PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs

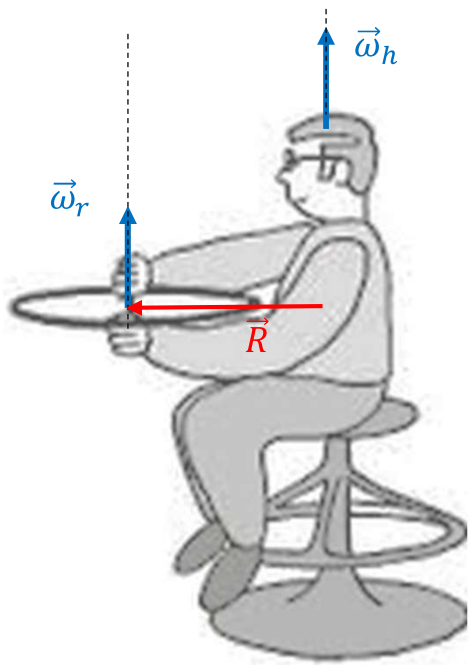
Examen final

Été 2020

Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

- Répondre aux sous-questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.**

A. Soit l'expérience de l'homme assis sur une chaise tournante et tenant une roue en rotation autour de son axe.



i. Donner l'expression du vecteur moment cinétique $\vec{H}$ du système homme+roue par rapport à l'axe de la chaise en fonction de I_h, I_r, $\vec{\omega}_h$, $\vec{\omega}_r$, m_r et $\vec{R}$. (10 points)

   On néglige le moment cinétique de la chaise.

   I_h et I_r sont les moments d'inertie de l'homme et de la roue respectivement.

   m_r est la masse de la roue.

   $\vec{\omega}_h$ et $\vec{\omega}_r$ sont les vitesses angulaires de l'homme et de la roue respectivement.

   $\vec{R}$ est le vecteur position de l'axe de la roue par rapport à l'axe de rotation de la chaise.

ii. Si l'homme tend ses bras pour augmenter $\vec{R}$ pendant la rotation, quel effet cela aurait-il sur $\vec{\omega}_h$ et sur $\vec{\omega}_r$? Justifiez (10 points)

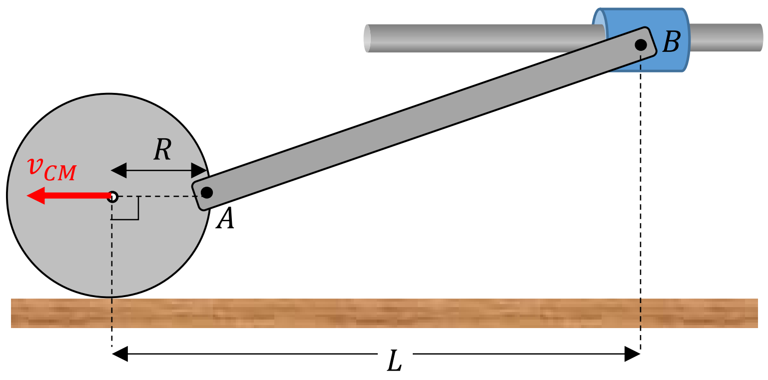
Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

B. Dans la figure ci-dessous, le disque de rayon R roule sans glisser sur une surface horizontale avec une vitesse constante v_{CM} vers la gauche. Le pivot A est situé sur la circonférence du disque. Le pivot B relie l'extrémité de la tige AB au manchon susceptible de glisser horizontalement sur son guide.

À l'instant représenté sur la figure où le point A est à la même hauteur que le l'axe du disque, déterminer :

i. L'expression du module de la vitesse v_A du point A en fonction de v_{CM}. (10 points)

ii. L'expression du module de la vitesse angulaire ω_{AB} de la tige AB en fonction de v_{CM}, R et L. (10 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

A. i: Le moment cinétique du système homme+roue est donné par:

$$\vec{H} = I_h\vec{\omega}_h + I_r\vec{\omega}_r + \vec{R} \times (m_r\vec{v}_r)$$

