PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs

Examen final

Été 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

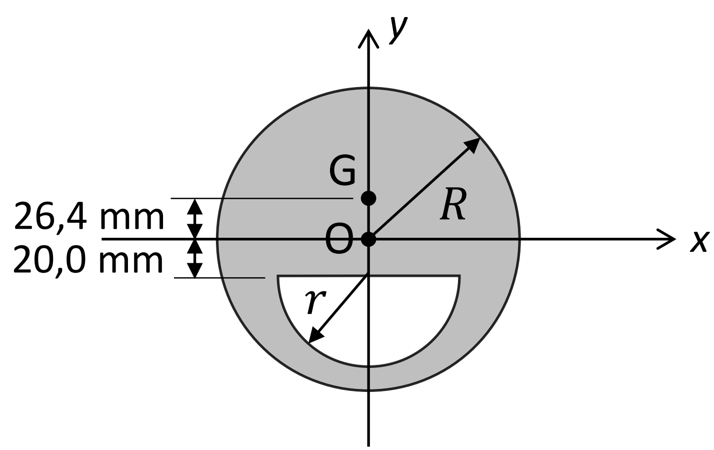
Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

La pièce mécanique homogène illustrée sur la figure tourne autour du pivot O. Son centre de masse G est décentré et la gravité agit selon l'axe y. Sa masse surfacique vaut 2 kg/m². On donne $r = 50$ mm et $R = 80$ mm.

A. Calculez le moment d'inertie de la pièce par rapport au pivot. (20 points)

B. Existe-t-il un point par rapport auquel le moment cinétique de la pièce est conservé ? Justifiez clairement. (15 points)

C. Est-ce que la vitesse angulaire de la pièce est constante pendant sa rotation ? (5 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (40 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

A.

$$m_1 = \sigma\pi R^2 = 2\pi 0{,}080^2 = 0{,}0402\ \text{kg}$$

$$\vec{r}_{CM,1} = \left(0i + 0j\right)\text{m}$$

$$I_{1,CM1} = \frac{1}{2} m_1 R^2 = 1{,}29\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{1,O} = I_{1,CM1} + m_1 \cdot 0^2 = 1{,}29\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$m_2 = -\sigma\pi r^2/2 = -2\pi 0{,}050^2/2 = -0{,}00785\ \text{kg}$$

$$\vec{r}_{CM,2} = \left(0i - \left[0{,}020 + 4r/3\pi\right]j\right) = \left(0i - 0{,}0412\,j\right)\text{m}$$

$$I_{2,CM2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) m_2 r^2 = -6{,}28\times10^{-6}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{2,O} = I_{2,CM2} + m_2 \cdot 0{,}0412^2 = -1{,}96\times10^{-5}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$\boxed{I_O = I_{1,O} + I_{2,O} = 1{,}09\times10^{-4}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

20 points de calculs

B. **Non**, il n'existe pas de point par rapport auquel le moment cinétique de la pièce est conservée pendant sa rotation. Les forces sur la pièce sont les forces dues au pivot au point O et le poids de la pièce au point G. Puisque la pièce tourne, le point G tourne autour de O et peu importe le point de référence choisi, il y aura un instant où le poids créera un moment de force par rapport au point de référence. Puisque $\sum\vec{M} \neq \vec{0}$, alors $\vec{H}$ n'est pas conservé.

15 points de compréhension

C. **Non.** Le moment cinétique de la pièce sera de la forme $H = I\omega$ et il varie avec le temps. Puisque I est constant, alors la vitesse angulaire ω de la pièce variera.

5 points de compréhension

Question 2 (50 points)

Un ventilateur est composé :

- D'une base en forme de disque plein de diamètre $b = 20$ cm;
- D'une tige verticale de longueur $h = 1{,}50$ m ;
- D'une tête dont l'hélice a un diamètre $d = 40$ cm.

La masse totale du ventilateur est $m = 10$ kg et son moment d'inertie par rapport à son centre de masse G vaut $I_G = 3{,}40$ kg·m², situé à $c = 50$ cm au-dessus du sol. Il y a du frottement entre la base et le sol.

Le moteur du ventilateur a été conçu pour faire tourner l'hélice qui prend l'air ambiant (initialement au repos) et l'éjecte à une vitesse horizontale $v = 8$ m/s. La masse volumique de l'air ambiant est $\rho = 1{,}1$ kg/m³.

