

– PHS1101 –  
Mécanique pour ingénieurs

Cours 3  
Équilibre statique

Jérémie Villeneuve  
Département de génie physique

# Force, couple et moment

- Une force  $\vec{F}$  tend à induire une **translation** selon sa ligne d'action.
- Une force peut induire une **rotation** autour d'un point O si elle génère un **moment de force**  $\vec{M}_O$ .

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

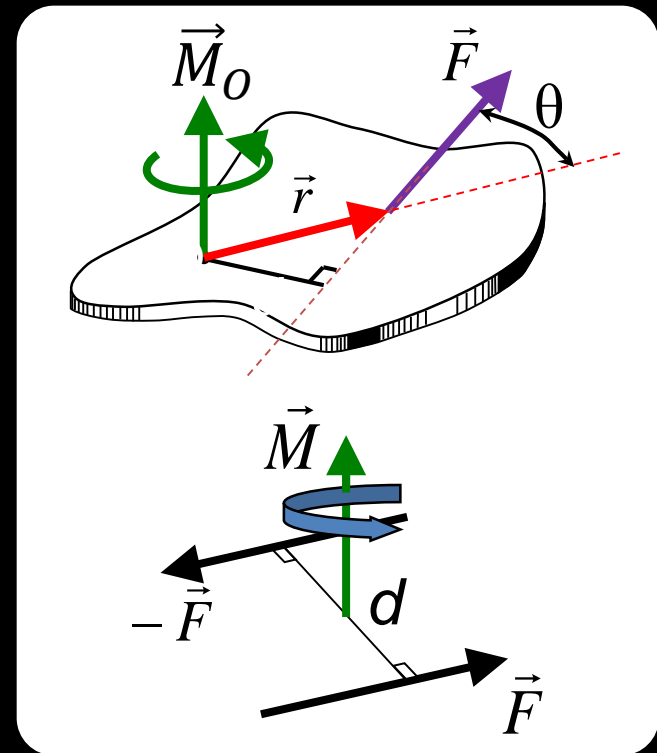
Le moment d'une force est un **vecteur lié**.

- On appelle **couple** deux forces  $\vec{F}$  et  $-\vec{F}$  de même norme, de même direction et de sens opposé.

Le **moment d'un couple** est un **vecteur libre** perpendiculaire au plan des deux forces.

$$M = Fd$$

Un couple tend à induire une **rotation sans translation**.



# Système force-couple équivalent

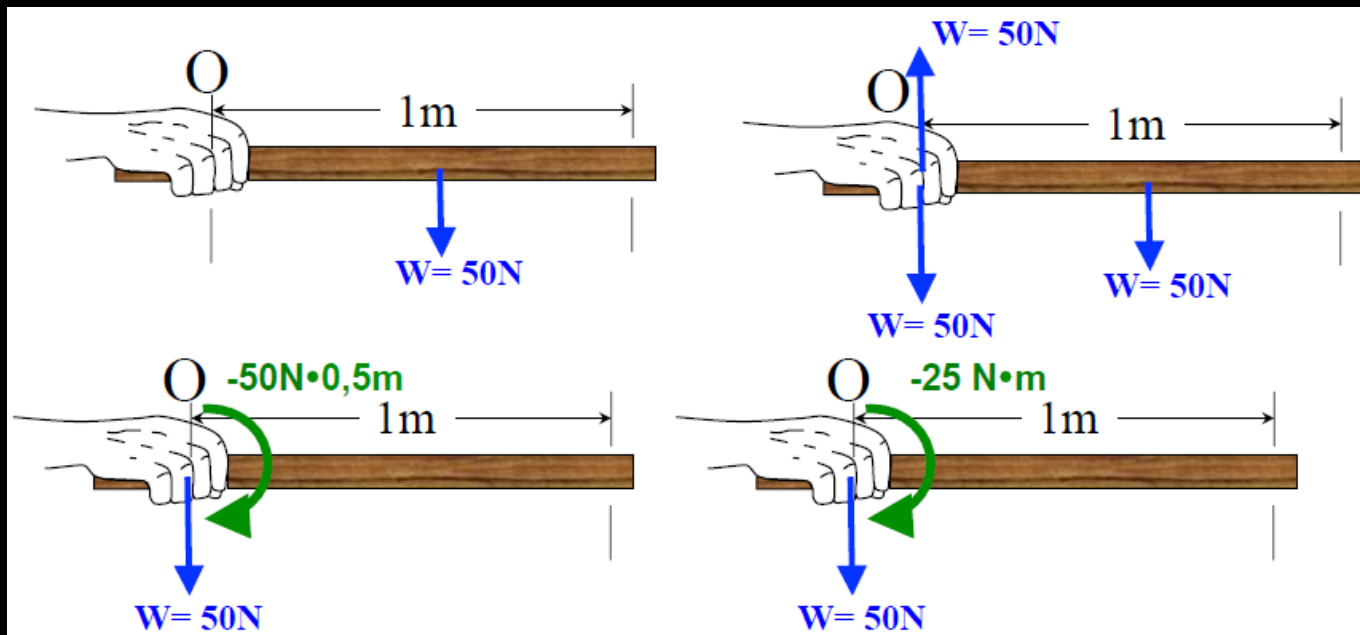
Remplacer un ensemble de forces et de couples par une seule force  $\vec{R}$  et un seul couple  $\vec{M}_O^R$  équivalents.

Force équivalente

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

Couple équivalent

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i$$



En déplaçant la force  $W$  hors de sa ligne d'action vers le point  $O$ , il faut ajouter un couple (égal au moment de la force  $W$  par rapport à  $O$ ).

## Plan de la semaine

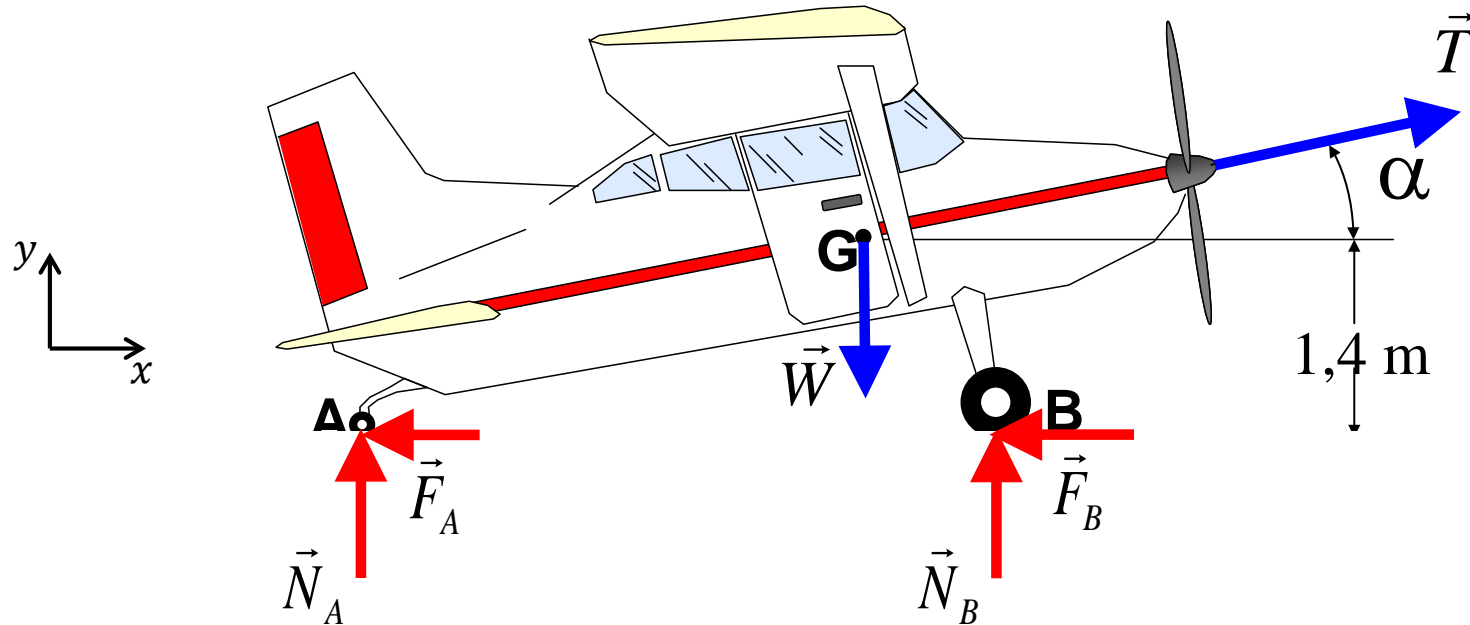
- **Diagramme du corps libre (DCL) et équilibre statique**
- Réactions aux appuis
- Applications aux structures
  - Systèmes de membrures
  - Membrane à deux forces

## Diagramme du corps libre (DCL)

**Diagramme illustrant toutes les forces auquel un corps est soumis.**

DCL de l'avion immobile avec l'hélice en marche

(On considère que le sol génère du frottement.)



### Forces de réaction (en rouge)

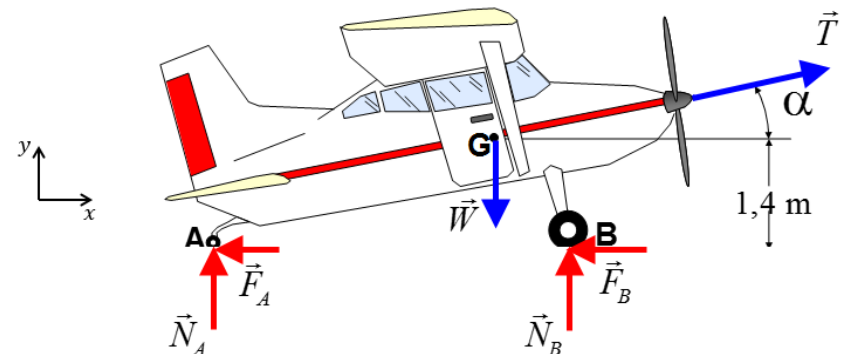
Forces qui apparaissent aux appuis ou à la jonction entre deux structures.  
Ici : appuis en A et en B.