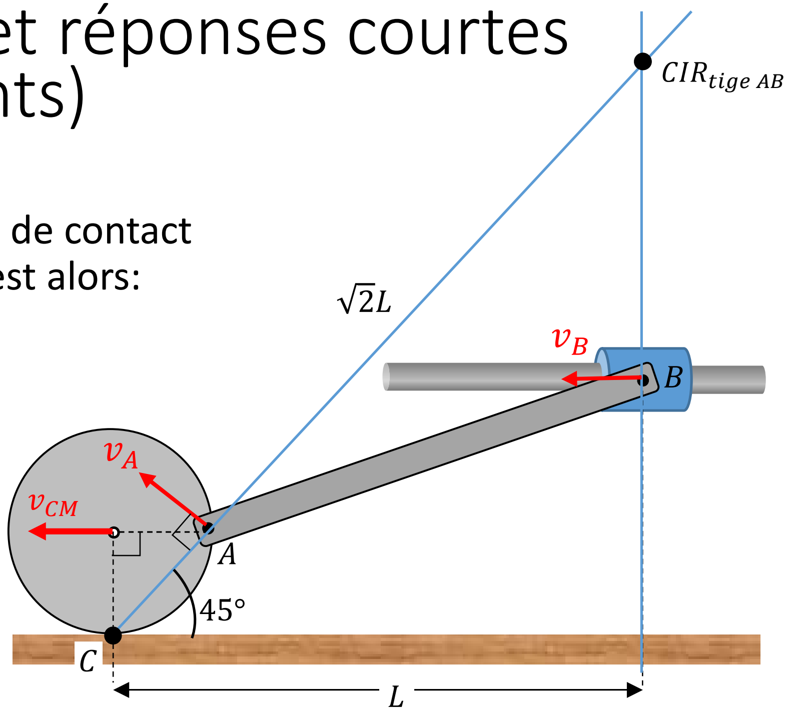
où $\vec{v}_r$ est la vitesse de l'axe de la roue. Celle-ci est donnée par : $\vec{v}_r = \vec{\omega}_h \times \vec{R}$

$$\vec{H} = I_h\vec{\omega}_h + I_r\vec{\omega}_r + m_rR^2\vec{\omega}_h$$

$$\boxed{\vec{H} = (I_h + m_rR^2)\vec{\omega}_h + I_r\vec{\omega}_r}$$

A. ii: Le fait d'augmenter R pourrait augmenter le moment d'inertie de l'homme I_h mais aussi cela augmentera le coefficient (m_rR^2) du dernier terme de l'expression de $\vec{H}$. Par conséquent, à cause de la conservation du moment cinétique total, $\vec{\omega}_h$ va diminuer. Quant à $\vec{\omega}_r$, celle-ci ne va pas changer car le mouvement de translation et de rotation de la roue sont indépendants l'un de l'autre.

Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)



B. i: Le disque roule sans glisser donc son CIR est son point de contact avec le sol (point C). La vitesse angulaire du disque est alors:

$$\omega_{disque} = \frac{v_{CM}}{R}$$

Le module de la vitesse de A est donnée par:

$$v_A = \overline{AC}\ \omega_{disque} = \sqrt{2}R\frac{v_{CM}}{R}$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{2}\, v_{CM}}$$

B. ii: Le CIR de la tige AB se trouve au point d'intersection de la droite AC et la verticale qui passe par B.

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{d_{B-CIR}} = \frac{\sqrt{2}\, v_{CM}}{\sqrt{2}\, L - \sqrt{2}R} \Rightarrow \boxed{\omega_{AB} = \frac{v_{CM}}{L - R}}$$

Question 2 (65 points)

Une tige ABC de masse $m_t = 6\,\mathrm{kg}$ et de longueur $L = 2\,\mathrm{m}$ est soudée à un demi-disque plein de masse $m_d = 10\,\mathrm{kg}$ de rayon $R = 30\,\mathrm{cm}$ et d'épaisseur négligeable. Le système est susceptible de pivoter sans frottement autour du point B qui correspond au centre du disque. Le point A est relié à un ressort attaché au sol grâce à une corde tendue qui peut s'enrouler autour du demi-disque tel que représenté sur la figure ci-dessous. La largeur et l'épaisseur de la tige ABC sont négligeables. La constante du ressort est $K = 981\ \mathrm{N/m}$. Initialement, le système est immobile à sa position d'équilibre qui correspond à la position horizontale de la tige ABC ($\theta = 0$). La gravité agit vers le bas de la page.