Or, le ventilateur a été mal conçu : en le mettant en marche, il se met à basculer et tombe. <u>On s'intéresse ici à l'instant précis où le ventilateur commence à basculer.</u> On suppose que la base ne glisse pas sur le sol en basculant.

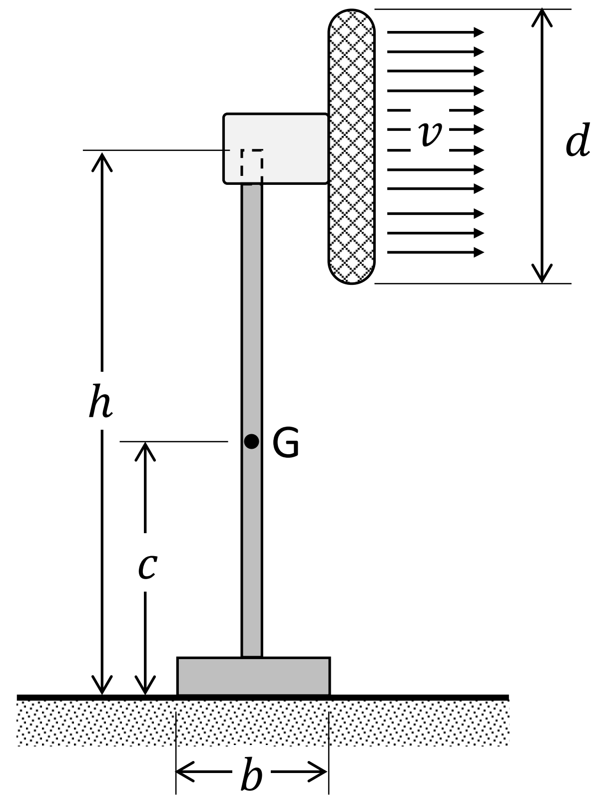


Figure 1 – Le ventilateur en marche est sur le point de basculer.

Question 2 (50 points)

A. Faites le DCL-DCE du ventilateur en marche dans la situation où il est sur le point de basculer. (15 points)

B. Déterminez la force que l’air exerce sur le ventilateur. Exprimez cette force sous forme vectorielle. (15 points)

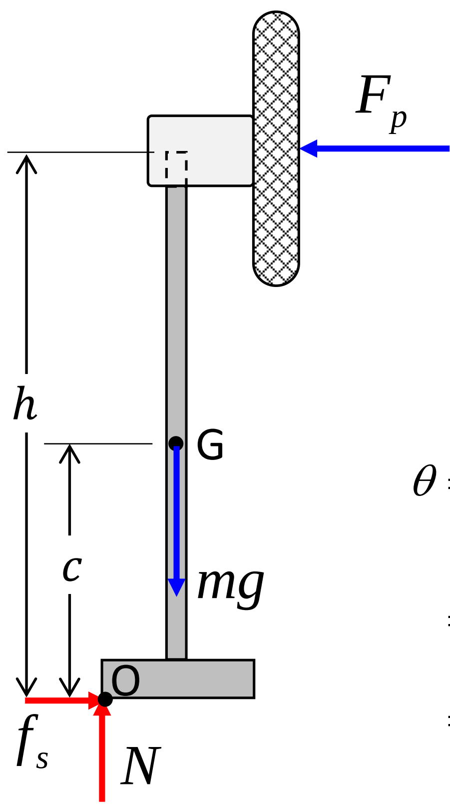
C. Calculez le module de l’accélération du centre de masse du ventilateur au moment où il commence à basculer. (20 points)

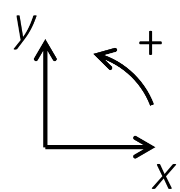
Question 2 – Solution (1/5)

15 points de compréhension

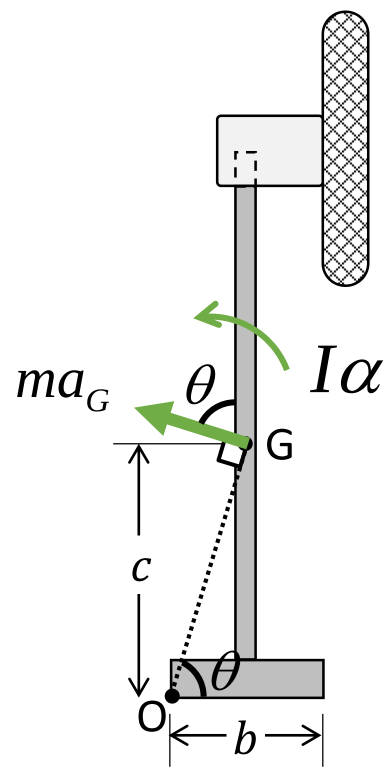
A. DCL-DCE du ventilateur sur le point de basculer.

