PHS 1101
Mécanique pour ingénieurs
Cours 5
Cinématique du point

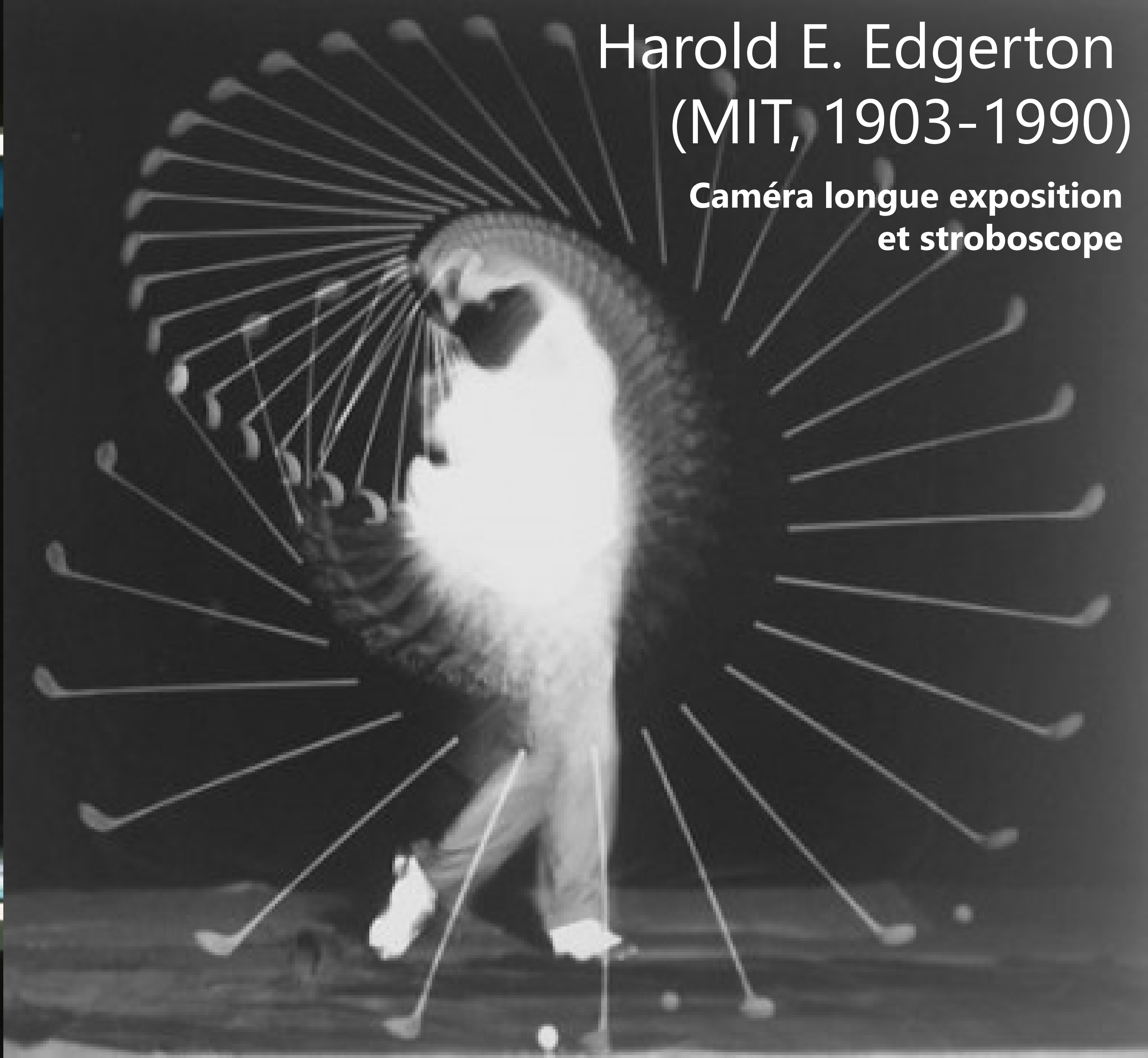
Djamel Seddaoui
Département de Génie Physique

Plan de la semaine

- **Variables du mouvement**
  - Calcul différentiel et intégral : liens entre x, v et a
  - Trajectoire produite par une acceleration quelconque :
    - Fonction du temps : $a(t)$
    - Fonction de la position : $a(x)$
    - Fonction de la vitesse : $a(v)$
- Mouvement relatif
- Mouvement curviligne
  - Coordonnées polaires
  - Cas spécifique : movement circulaire
  - Coordonnées normale/tangentielle

Harold E. Edgerton (MIT, 1903-1990)

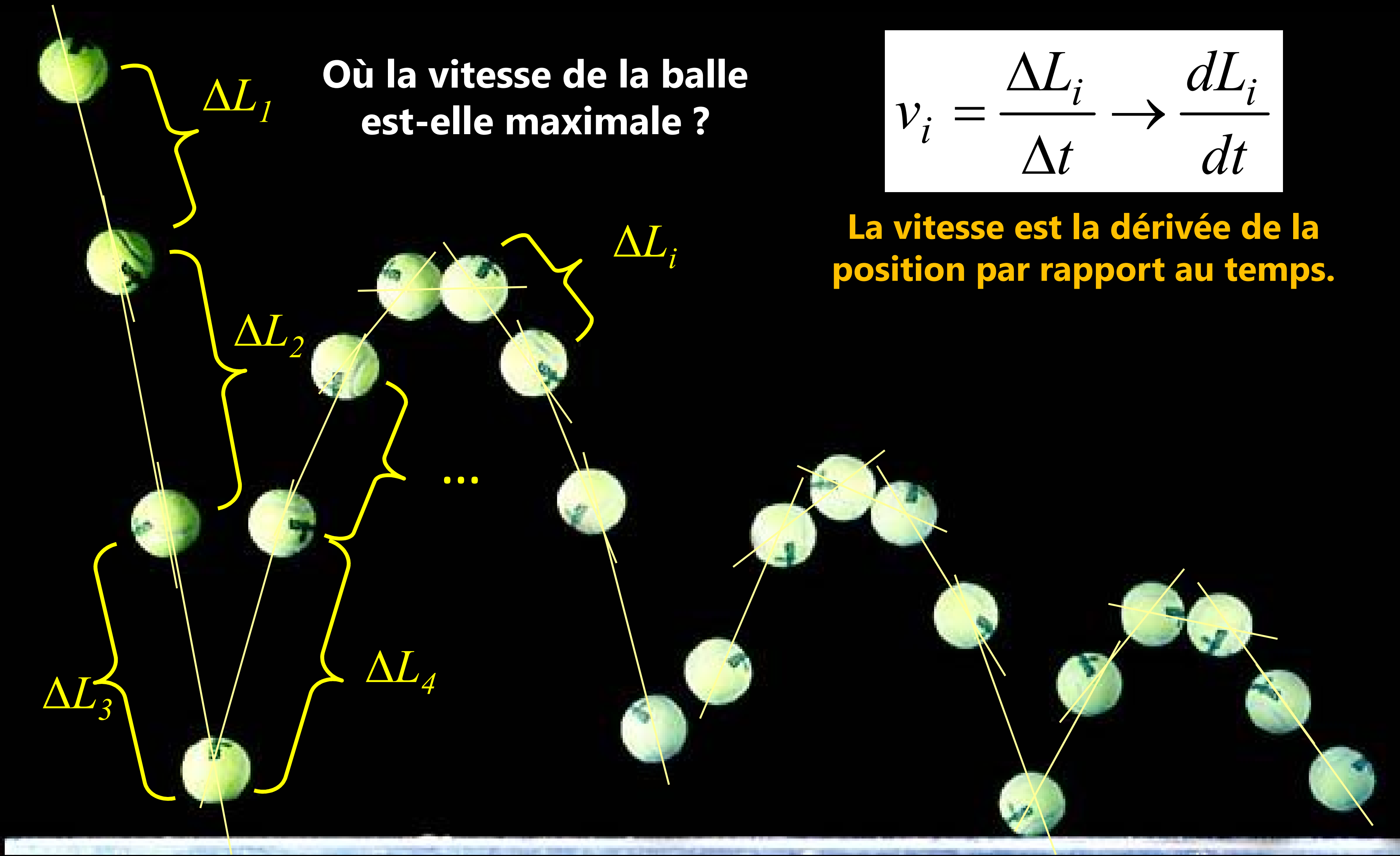
Caméra longue exposition et stroboscope

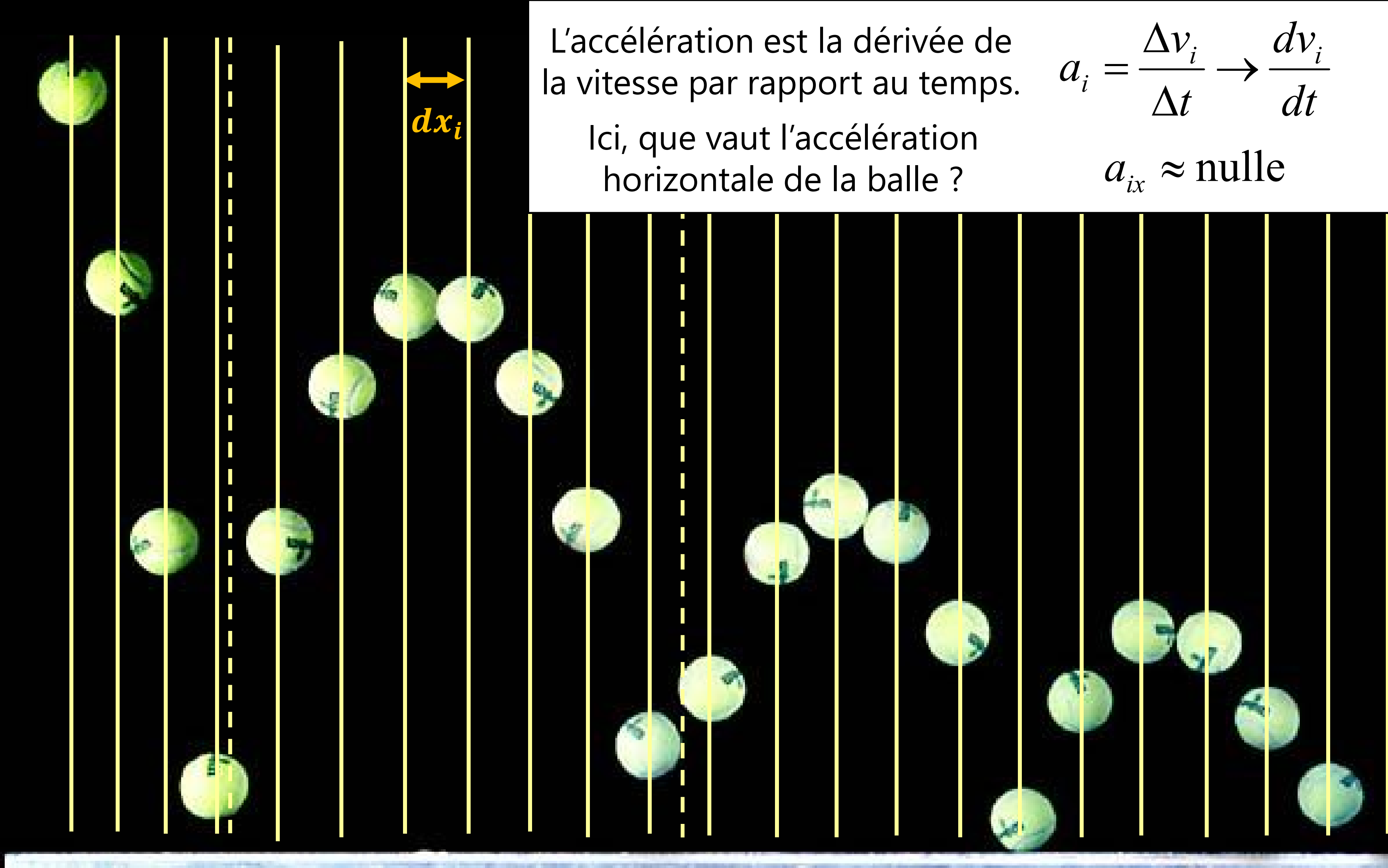


Où la vitesse de la balle est-elle maximale ?

$$v_i = \frac{\Delta L_i}{\Delta t} \rightarrow \frac{dL_i}{dt}$$

La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps.