A. Calculer le moment d'inertie du corps composé de la tige ABC et du demi-disque par rapport à l'axe du pivot B. (15 points)

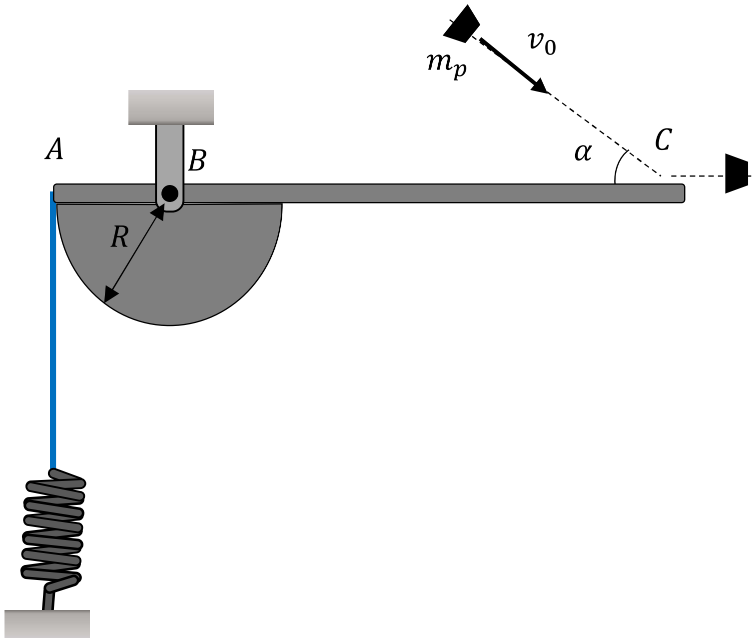
B. Déterminer l'allongement Δl_0 du ressort lorsque le système est à sa position d'équilibre. (15 points)

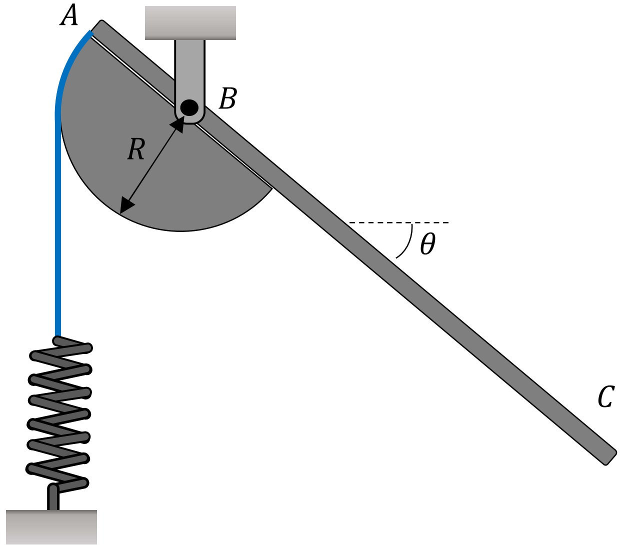
Un projectile de masse $m_p = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ voyageant à une vitesse $v_0 = 100\,\mathrm{m/s}$ orientée d'un angle $\alpha = 30°$ par rapport à l'horizontale percute le dispositif au point C puis ricoche dans la direction horizontale.

C. Quelle est la vitesse angulaire ω_0 du dispositif immédiatement après le choc? (15 points)

D. Déterminer la vitesse angulaire ω du dispositif lorsque la tige atteint sa position verticale $\theta = 90°$. (20 points)

Question 2 (65 points)





Q2 – Solution (1/2)

A. Moment d'inertie du dispositif:

$$I_B = \underbrace{\frac{m_t}{12}L^2 + m_t\left(\frac{L}{2} - R\right)^2}_{\text{Tige}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \cancel{\frac{16}{9\pi^2}}\right)m_d R^2 + m_d\left(\cancel{\frac{4R}{3\pi}}\right)^2}_{\text{Demi-disque}}$$

$$\boxed{I_B = 2 + 2{,}94 + 0{,}45 = 5{,}39\ \mathrm{kg.\,m}}$$

B. L'allongement Δl_0:

À l'équilibre: $$\sum M_B = K\Delta l_0 R - m_t g\left(\frac{L}{2} - R\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta l_0 = \frac{1}{KR}m_t g\left(\frac{L}{2} - R\right)$$

$$\boxed{\Delta l_0 = 0{,}14\ \mathrm{m}}$$

C. La vitesse angulaire du dispositif juste après le choc:

Durant le choc, les seules forces impulsives externes qui s'appliquent sur le système tige+demi-disque+projectil sont les réactions du pivot B. Leurs moments par rapport à B sont nuls. Il y a donc conservation du moment cinétique durant le choc.

$$-m_p v_0 (L - R)\sin\alpha = I_B \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega_0 = -7{,}88\ \mathrm{rad/s}}$$

Q2 – Solution (2/2)