Le système d'axes doit apparaître.
Le poids doit être orienté verticalement vers le bas et positionné au centre de masse.
La normale doit être perpendiculaire au sol et située à l'extrémité gauche de la base (point O).
Le frottement doit être situé vers la droite à la hauteur du sol. L'étudiant doit spécifier que c'est un frottement statique.
La force de poussée de l'air doit être horizontale vers la gauche.
Le terme m*a_G doit être situé au centre de masse. Il peut être déjà orienté perpendiculairement au rayon reliant le point de bascule et le CM. Sinon, il peut être décomposé en m*a_Gx et m*a_Gy.
Le terme I*alpha doit apparaître (idéalement dans le sens positif des moments pour éviter des erreurs de signe).





$$\theta = \arctan\left(\frac{c}{b/2}\right) = \arctan\left(\frac{50}{10}\right) = 78{,}69^\circ$$



Question 2 – Solution (2/5)

B. La force générée par l'air éjecté du ventilateur est donnée par

$$\vec{F}_p = \left|\frac{dm}{dt}\right| \left(\vec{v}_{air,aspiré} - \vec{v}_{air,éjecté}\right)$$

Or, on suppose dans l'énoncé que l'air aspiré est initialement immobile.

$$\vec{v}_{air,aspiré} = \vec{0} \qquad \vec{v}_{air,éjecté} = v\vec{i} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{F}_p = -\left|\frac{dm}{dt}\right| v\vec{i}$$

Le débit massique vaut :

$$\left|\frac{dm}{dt}\right| = \rho S v = \rho\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 v = 1{,}1\cdot\pi\left(\frac{0{,}40}{2}\right)^2 \cdot 8 = 1{,}10584 \text{ kg/s}$$

La force de poussée de l'air est donc donnée par :

$$\boxed{\vec{F}_p = -\left|\frac{dm}{dt}\right| v\vec{i} = -\rho S v^2\vec{i} = -1{,}10584\cdot 8\vec{i} = -8{,}85\vec{i} \text{ N}}$$

Vers la gauche

15 points de calculs

Question 2 – Solution (3/5)

C. **Méthode #1 (la meilleure) – Faire une somme des moments autour du point O (c'est le CIR du ventilateur à l'instant initial)**

1. La normale et le frottement ne font pas de moment par rapport à O. Il ne reste que le poids et la force exercée par l'air. Il faut prendre le moment d'inertie par rapport au point O.

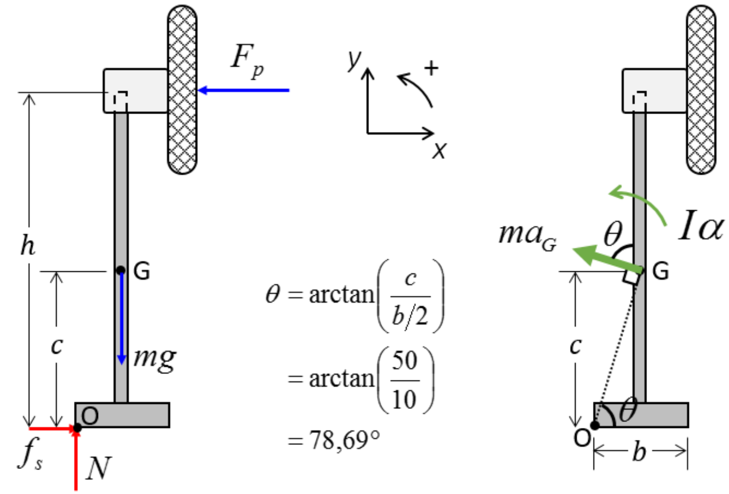
$$\sum M_O = hF_p - \frac{b}{2}mg = I_O\alpha$$

2. Théorème des axes parallèles

$$I_O = I_G + mr_{OG}^2 = 3{,}4 + 10 \cdot 0{,}509902 = 6{,}0\ \mathrm{kg \cdot m^2}$$

