– PHS1101 –
Mécanique pour ingénieurs

Cours 2

Jérémie Villeneuve
Département de génie physique

Retour sur la semaine dernière

Une force est un vecteur : module, direction et sens.

Opérations sur les vecteurs (addition, composantes x, y et z en 2D et en 3D, vecteurs unitaires).

Lois trigonométriques : théorème de Pythagore, loi des sinus, loi des cosinus.

Trois lois de Newton :

1. Inertie
2. $\vec{F} = m\vec{a}$
3. Action-réaction

Types de forces : poids, ressort, tension et frottement

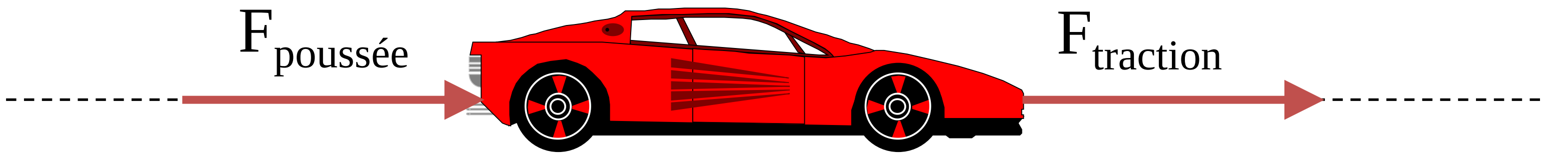
Unités et chiffres significatifs.

Analyse dimensionnelle.

Plan du cours 2

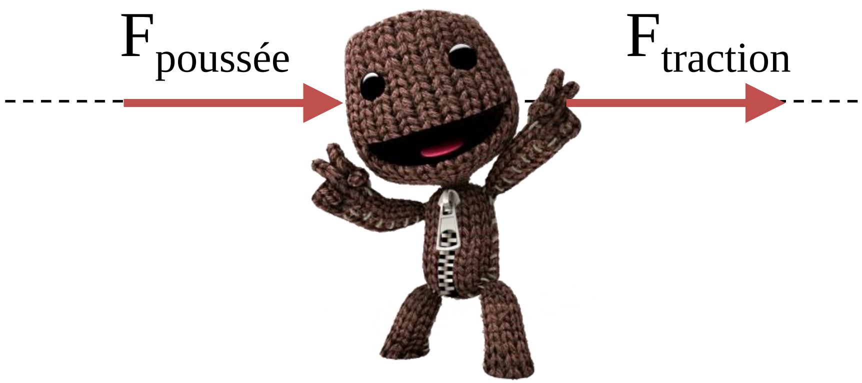
- **Principe de transmissibilité**
- **Moment de force par rapport à un point**
  - **Produit vectoriel**
- **Moment de force par rapport à un axe**
  - **Produit mixte**
- Couple
  - Moment d'un couple vs moment d'une force
- Système force-couple équivalent

Pousser et tirer : la même chose ?



Oui. L'automobile est un corps rigide.

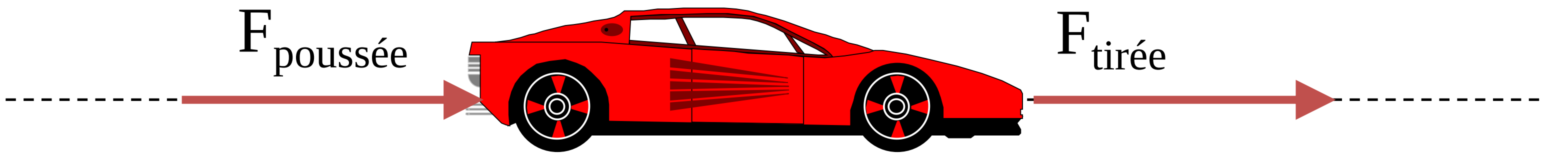
(en 1re approximation)



NON.

Sackboy peut se déformer : (ses différents membres bougent indépendamment les uns des autres) : ce n'est pas un corps rigide.

Principe de transmissibilité



1. Les effets extérieurs sur un corps rigide (qui ne se déforme pas) demeurent inchangés lorsqu'une force $\vec{F}$, agissant en un point du corps, glisse le long de sa ligne d'action.

2. Les effets intérieurs (contraintes) sont toutefois modifiés par le glissement des forces le long de leur ligne d'action.

Tirer revient au même que pousser si et SEULEMENT si l'objet est parfaitement rigide…

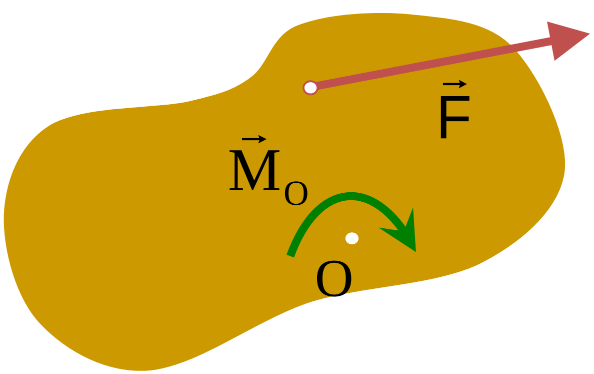
http://www.youtube.com/watch?v=Dhx6sKFCjak (1m20s)

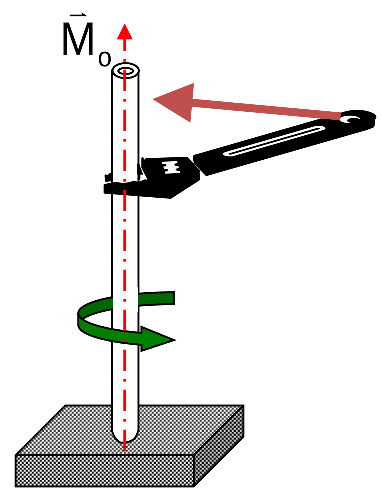
Moment d’une force

Une force peut produire deux effets

1. Une force $\vec{F}$ tend à déplacer le corps dans la direction de sa ligne d’action et selon son sens (translation).

2. Selon le point auquel elle agit, une force peut chercher à mettre le corps en rotation autour d’un point ou d’un axe. La force génère alors un moment de force $\vec{M}_O$.