# Comment construire un DCL ?

- 1 – Identifier le système à étudier et l'isoler ;
  - Éliminer tout élément ne faisant pas partie du système ;
- 2 – Indiquer les **forces actives** dues à des éléments externes au système :
  - Force gravitationnelle (poids) ;
  - Forces externes (ex : personne ou moteur qui tire/pousse).
- 3 – Dessiner toutes les **forces et/ou couples de réaction** qui agissent sur le système, dus à des éléments externes au système :
  - Remplacer les cordes tendues et les ressorts par les forces appropriées ;
  - Remplacer chaque appui/liaison par les forces (ex : normale, frottement entre deux surfaces) et les couples de réaction adéquats.
- 4 – Identifier clairement chaque force et chaque couple par un nom distinct ;
- 5 – Choisir un système d'axes approprié et l'indiquer clairement.

Facultatif, mais utile :

- Indiquer les distances et les angles ;
- Nommer les points importants du schéma ;
- Indiquer la vitesse de certains éléments ;
- Indiquer les grandeurs des forces/moments si elles sont connues.



# Équilibre statique

(1<sup>re</sup> loi de Newton)

## Conditions pour qu'un solide soit à l'équilibre statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \text{pour tout point O de l'espace}$$

Pour un corps à l'équilibre statique :

- L'**accélération de son centre de masse (CM)** est nulle (translation).

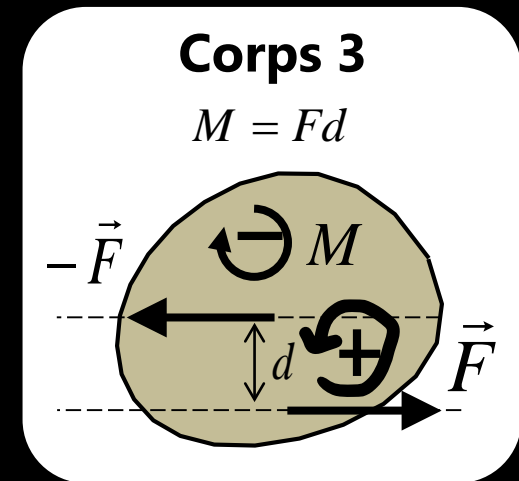
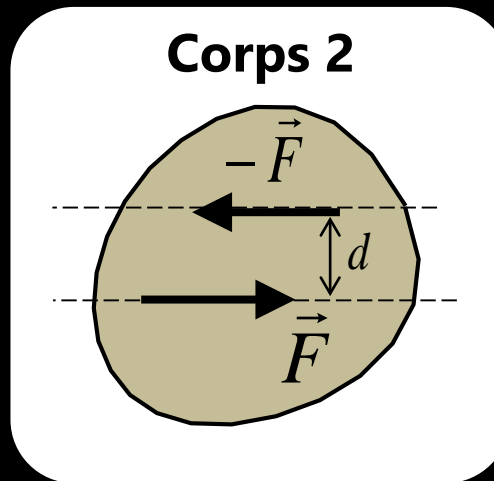
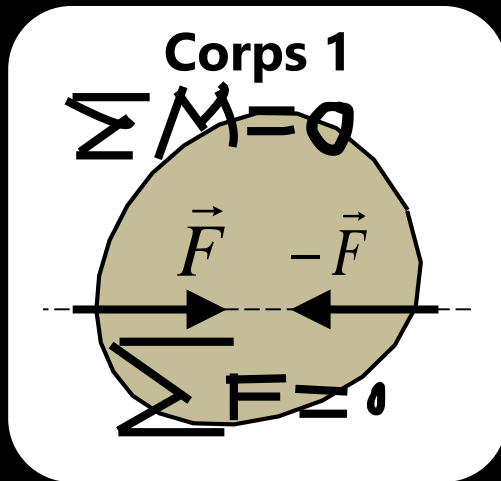
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{a} = \vec{0}$$

- Son **accélération angulaire** est nulle (rotation).  
(**I** est le moment d'inertie : l'équivalent de la masse en rotation)

$$\sum \vec{M}_O = \mathbf{I}\vec{\alpha} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{\alpha} = \vec{0}$$

# Quiz #1

Considérez les corps rigides suivants soumis à différents ensembles de forces et de couples.



Quels corps sont à l'équilibre statique ?

**A :** Corps 1

**B :** Corps 1 et 3

**C :** Corps 2 et 3

**D :** Corps 1, 2 et 3

**Une résultante nulle ( $\sum \vec{F} = \vec{0}$ ) n'est pas une condition suffisante pour être à l'équilibre statique.**



# Nature vectorielle des conditions d'équilibre statique

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \textbf{ET} \quad \sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \text{pour tout point O de l'espace}$$

Somme des forces est nulle.

Somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle.

## 3 équations scalaires

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

## 3 équations scalaires

$$\sum M_{Ox} = 0$$

$$\sum M_{Oy} = 0$$

$$\sum M_{Oz} = 0$$

En 2D : 3 équations à résoudre

En 3D : 6 équations à résoudre

# Équilibre statique

ne veut pas toujours dire immobile

La très grande majorité du temps, on utilise l'équilibre statique pour décrire des **structures immobiles**.

Par contre, les corps suivants sont aussi à l'équilibre statique :

- Un corps qui se déplace à vitesse constante sans changer de direction.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{v}_{CM} = \text{constant}$$

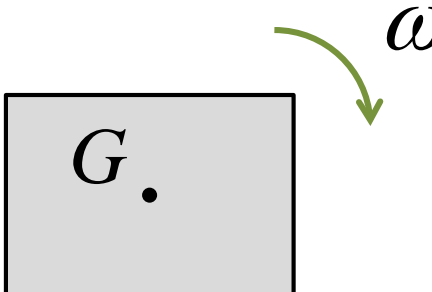
Vecteur vitesse du centre de masse

- Un corps qui tourne à vitesse angulaire constante autour de son CM.

$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\omega} = \text{constant}$$

pour tout point  
O de l'espace

Vecteur vitesse  
angulaire



The diagram shows a gray rectangular body with a center of mass labeled 'G' and a dot. A green curved arrow labeled with the Greek letter omega (ω) indicates the angular velocity of the body.

## Felix et l'équilibre statique

Saut en chute libre de Felix Baumgartner.

14 octobre 2012  
Nouveau-Mexique  
États-Unis



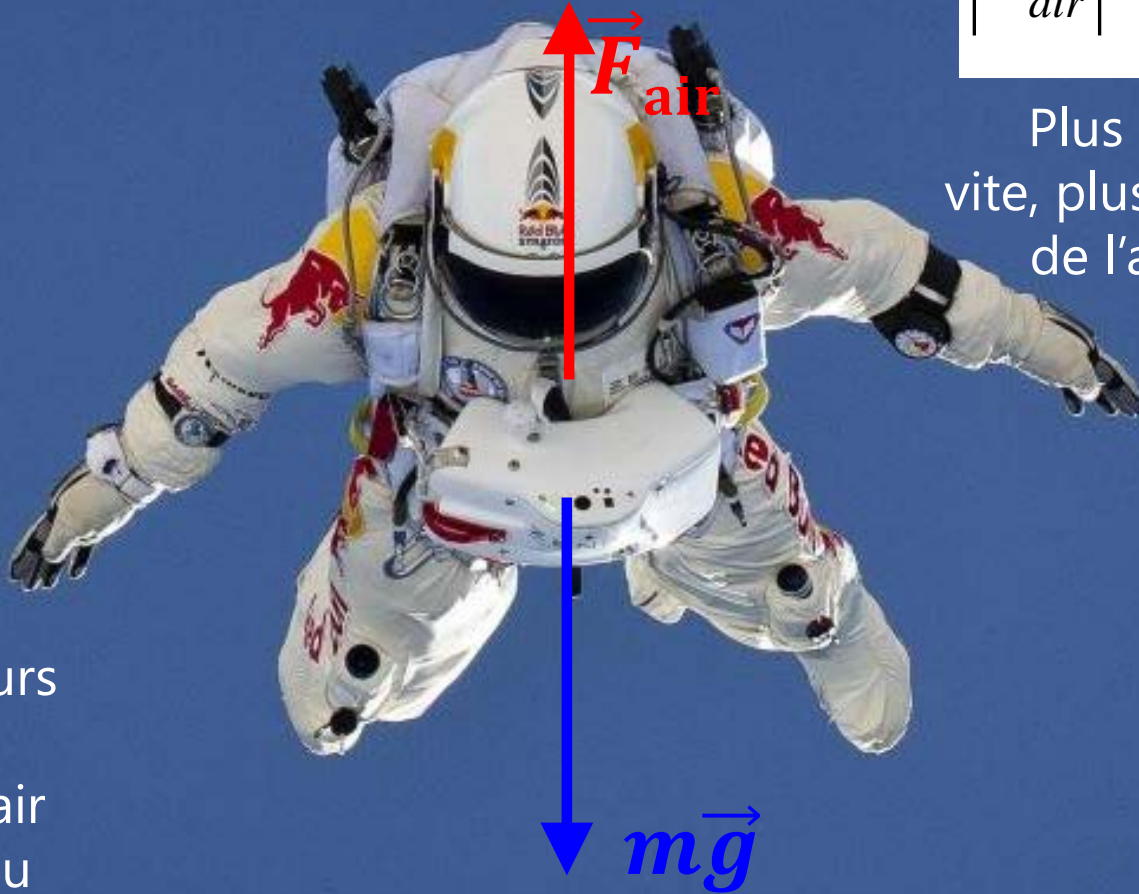
Altitude : 39 km

Vitesse maximale : 1342 km/h !