L'accélération est la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

$$a_i = \frac{\Delta v_i}{\Delta t} \rightarrow \frac{dv_i}{dt}$$

Ici, que vaut l'accélération horizontale de la balle ?

$$a_{ix} \approx \text{nulle}$$

Direction horizontale

Mouvement uniforme

$dx_i \approx \text{constant}$

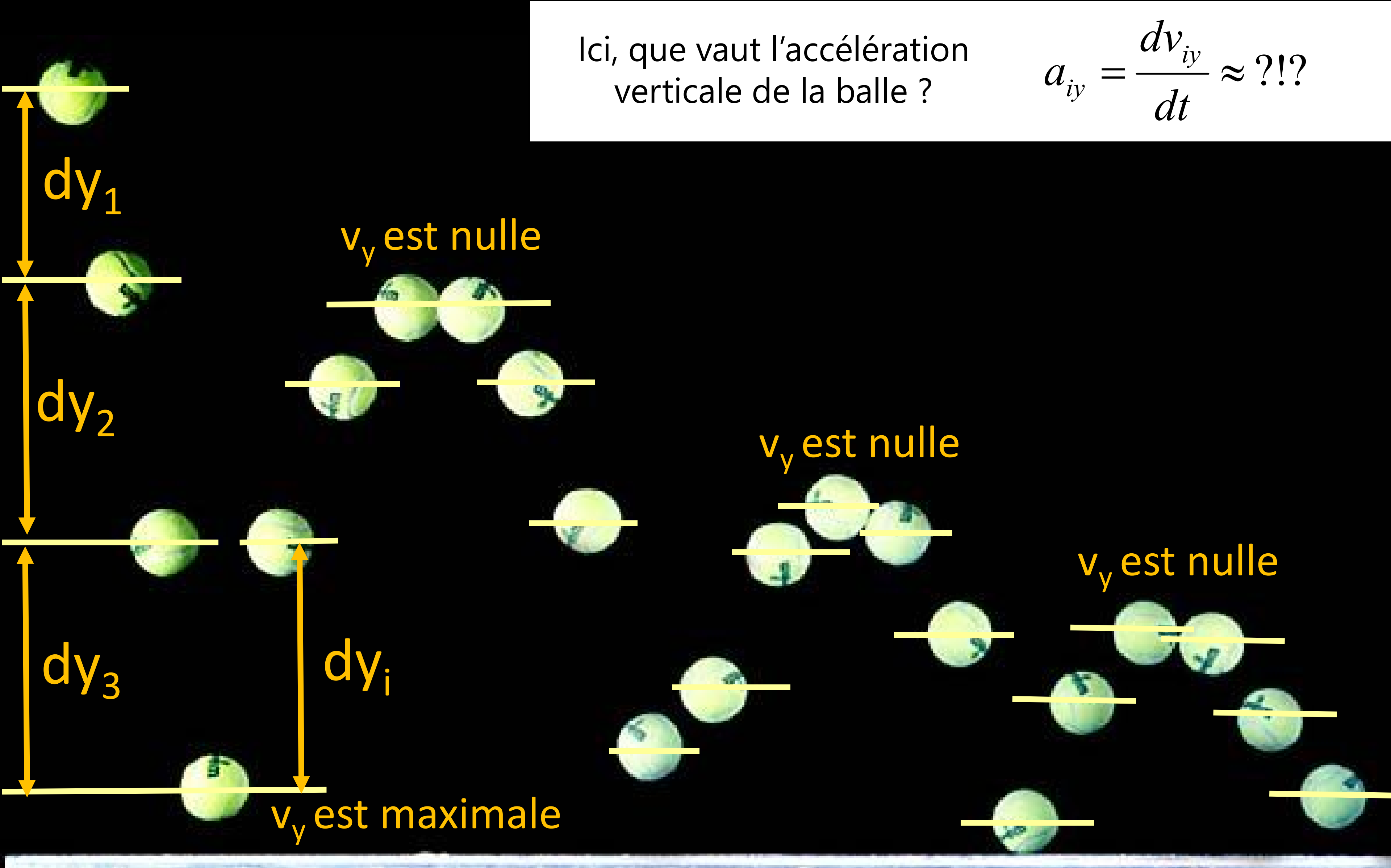
dt constant

$$v_{ix} = \frac{dx_i}{dt} \approx \text{constante}$$

Vitesse horizontale constante

Ici, que vaut l'accélération verticale de la balle ?

$$a_{iy} = \frac{dv_{iy}}{dt} \approx ?!?$$



Direction verticale

$dy_i = ?$

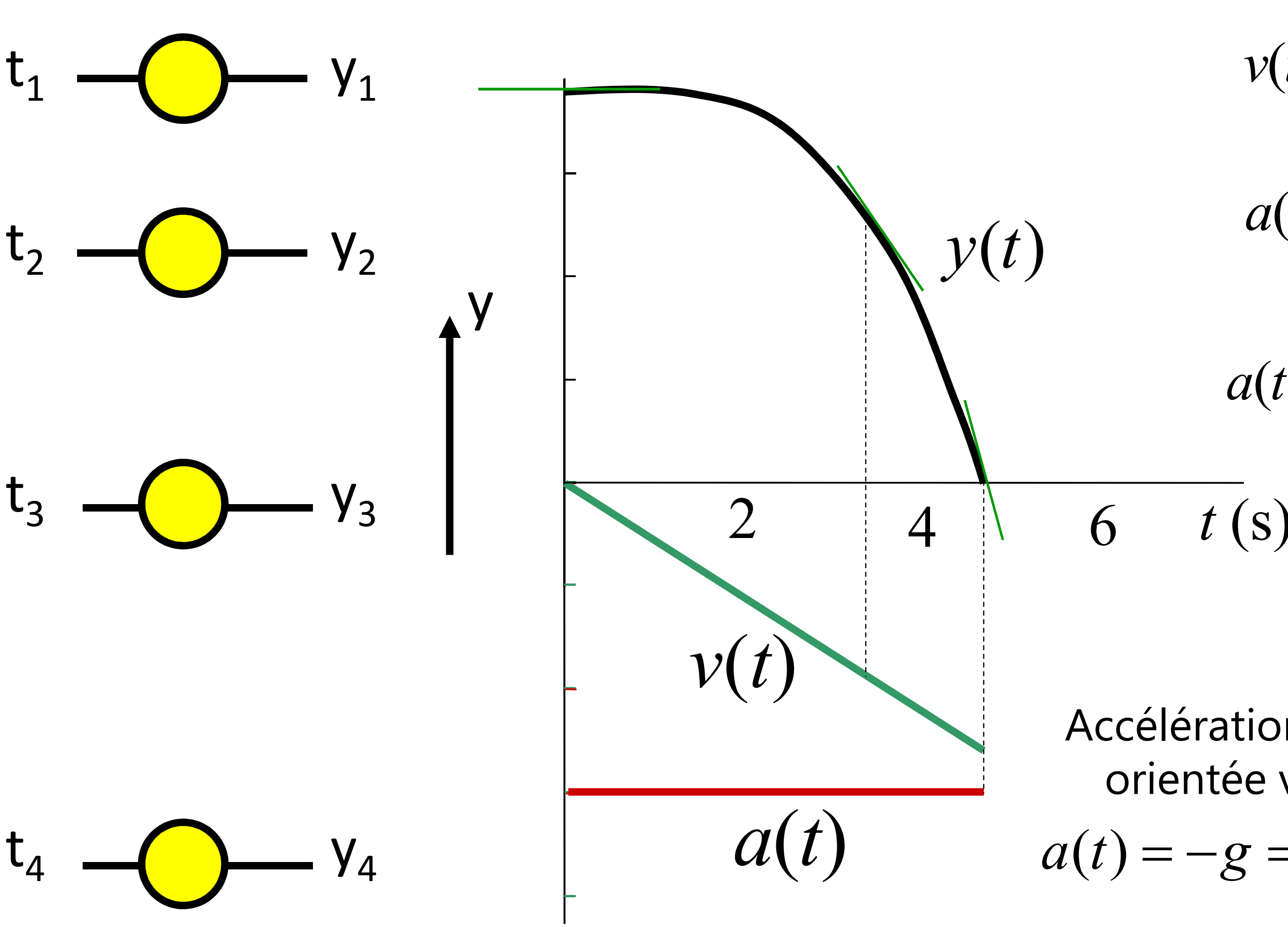
dt constant

$$v_{iy} = \frac{dy_i}{dt} \approx ??$$

La vitesse verticale n'est pas constante !

Chute libre en 1D

Un corps en chute libre est soumis seulement à l'accélération gravitationnelle. À la surface de la Terre, on suppose qu'elle est constante : 9,81 m/s².



$$v(t) = \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$$

$$a(t) = \dot{v}(t) = \frac{dv}{dt}$$

$$a(t) = \ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

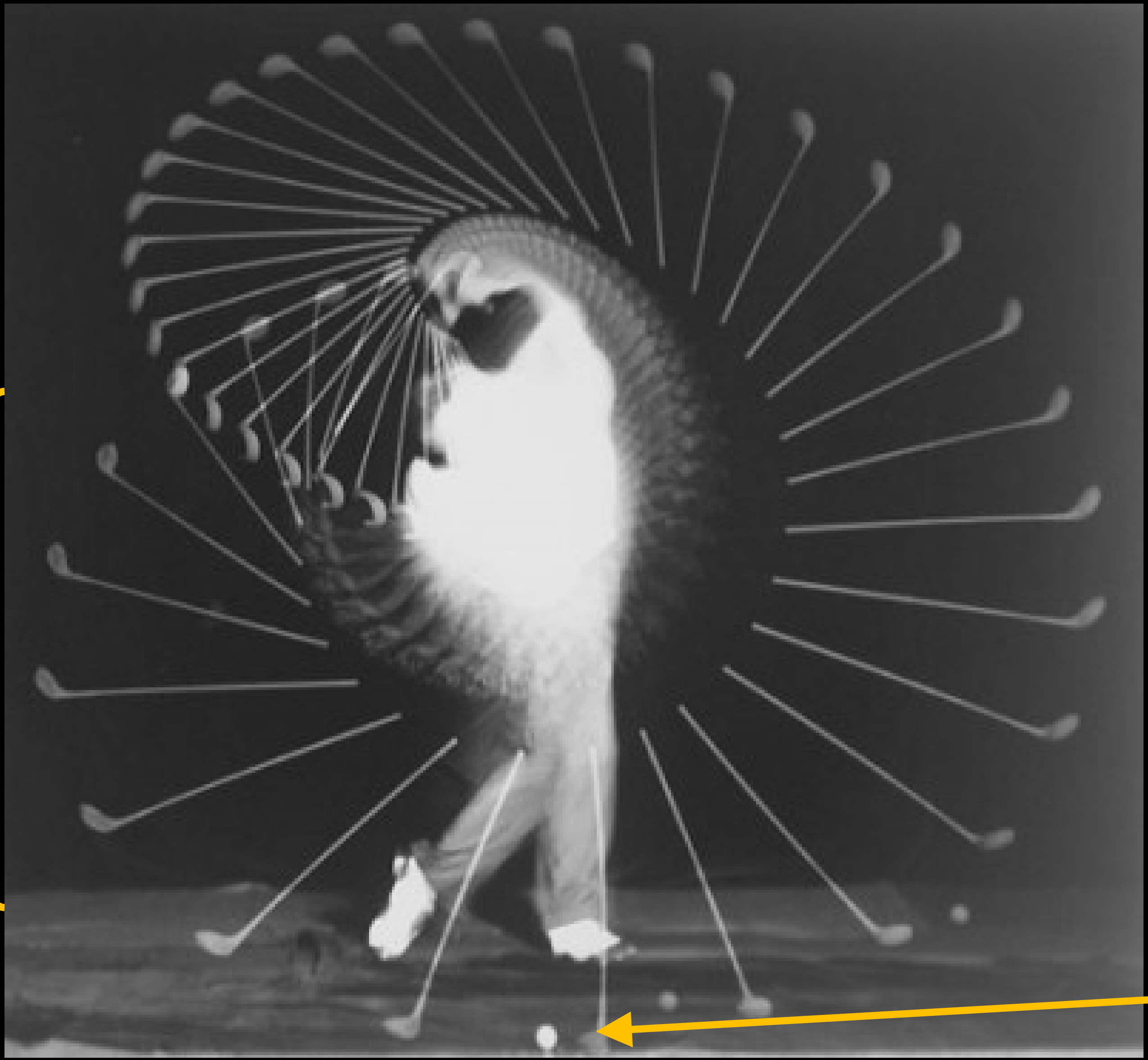
Accélération constante orientée vers le sol

$$a(t) = -g = -9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$$

Où est v_{max}, où est a_{max} ?

a_{max}

Le bâton accélère très rapidement aux instants juste avant l'impact.



v_{max}

Liens entre les variables du mouvement

Si on connaît la position

$$x(t)$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt}$$

Si on connaît l'accélération

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

$$a(t)$$

Il faut savoir dériver et intégrer
pour passer d'une variable à une autre !

Calcul différentiel et intégral

Vous devez être capables de dériver et d'intégrer les fonctions simples suivantes :

Fonctions puissances et polynômes $3x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ $\frac{1}{x-4}$ $\frac{1}{x^2}$

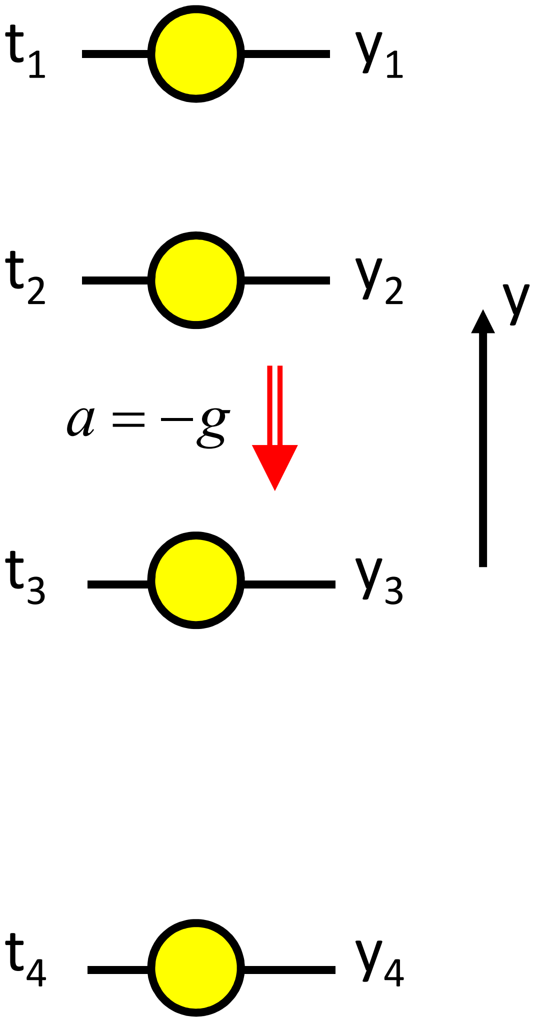
Fonction exponentielle (base quelconque) 2^x 10^x e^x e^{-5x}

Fonctions trigonométriques simples (sinus et cosinus) $\sin x$ $\cos x$ $\sin(3x+5)$

Si on vous demande de dériver ou d'intégrer une fonction plus complexe, on vous fournira le résultat général :

$$\int \ln(x)dx = x(\ln x - 1) + \text{Constante}$$

Exemple – Mouvement uniformément accéléré (MUA)



Accélération

Accélération constante orientée vers le sol

$$\boxed{a(t) = a = -g}$$

Vitesse

Il faut intégrer par rapport au temps.

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} -g\,d\tau$$

$$\boxed{v(t) = v_0 - g(t - t_0)}$$

Position

Il faut (encore) intégrer par rapport au temps.

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \left(v_0 - g(\tau - t_0)\right) d\tau$$

$$\boxed{y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) - \tfrac{1}{2} g (t - t_0)^2}$$

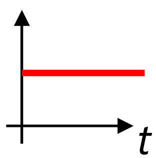
Rappel – Équations du MUA et du MRU

Mouvement uniformément accéléré (MUA)

L'acceleration a est constante.