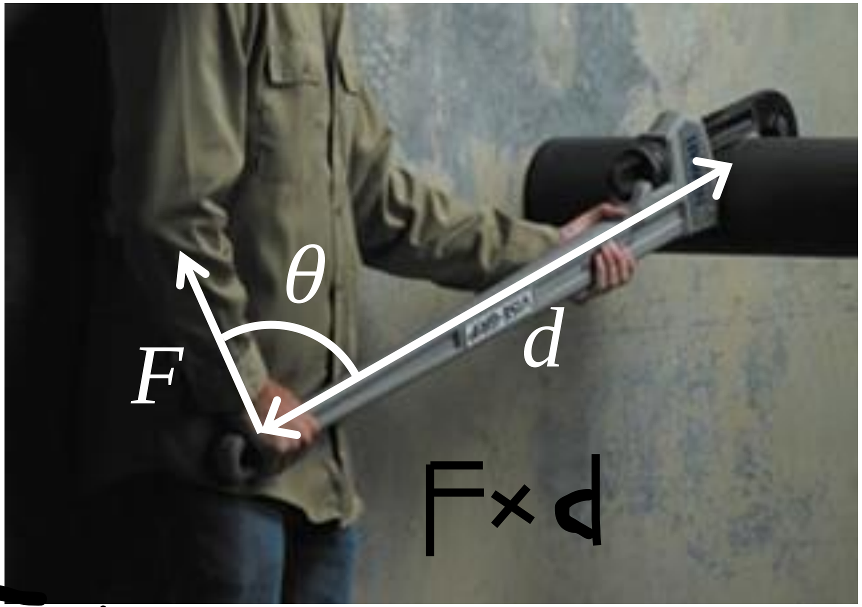




Quiz !

Vous voulez utiliser une clé à molette (manche de longueur d) pour faire tourner une pièce rouillée.

Vous exercez une force F qui fait un angle θ avec le manche de l'outil.



max = ⊥ F et d

Comment choisirez-vous la distance *d* et l'angle θ pour générer un maximum de rotation ?

A : d petit et $\theta = 180°$

B : d grand et $\theta = 180°$

C : d petit et $\theta = 90°$

D : d grand et $\theta = 90°$

Observations expérimentales : il faut maximiser la distance entre le point d'application de la force et appliquer la force perpendiculairement au manche.

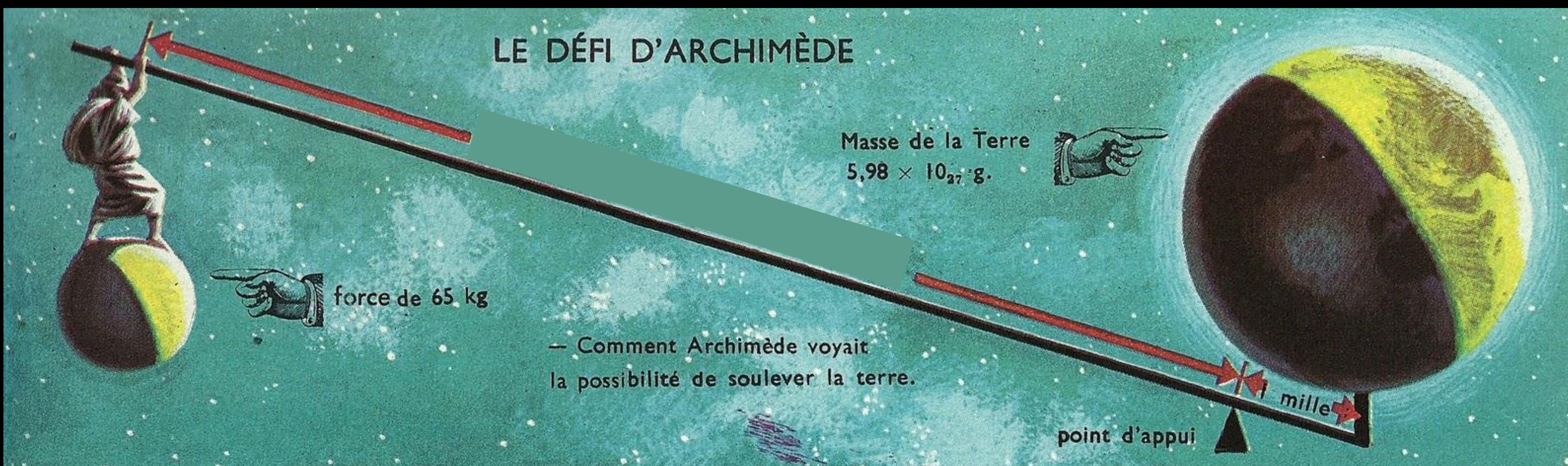
Le plan d'Archimède

?!?

287-212 av. J.-C.

« Donnez-moi un point d'appui,
et avec un levier,
je soulèverai le monde. »

Archimède



Quels problèmes techniques aurait rencontrés Archimède ?

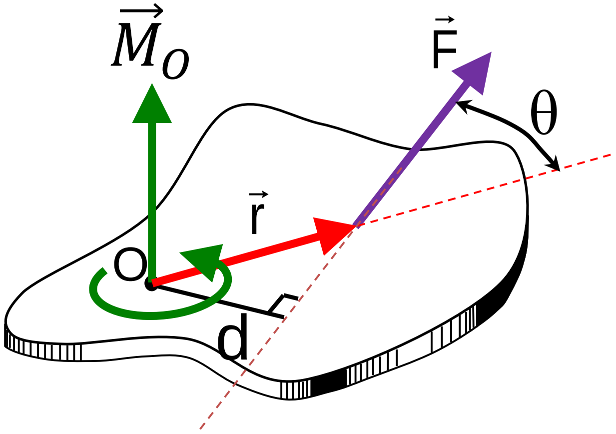
Définition du moment d'une force

Le moment $\vec{M}_O$ d'une force $\vec{F}$ par rapport à un point de référence O exprime la capacité de cette force à induire une rotation autour de O.

Le moment est un vecteur.

D'après les observations expérimentales, le moment :

- est proportionnel au module de la **force** $\vec{F}$;
- est proportionnel au module du **vecteur distance** $\vec{r}$ qui part du point de référence O et se termine au point d'application de la force $\vec{F}$;
- est maximal quand $\vec{F}$ et $\vec{r}$ sont **perpendiculaires**.



Moment d'une force par rapport au point O

$$\boxed{\overrightarrow{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

en N·m

Attention à l'ordre des vecteurs !

$$\vec{r} \times \vec{F} = -\vec{F} \times \vec{r}$$

Calcul du produit vectoriel

Le calcul d'un moment de force demande généralement (surtout en 3D) de calculer le produit vectoriel.