# DCL de Felix

$$|\vec{F}_{air}| = \frac{C_x \rho S v^2}{2}$$

Plus Felix descend vite, plus la résistance de l'air augmente!



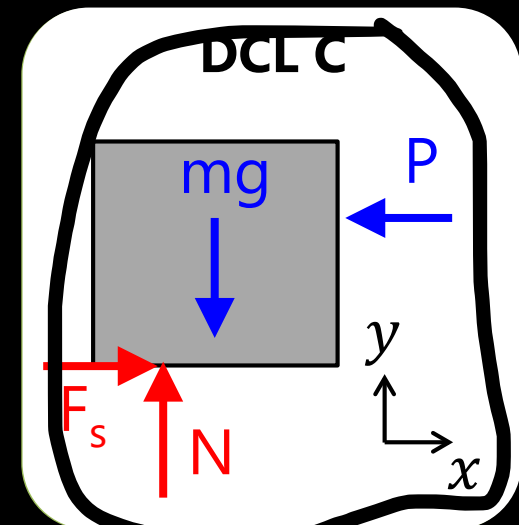
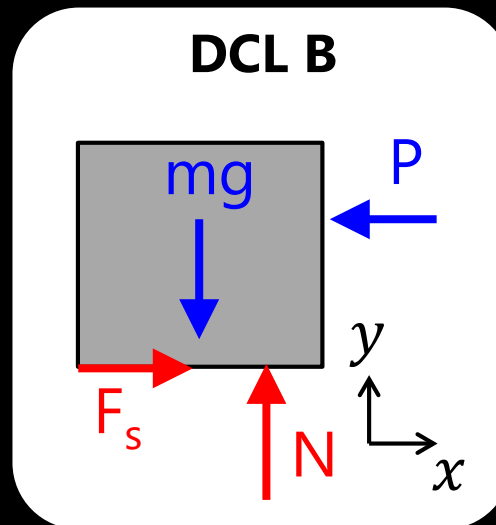
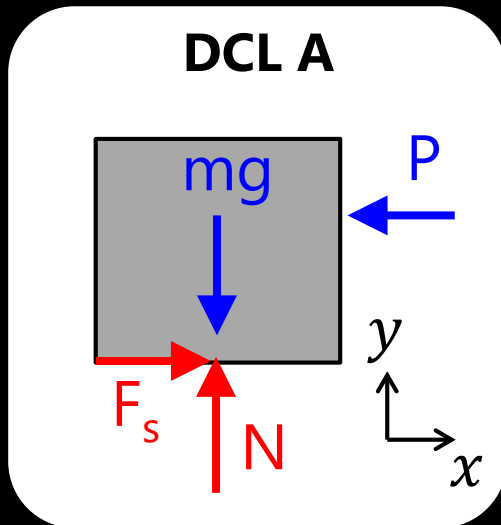
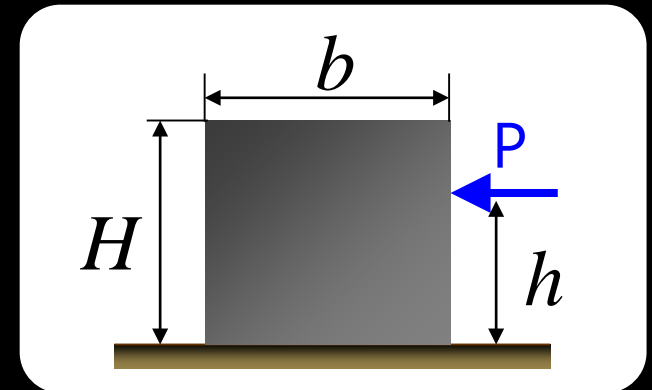
À un certain moment au cours de la chute, la résistance de l'air devient égale au poids de Félix.

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

**Sa vitesse devient constante (1<sup>re</sup> loi de Newton).  
Il atteint sa vitesse maximale !**

## Quiz #2

On pousse horizontalement sur une armoire qui repose sur un sol rugueux (imaginez du tapis...). À cause du frottement, l'armoire demeure immobile.



Lequel des DCL ci-dessus est correct ?

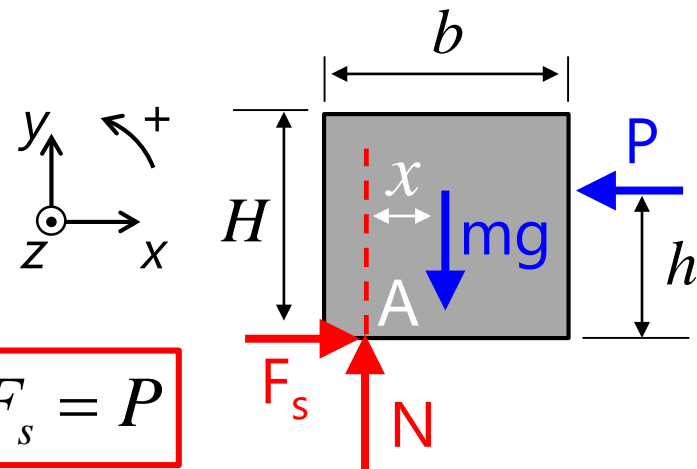
**La normale ne s'applique pas toujours directement sous le poids (centre de masse) d'un objet.**

## Exemple 1 – Armoire au repos

Afin de maintenir l'armoire immobile lorsqu'on la pousse avec la force  $P$ , la normale  $N$  se déplace horizontalement et s'applique au point  $A$  pour générer un moment.

Équilibre en translation

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \begin{aligned} \sum F_x &= F_s - P = 0 \Rightarrow F_s = P \\ \sum F_y &= N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \end{aligned}$$



Équilibre en rotation (2 choix possibles de point de référence, les deux équations sont équivalentes)

$$\begin{aligned} \text{Choix 1 (CM)} : \sum M_{CM,z} &= P(h - \frac{H}{2}) + F_s \frac{H}{2} - Nx = 0 \Rightarrow \\ &\text{ou} \\ \text{Choix 2 (A)} : \sum M_{A,z} &= Ph - mgx = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad \boxed{x = \frac{P}{mg} h}$$

On remarque que le choix 2 rend la résolution plus facile, car les moments de  $N$  et  $F_s$  sont nuls par rapport à  $A$ .

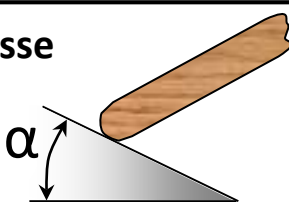
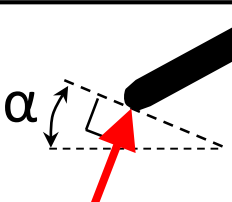

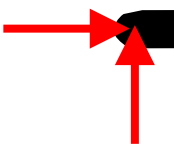


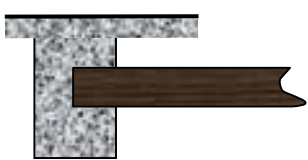
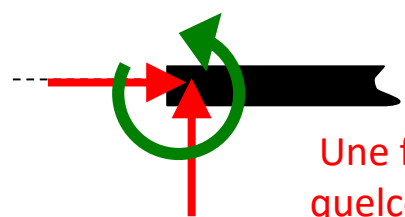
Si on pousse trop fort ou trop haut sur l'armoire, alors le point  $A$  n'est plus sous la boîte ( $x > b/2$ ) et elle bascule !

## Plan de la semaine

- Révision
  - Diagramme du corps libre (DCL)
  - Équilibre statique (1re loi de Newton)
- **Réactions aux appuis**
- Applications aux structures
  - Systèmes de membrures
  - Membrane à deux forces

# Réactions aux appuis (sans frottement)

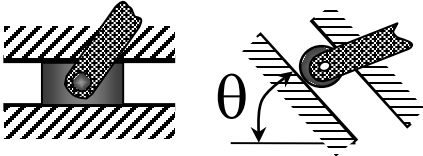
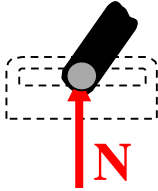
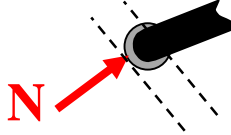
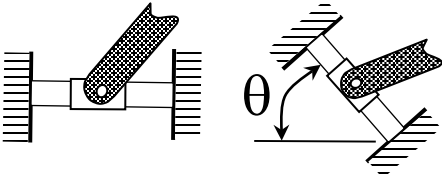
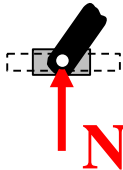
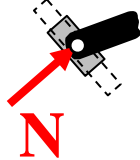
**Principe : pour chaque mouvement empêché, il y a une réaction.**  
 (Translation  $\rightarrow$  force, Rotation  $\rightarrow$  couple)

Appuis	Réactions
<b>Appui sur une surface lisse</b> (contact ponctuel) 	 <p><b>1 inconnue</b>            Une force normale (<math>\perp</math>)</p>
<b>Liaison pivot</b> 	 <p><b>2 inconnues</b>            Une force d'orientation            quelconque (2 composantes)</p>
<b>Rouleaux et billes</b> (pivot glissant) 	 <p><b>1 inconnue</b>            Une force normale (<math>\perp</math>)</p>
<b>Encastrement</b> 	 <p><b>3 inconnues</b>            Une force d'orientation            quelconque + Un couple</p>