D. La vitesse angulaire du dispositif lorsque la tige est verticale

Après le choc, les seules forces non conservatives qui s'appliquent sur le système tige+demi-disque sont les réactions au pivot B. Ces forces ne font pas de travail puisque B est immobile. Il y a donc conservation de l'énergie mécanique entre la position juste après le choc et la position verticale de la tige.

$$\Delta E = \Delta T + \Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad -\Delta T = \Delta V$$

$$-\frac{1}{2} I_B(\omega^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2} K\left(\left(\Delta l_0 + R\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\Delta l_0)^2\right) - m_t g\left(\frac{L}{2} - R\right) + m_d g\left(\frac{4R}{3\pi}\right)$$

$$\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - \frac{2}{I_B}\left[\frac{1}{2} K\left(\left(\Delta l_0 + R\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\Delta l_0)^2\right) - m_t g\left(\frac{L}{2} - R\right) + m_d g\left(\frac{4R}{3\pi}\right)\right]}$$

$$\omega = \pm\sqrt{8{,}77^2 - \frac{2}{5{,}39}(173{,}64 - 41{,}202 + 12{,}49)}$$

$$\boxed{\omega = \pm 4{,}81 \text{ (rad/s)}}$$

Au premier passage de la tige à la position verticale ω est négative

Question 4 (45 points)

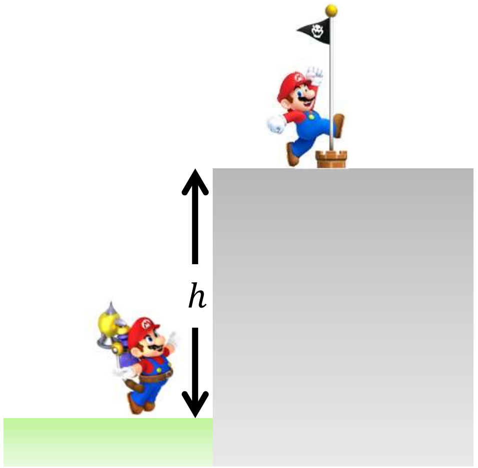
Afin de profiter des vacances, vous ressortez votre Nintendo GameCube pour jouer à *SuperMario Sunshine*. Pour vous rendre au prochain niveau, vous devez réussir à atteindre une plateforme située plus haut.

Pour se propulser, Mario utilise son *Rocket Nuzzle* (le nom donné au *jetpack* qu'il porte sur son dos). Le réservoir du *Rocket* Nuzzle, qui contient 60 L d'eau, se vide en 0,3 seconde à un taux constant. L'ouverture du réservoir par lequel l'eau s'échappe a une surface de 100 cm^2 et on suppose que l'eau est toujours éjectée en direction du sol.

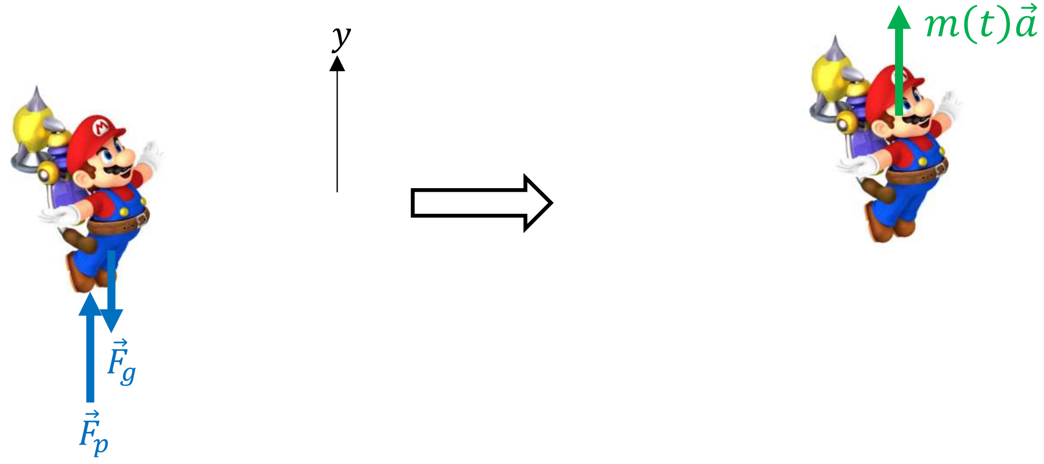
La masse de Mario seul est $M = 60$ kg. La plateforme est à une hauteur $h = 6$ m au-dessus du sol. La masse volumique de l'eau est $\rho = 1000$ kg/m^3. Considérez que 1 m^3 d'eau équivaut à 1000 L d'eau.