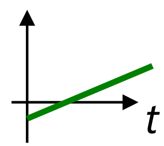
$$\boxed{a(t) = a}$$

Constante



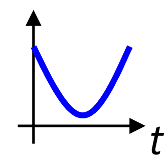
$$\boxed{v(t) = v_0 + a(t - t_0)}$$

Droite



$$\boxed{x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2}$$

Parabole

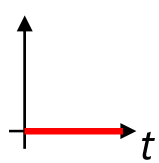


Mouvement rectiligne uniforme (MRU)

L'accélération a est nulle et la vitesse v est constante.

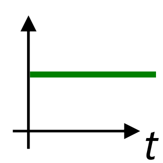
$$\boxed{a(t) = 0}$$

Constante nulle



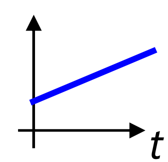
$$\boxed{v(t) = v}$$

Constante



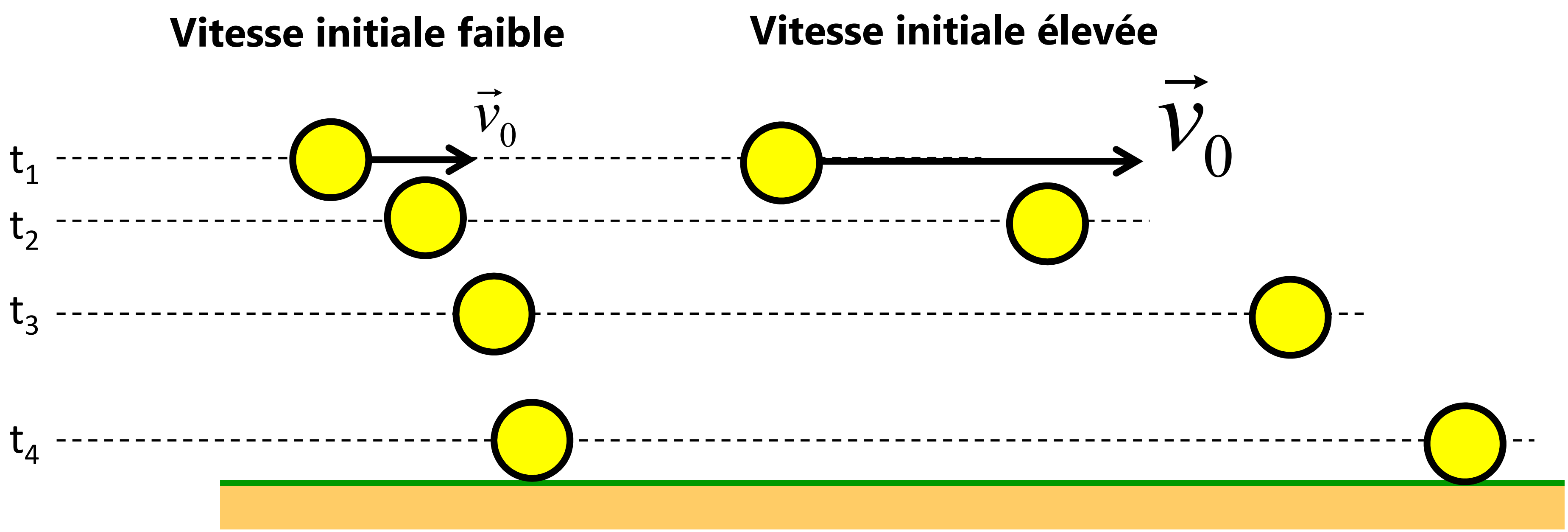
$$\boxed{x(t) = x_0 + v(t - t_0)}$$

Droite



Quiz – Chute libre en 2D

Deux ballons sont lâchés avec des vitesses initiales purement horizontales. Lequel des deux ballons touche le sol en premier ?



Les deux ballons touchent le sol au même instant !

Chute libre en 2D

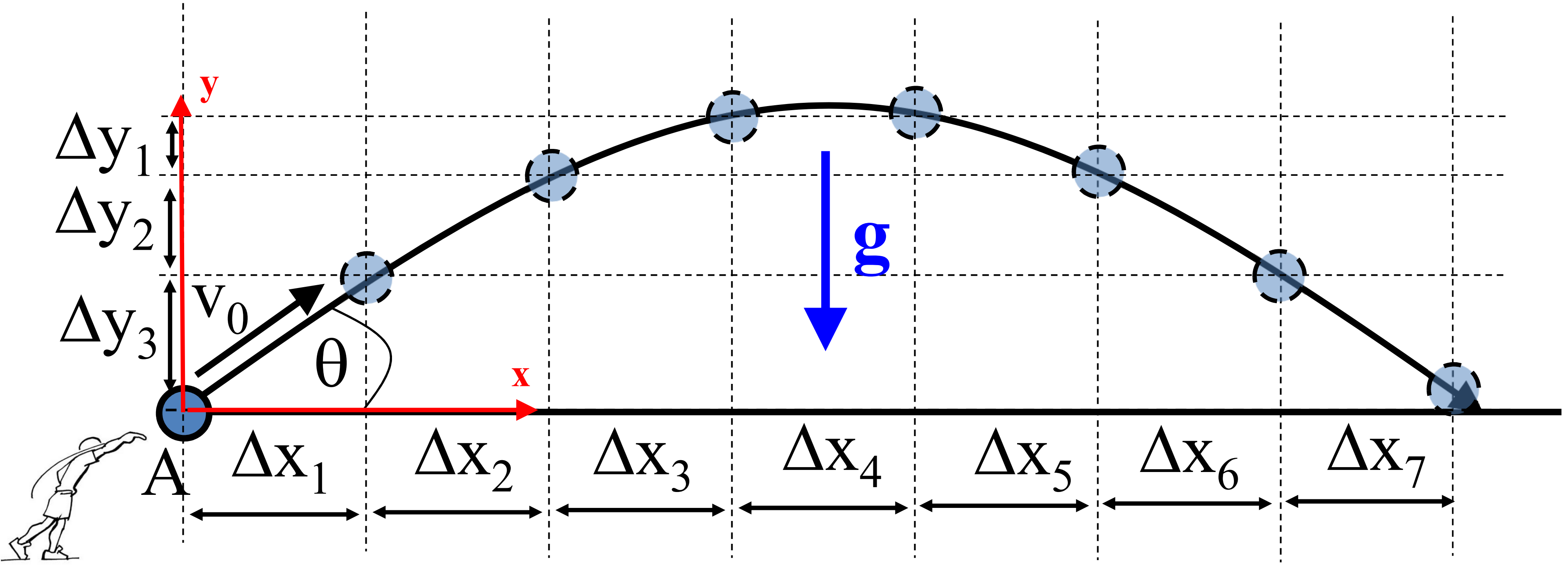
Le movement en x est **indépendant** du mouvement en y.

Selon x

$$a_x(t) = 0$$
$$v_x(t) = v_{0x} = v_0 \cos\theta$$
$$x(t) = x_0 + (v_0 \cos\theta)(t - t_0)$$

Selon y

$$a_y(t) = -g$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\theta - g(t - t_0)$$
$$y(t) = y_0 + (v_0 \sin\theta)(t - t_0) - \tfrac{1}{2} g (t - t_0)^2$$



(8 sec) https://www.youtube.com/watch?v=hlW6hZkgmkA

Équation vectorielle du mouvement

Le mouvement selon un axe ne dépend que de la composante de l'accélération selon cet axe.

$$a_x(t) \leftrightarrow v_x(t) \leftrightarrow x(t)$$

$$a_y(t) \leftrightarrow v_y(t) \leftrightarrow y(t)$$

$$a_z(t) \leftrightarrow v_z(t) \leftrightarrow z(t)$$

Il est plus concis d'exprimer une trajectoire sous forme vectorielle pour combiner les mouvements selon *x*, *y*, et *z* en une seule équation.

Exemple – MUA en 3D

Le sol est le plan *xy* et la gravité agit vers les *z* négatifs.

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$$

$$\vec{a} = (0,0,-g)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{a}(t - t_0)^2$$

Trajectoire produite par une accélération quelconque

L'accélération d'un corps est reliée aux forces qu'il subit.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

La force (et donc l'accélération) peut dépendre :

- Du temps : $a = a(t)$

$$\boxed{v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau}$$

- De la vitesse : $a = a(v)$

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boxed{\int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}}$$

- De la position $a = a(x)$

Dérivation en chaîne

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \boxed{\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a(\chi)d\chi}$$

La 4e équation du MUA

Pour le MUA, puisque a est constante, on peut faire comme s'il s'agissait d'une fonction $a(x)$ et utiliser le truc de la dérivation en chaîne pour obtenir une 4e équation ne faisant pas intervenir le temps.

Dérivation en chaîne

$$a(x) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(\chi)\,d\chi$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_{x_0}^{x} d\chi$$

$$\frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} = a\left(x - x_0\right)$$

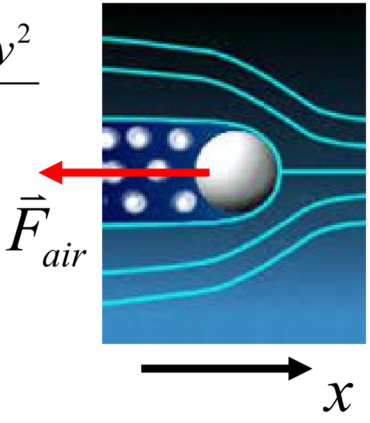
Cette 4e équation du MUA relie la position au module de la vitesse, sans avoir à calculer les expressions de $x(t)$ et de $v(t)$.

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a\left(x - x_0\right)}$$

Exemple – Résistance de l'air

La force de résistance de l'air exercée sur une balle est proportionnelle au carré du module de sa vitesse. Quelles sont la vitesse et la position de la balle en fonction du temps ?

$$\left|\vec{F}_{air}\right| = \frac{C_x \rho S v^2}{2}$$



Accélération $-F_{air} = ma \Rightarrow a(v) = -\frac{C_x \rho S}{2m} v^2 \equiv -bv^2$

Vitesse

$$\int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow t - t_0 = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_0}\right) \Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{v_0}{1 + bv_0(t - t_0)}}$$

Position

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\tau)\, d\tau \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + \frac{1}{b}\ln\left[1 + bv_0\left(t - t_0\right)\right]}$$

Changement de variable $u = 1 + bv_0(\tau - t_0)$

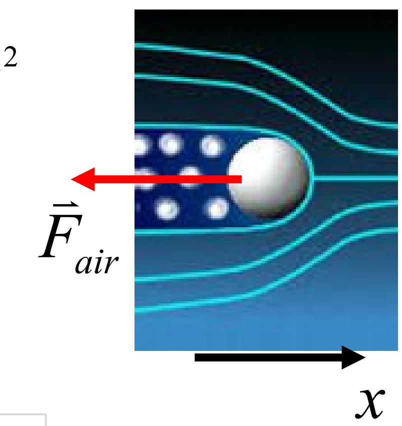
$du = bv_0 d\tau$

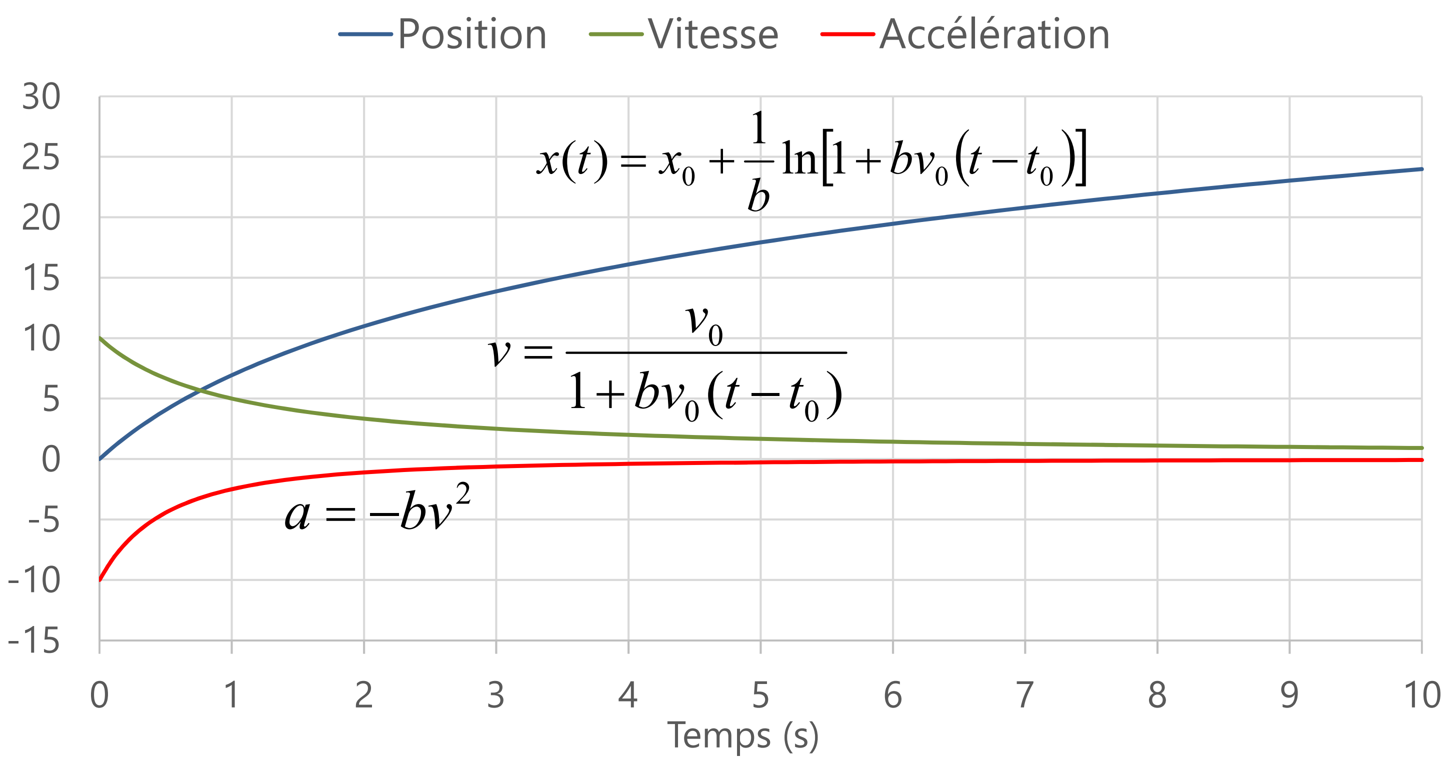
Exemple – Résistance de l’air

La force de résistance de l’air exercée sur une balle est proportionnelle au carré du module de sa vitesse. Quelles sont la vitesse et la position de la balle en fonction du temps ?

$$\left|\vec{F}_{air}\right| = bv^2$$

$$b \equiv \frac{C_x \rho S}{2m}$$





$t_0 = 0$ s
$x_0 = 0$ m
$v_0 = 10$ m/s
$b = 0{,}1\ \mathrm{m}^{-1}$

Exemple – Ressort

Un bloc, fixé à un ressort ideal, oscille horizontalement sur une surface sans frottement. Quelle est la position du bloc en fonction du temps ?

$$\vec{F}_{res} = -k\vec{x}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Accélération

$$\vec{F}_{res} = m\vec{a} \Rightarrow a(x) = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x$$

Vitesse

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(\chi)\,d\chi \Rightarrow \frac{1}{2}\left(v^2 - v_0^2\right) = -\frac{\omega^2}{2}\left(x^2 - x_0^2\right) \Rightarrow v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 - \omega^2\left(x^2 - x_0^2\right)}$$

Position

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi}{v(\chi)} \Rightarrow \boxed{x(t) = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\sin\left[\omega(t - t_0) + \arctan\left(\omega\frac{x_0}{v_0}\right)\right]}$$

Mouvement harmonique simple!