# Réactions aux appuis (sans frottement)

**Principe : pour chaque mouvement empêché, il y a une réaction.**  
 (Translation → force, Rotation → couple)

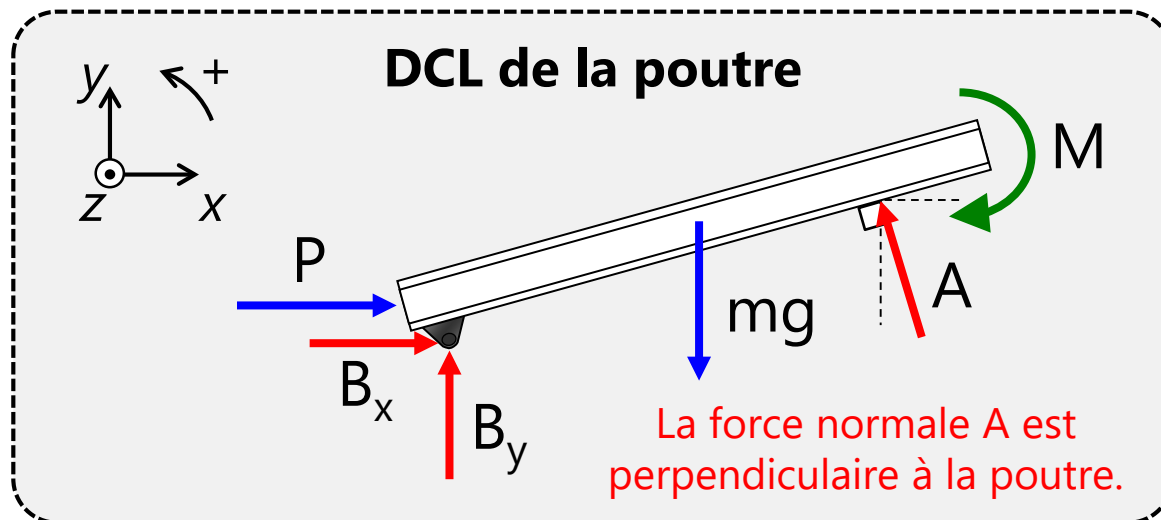
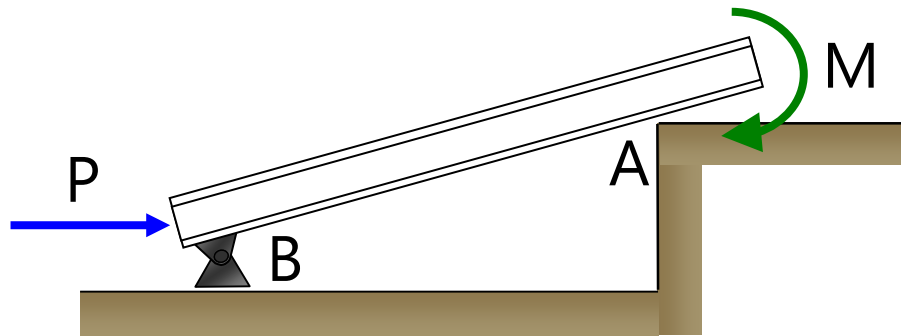
Appuis	Réactions
<p><b>Guide coulissant</b></p> <p>Une des parois du guide exerce une normale.</p> 	  <p>1 inconnue</p>
<p><b>Manchon</b></p> <p>La surface de la tige qui guide le manchon exerce une normale sur le manchon.</p> 	 



Pour ces appuis, le sens de la normale dépend de la paroi sur laquelle s'appuie l'objet guidé. Si le contexte ne permet de savoir le sens de la normale, posez-la dans un sens arbitraire. Le signe de la réponse vous dira si ce sens était correct.

## DCL avec appuis/liaisons – Exemple 1

La poutre a une masse  $m$  et est homogène (masse répartie uniformément).  
La poutre est soumise à une **force**  $P$  et un **couple**  $M$  externes.



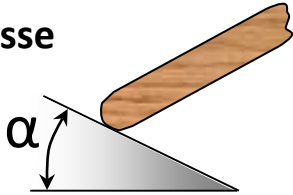
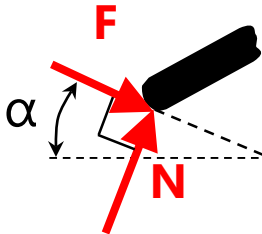

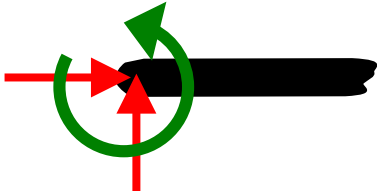

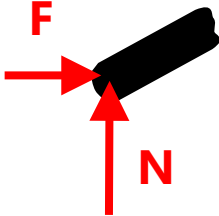
Vous devez reconnaître les représentations schématiques de chaque type d'appui/liaison.

Si vous oubliez quelles réactions ajouter, demandez-vous quels sont les mouvements que l'appui/liaison contraint, indépendamment des autres appuis.

# Réactions aux appuis (avec frottement)

Le **frottement** est toujours :

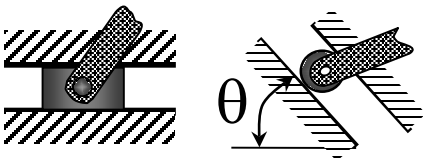
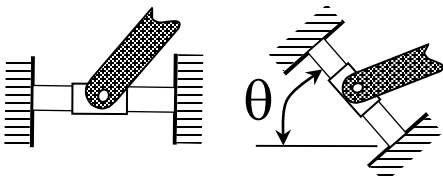
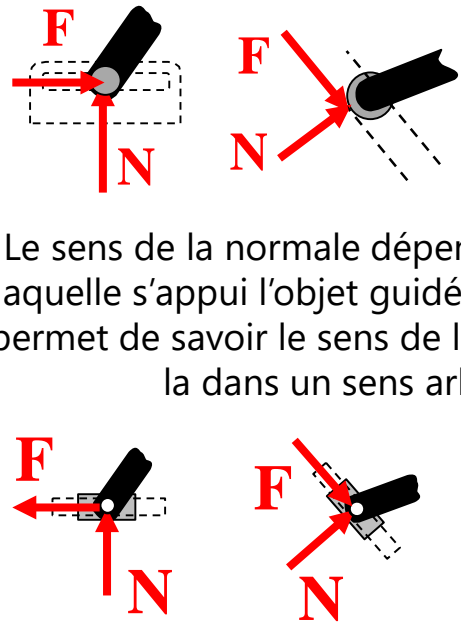
- **Parallèle aux surfaces en contact ;**
- **Opposé au mouvement imminent.** Si le sens du mouvement imminent ne peut pas être déduit de l'énoncé, posez le frottement dans un sens arbitraire et le signe de votre réponse vous dira si le sens choisi était le bon.

Appuis	Réactions
<p>Appui sur une surface lisse (contact ponctuel)</p> 	 <p>2 inconnues</p>
<p>Pivot avec frottement (ex : pivot rouillé)</p> 	 <p>3 inconnues (2 forces + 1 couple)</p>
<p>Rouleaux et billes (pivot glissant)</p> 	 <p>2 inconnues</p>

# Réactions aux appuis (avec frottement)

Le **frottement** est toujours :

- **Parallèle aux surfaces en contact ;**
- **Opposé au mouvement imminent.** Si le sens du mouvement imminent ne peut pas être déduit de l'énoncé, posez le frottement dans un sens arbitraire et le signe de votre réponse vous dira si le sens choisi était le bon.

Appuis	Réactions
<p><b>Guide coulissant</b></p> <p>Une des parois du guide exerce une normale.</p>  <p><b>Manchon</b></p> <p>La surface de la tige qui guide le manchon exerce une normale sur le manchon.</p> 	<p><b>Réactions</b></p> <p><b>2 inconnues</b></p>  <p>Le sens de la normale dépend de la paroi sur laquelle s'appuie l'objet guidé. Si le contexte ne permet de savoir le sens de la normale, posez-la dans un sens arbitraire.</p>

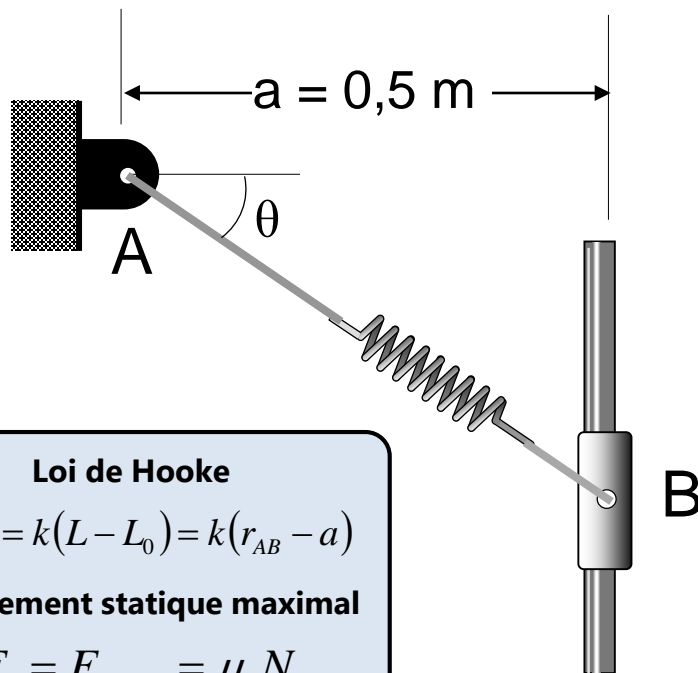
## DCL avec appuis/liaisons – Exemple 2

Le manchon B de masse  $m$  est immobile, mais sur le point de monter.

La longueur naturelle du ressort est  $a$ .

### Information à déduire

- Le ressort est étiré et il tire sur le manchon en direction de A ;
- Le manchon est sur le point de bouger vers le haut : la force de frottement statique est maximale et dirigée vers le bas.