a) Faites le DCL-DCE de Mario durant la phase de poussée. (10 pts)
b) Quelle est la grandeur de la force de poussée exercée par le *Rocket Nuzzle*? (10 pts)
c) Quelle est la vitesse de Mario à la fin de la poussée? (20 pts).
d) À la fin de la phase de poussée, Mario est à une hauteur de 1,40 m au-dessus du sol. Parviendra-t-il à atteindre la plateforme? Justifiez par les calculs appropriés. (10 pts)

$$\int \frac{1}{a - bt} dt = -\frac{\ln(a - bt)}{b}$$



a) DCL - DCE



b) Force de poussée :

$$|F_p| = \frac{dm}{dt} \cdot u$$

$$\mu = \left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho\left|\frac{dV}{dt}\right| = \rho\,\frac{|\Delta V|}{\Delta t} = 1000 \cdot \frac{60\times10^{-3}}{0{,}3} = 200 \text{ kg/s}$$

Vitesse relative de sortie : $u = \frac{\left|\frac{dV}{dt}\right|}{S} = \frac{200\times10^{-3}}{100\times10^{-4}} = 20 \text{ m/s}$

$$\boxed{|F_p| = 150 \cdot 15 = 4000 \text{ N}}$$

c) Vitesse de Mario en fonction du temps :

On utilise la deuxième loi de Newton pour les systèmes à masse variable:

$\sum F_y + F_p = ma_y$

$-m(t)g + F_p = m(t)a$

Masse en fonction du temps :

$$m(t) = m_0 - \mu t = \left(\underbrace{60}_{\text{Mario}} + \underbrace{60}_{\text{Réservoir plein}}\right) - 200t = 120 - 200t$$

$$\Rightarrow a = \frac{-m(t)g + F_p}{m(t)} = -g + \frac{F_p}{m(t)} = -g + \frac{4000}{120 - 200t}$$

Maintenant qu'on connaît $a(t)$, on peut trouver la vitesse finale :

$$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow a(t)dt = dv$$

$$\int_0^{0,3} \left(-g + \frac{4000}{120 - 200t}\right) dt = \int_{v_0}^{v} dv'$$

$$\left[-gt - \frac{4000}{200}\ln(120 - 200t)\right]_0^{0,3} = v \Rightarrow \boxed{v = 10{,}9 \text{ m/s}}$$

d) Après la phase de poussée, Mario est en chute libre (MRUA) :

$a_y = -g$, $v_0 = 10{,}9$ m/s, $y_0 = 1{,}4$ m

Ici, on cherche à savoir si Mario va atteindre $y = 6$ m. Il existe plusieurs techniques pour le faire, l'une d'entre elles étant de déterminer la hauteur maximale que va atteindre Mario, puis de comparer avec la hauteur de la plateforme. Dans ce cas, on a les informations supplémentaires :

$v_f = 0$ m/s (car à y_{max} la vitesse est nulle)

En utilisant une des équations de la cinématique :

$$v_f^2 - v_0^2 = 2a(y_{max} - y_0)$$

$$0^2 - 10{,}9^2 = 2 \cdot (-9{,}81)(y_{max} - 1{,}4)$$

$$y_{max} = \frac{10{,}9^2}{2 \cdot 9{,}81} + 1{,}40 = 7{,}46 \text{ m}$$

Puisque $y_{max} > 6$ m, alors Mario va atteindre la plateforme et passer au prochain niveau !

Question 4 (45 points)

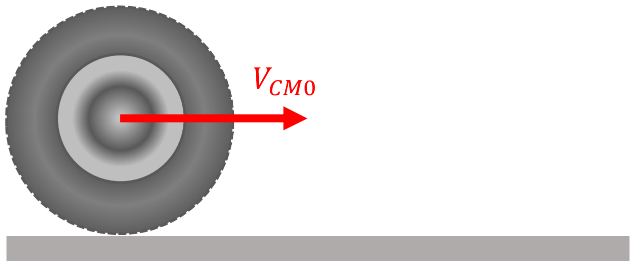
À l'instant $t = 0$, on fait glisser une roue de masse m sur un sol horizontal avec une vitesse initiale $V_{CM0} = 10\ \mathrm{m/}s$ et une vitesse angulaire nulle. À cause de la rugosité du sol, la roue se met alors à rouler et glisser à la fois jusqu'à ce que la condition de roulement sans glissement soit satisfaite. Elle commence alors à rouler sans glisser. Le rayon de la roue est $R = 20\ \mathrm{cm}$ et son rayon de giration par rapport à son axe est $\kappa = 15\ \mathrm{cm}$. Le coefficient de frottement statique et cinétique entre la roue et le plan sont :$\mu_s = 1{,}2$ et $\mu_k = 0{,}5$.