3. Accélération angulaire

$$\alpha = \frac{F_p h - \frac{b}{2}mg}{I_O} = \frac{8{,}85 \cdot 1{,}50 - \frac{0{,}20}{2} \cdot 10 \cdot 9{,}81}{6{,}0} = 0{,}5775\ \mathrm{rad/s^2}$$



$$r_{OG} = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c^2} = \sqrt{\left(\frac{0{,}20}{2}\right)^2 + 0{,}50^2} = 0{,}5099\ \mathrm{m}$$

4. Accélération du CM (mouvement circulaire autour de O)

$$\boxed{a_G = r_{OG}\alpha = 0{,}5099 \cdot 0{,}5775 = 0{,}294\ \mathrm{m/s^2}}$$

20 points de résolution de problème

Question 2 – Solution (4/5)

C. **Méthode #2 (plus longue) – Faire une somme des moments autour du CM et deux sommes de forces en x et en y.**

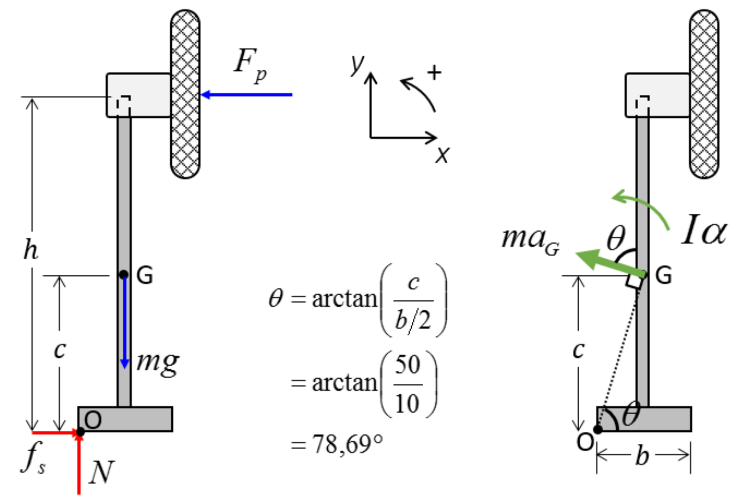
Le poids ne fait pas de moment par rapport au CM (G).

$$\sum F_x = f_s - F_p = -ma_G \sin\theta$$

$$\sum F_y = N - mg = ma_G \cos\theta$$

$$\sum M_G = (h-c)F_p + cf_s - \frac{b}{2}N = I_G\alpha$$

$$a_G = r_{OG}\alpha$$



On isole le frottement dans (1) et la normale dans (2), puis on substitue dans (3).

$$(h-c)F_p + c(F_p - ma_G\sin\theta) - \tfrac{b}{2}(mg + ma_G\cos\theta) = I_G\,\frac{a_G}{r_{OG}}$$

$$hF_p - \tfrac{b}{2}mg = \left(\frac{I_G}{r_{OG}} + cm\sin\theta + \tfrac{b}{2}m\cos\theta\right)a_G$$

Question 2 – Solution (5/5)

C. Méthode #2 (plus longue) – Faire une somme des moments autour du CM et deux sommes de forces en x et en y.

$$hF_p - \tfrac{b}{2}mg = \left(\tfrac{I_G}{r_{OG}} + cm\sin\theta + \tfrac{b}{2}m\cos\theta\right)a_G$$

$$a_G = \frac{hF_p - \tfrac{b}{2}mg}{\tfrac{I_G}{r_{OG}} + m\left(c\sin\theta + \tfrac{b}{2}\cos\theta\right)} = \frac{hF_p - \tfrac{b}{2}mg}{\tfrac{I_G}{r_{OG}} + \tfrac{m}{r_{OG}}\left(c^2 + \left(\tfrac{b}{2}\right)^2\right)} = \frac{hF_p - \tfrac{b}{2}mg}{I_G + mr_{OG}^2}r_{OG}$$

$$\sin\theta = \frac{c}{r_{OG}}$$

$$\cos\theta = \frac{b}{2r_{OG}}$$

$$\boxed{a_G = \frac{1{,}50\cdot 8{,}85 - 0{,}10\cdot 10\cdot 9{,}81}{3{,}4 + 10\cdot 0{,}5099^2}\cdot 0{,}5099 = 0{,}294\ \text{m/s}^2}$$

Question 3 (60 points)