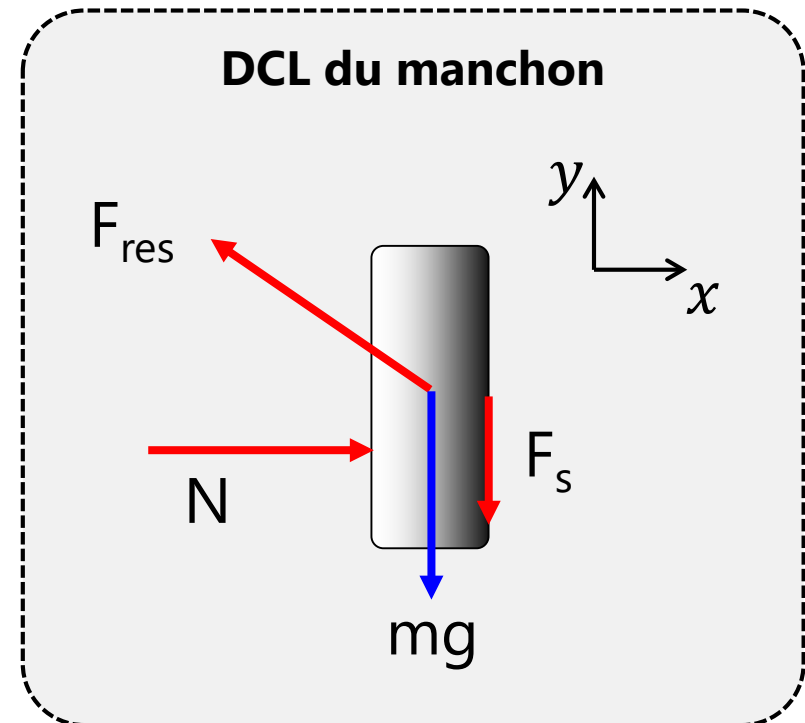


#### Loi de Hooke

$$F_{\text{res}} = k(L - L_0) = k(r_{AB} - a)$$

#### Frottement statique maximal

$$F_s = F_{s,\text{max}} = \mu_s N$$



# DCL avec appuis/liaisons – Exemple 3

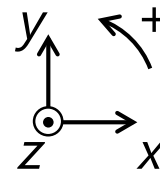
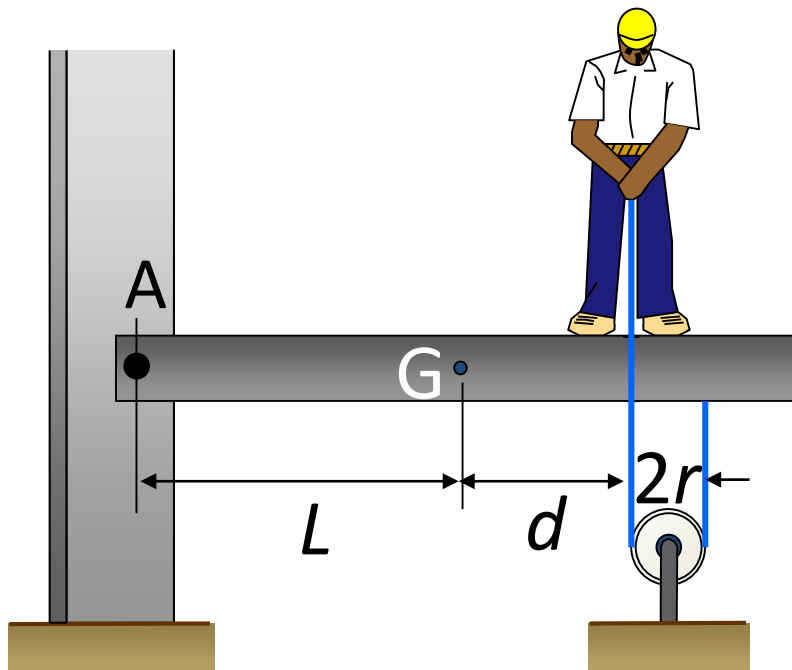
**Faire le DCL de la poutre encastrée en incluant l'homme.**

On suppose que l'on connaît :

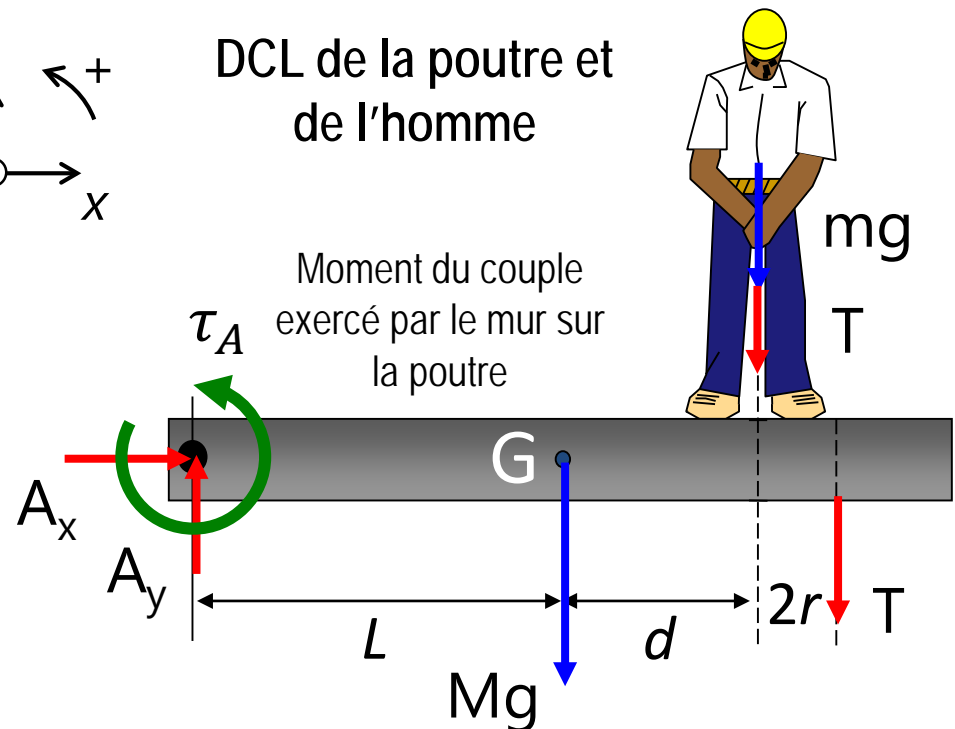
- Masse de la poutre  $M$  ;
- Masse de l'homme  $m$ .

**Attention à :**

- Bien isoler le système ;
- Bien reconnaître les appuis ;
- Bien poser les tensions.



**DCL de la poutre et de l'homme**

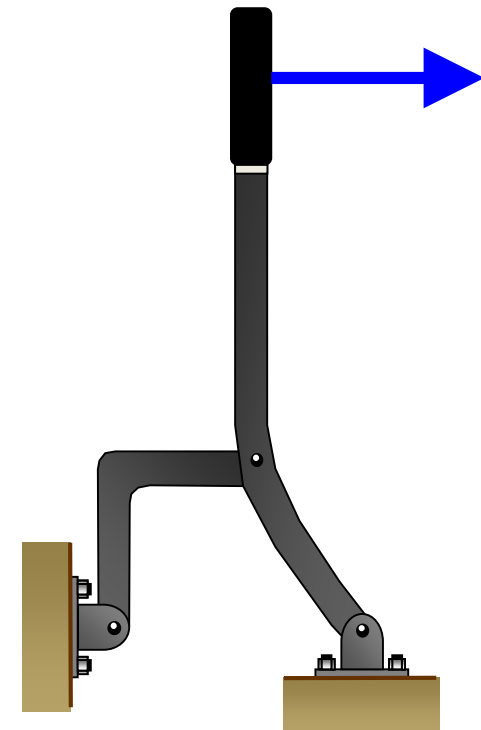
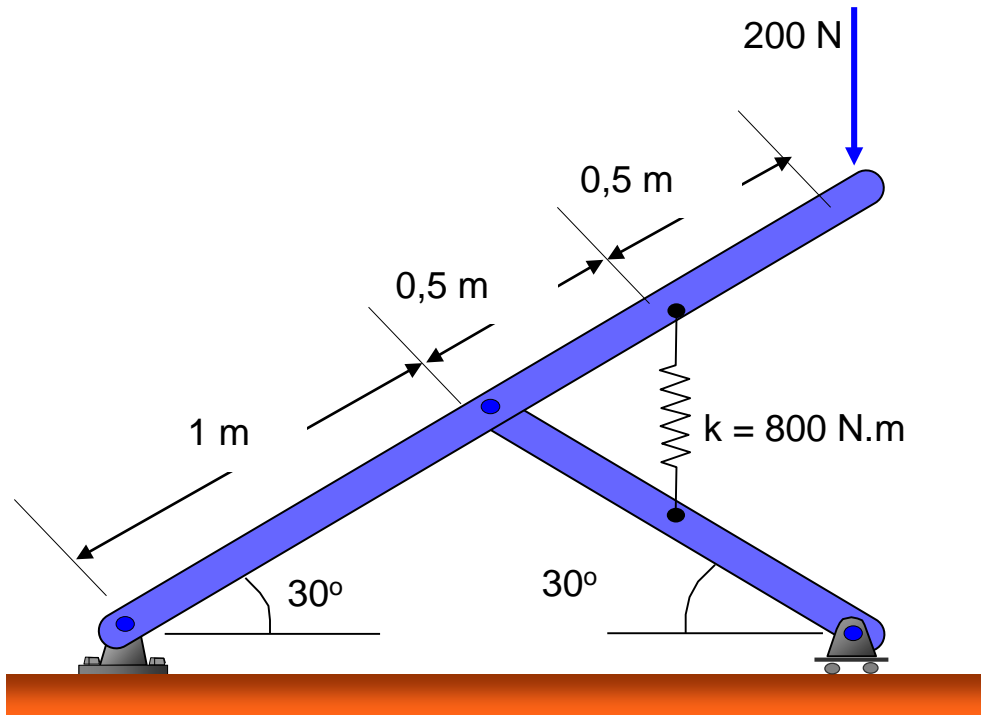


## Plan de la semaine

- Révision
  - Diagramme du corps libre (DCL)
  - Équilibre statique (1re loi de Newton)
- Réactions aux appuis
- **Applications aux structures**
  - Systèmes de membrures
  - Membrane à deux forces

## Structures de membrures

Une membrure est une poutre (corps rigide) dont le poids est négligeable par rapport aux autres forces qui s'exercent sur elle.