A. Faire le DCL-DCE de la roue pendant son mouvement de roulement avec glissement. (15 points)

B. Déterminer l'accélération a_{CM} du centre de masse de la roue et l'accélération angulaire α. (10 points)

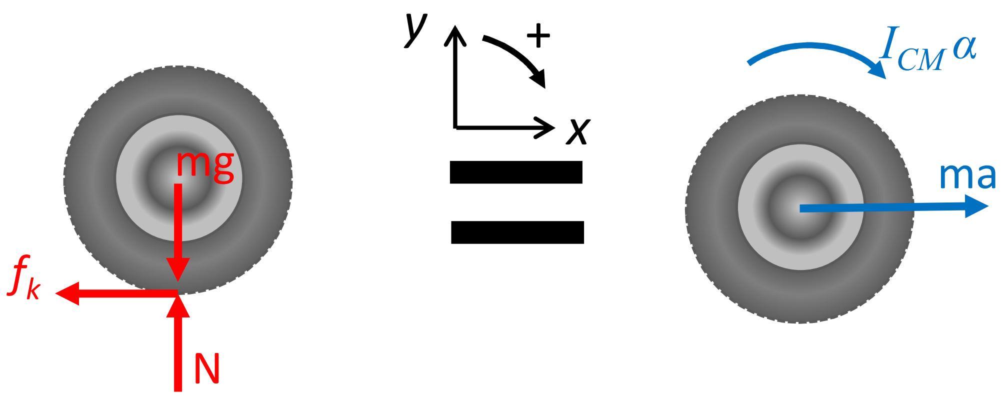
C. Quel est le temps Δt nécessaire pour que la roue commence à rouler sans glisser? (10 points)

D. Quelle est la puissance instantanée dissipée par la force de frottement à $t = 0{,}5\ \mathrm{s}$ sachant que la masse de la roue est $m = 4\ \mathrm{kg}$? (10 points)



Q4 – Solution (1/2)

A. DCL-DCE de la roue:



Points importants:

- La force de frottement doit être cinétique f_k et orientée vers la gauche
- Le sens positif de rotation est facultatif. Si absent, le sens positif est anti-horaire.
- Les accélérations peuvent être dans les sens négatifs pourvu qu'il y ait cohérence avec les équations.

B. Les valeurs des accélérations:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$\sum F_x = -f_k = ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad -\mu_k\, mg = ma_{CM} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{CM} = -\mu_k g = -4{,}905\ \mathrm{m/s^2}}$$

$$\sum M_{CM} = f_k R = I_{CM}\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu_k\, mgR = m\kappa^2\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \frac{\mu_k\, gR}{\kappa^2} = 43{,}6\ \mathrm{rad/s^2}}$$

Q4 – Solution (2/2)

C. Temps nécessaire pour que la roue commence à rouler sans glisser:

Accélérations angulaire et linéaire constantes: $\Longrightarrow \begin{cases} v_{CM}(t) = v_{CM0} + a_{CM}t \\ \omega(t) = \alpha t \end{cases}$

Lorsque la roue commence à rouler sans glisser alors: $v_{CM}(\Delta t) = R\,\omega(\Delta t)$

$$\Longrightarrow v_{CM0} + a_{CM}\,.\Delta t = R\,\alpha.\Delta t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta t = \frac{v_{CM0}}{R\alpha - a_{CM}} = 0{,}734\text{ s}}$$

D. Puissance dissipée à $t = 0{,}5$ s:

La puissance dissipée par les frottements est le produit de $f_k = -\mu_k mg$ par la vitesse du point de la roue en contact avec le sol $(v_{CM} - R\omega)$.

$$P(t) = -\mu_k mg(v_{CM0} + a_{CM}\,.t - R\alpha.t)$$

$$P(0{,}5\text{s}) = -19{,}62(10 - 2{,}4525 - 4{,}36)$$

La puissance dissipée est: $\boxed{P = 62{,}5\ W}$

Remarque: P est ici positive car la question demande la puissance dissipée (ou perdue) par les frottement. Toutefois, ceux qui donnent une valeur négative ne devraient pas être sanctionnés pour ça.