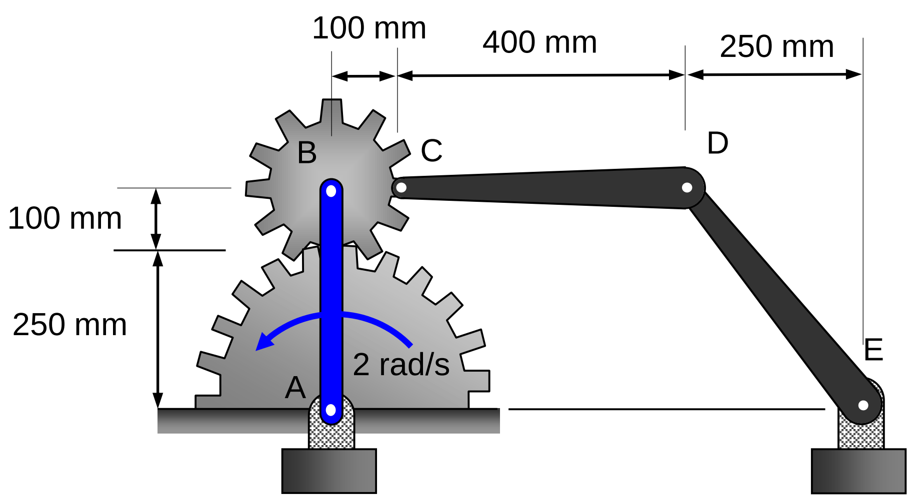
Le grand engrenage est immobile tandis que le petit engrenage B est relié au bras AB qui tourne en sens antihoraire. La tige CD est fixée sur la circonférence de l'engrenage B ainsi qu'à une autre tige DE. À l'instant considéré, la tige CD est horizontale.

A. Directement sur la figure, identifiez le centre instantané de rotation : (10 points)
  i. du bras AB ;
  ii. de l'engrenage B.

B. Calculez le vecteur vitesse du point B. (10 points)

C. Calculez le vecteur vitesse du point C. (15 points)

D. Calculez la vitesse angulaire et le sens de rotation de la tige CD. (25 points)



Question 3 – Solution (1/3)

A. CIR de AB : pivot A

CIR de B : point de contact entre les deux engrenages.

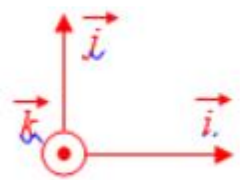
10 points de compréhension

B. Vecteur vitesse de B

Il faut donc d'abord trouver la vitesse du point C :

$\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{C/B}$ alors que $\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}$ puisque $\vec{v}_A = 0$.

$$\vec{V}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0,35 & 0 \end{vmatrix} = -0,70\,\vec{i}$$



10 points de résolution de problème

Question 3 – Solution (2/3)

C. Vecteur vitesse de C

Mais par ailleurs, du point de vue du point P, point de contact entre les deux engrenages, la vitesse de B est : $\vec{V}_B = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/P}$ puisque ce point P est immobile :

$$\vec{V}_B = \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{B/P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_B \\ 0 & 0{,}1 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}1\omega_B\,\vec{i} \quad \Rightarrow \quad \omega_B = 7\,\vec{k}\ \text{rad/s}$$

$\boxed{\text{10 points}}$

Note : on n'utilise qu'une composante en $\vec{k}$ de la vitesse angulaire de rotation de l'engrenage B car le mouvement est nécessairement dans le plan de la figure.

La vitesse du point C est alors : ($\vec{V}_C = \vec{V}_B + \vec{\omega}_B \times \vec{r}_{C/B}$)

$$\vec{V}_C = -0{,}7\vec{i} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 7 \\ 0{,}1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}7\,\vec{i} + 0{,}7\vec{j}$$

$\boxed{\text{5 points}}$

$\boxed{\text{15 points de résolution de problème}}$

Question 3 – Solution (3/3)

D. Vitesse angulaire et sens de rotation CD

Nous pouvons maintenant calculer la vitesse linéaire du point D, vu par C :
(1)→

$$\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{\omega}_{DC} \times \vec{r}_{D/C} = \left(-0{,}7\vec{i} + 0{,}7\vec{j}\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{DC} \\ 0{,}4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}7\vec{i} + \left(0{,}7 + 0{,}4\omega_{DC}\right)\vec{j}$$

5 points

Mais aussi :

$$(2) \rightarrow \vec{v}_D = \vec{\omega}_{DE} \times \vec{r}_{D/E} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{DE} \\ -0{,}25 & 0{,}35 & 0 \end{vmatrix} = -0{,}35\omega_{DE}\vec{i} - 0{,}25\omega_{DE}\vec{j}$$