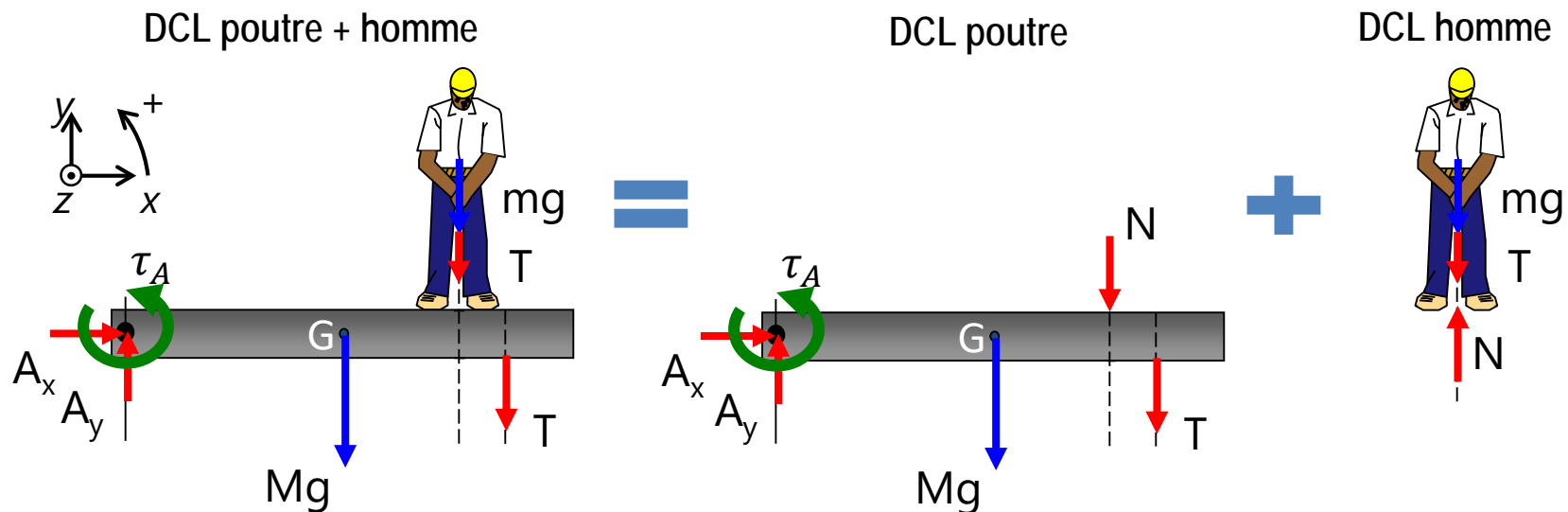


# Décomposition d'un système en sous-système

Dans l'étude des systèmes de membrures, on veut souvent connaître les **réactions aux appuis/liaisons** entre les diverses membrures.

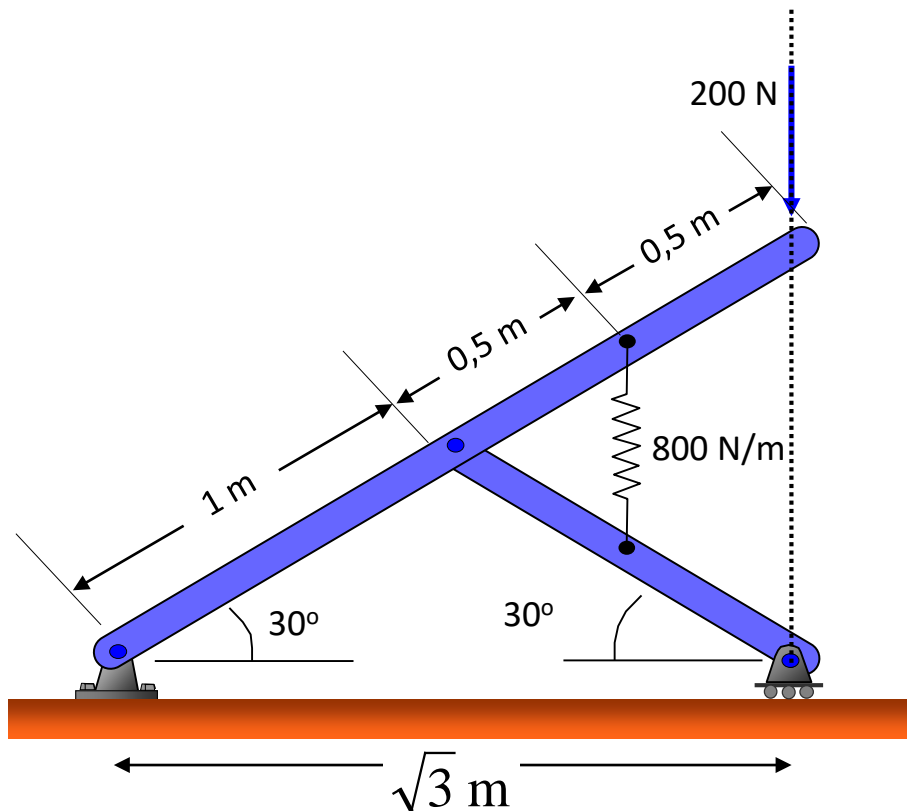
Il faut être en mesure de faire le DCL de la structure entière ou de tout sous-système de la structure.

- Maîtriser la **3<sup>e</sup> loi de Newton (action-réaction)** ;
- Seules les **forces externes** doivent être schématisées ;
- Les **forces internes** entre deux éléments qui font partie d'un même DCL **ne doivent pas apparaître** sur ce DCL.



## Exemple 3 – Ancien CP1

La structure suivante est à l'équilibre statique.  
Déterminer la force exercée par le ressort.



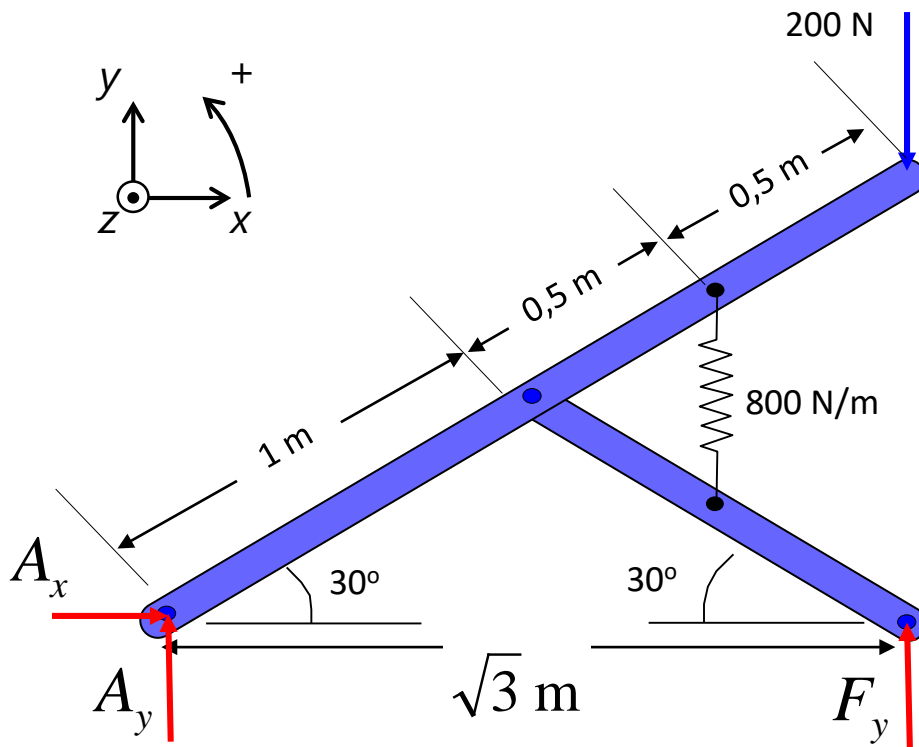
### Questions à se poser

Est-ce que le ressort est en tension ou en compression ?

Le ressort exerce une force sur quelle(s) subdivision(s) de la structure ?

## Exemple 3 – Ancien CP1

### DCL 1 – Structure entière



#### Problème

La force du ressort est une force interne qui n'apparaît pas dans le DCL.

#### Solution

Découper le système de façon à faire apparaître la force du ressort.