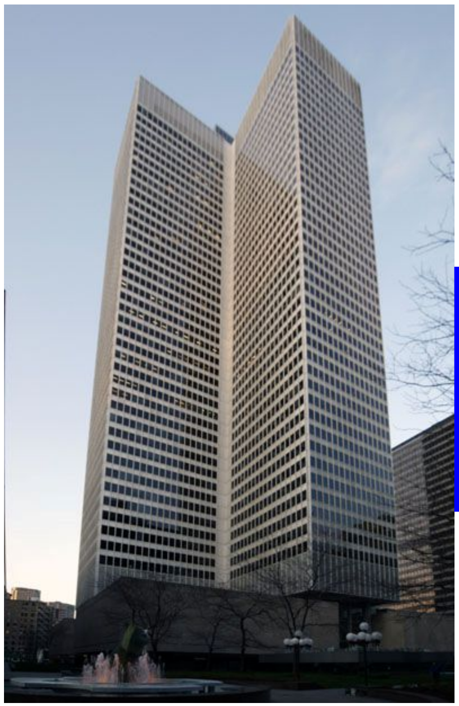
$$x(t) = A\sin\left[\omega(t - t_0) + \phi\right]$$

Pour ceux qui sont intéressés au développement : voir la fin des notes.

Plan de la semaine

- Variables du mouvement
  - Calcul différentiel et intégral : liens entre x, v et a
  - Trajectoire produite par une acceleration quelconque :
    - Fonction du temps : $a(t)$
    - Fonction de la position : $a(x)$
    - Fonction de la vitesse : $a(v)$
- **Mouvement relatif**
- Mouvement curviligne
  - Coordonnées polaires
  - Cas spécifique : movement circulaire
  - Coordonnées normale/tangentielle

La vitesse : un concept relatif



≈ 500 m/s par rapport au centre de la Terre

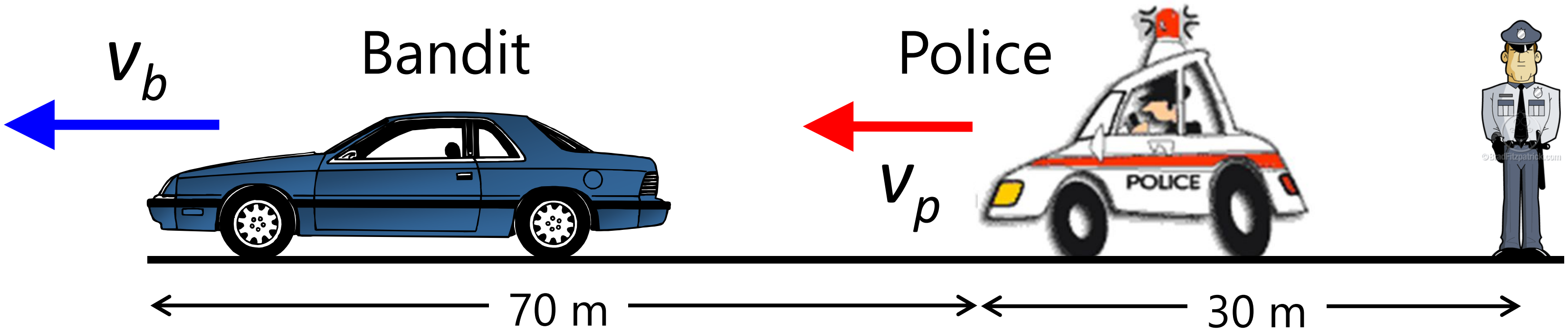
≈ 30 km/s par rapport au Soleil

≈ 200 km/s par rapport au centre de la Voie lactée

Il est IMPOSSIBLE de déterminer de façon absolue la vitesse d’un objet.
La mesure de la vitesse est TOUJOURS une mesure relative.
On mesure la vitesse d’un objet par rapport à un référentiel (souvent le sol).

Vitesse relative

Quelle est la vitesse du bandit ?



Par rapport à l'agent au sol : $$v_{b/sol} = v_b$$

On se met à la place de l'agent au sol.

Notation
Vitesse de *b* par rapport au sol

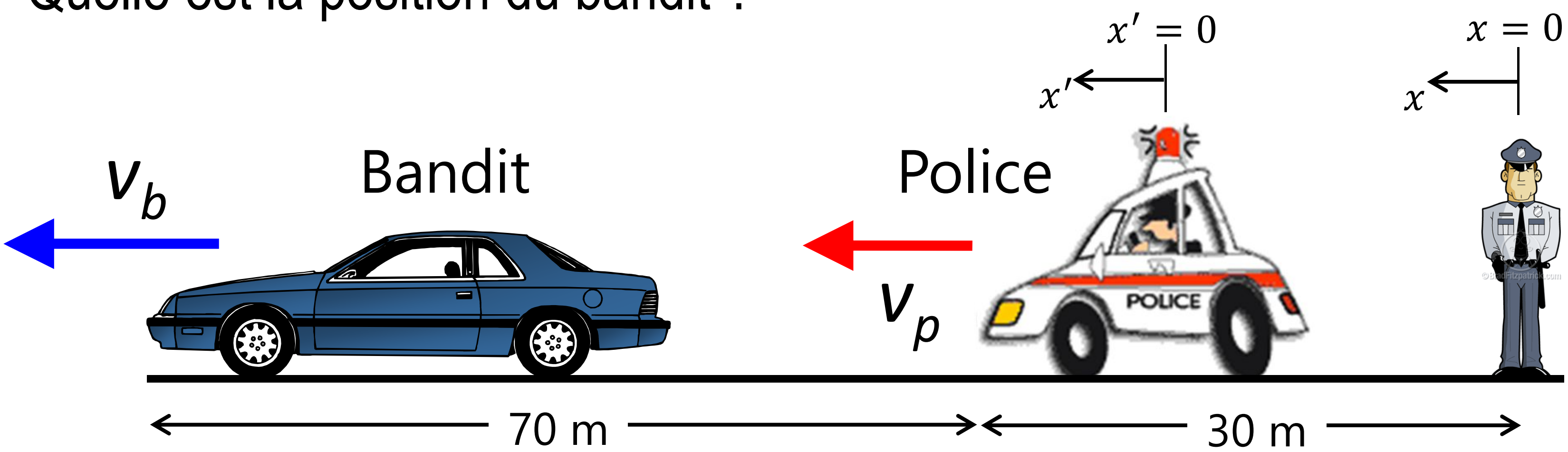
Par rapport à la voiture de police : $$v_{b/p} = v_{b/sol} - v_{p/sol} = v_b - v_p$$

On se met à la place du policier dans sa voiture.

Le bandit se déplace à des vitesses différentes selon qu'on considère le référentiel de l'agent au sol ou celui du policier dans sa voiture.

Position relative

Quelle est la position du bandit ?



Par rapport à l'agent au sol : $x_{b/sol} = x_b = 100\text{ m}$ Axe x

On se met à la place de l'agent au sol.

Axe x'

Par rapport à la voiture de police : $x_{b/p} = x_{b/sol} - x_{p/sol} = x_b - x_p = 70\text{ m}$

On se met à la place du policier dans sa voiture.

La position du bandit diffère selon qu'on considère le référentiel de l'agent au sol ou celui du policier dans sa voiture.

Mouvement relatif en plusieurs dimensions

Mouvement relatif entre les référentiels A et B ⟺ Mouvement relatif des référentiels A et B par rapport à un troisième référentiel R (souvent le sol)

Position	$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_{B/R} - \vec{r}_{A/R}$
Vitesse	$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_{B/R} - \vec{v}_{A/R}$
Accélération	$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/R} - \vec{a}_{A/R}$

$\frac{d}{dt}$

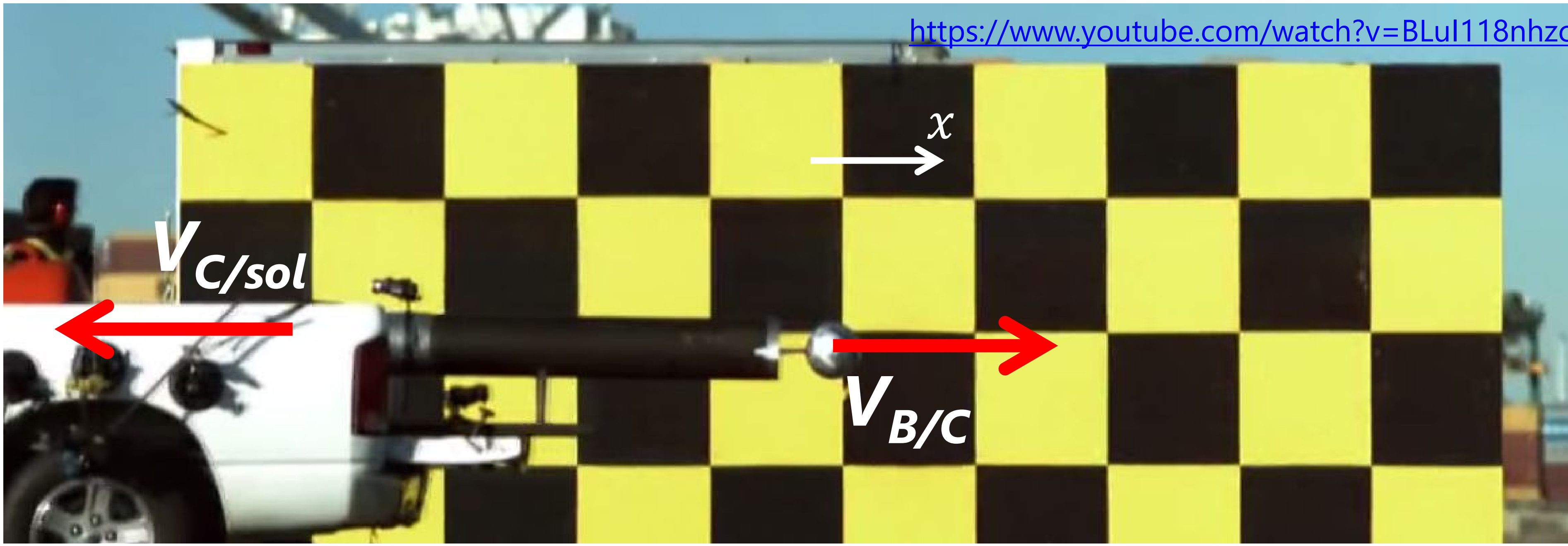
$\frac{d}{dt}$

Équations vectorielles

Chaque équation exprime 3 équations scalaires (une équation par axe).

Qu'arrive-t-il au ballon ?

Un camion se déplace vers la gauche à 50 km/h. À bord du camion, un canon tire un ballon vers la droite avec une vitesse de 50 km/h par rapport au camion.



$$\vec{v}_{C/sol} = -50\vec{i}\ \text{km/h}$$
$$\vec{v}_{B/C} = 50\vec{i}\ \text{km/h}$$

$$\Rightarrow$$

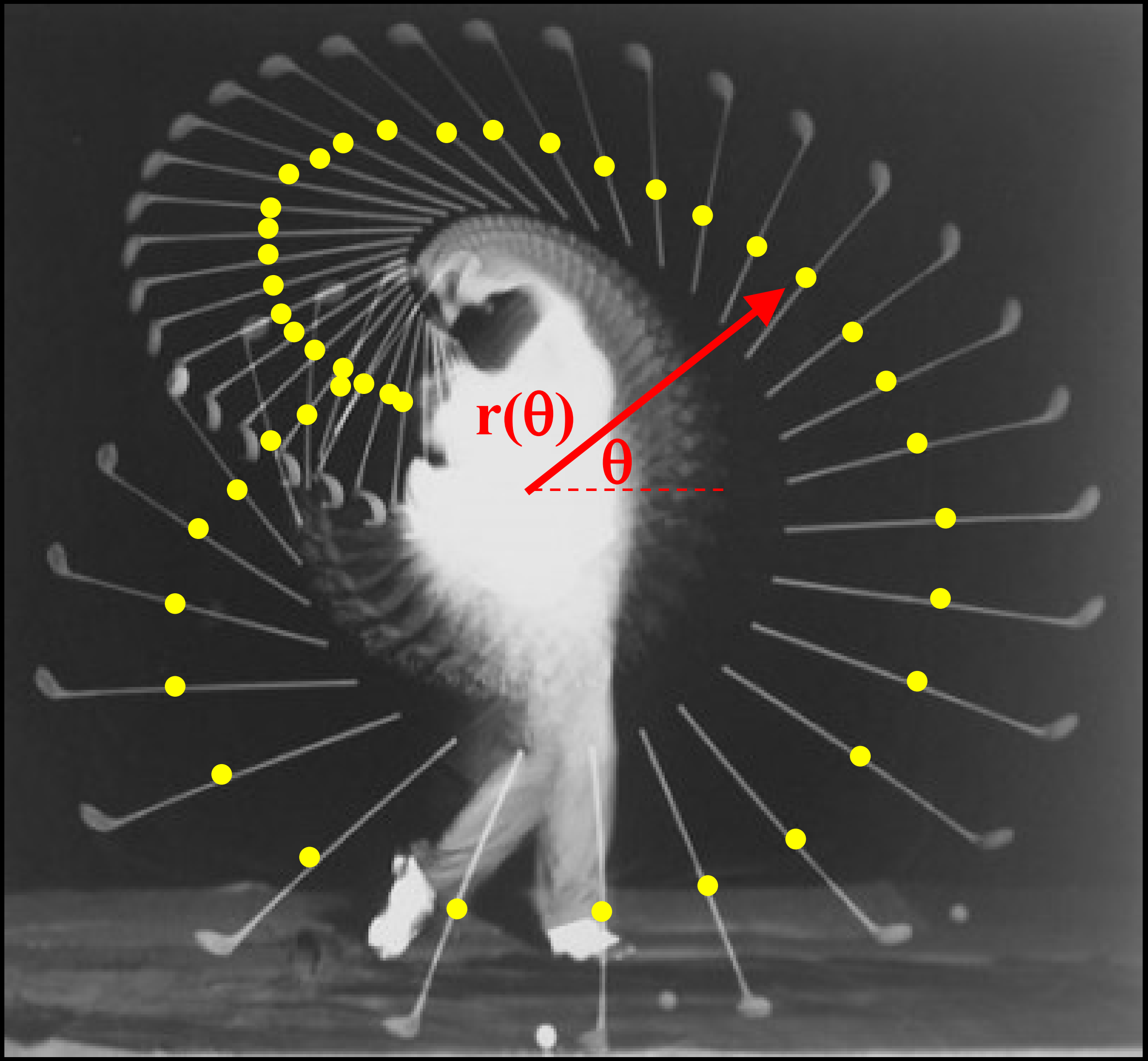
$$\vec{v}_{B/C} = \vec{v}_{B/sol} - \vec{v}_{C/sol}$$
$$\vec{v}_{B/sol} = \vec{v}_{B/C} + \vec{v}_{C/sol}$$
$$= 50\vec{i} - 50\vec{i} = \vec{0}$$

Le ballon tombe verticalement sans vitesse horizontale!