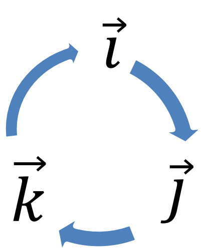
$$\vec{M_O} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Méthode 1 : méthode du déterminant

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \boxed{\vec{i}} & \boxed{\vec{j}} & \boxed{\vec{k}} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \underbrace{\vec{i}\begin{vmatrix} r_y & r_z \\ F_y & F_z \end{vmatrix}} - \underbrace{\vec{j}\begin{vmatrix} r_x & r_z \\ F_x & F_z \end{vmatrix}} + \underbrace{\vec{k}\begin{vmatrix} r_x & r_y \\ F_x & F_y \end{vmatrix}}$$

$$= \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\vec{i} - \left(r_x F_z - r_z F_x\right)\vec{j} + \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\vec{k}$$

Méthode 2 : produit terme par terme



Sens horaire : produit positif

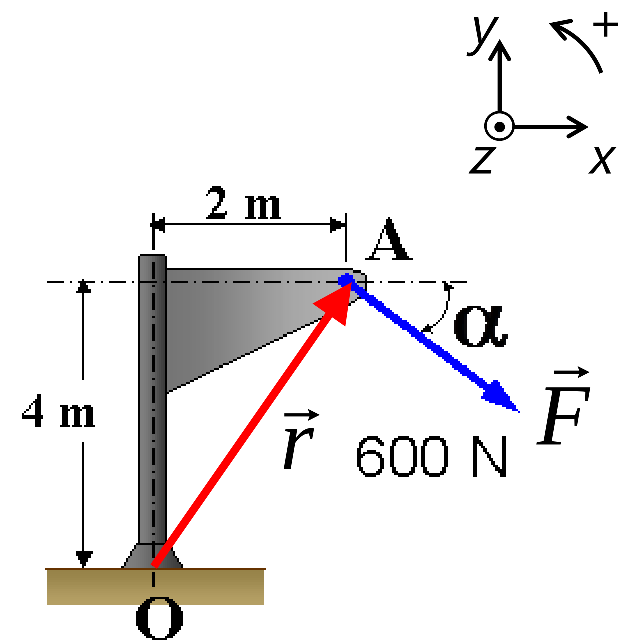
Sens antihoraire : produit négatif

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad 3\vec{k} \times -2\vec{i} = -6\vec{j}$$

$$\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \qquad 3\vec{k} \times -2\vec{j} = 6\vec{i}$$

Exemple – Calcul du moment d'une force

Calculez le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point **O**.
Prenez $\alpha = 30°$.



$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} = \left(2\vec{i} + 4\vec{j}\right)\mathrm{m}$$ Attention : de O vers A !

$$\vec{F} = \left(600\cos 30°\vec{i} - 600\sin 30°\vec{j}\right)\mathrm{N}$$

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ 600\cos 30° & -600\sin 30° & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(-2 \cdot 600\sin 30° - 4 \cdot 600\cos 30°\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{M}_O = \left(-2{,}68 \times 10^3\,\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m}}$$

Aurait-on pu prédire la direction et le signe du moment de force sans faire aucun calcul ?

Calcul du moment d'une force

Doit-on toujours calculer explicitement le produit vectoriel ?

NON : il y a certains cas où il est plus rapide de calculer son module, puis de déduire son sens.

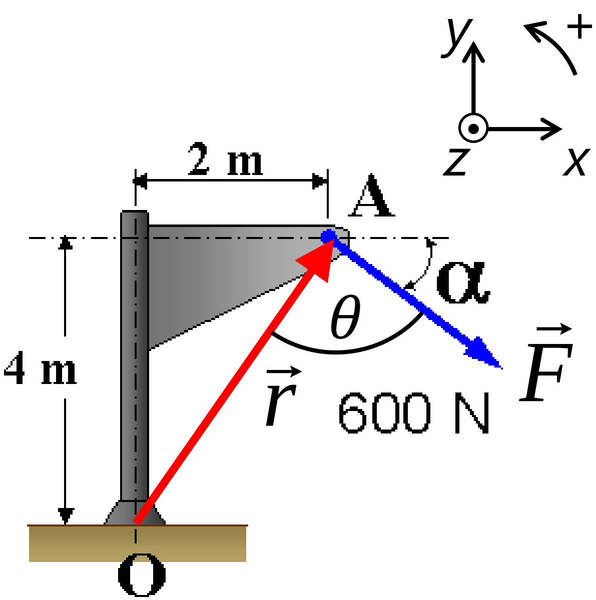
Rappel – Propriétés du produit vectoriel

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_O = rF\sin\theta \quad \text{Module}$$

$$\vec{M}_O \perp \vec{r} \quad \text{et} \quad \vec{M}_O \perp \vec{F}$$

Ici, θ est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}$.



Problèmes en 2D

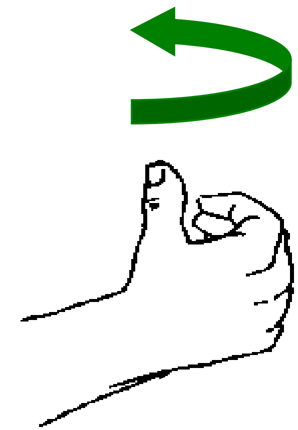
Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{F}$ sont dans le même plan xy.

Conséquence : le **vecteur moment** $\vec{M}_O$ est **parallèle à l'axe *z***.

Est-ce que le vecteur moment sort de la page ($+\vec{k}$) ou entre dans la page ($-\vec{k}$) ?

Règle de la main droite
Sens du moment d'une force

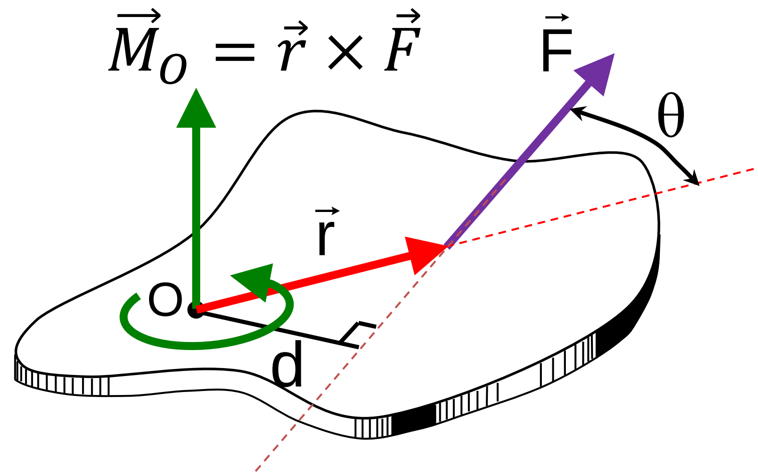
Le sens du moment de force est déterminé par la règle de la main droite.