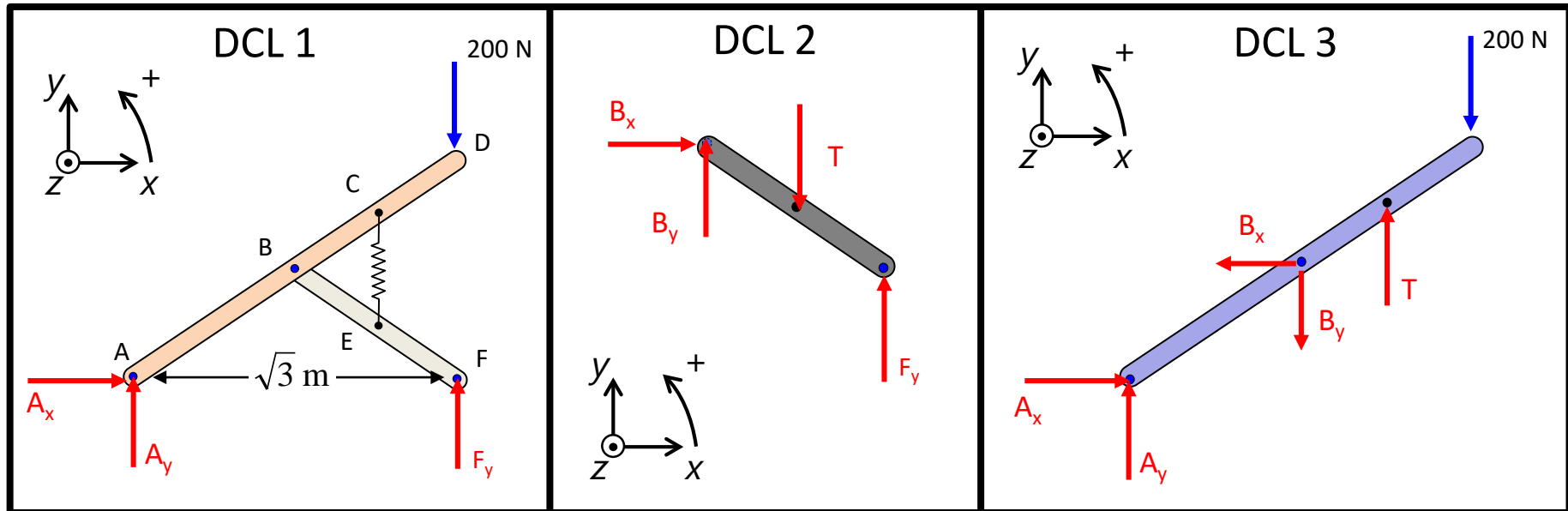
#### **ATTENTION !**

Cela ne veut pas dire que ce DCL sera nécessairement inutile !

Il pourrait servir à déterminer des inconnues intermédiaires nécessaires à la détermination de la force du ressort.

## Exemple 3 – Ancien CP1

On construit les DCL des deux membrures de la structure.



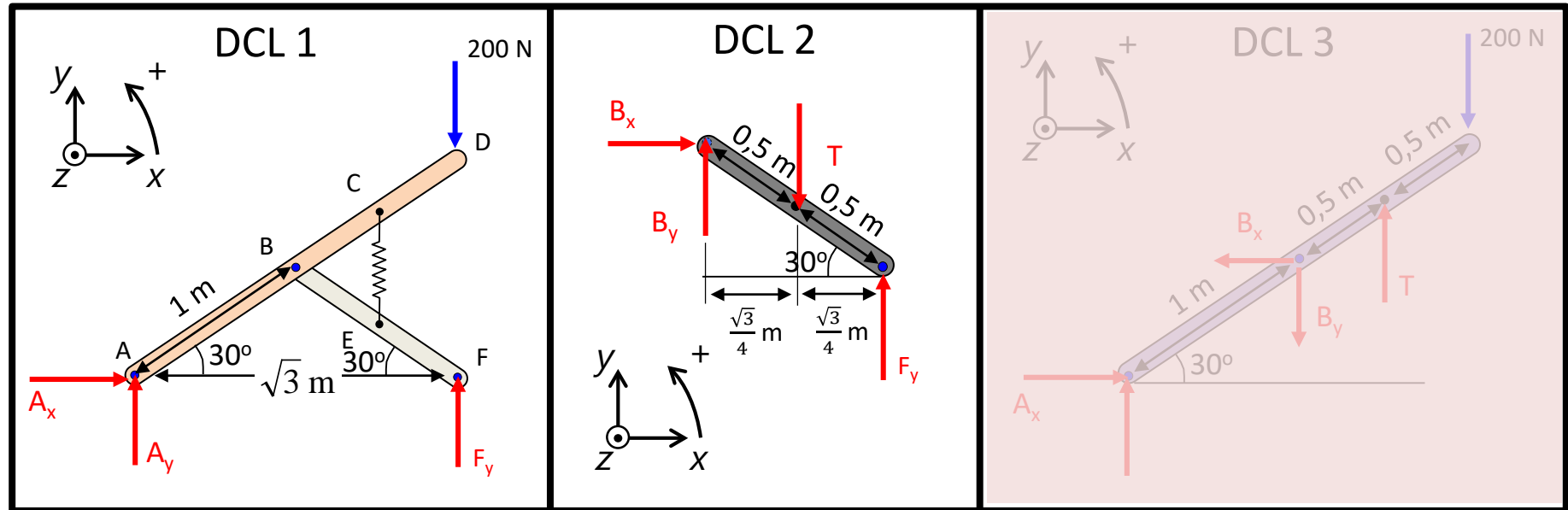
DCL 1 : Les forces de réaction en B entre les membrures ABCD et BEF sont des **forces internes** : il ne faut pas les dessiner ;



DCL 2 et 3 : Les réactions en B sont des **forces externes** qu'il faut dessiner, car elles sont dues à un corps qui n'est pas inclus dans le DCL ;

DCL 2 et 3 : En orientant  $B_x$  vers la gauche dans le DCL 2, il faut orienter  $B_x$  vers la droite dans le DCL 3 (**paire action-réaction**).

## Stratégie 1 – DCL 1 et 2



On cherche  $T$ .

DCL 2 :  $\sum M_B = 0$  – Permet de trouver  $T$  si on connaît  $F_y$ .

$$\sum M_B = \frac{\sqrt{3}}{2} F_y - \frac{\sqrt{3}}{4} T = 0$$

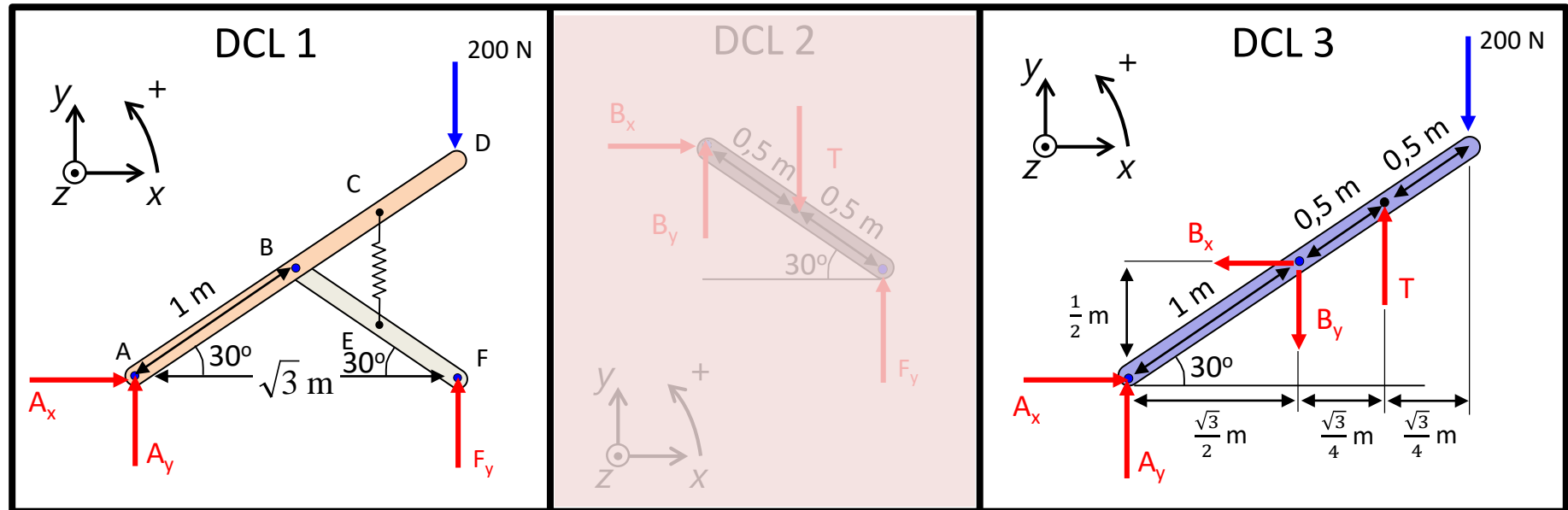
Chercher  $F_y$ .

DCL 1 :  $\sum M_A = 0$  – Permet de trouver  $F_y$  à l'aide de la force de 200 N.

$$\sum M_A = \sqrt{3} F_y - \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

$$T = 400 \text{ N}$$

## Stratégie 2 – DCL 1 et 3



On cherche  $T$ .

DCL 3 :  $\sum M_B = 0$  – Permet de trouver  $T$  si on connaît  $A_x$  et  $A_y$ .

Chercher  $A_x$  et  $A_y$ .

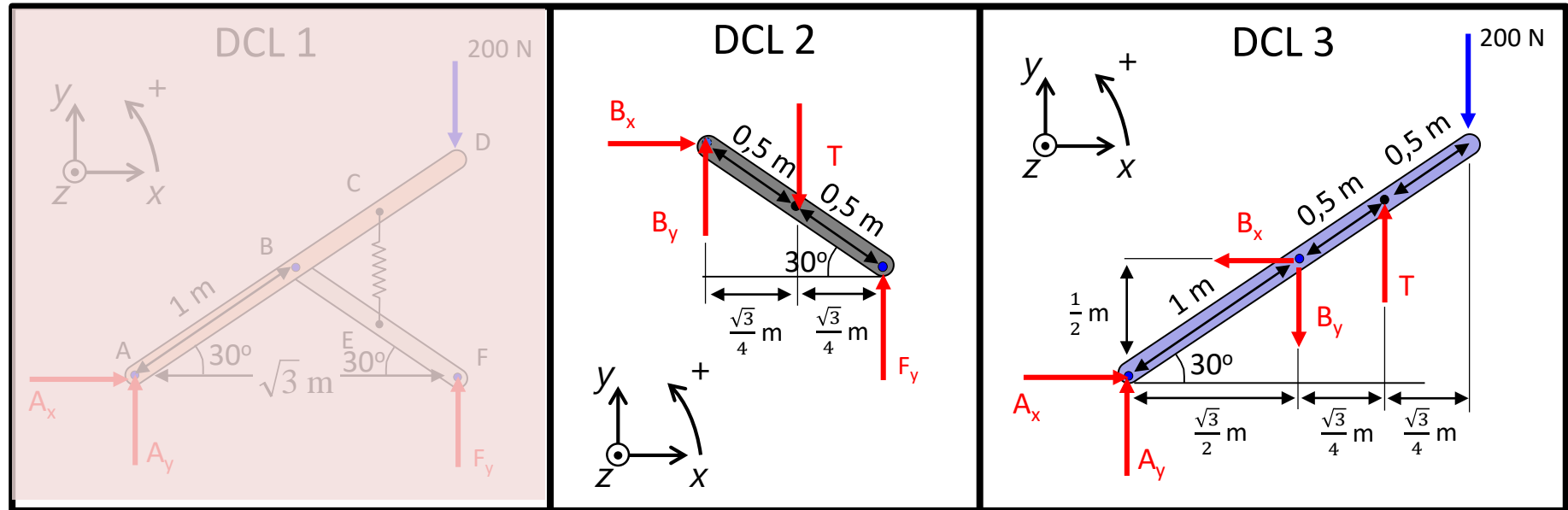
$$\sum M_B = \frac{1}{2} A_x \cdot -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot A_y + \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot T - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