5 points

En identifiant les composantes des deux expressions, on obtient :

$$\vec{\omega}_{DE} = \frac{-0{,}7}{-0{,}35} = 2\vec{k} \text{ rad/s} \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_{DC} = \frac{-0{,}5-0{,}7}{0{,}4} = -3\vec{k} \text{ rad/s}$$

5 points

Réponses : ω_{DE} = 2 rad/s ω_{DC} = 3 rad/s

5 points

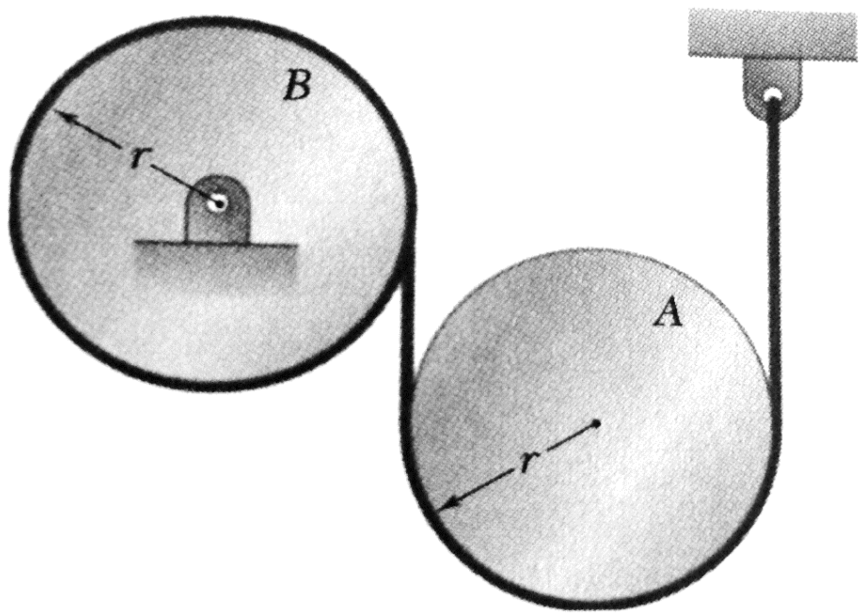
25 points de résolution de problème

Question 4 (50 points)

Deux cylindres, ayant chacun une masse de 6,35 kg, un rayon r = 127 mm et un rayon de giration de 105 mm par rapport à leur centre, sont reliés par une courroie comme l'indique la figure. Si le système quitte l'état de repos, déterminez :

A. La vitesse du centre du cylindre A après que celui-ci a parcouru 915 mm ; (30 points)

B. La tension dans la partie de la courroie située entre les deux cylindres. (20 points)



Q4 – Solution (1/3)

A. Vitesse du centre de A lorsqu'il s'est déplacé de 915 mm

Système : A + B (en incluant le câble)

L'énergie mécanique est conservée, car les poids des cylindres sont des forces conservatives, les forces de réaction au pivot B s'appliquent en un point immobile et ne font donc pas de travail et que les tensions dans la courroie font un travail total nul (les tensions opposées à chaque extrémité d'une partie de courroie font des travaux de même module et de signe opposé).

On pose que l'énergie potentielle gravitationnelle est nulle au départ.

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{1}{2} m_A v_{A,CM}^2 + \frac{1}{2} I_A \omega_A^2 + \frac{1}{2} I_B \omega_B^2 - m_A g h$$

avec les moments d'inertie : $I = I_A = I_B = m\kappa^2 = 6{,}35 \cdot 0{,}105^2 = 0{,}0700\,\mathrm{kg \cdot m^2}$

Contraintes du mouvement (on suppose que la courroie ne glisse pas sur les cylindres.)