Variante 1

- Enrouler les doigts dans la direction pour laquelle une tendance à la rotation est conférée par la force.
- Le pouce pointe dans la direction et le sens du moment de force.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

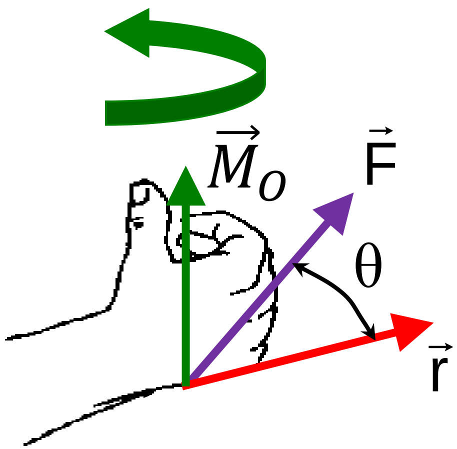


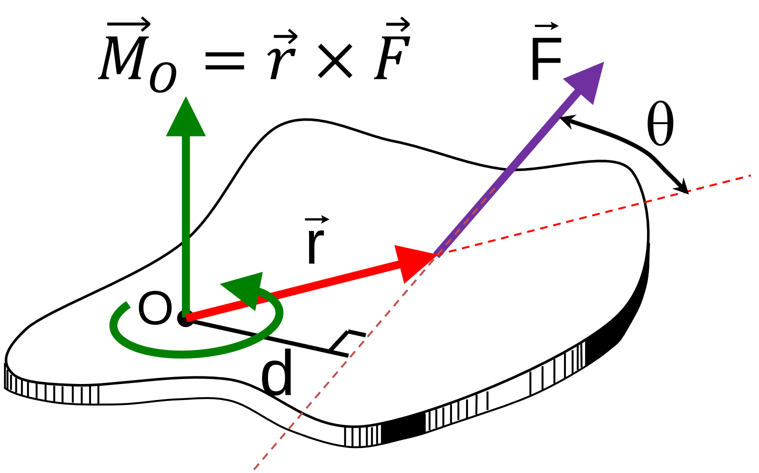
Règle de la main droite
Sens du moment d'une force

Le sens du moment de force est déterminé par la règle de la main droite.

Variante 2

- Placer les vecteurs de manière à ce qu'ils aient la même origine.
- Enrouler les doigts du premier ($\vec{r}$) vers le deuxième vecteur ($\vec{F}$).
- Le pouce pointe dans la direction et le sens du moment de force.



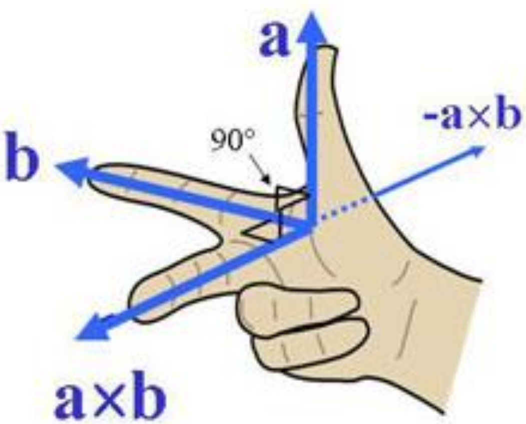


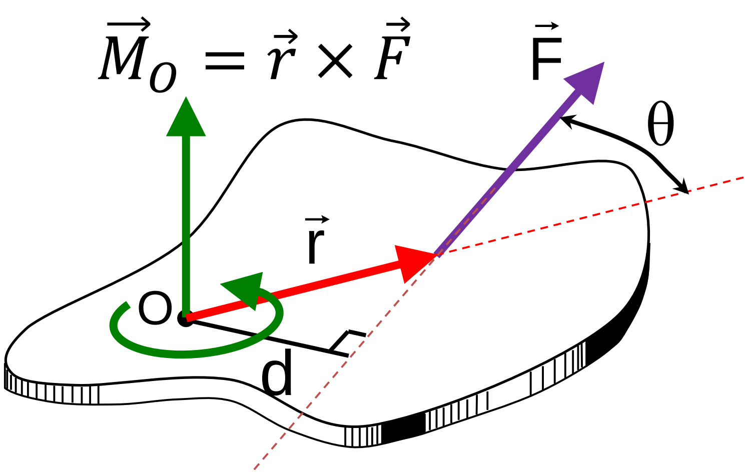
Règle de la main droite
Sens du moment d'une force

Le sens du moment de force est déterminé par la règle de la main droite.

Variante 3

- Placer les vecteurs de manière à ce qu'ils aient la même origine.
- Placer le pouce de la main droite sur le premier vecteur ($\vec{r}$).
- Placer l'index de la main droite sur le deuxième vecteur ($\vec{F}$).
- Le majeur de la main droite pointe dans la direction et le sens du moment de force.



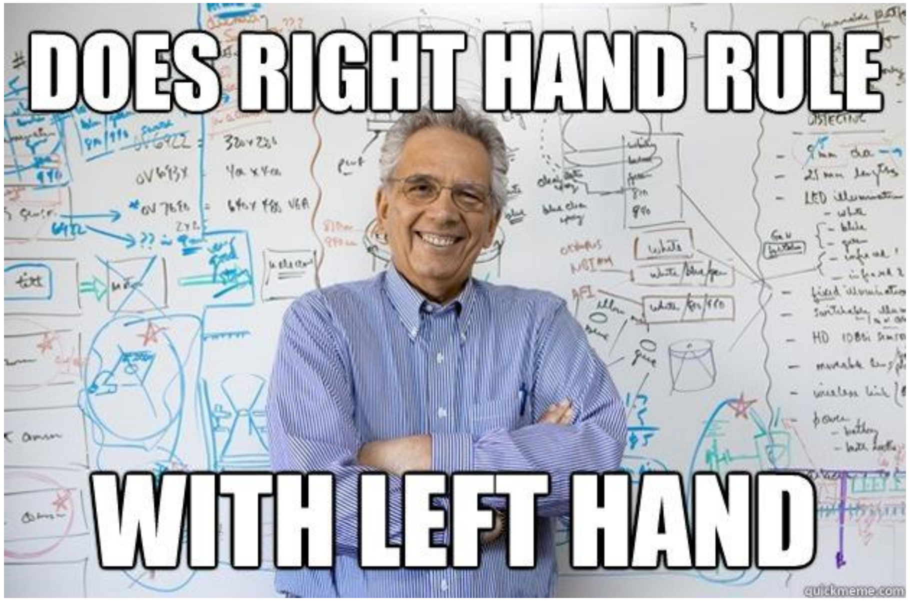


Règle de la main droite
Sens du moment d'une force

Vous avez **trois** méthodes équivalentes
pour appliquer la règle de la main droite.

- Choisissez celle avec laquelle vous êtes le plus à l'aise et **maîtrisez-la**.
- Trois variantes… vous n'avez pas d'excuse !