Plan de la semaine

- Variables du mouvement
  - Calcul différentiel et intégral : liens entre x, v et a
  - Trajectoire produite par une acceleration quelconque :
    - Fonction du temps : $a(t)$
    - Fonction de la position : $a(x)$
    - Fonction de la vitesse : $a(v)$
- Mouvement relatif
- **Mouvement curviligne**
  - Coordonnées polaires
  - Cas spécifique : movement circulaire
  - Coordonnées normale/tangentielle

Quel est le meilleur système de coordonnées pour représenter la trajectoire du CM du bâton ?

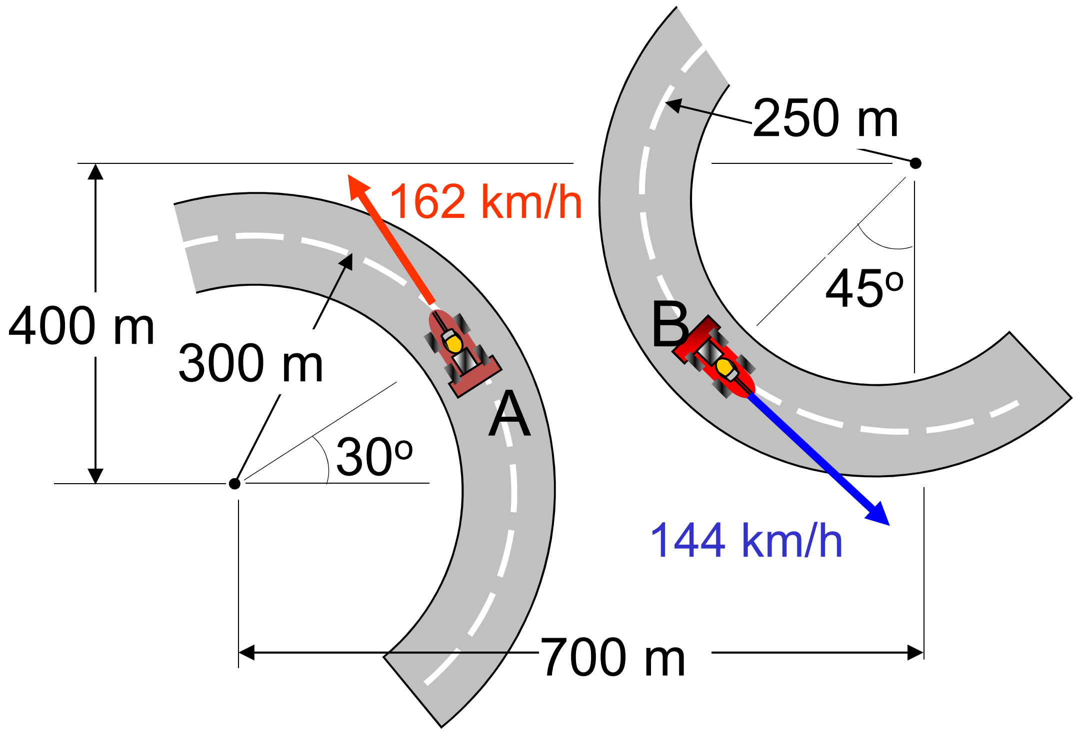


La nature curviligne du mouvement incite à abandonner le système cartésien (composantes rectangulaires) pour adopter un meilleur système.

Mouvement curviligne

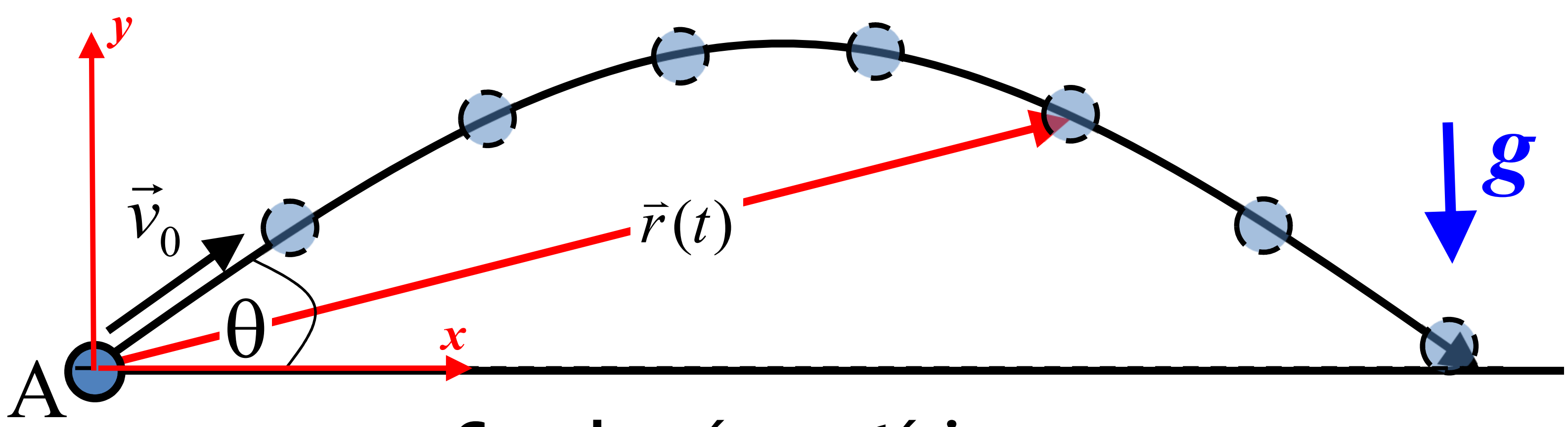
Comment traiter le mouvement curviligne ?

- ❑ **POSITION**
- ❑ **VITESSE**
- ❑ **ACCÉLÉRATION**



Position – Coordonnées cartésiennes

On définit le vecteur position $\vec{r}(t)$ entre l'origine et la position de l'objet à l'instant t.



Coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}}$$

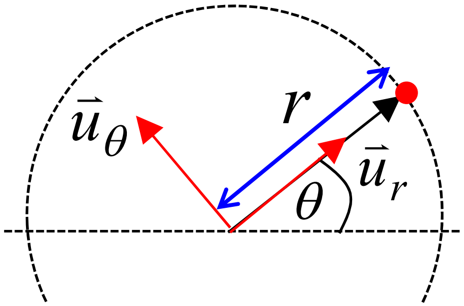
Exemple – Chute libre 2D

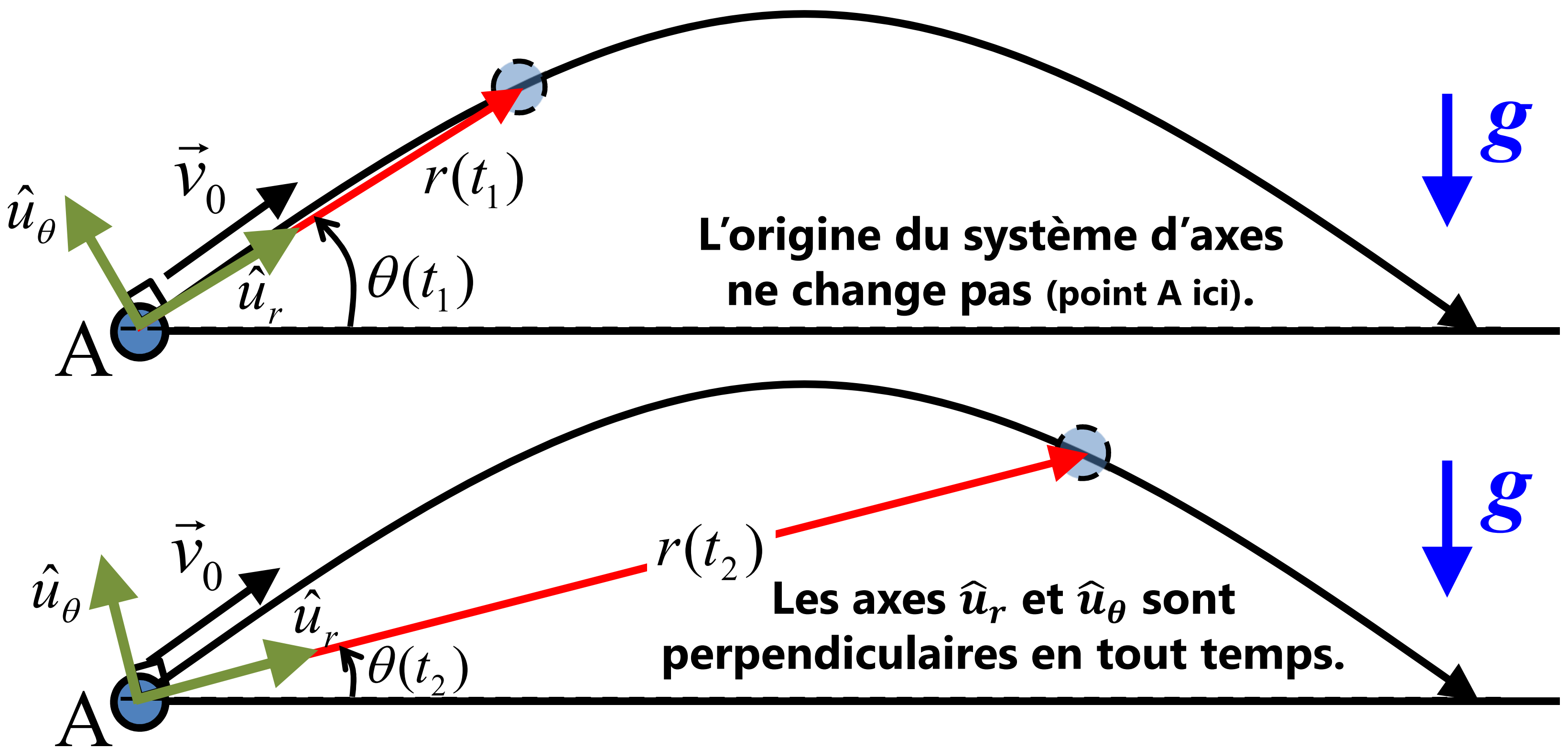
$$\vec{r}(t) = [\underbrace{x_0 + (v_0\cos\theta)\cdot t}_{\text{MRU}}]\vec{i} + \left[\underbrace{y_0 + (v_0\sin\theta)\cdot t - \frac{gt^2}{2}}_{\text{MUA}}\right]\vec{j}$$

Système de coordonnées polaires

On associe aux variables r (distance) et θ (angle) les vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\theta$.

Le système d'axes n'est plus fixe: il tourne sur lui-même en fonction de la position du point sur la trajectoire.

