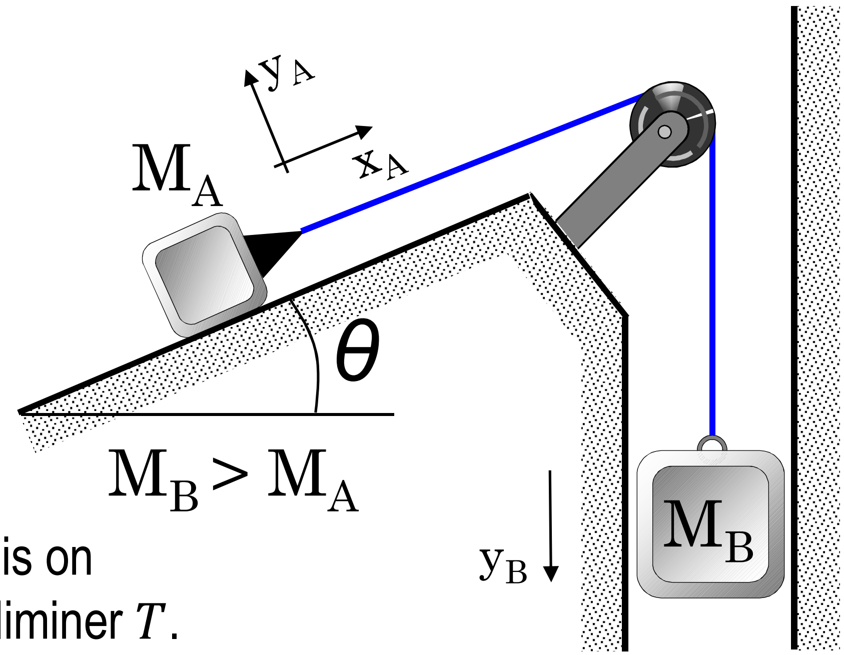
$$\sum \Delta\ell_i = 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta x_A + \Delta y_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x_A = \Delta y_B \qquad v_A = v_B \qquad \boxed{a_A = a_B}$$

Quatre équations pour quatre inconnues!

Exemple – Deux blocs et une corde

$$\boxed{\begin{aligned} T - M_A g\sin\theta &= M_A a_A \\ N - M_A g\cos\theta &= 0 \\ M_B g - T &= M_B a_B \\ a_A &= a_B \end{aligned}}$$



On substitue la 4e équation dans la 3e, puis on additionne la 1re et la 3e équations pour éliminer T.

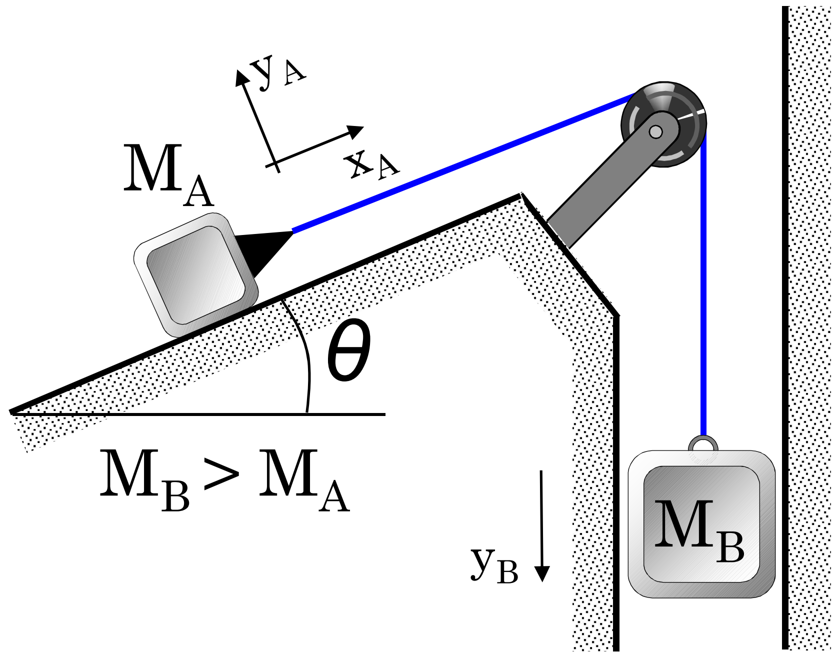
$$M_B g - M_A g\sin\theta = (M_A + M_B)a_A$$

$$\boxed{a_A = a_B = \frac{M_B - M_A\sin\theta}{M_B + M_A}g}$$

Comment se convaincre que cette expression décrit bien le système étudié ?

Exemple – Deux blocs et une corde

$$\boxed{a_A = a_B = \frac{M_B - M_A \sin\theta}{M_B + M_A} g}$$



<u>Cas limite 1</u>

La masse du bloc A est nulle.

$$a_B = \frac{M_B - 0}{M_B + 0} g = g$$ **OK !**

<u>Cas limite 2</u>

On suspend le bloc A verticalement ($\theta = 90°$) et les deux blocs sont identiques.

$$a_A = a_B = \frac{M_B - M_A}{M_B + M_A} g = 0$$ **OK !**