DCL 1 :  $\sum F_x = 0$  – Permet de trouver  $A_x$ .  $\sum F_x = A_x = 0$

$\sum M_F = 0$  – Permet de trouver  $A_y$ .  $\sum M_F = -A_y \sqrt{3} = 0 \Rightarrow A_y = 0$

$$T = 400 \text{ N}$$

## Stratégie 3 – DCL 2 et 3



On cherche  $T$ .

DCL 3 :  $\sum M_A = 0$  – Permet de trouver  $T$  si on connaît  $B_x$  et  $B_y$ .

Chercher  $B_x$  et  $B_y$ .

$$\sum M_A = \frac{1}{2} B_x - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot B_y + \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot T - \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

DCL 2 :  $\sum F_x = 0$  – Permet de trouver  $B_x$ .  $\sum F_x = B_x = 0$

$\sum M_F = 0$  – Permet de trouver  $B_y$ .  $\sum M_F = -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot B_y + \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot T = 0$

$$T = 400 \text{ N}$$

## Comparaison des stratégies

**Avec plusieurs, DCL, il y a plusieurs stratégies de réponse possibles !**

**Stratégie 1**

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_y - \frac{\sqrt{3}}{4} T = 0 \quad \sqrt{3} F_y - \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

$$T = 400 \text{ N}$$

**Stratégie 2**

$$\frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot T + \frac{1}{2} A_x \cdot -\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot A_y - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

$$A_x = 0$$

$$-A_y \sqrt{3} = 0$$

$$T = 400 \text{ N}$$

**Stratégie 3**

$$\frac{1}{2} B_x - \frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot B_y + \frac{3}{4} \sqrt{3} \cdot T - \sqrt{3} \cdot 200 = 0$$

$$B_x = 0$$

$$-\frac{1}{2} \sqrt{3} \cdot B_y + \frac{1}{4} \sqrt{3} \cdot T = 0$$

$$T = 400 \text{ N}$$

**Auriez-vous pu prédire quelle stratégie serait la plus efficace ?**

**L'importance de s'exercer !**

***T est positif***  
Le ressort est  
bel et bien  
comprimé.



## Astuce importante – Membrure à deux forces

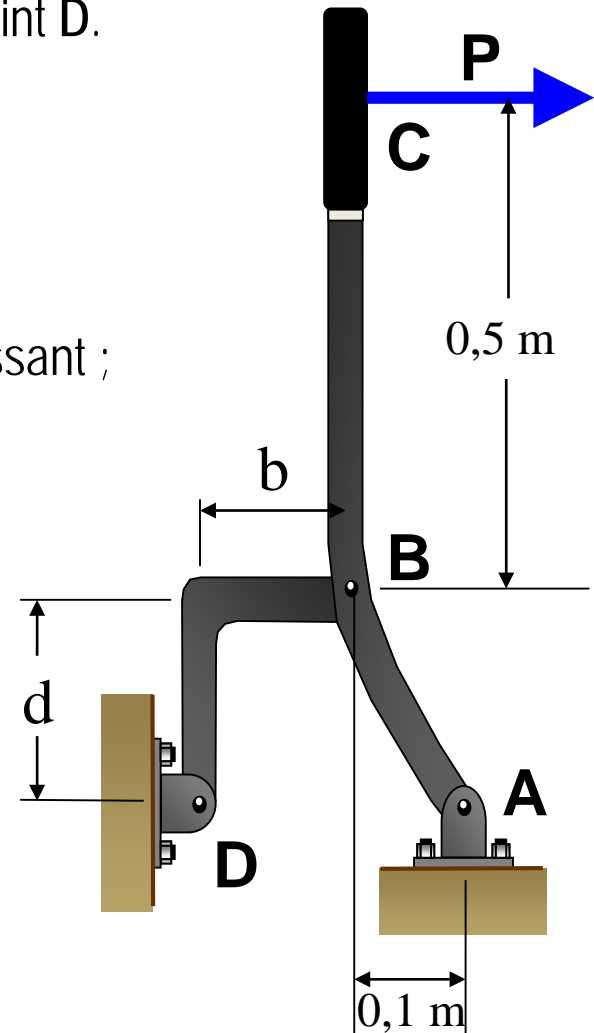
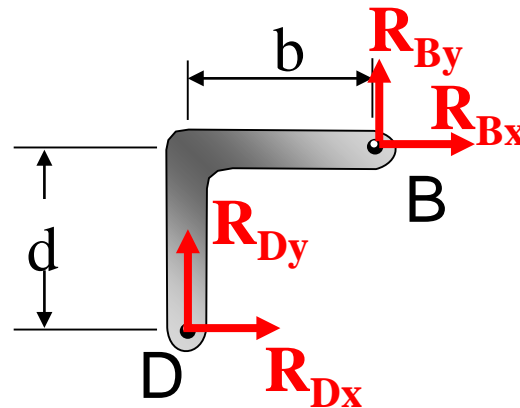
Déterminez la force exercée par le pivot sur le levier au point D.  
On donne  $d = 0,3 \text{ m}$ ,  $b = 0,2 \text{ m}$  et  $P = 100 \text{ N}$ .

### Stratégie

- On peut faire 3 DCL : ABCD, ABC et BD ;
- On cherche la force au point D : ABC est moins intéressant ;
- Parmi ABCD et BD, BD est le plus simple à étudier.

### DCL de la membrure BD

Les corps soumis à des forces qui s'appliquent en deux points seulement (sans couple) ont une propriété très intéressante...



# Astuce importante – Membrure à deux forces

**Toutes les forces sur le corps s'appliquent en deux points seulement et le corps ne subit aucun couple.**

Équilibre en translation : les forces sont de même norme et de sens opposé.

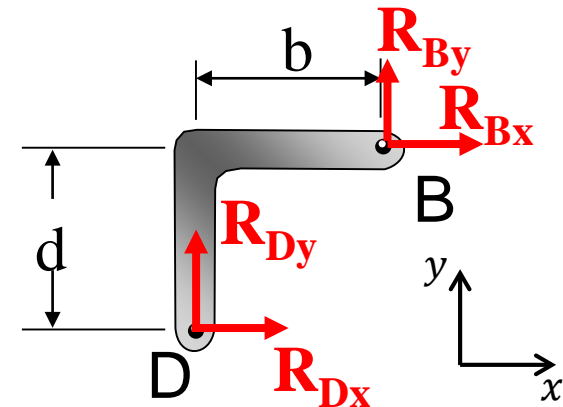
$$\sum F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = -D_x$$

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = -D_y$$

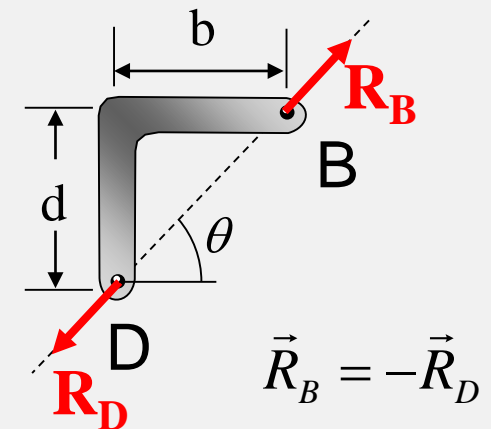
Équilibre en rotation : la ligne d'action des deux forces passe par les deux points où elles s'appliquent.

$$\sum M_D = -d \cdot B_x + b \cdot B_y = 0$$

$$\Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{B_y}{B_x}\right) = \arctan\left(\frac{d}{b}\right)$$



**Résultat pour une membrure à deux forces**



# Synthèse du cours

## Étapes d'un problème de statique

1. Faire le(s) DCL du système entier et des sous-systèmes pertinents ;

- Forces externes seulement ;
- Attention aux paires action-réaction entre les sous-systèmes.

2. Pour chaque DCL, poser les conditions d'équilibre statique ;

- Maximum 3 équations par DCL (en 2D) ;
- Moments : bien choisir le point de référence ;
- Reconnaître les membres à deux forces pour gagner du temps ;
- Poser seulement les équations utiles.

$$\sum \vec{F} = \vec{0} \quad \sum \vec{M}_o = \vec{0}$$

3. Résoudre le système d'équations pour isoler les inconnues.

## Pas de recette magique : il faut vous exercer !

- Comment savoir **quels sont les sous-systèmes dont il faut faire le DCL** ?
- Comment **choisir le point de référence pour calculer la somme des moments** pour obtenir les équations les plus simples ?
- Comment choisir la **stratégie de résolution la plus efficace** ? Il y a plusieurs façons valables de poser un problème, mais il existe une infinité de mauvaises façons !

**La pratique permet de développer votre intuition.**