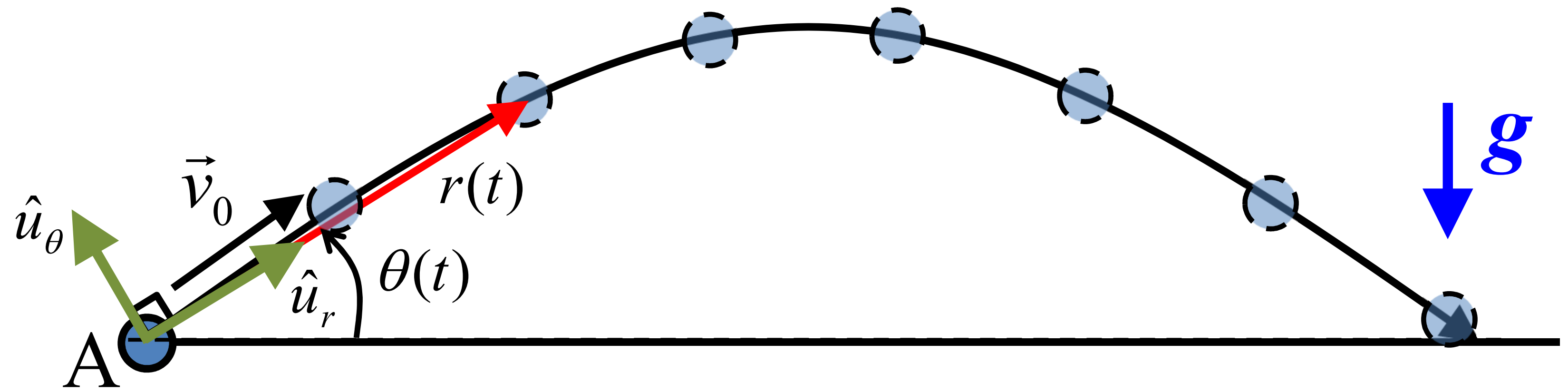




Position – Coordonnées polaires

Coordonnées polaires

$$\boxed{\vec{r}(t) = r(t)\,\hat{u}_r}$$



Relations entre coordonnées cartésiennes et polaires

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Si $x<0$, ajouter $\pm\pi$

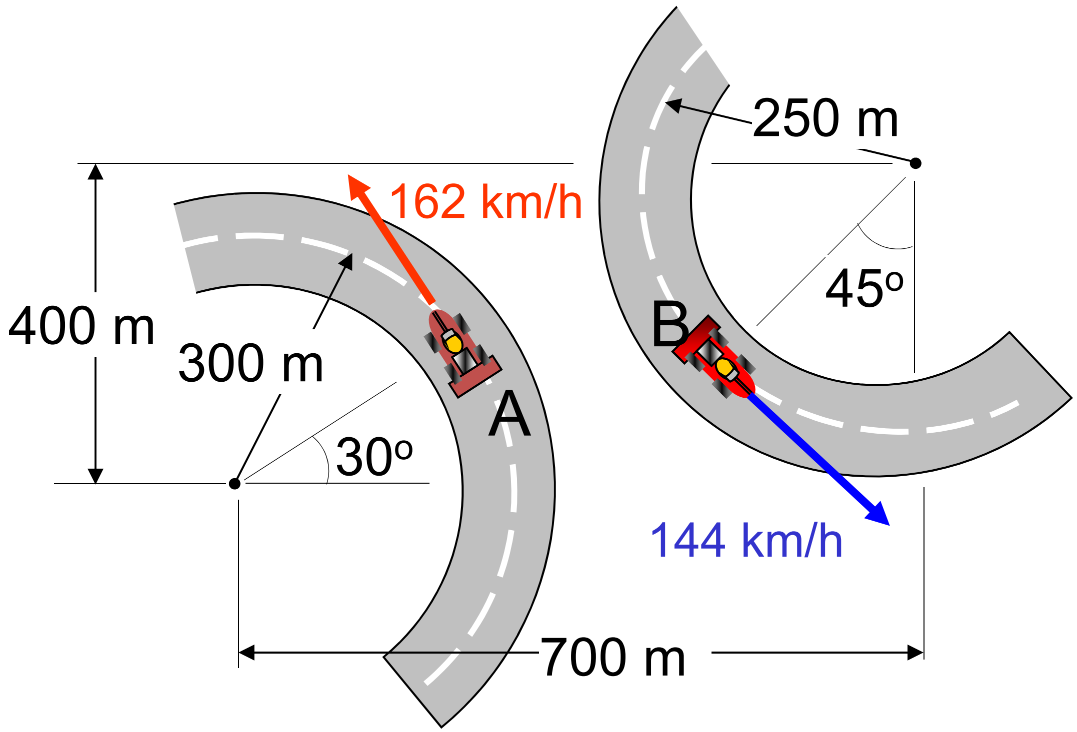
$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

Dorénavant, on abandonne la dépendance temporelle pour alléger la notation : $x(t)$ deviendra x et $r(t)$ deviendra r, par exemple.

Mouvement curviligne

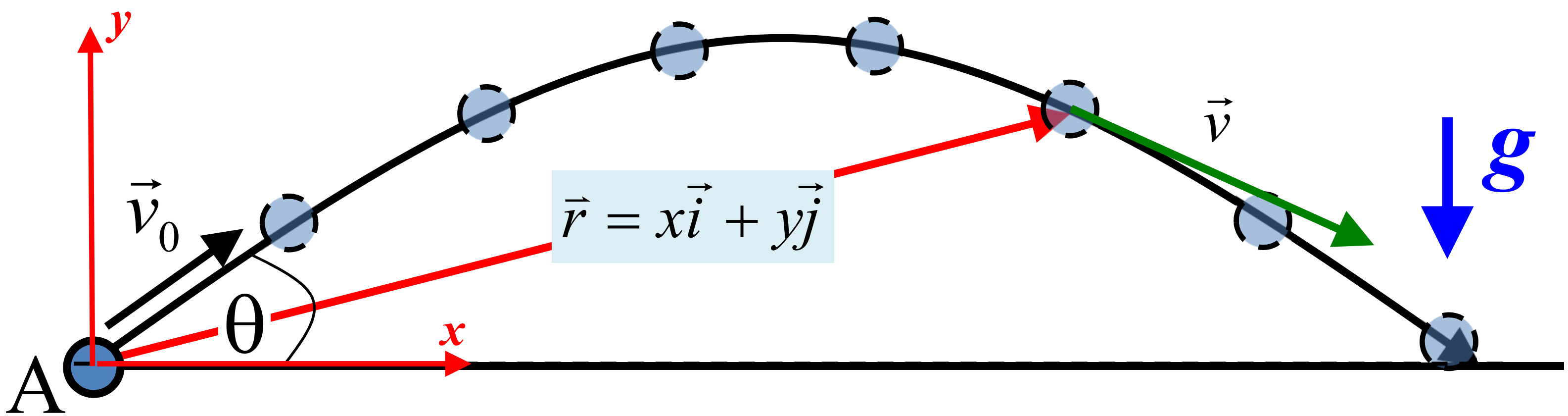
Comment traiter le mouvement curviligne ?

- ❑ **POSITION**
- ❑ **VITESSE**
- ❑ **ACCÉLÉRATION**



Vitesse – Coordonnées cartésiennes

Il faut dériver le vecteur position $\vec{r}$ pour obtenir la vitesse $\vec{v}$.



Coordonnées cartésiennes

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}\left[x\vec{i} + y\vec{j}\right] = \left[\frac{dx}{dt}\vec{i} + \cancel{x\frac{d\vec{i}}{dt}}\right] + \left[\frac{dy}{dt}\vec{j} + \cancel{y\frac{d\vec{j}}{dt}}\right]$$

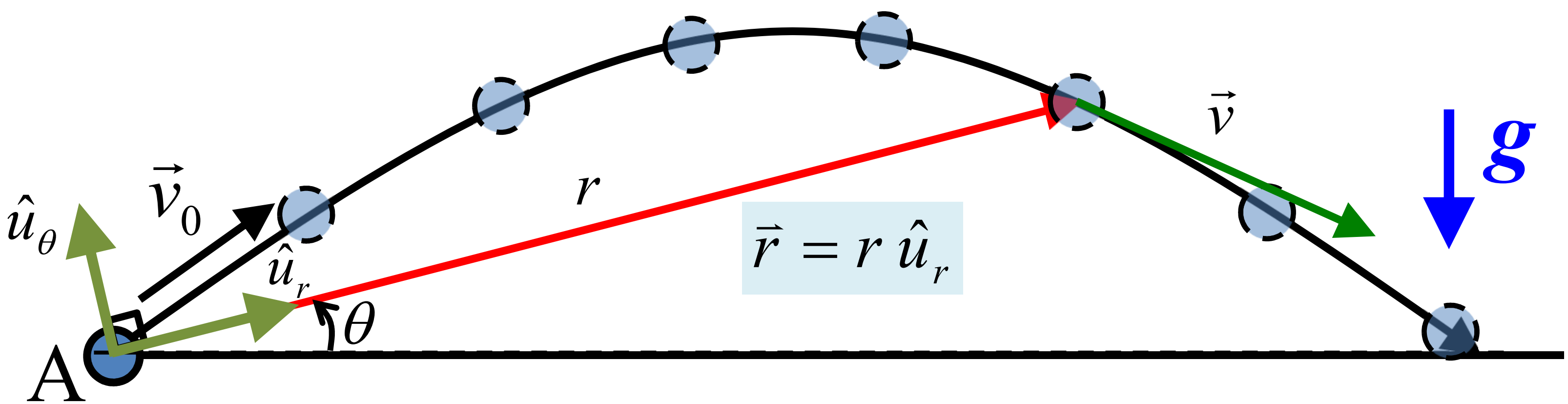
$$\boxed{\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}}$$

Dérivée d'un produit

Les vecteurs unitaires sont fixes : ils ne varient pas avec le temps !

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{0} \qquad \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{0}$$

Vitesse – Coordonnées polaires



Coordonnées polaires

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\hat{u}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\boxed{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}$$

L'orientation des vecteurs $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\theta$ varie dans le temps.
La dérivée de $\hat{u}_r$ ne vaut donc pas zéro.

Que vaut-elle ?

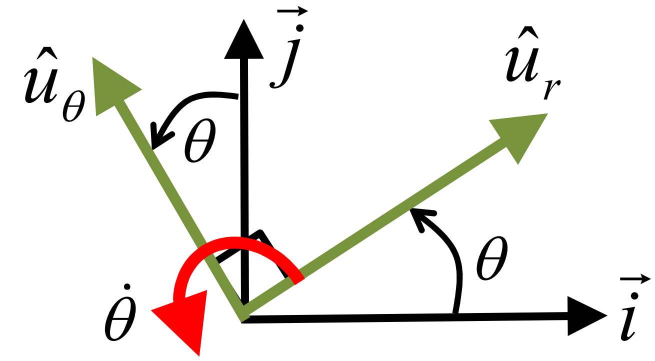
Il faut écrire les vecteurs $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\theta$ en fonction des vecteurs unitaires fixes $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ pour évaluer leurs dérivées temporelles.

Vitesse – Coordonnées polaires

Décomposition de $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\theta$

$$\hat{u}_r = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$$

$$\hat{u}_\theta = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}$$



Dérivée temporelle de $\hat{u}_r$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\cos\theta}{dt}\vec{i} + \frac{d\sin\theta}{dt}\vec{j}$$

$$\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\big[\underbrace{-\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}}_{\hat{u}_\theta}\big]$$

$$\boxed{\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{u}_\theta}$$

$$\frac{d\sin\theta}{dt} = \frac{d\sin\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{d\cos\theta}{dt} = \frac{d\cos\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta$$

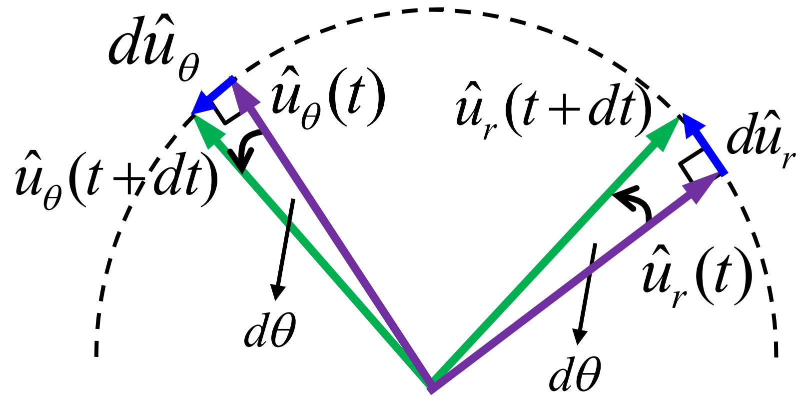
$$\dot{\theta} \equiv \omega \equiv \frac{d\theta}{dt}$$ Vitesse angulaire (rad/s)

Le vecteur $\hat{u}_r$ varie en direction du vecteur $\hat{u}_\theta$.

Vitesse – Coordonnées polaires

Dérivées des vecteurs unitaires $\hat{u}_r$ et $\hat{u}_\theta$

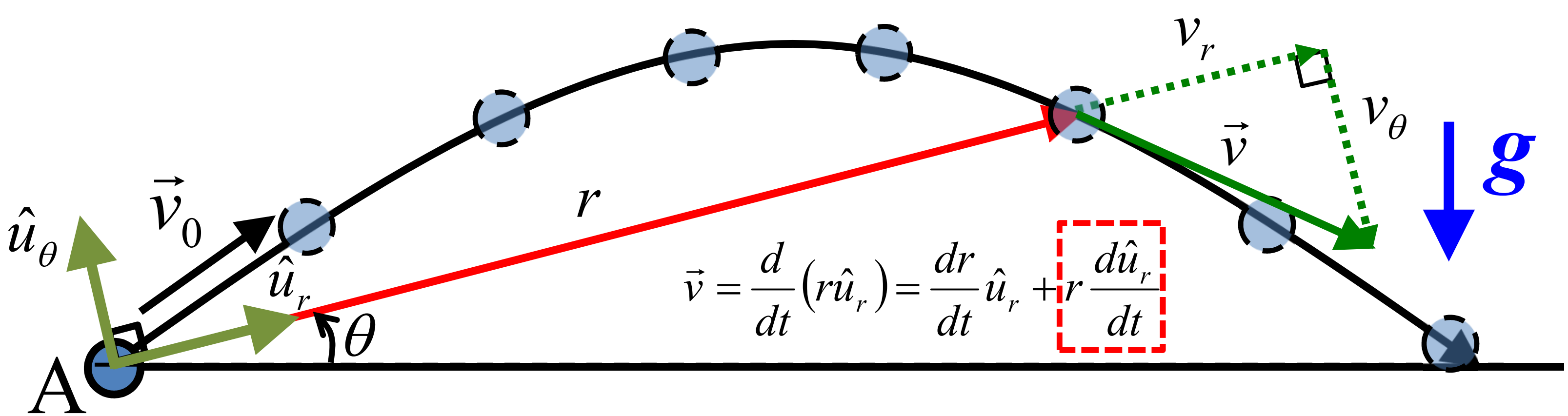
$$\boxed{\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{u}_\theta} \qquad \boxed{\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{u}_r}$$



Vitesse

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta}$$

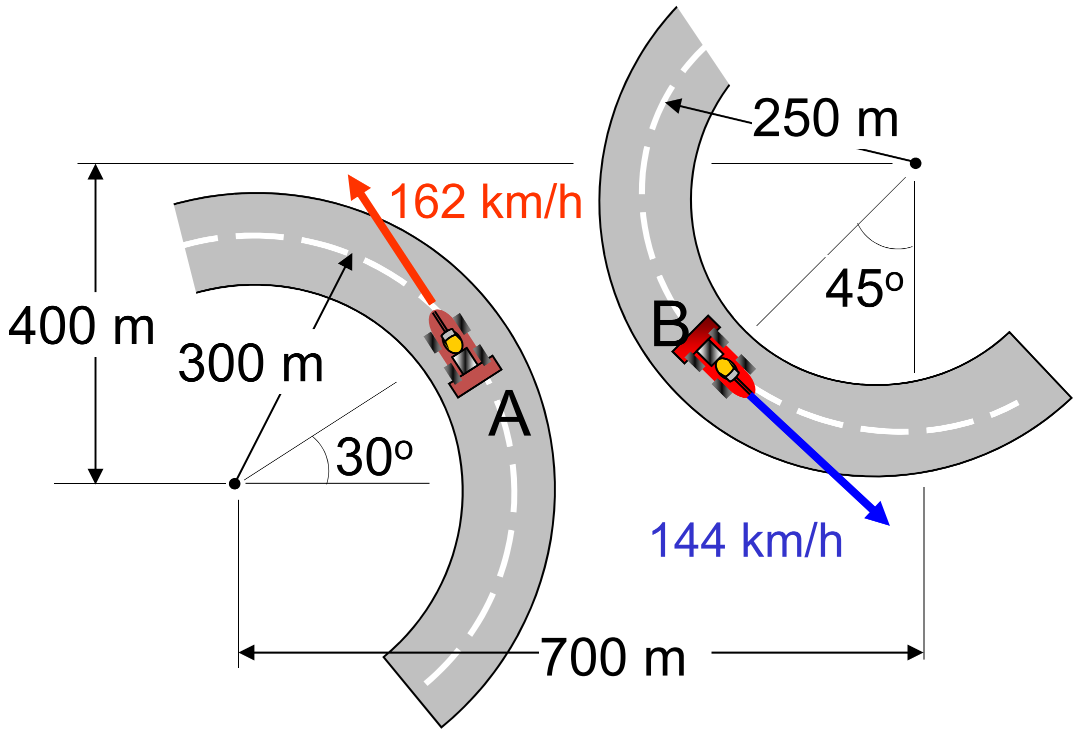
Vitesse radiale v_r Vitesse transversale v_θ



Mouvement curviligne

Comment traiter le mouvement curviligne ?