Mais surtout,
utilisez votre **main droite** à l'examen…

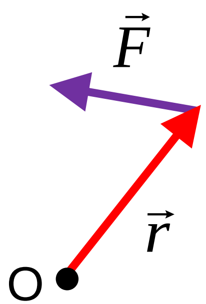


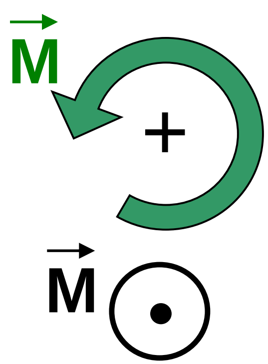
Sens du moment de force

En 2D, le moment de force est toujours dans la direction de l'axe z qui entre/sort de la page.

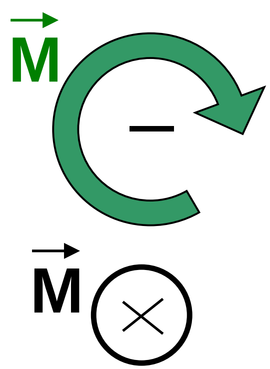
Pour des axes x et y standards, un moment qui :

- Sort de la page correspond à une tendance à une rotation des doigts en sens antihoraire. ($\vec{M}_O = M_O\vec{k}$)
- Entre dans la page correspond à une tendance à une rotation des doigts en sens horaire. ($\vec{M}_O = -M_O\vec{k}$)

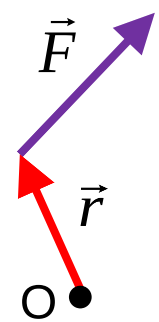


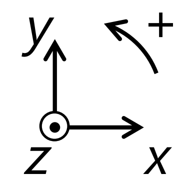


Sortant de la page



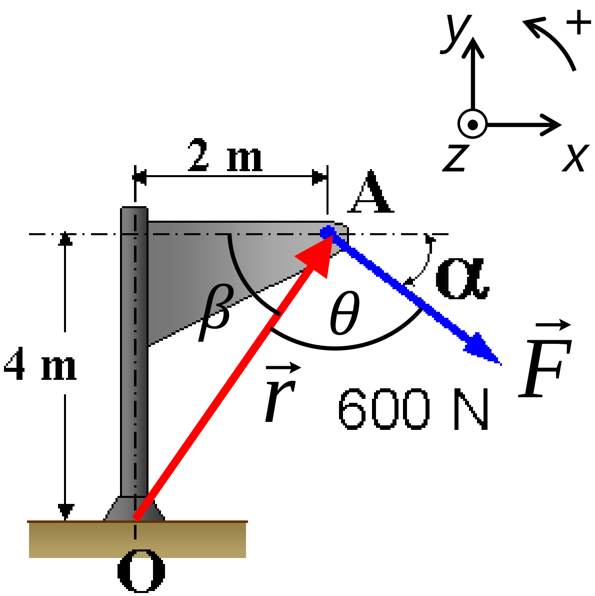
Entrant dans la page





Exemple – Calcul du moment d'une force en 2D

Calculez le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point **O**.
Prenez $\alpha = 30°$.



$$\vec{M}_O = \pm M_O \vec{k}$$

$$M_O = rF\sin\theta$$

Signe : règle de la main droite

$$r = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5} = 4{,}472\,\text{m}$$

$$F = 600\text{ N}$$

$$\beta = \arctan\left(\tfrac{4}{2}\right) = 63{,}43° \qquad \theta = 180° - \alpha - \beta = 86{,}57°$$

$$M_O = rF\sin\theta = 2\sqrt{5}\cdot 600\cdot\sin(86{,}57°) = 2{,}68\times 10^3\text{ N}\cdot\text{m}$$

Règle de la main droite
$\vec{F}$ imprime un mouvement de rotation en sens horaire (moment vers les z négatifs) autour du point O.

$\vec{M}_O$

$$\boxed{\vec{M}_O = \left(-2{,}68\times 10^3\vec{k}\right)\text{N}\cdot\text{m}}$$

Calcul du moment de force

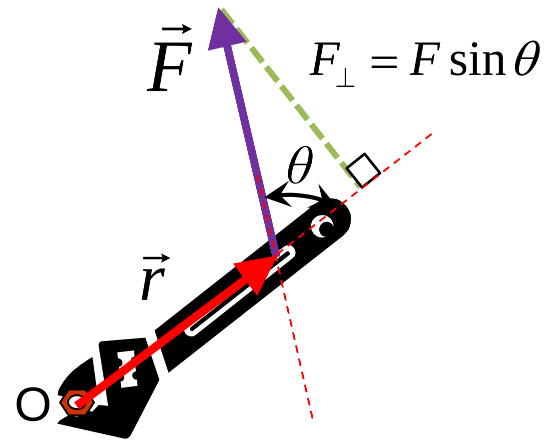
Deux autres façons de visualiser le même concept

Interprétation 1 – Force perpendiculaire

Seule la composante de la force $\vec{F}$ perpendiculaire ($F_\perp$) au vecteur $\vec{r}$ génère un moment.

$$M_O = rF\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad M_O = rF_\perp$$

$$F_\perp = F\sin\theta$$

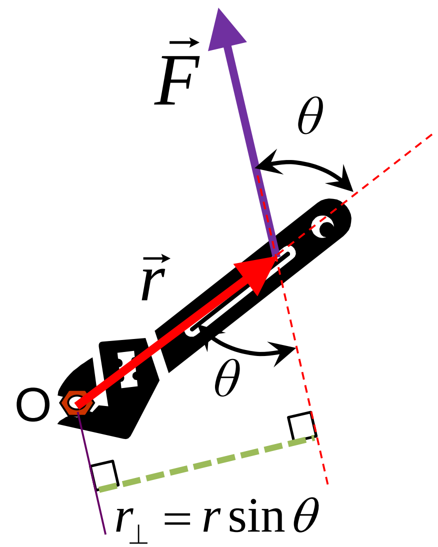


Interprétation 2 – Bras de levier

Seule la composante du vecteur $\vec{r}$ perpendiculaire ($\vec{r}_\perp$) à la force $\vec{F}$ génère un moment. Cette composante est appelée bras de levier.

$$M_O = rF\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad M_O = r_\perp F$$