Partie droite de la courroie fixée au plafond : vitesse nulle et donc le CIR de A se trouve à droite du cylindre. On a donc :

$$v_{A,CM} = \omega_A r \quad \Rightarrow \quad \omega_A = v_{A,CM} / r$$

La vitesse de la partie gauche de la courroie s'exprime en fonction des deux cylindres :

$$v = \omega_A 2r = \omega_B r \quad \Rightarrow \quad \omega_B = 2\omega_A = 2v_{A,CM} / r$$

Q4 – Solution (2/3)

A. (suite)

On peut ainsi isoler la vitesse du centre de A dans l'équation de la conservation de l'énergie.

$$\boxed{v_{A,CM} = \sqrt{\frac{2mgh}{5I + mr^2}}r = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}35\cdot 9{,}81\cdot 0{,}915}{5\cdot 0{,}0700 + 6{,}35\cdot 0{,}127^2}}0{,}127 = 2{,}01\,\mathrm{m/s}}$$

30 points de résolution de problème

B. Tension T_1 dans la partie gauche de la courroie entre les cylindres

Solution la plus efficace : principe travail-énergie sur le cylindre B

L'énergie cinétique accumulée par B vient du travail fait par T_1 qui est une force constante. Le point auquel s'applique T_1 se déplace de 2h si le centre de A se déplace de h (mouvement contraint). On a donc :

$$\sum U_{nc} = E_2 - E_1$$

$$T_1(2h) = \frac{1}{2}I_B\omega_B^2$$

$$\Rightarrow \boxed{T_1 = \frac{I}{h}\frac{v_{A,CM}^2}{r^2} = \frac{2mgI}{5I + mr^2} = 19{,}3\ \mathrm{N}}$$

20 points de résolution de problème

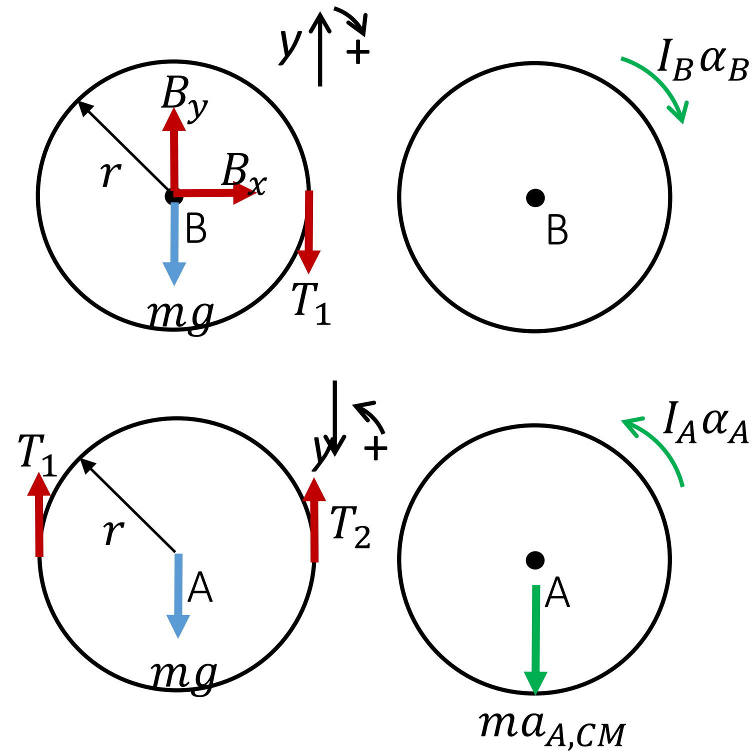
Q4 – Solution (2/3)

B. Solution alternative plus longue :

Contraintes du mouvement

$$\omega_B = 2\omega_A \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = 2\alpha_A$$

$$\omega_A = v_{A,CM} / r \quad \Rightarrow \quad \alpha_A = a_{A,CM} / r$$



Sommes des forces (A) et des moments (A et B)

$$\sum M_B = T_1 r = I_B \alpha_B$$

$$\sum M_A = (T_2 - T_1) r = I_A \alpha_A$$

$$\sum F_y = mg - T_1 - T_2 = m a_{A,CM}$$

Il ne reste qu'à résoudre le système d'équations pour isoler T_1.

Isoler T_2 dans la somme des forces. $$T_2 = m(g - a_{A,CM}) - T_1 = m(g - \alpha_A r) - T_1$$

Insérer dans la somme des moments p/r à A. $$(mg - m\alpha_A r - 2T_1) r = I\alpha_A$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_A = \frac{mgr - 2T_1 r}{I + mr^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha_B = 2\frac{mgr - 2T_1 r}{I + mr^2}$$

Q4 – Solution (3/3)

B. (suite de la solution alternative)

Insérer dans la somme des moments p/r à B.

$$T_1 r = 2I\,\frac{mgr - 2T_1 r}{I + mr^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = \frac{2mgI}{5I + mr^2} = 19{,}3\ \mathrm{N}}$$