- ❑ **POSITION**
- ❑ **VITESSE**
- ❑ **ACCÉLÉRATION**



Accélération – Coordonnées polaires

Coordonnées cartésiennes

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}$$

Coordonnées polaires

$$\ddot{r} \equiv \frac{d^2r}{dt^2}$$

$$\ddot{\theta} \equiv \alpha \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta\right)$$

Il faut dériver les produits…

$$\vec{a} = \underbrace{\ddot{r}\,\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta}_{} + \underbrace{\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\,\hat{u}_r}_{}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{u}_\theta}$$

Accélération – Coordonnées polaires

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)}\hat{u}_r + \underbrace{\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)}\hat{u}_\theta$$

Accélération radiale

$$\boxed{a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2}$$

$$\boxed{a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}}$$

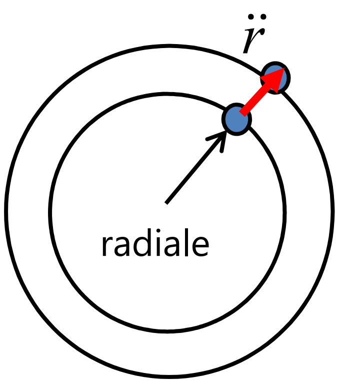
Accélération transversale

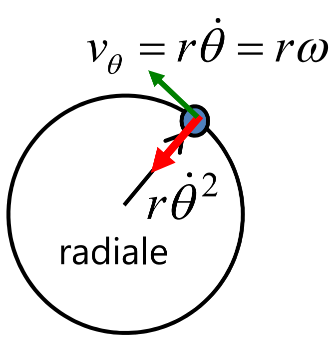
Accélération linéaire

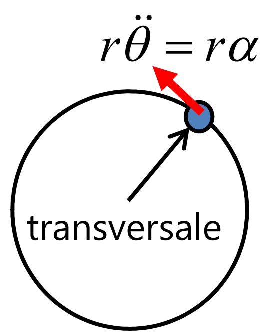
Accélération centripète

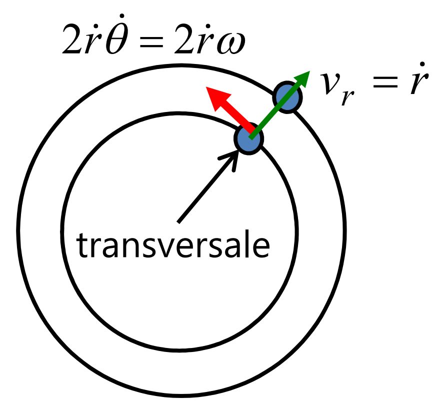
Accélération tangentielle

Accélération de Coriolis









Cas particulier – Mouvement circulaire

Dans le cadre du cours, les coordonnées polaires ne seront évaluées que dans le cas du mouvement circulaire.

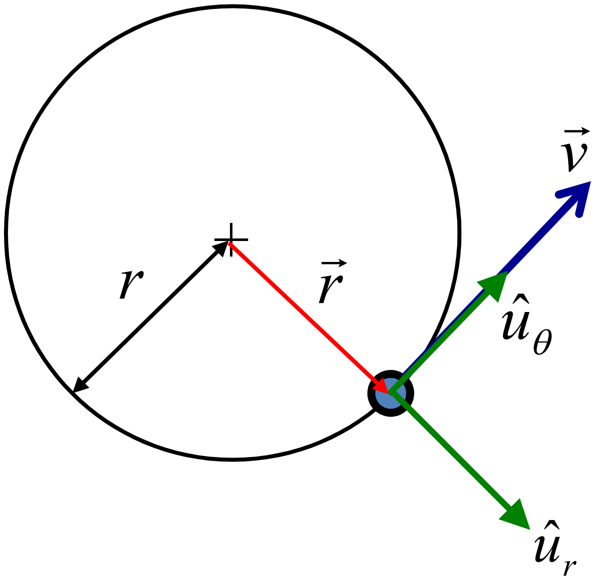
En mouvement circulaire, le rayon de la trajectoire est constant.

$$r = \text{constant} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

Vitesse $\vec{v} = \cancel{\dot{r}}\,\hat{u}_r + r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta$ $\quad \boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\,\hat{u}_\theta}$

Accélération $\vec{a} = \left(\cancel{\ddot{r}} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r + \left(2\cancel{\dot{r}}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta$

$$\boxed{\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r + r\ddot{\theta}\,\hat{u}_\theta}$$



Notation alternative $\vec{v} = r\omega\,\hat{u}_\theta$ $\qquad \vec{a} = -\dfrac{v^2}{r}\hat{u}_r + r\alpha\,\hat{u}_\theta$

Coordonnées normale/tangentielle

Principe

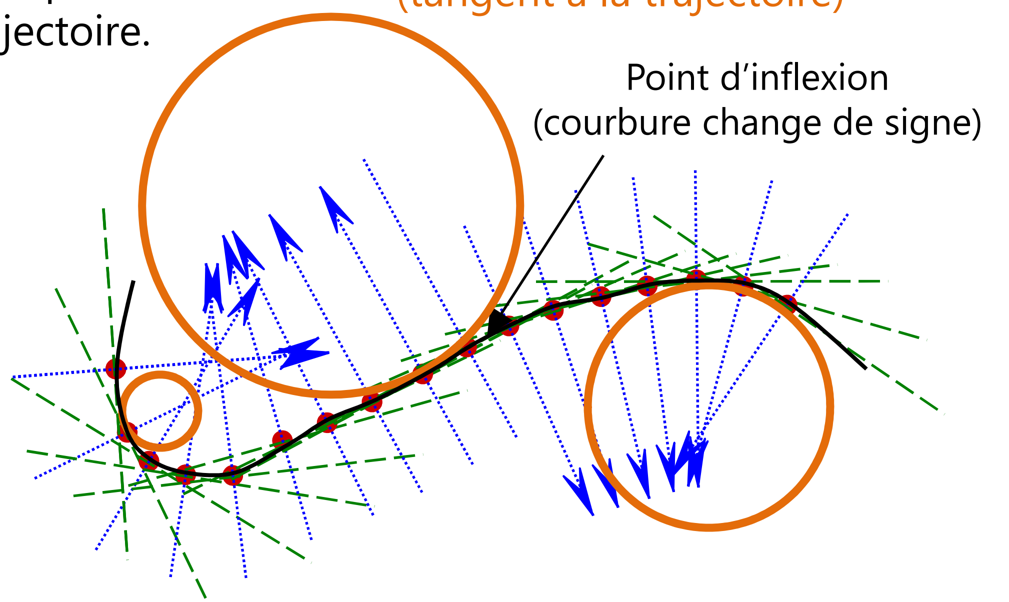
Les équations du mouvement circulaire sont simples : on aimerait en tirer avantage même pour une trajectoire qui n'est pas circulaire.

> Pourrait-on utiliser les équations circulaires pour une trajectoire quelconque (pas nécessairement circulaire) ?

Système de coordonnées normale/tangentielle

En chaque point de la trajectoire quelconque, on peut tracer un cercle tangent à la trajectoire. On définit alors :

- Le vecteur unitaire normal $\hat{u}_n$ orienté vers le centre du cercle ;
- Le vecteur unitaire tangentiel $\hat{u}_t$ tangent à la trajectoire et perpendiculaire à $\hat{u}_n$.



Coordonnées normale/tangentielle

On note ρ le rayon de courbure de la trajectoire : c'est le rayon du cercle tangent en un point de la trajectoire.

Si on connaît ρ, on peut calculer la vitesse et l'accélération en utilisant les équations du mouvement circulaire adaptées aux axes $\hat{u}_n$ et $\hat{u}_t$.

Vitesse

$$\boxed{\vec{v} = \rho\dot{\theta}\,\hat{u}_t}$$

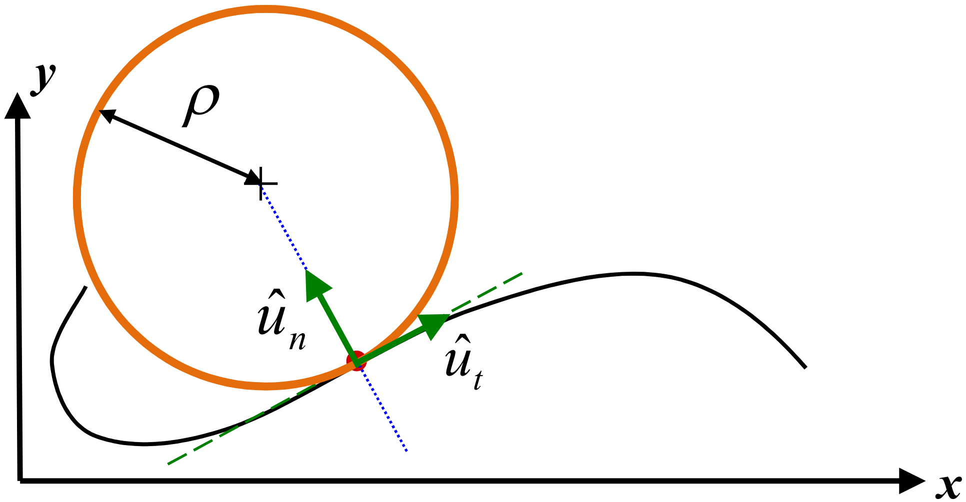
Accélération

$$\boxed{\vec{a} = \rho\dot{\theta}^2\hat{u}_n + \rho\ddot{\theta}\,\hat{u}_t}$$

$\hat{u}_n$ **Vecteur unitaire normal**

Pointe vers le centre du cercle osculateur

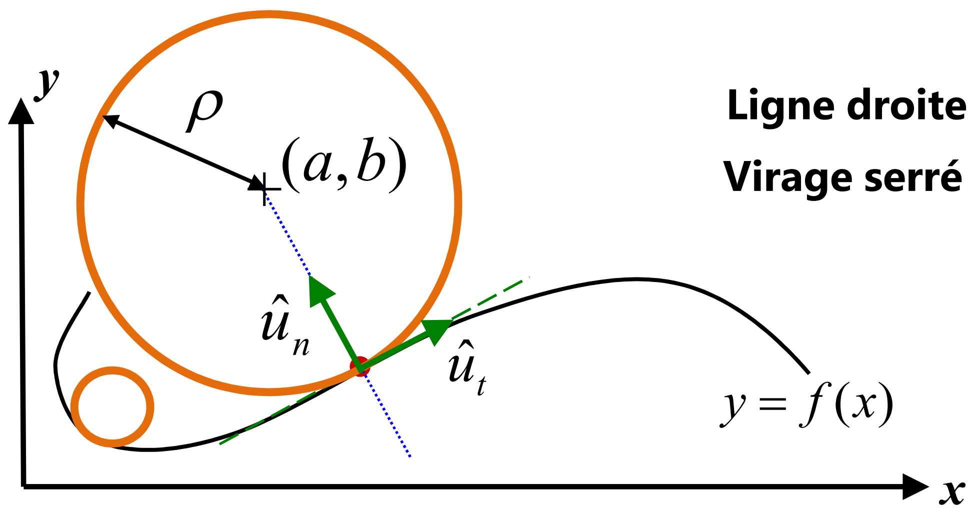
$\hat{u}_t$ **Vecteur unitaire tangentiel**



Comment calculer le rayon de courbure ?

Toute l'utilité des coordonnées normale/tangentielle repose sur le fait que l'on peut obtenir le rayon de courbure ρ.

Si l'on considère une trajectoire plan $y = f(x)$, alors ρ sera une fonction de x.