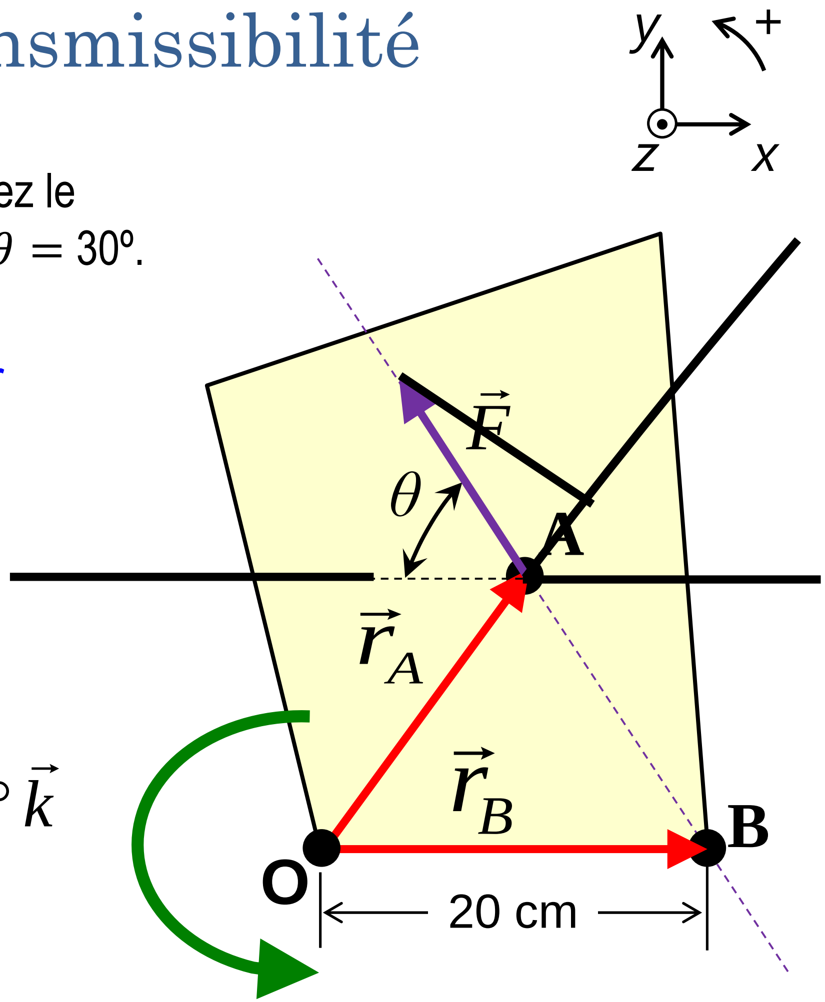
$$r_\perp = r\sin\theta$$



Moment de force et principe de transmissibilité

Une force $\vec{F}$ de 100 N est appliquée au point **A**. Calculez le moment de cette force par rapport au point **O**. Prenez $\theta = 30°$.

Le principe de transmissibilité permet de glisser $\vec{F}$ pour l'amener au point **B**.



$$\vec{M}_O = \vec{r}_A \times \vec{F} = \vec{r}_B \times \vec{F}$$

$$\vec{M}_O = +r_B F \sin\theta\, \vec{k} = 0{,}20 \cdot 100 \sin 30°\, \vec{k}$$

$$\vec{M}_O = 10\, \vec{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

Opportunité pour simplifier les calculs !

Moment de force et principe de transmissibilité

Tant que la force demeure sur sa ligne d'action, le moment de force qu'elle génère demeure inchangé.

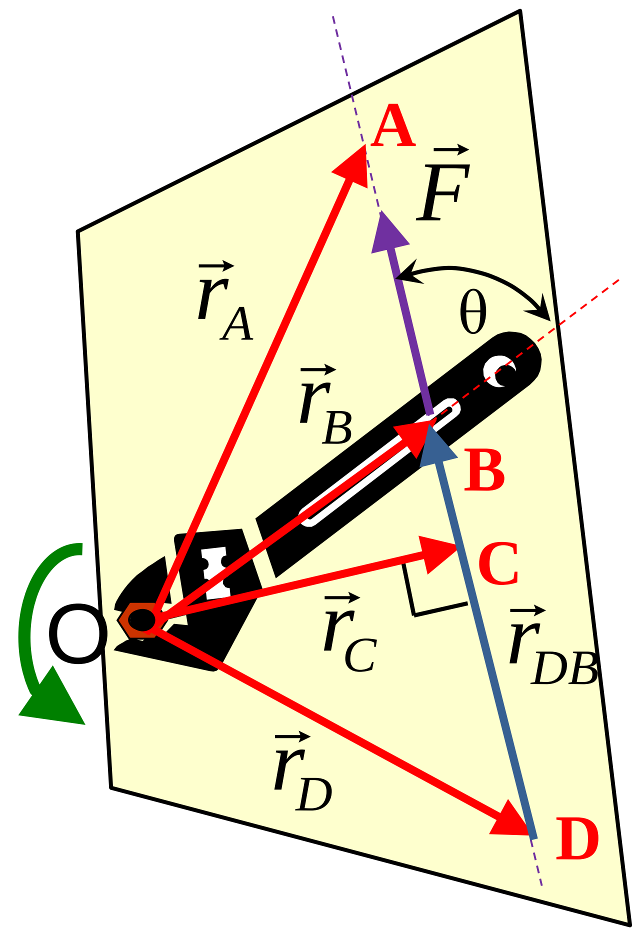
$$
\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{r}_A \times \vec{F} \\
&= \vec{r}_B \times \vec{F} \\
&= \vec{r}_C \times \vec{F} \\
&= \vec{r}_D \times \vec{F}
\end{aligned}
$$

Pourquoi?

Exemple de preuve

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_O &= \vec{r}_B \times \vec{F} \\
&= (\vec{r}_D + \vec{r}_{DB}) \times \vec{F} \\
&= \vec{r}_D \times \vec{F} + \cancelto{0}{\vec{r}_{DB} \times \vec{F}} \\
&= \vec{r}_D \times \vec{F}
\end{aligned}
$$

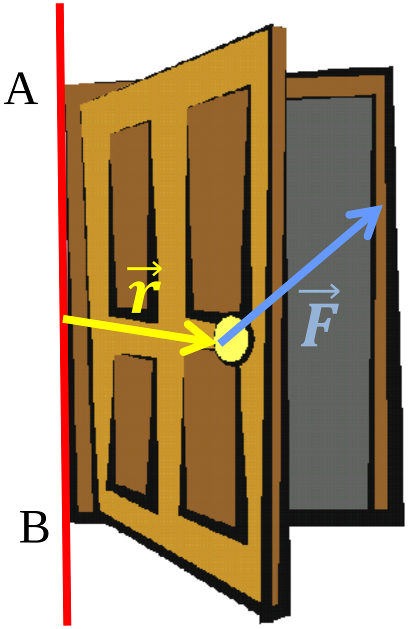
$\vec{r}_{DB}$ et $\vec{F}$ parallèles ($\theta = 0°$)



La rotation en 3D

En 3D, un objet peut :

- Tourner autour d'un point.
  Ex : une toupie.
- Être contraint de tourner autour d'un axe.
  Ex : une porte.