Ligne droite : $\rho \to \infty$

Virage serré : ρ petit

Équation du cercle tangent $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = \rho^2$$

Dérivée première $$(x-a) + (y-b)\frac{dy}{dx} = 0$$

Dérivée seconde $$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y-b)\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

Rayon de courbure

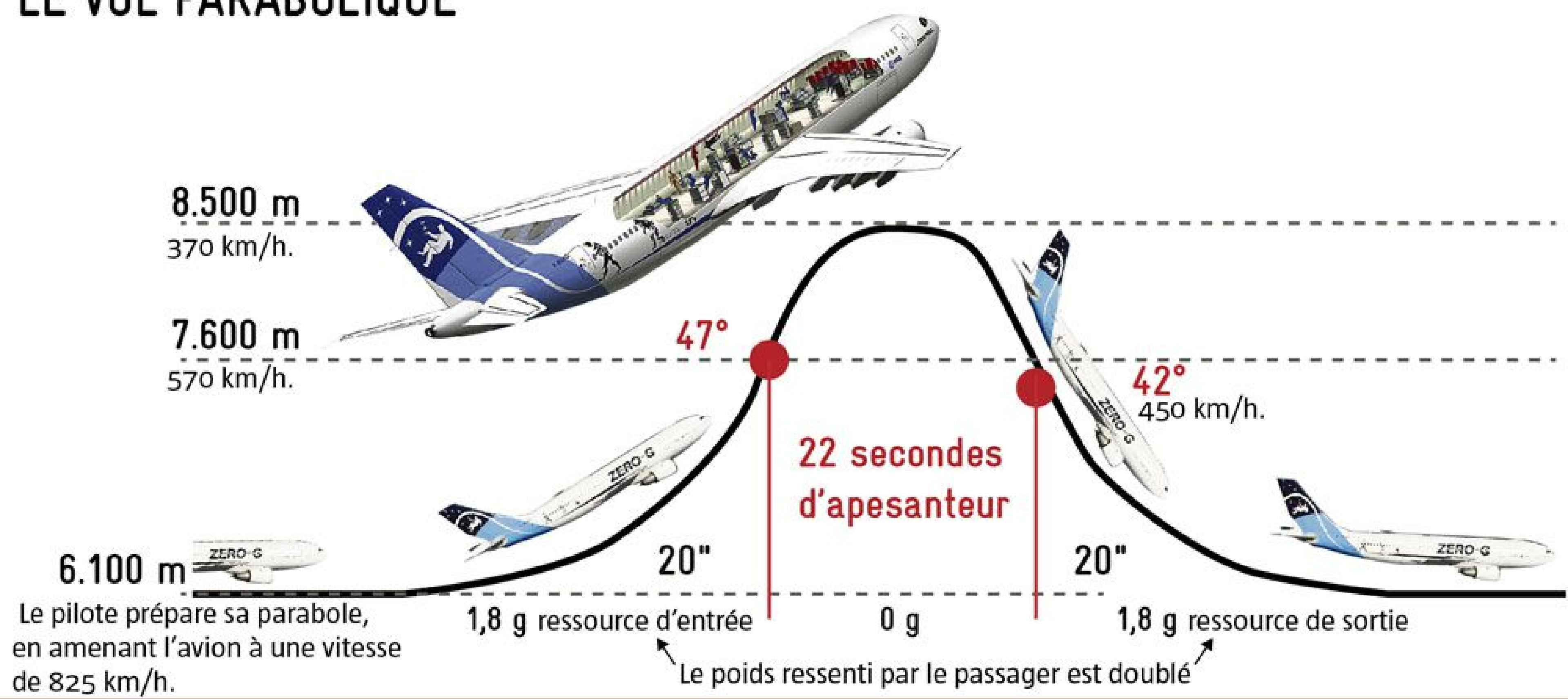
$$\boxed{\rho(x) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}}$$

Vols paraboliques

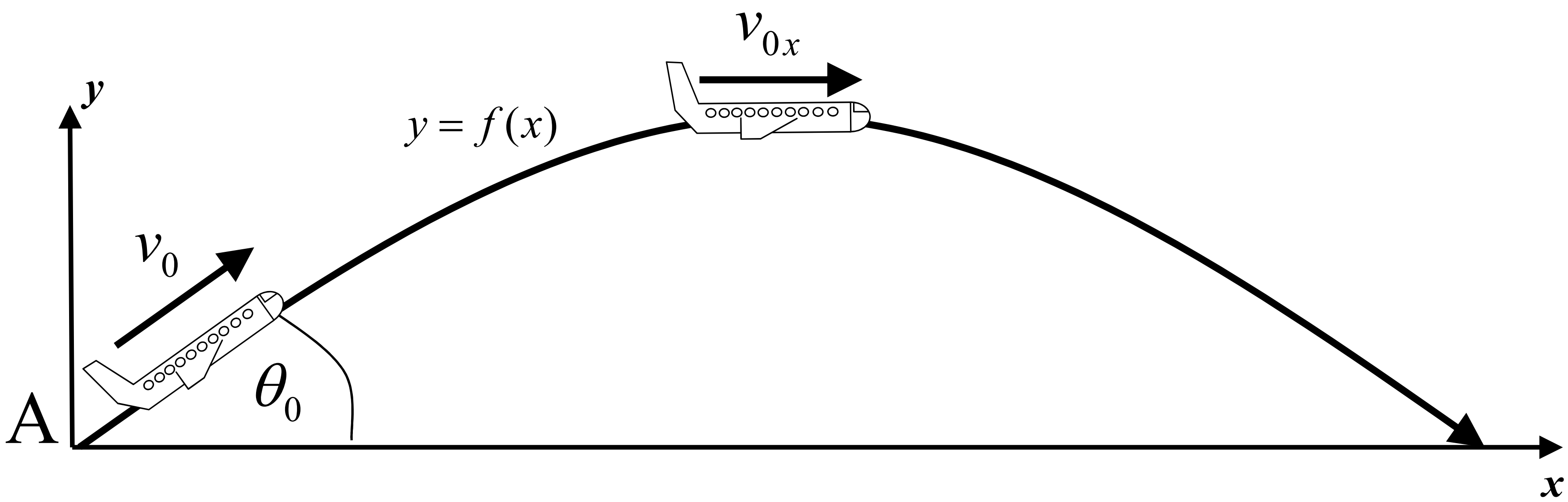
https://www.youtube.com/watch?v=1ieR8hIXUIg

LE VOL PARABOLIQUE

Infographie le JDD - Sources : CNES et Novespace



Exemple – Vol parabolique

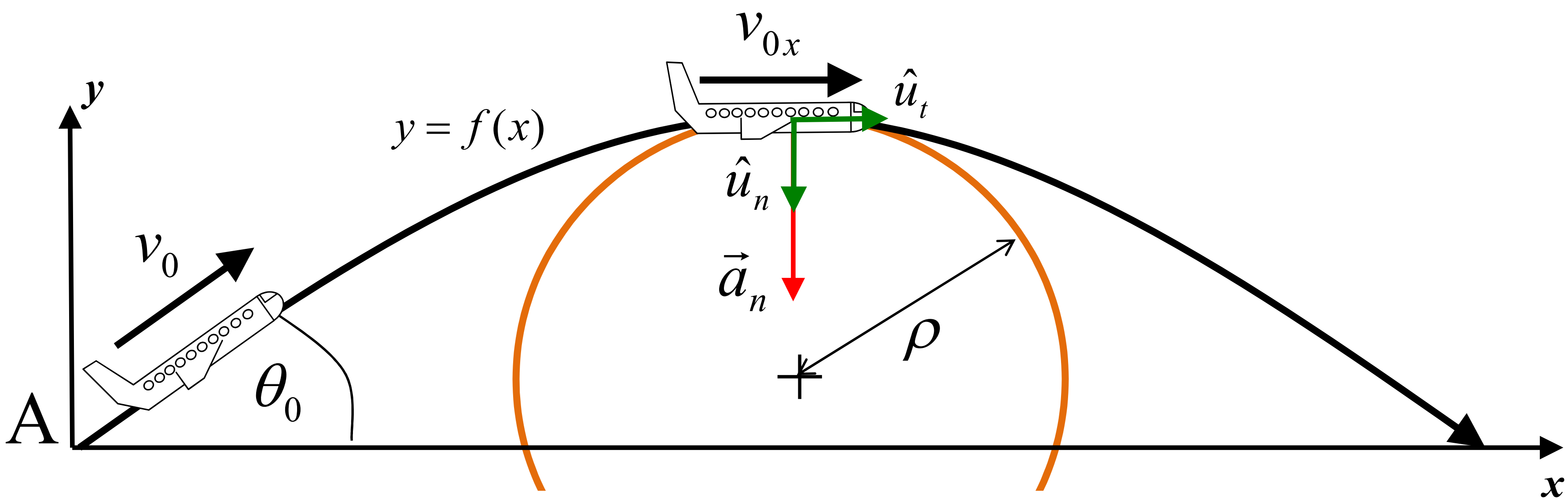


Au point A, l'Airbus 300 « Zéro-G » se déplace à 900 km/h et fait un angle de 10° avec l'horizontale. Il coupe alors ses moteurs.

Utilisez les coordonnées normale/tangentielle pour calculer l'accélération centripète au moment où il passe par le sommet de la parabole.

N.B. Négligez le frottement de l'air.

Exemple – Vol parabolique



Raisonnement

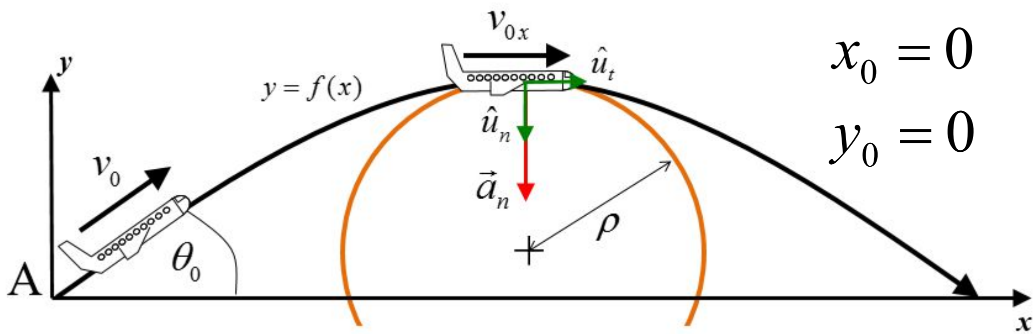
1. Placer le système de coordonnée.
2. Comment est orientée l'accélération centripète ?
3. Comment calcule-t-on cette accélération ?
4. De quelles variables a-t-on besoin pour effectuer ce calcul ? v_t ρ

$$\boxed{a_n = \frac{v_t^2}{\rho}}$$

Exemple – Vol parabolique

1. Vitesse tangentielle

$$\boxed{v_t = v_{0x} = v_0 \cos\theta_0}$$



$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

2. Rayon de courbure au sommet de la parabole

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\boxed{\dfrac{dy}{dx}}\right)^2\right]^{3/2}}{\boxed{\left|\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|}}$$

Position en fonction du temps (MUA parabolique)

$$x(t) = (v_0 \cos\theta_0)\,t \qquad y(t) = (v_0 \sin\theta_0)\,t - \frac{gt^2}{2}$$

Exprimer $y(x)$ afin de calculer les dérivées.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta_0} \Rightarrow y(x) = x\tan\theta_0 - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta_0}$$

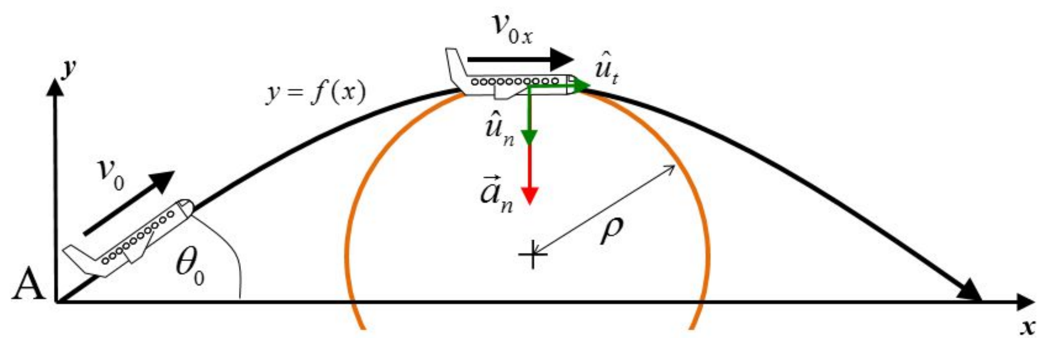
Au sommet de la parabole (maximum de $y(x)$) $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = 0}$

Dérivée seconde : $\boxed{\dfrac{d^2y}{dx^2} = -\dfrac{g}{v_0^2\cos^2\theta_0}}$

Exemple – Vol parabolique

$$\boxed{v_t = v_0 \cos\theta_0} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = 0}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0}}$$



On calcule le rayon de courbure, puis l'accélération centripète.

$$\rho = \frac{\left[1+0^2\right]^{3/2}}{\left|-\dfrac{g}{v_0^2 \cos^2\theta_0}\right|} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{v_t^2}{\rho} = \frac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{\dfrac{v_0^2 \cos^2\theta_0}{g}}$$

Au sommet, l'avion est bel et bien en chute libre ! ($a_t = 0$)

$$\boxed{a_n = g}$$

Conclusion

- Variables du mouvement
  - Dériver et intégrer pour passer de a à v et à x.

Cas 1 – $a(t)$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\tau)d\tau$$

Cas 2 – $a(v)$

$$\int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$$

Cas 3 – $a(x)$

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{x_0}^{x} a(\chi)d\chi$$

- Mouvement relatif
  - Décrire le movement dans plusieurs référentiels.

$$\vec{r}_{B/A} = \vec{r}_{B/R} - \vec{r}_{A/R}$$
$$\vec{v}_{B/A} = \vec{v}_{B/R} - \vec{v}_{A/R}$$
$$\vec{a}_{B/A} = \vec{a}_{B/R} - \vec{a}_{A/R}$$

- Mouvement curviligne
  - Calculer le rayon de courbure d'une trajectoire $f(x)$;
  - Appliquer les composantes normale/tangentielle au movement curviligne.

Rayon de courbure

$$\rho(x) = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}$$

Normale/tangentielle

$$\vec{v} = \rho\dot{\theta}\,\hat{u}_t$$
$$\vec{a} = \rho\dot{\theta}^2\hat{u}_n + \rho\ddot{\theta}\,\hat{u}_t$$

Exemple 3 – Ressort (développement)

$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} d\tau = \int_{x_0}^{x} \frac{d\chi}{v(\chi)}$$

$$\vec{F}_{res} = -k\vec{x}$$

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{k}}\left[\arctan\left(\frac{\sqrt{\frac{k}{m}}x}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}\left(x^2 - x_0^2\right)}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x_0}{v_0}\right)\right]$$

$$\tan\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x_0}{v_0}\right)\right] = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}x}{\sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}\left(x^2 - x_0^2\right)}}$$

$$\frac{\left(v_0^2 + \frac{k}{m}x_0^2\right)\tan^2\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x_0}{v_0}\right)\right]}{\frac{k}{m}\left(1 + \tan^2\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t - t_0) + \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x_0}{v_0}\right)\right]\right)} = x^2$$

$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$

$$\boxed{x(t) = \pm\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}\sin\left[\omega(t - t_0) + \arctan\left(\omega\frac{x_0}{v_0}\right)\right]}$$