<u>Étude de la rotation d'une porte</u>

On exerce une force $\vec{F}$ sur la poignée de la porte afin de la refermer.

Comment calculer l'effet de la force $\vec{F}$ sur la rotation de la porte ?

Il faudrait pouvoir calculer son moment par rapport à l'axe de rotation AB…

Moment par rapport à un axe

Pour calculer le moment d'une force par rapport à un axe AB, il faut :

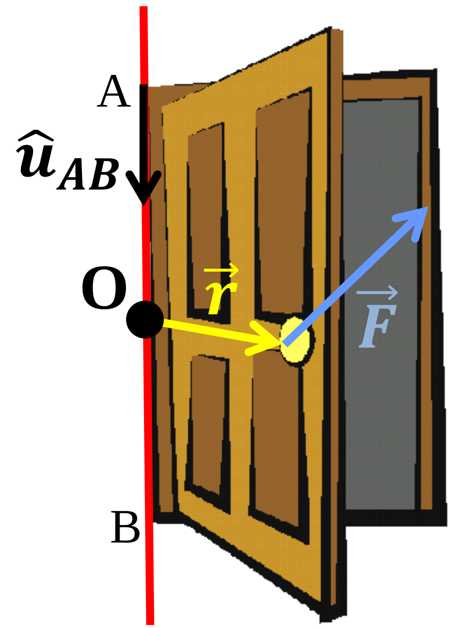
1. **Choisir un point de référence O sur l'axe AB.**
   Ce peut être n'importe quel point qui est sur l'axe (principe de transmissibilité).

2. **Calculer le moment de la force par rapport à O.**
   On obtient un vecteur $\vec{M}_O$ dont les composantes selon x, y et z indiquent la capacité de la force à induire une rotation autour de ces trois axes.

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

3. **Projeter le moment de la force sur l'axe AB.**
   Projeter signifie calculer la composante de $\vec{M}_O$ dans la direction de l'axe AB. On obtient le moment $\vec{M}_{AB}$ de $\vec{F}$ par rapport à l'axe AB.

N.B. On utilise le produit scalaire pour projeter $\vec{M}_O$ sur le vecteur unitaire $\hat{u}_{AB}$. Ceci donne un scalaire. Pour obtenir un vecteur $\vec{M}_{AB}$ parallèle à l'axe AB, on multiplie par $\hat{u}_{AB}$.

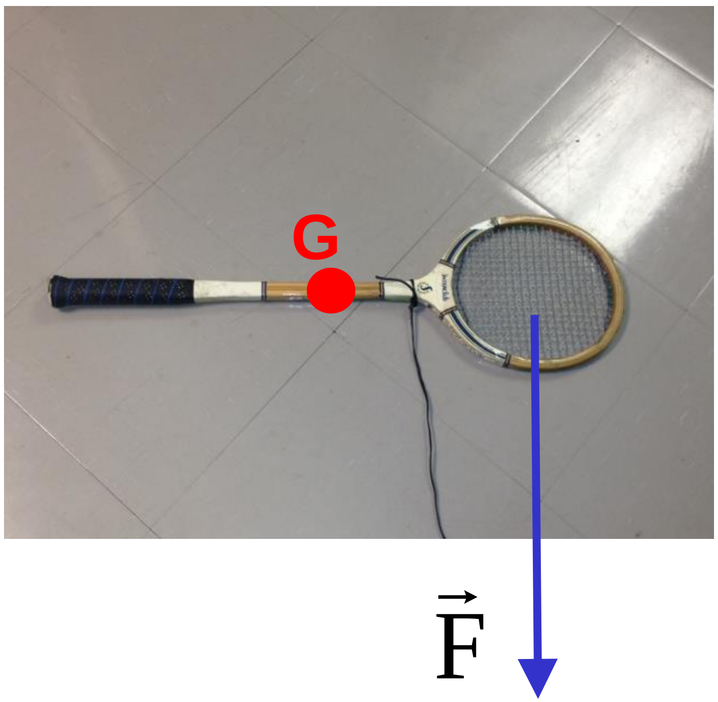


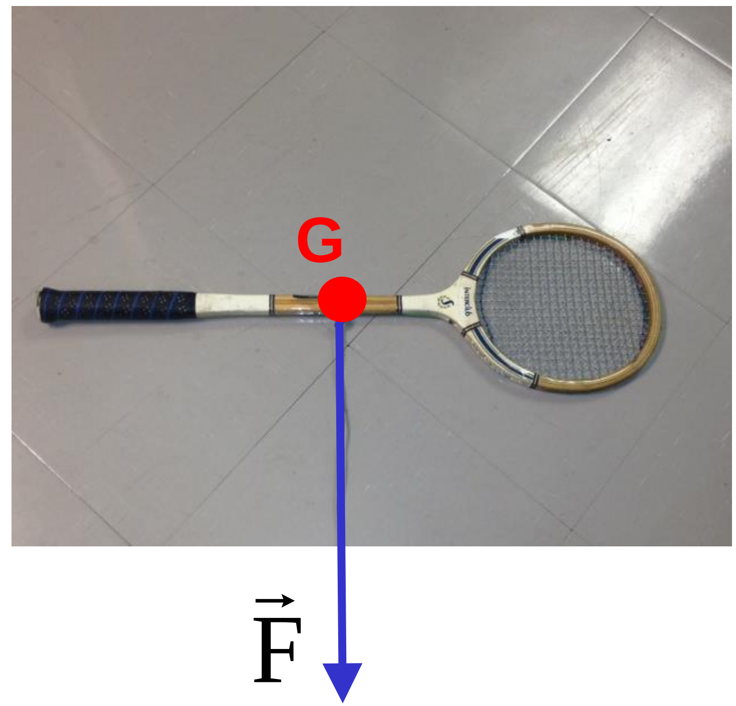
Moment d'une force par rapport à un axe

$$\boxed{\vec{M}_{AB} = \left(\vec{M}_O \cdot \hat{u}_{AB}\right)\hat{u}_{AB}}$$

Rotation d'un objet sans contrainte

Comment se comporte un objet en rotation s'il n'est pas contraint de tourner autour d'un point ou d'un axe précis ?



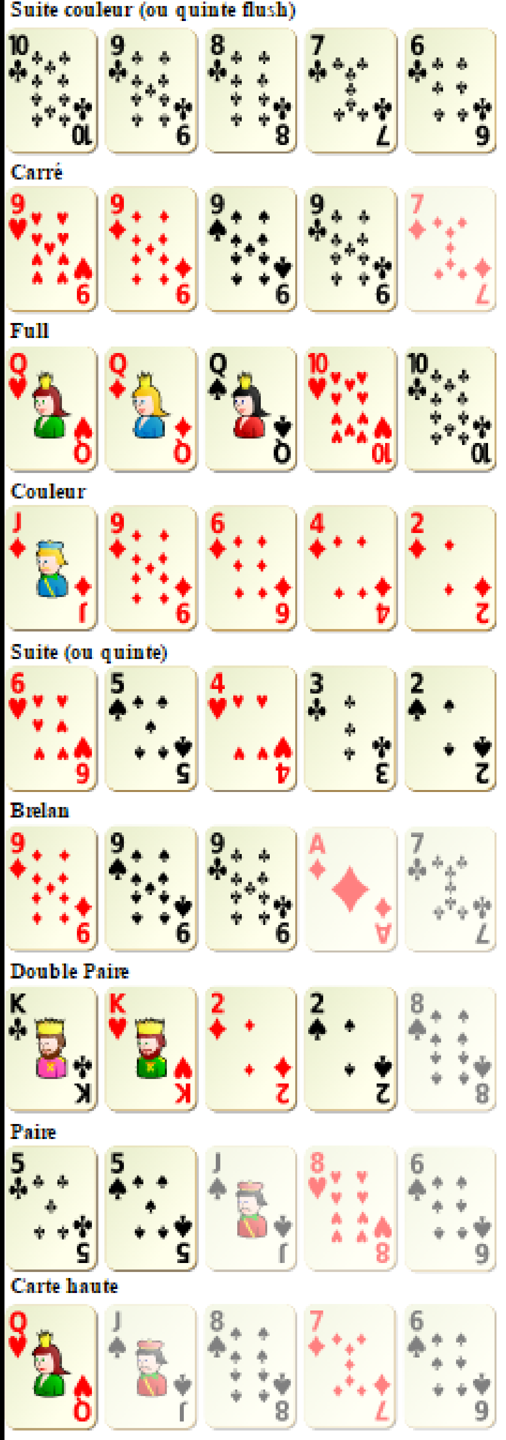


L'objet tourne autour d'un axe passant par son centre de masse.
Chapitres 11 : mouvement des corps rigides.

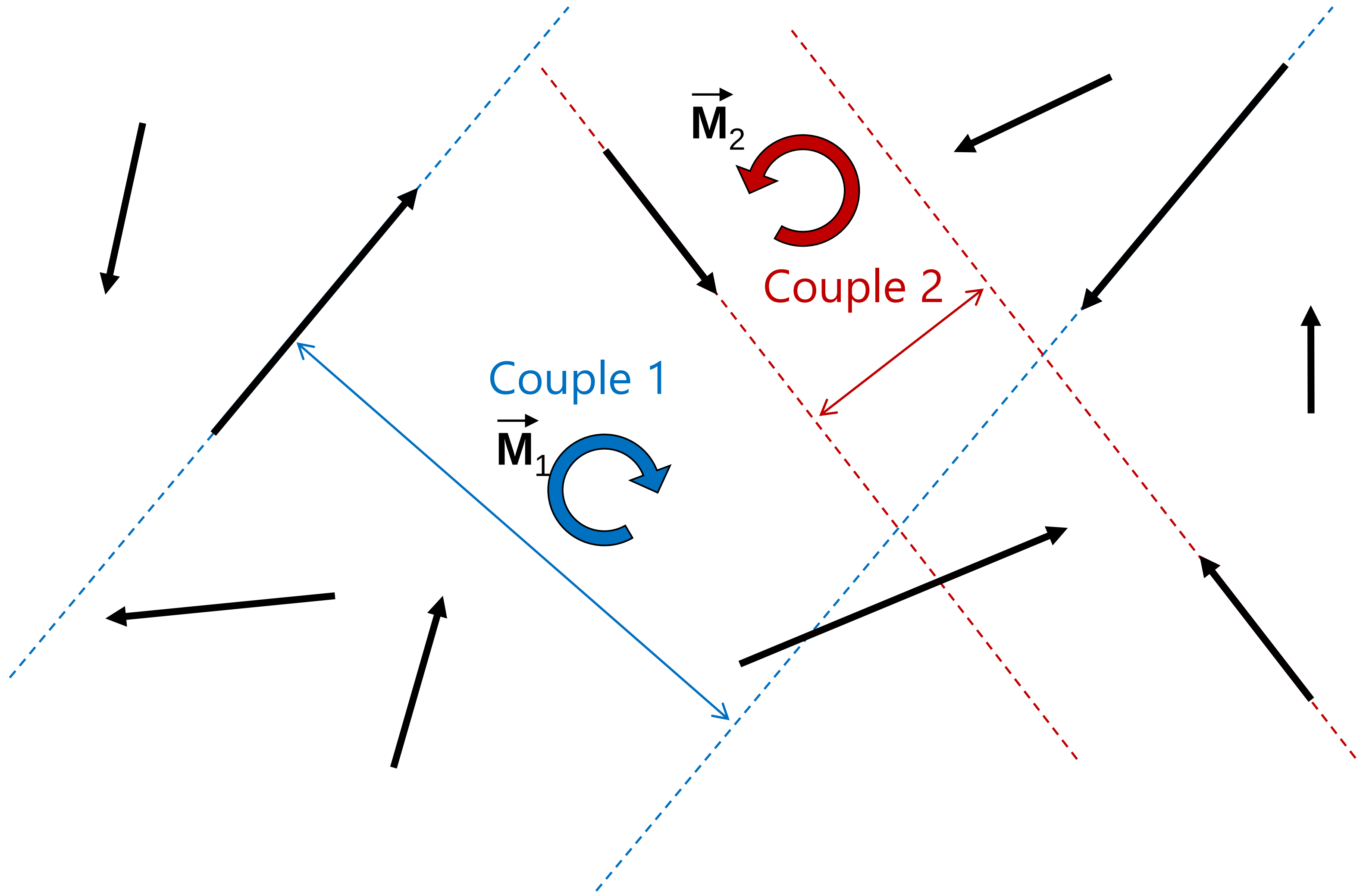
https://www.youtube.com/watch?v=DY3LYQv22qY

Plan du cours 2

- Principe de transmissibilité
- Moment de force par rapport à un point
  - Produit vectoriel
- Moment de force par rapport à un axe
  - Produit mixte
- **Couple**
  - **Moment d'un couple vs moment d'une force**
- **Système force-couple équivalent**


Suite couleur (ou quinte flush)
Carré
Full
Couleur
Suite (ou quinte)
Brelan
Double Paire
Paire
Carte haute

Toutes les interactions physiques sont représentées par des forces
(mais...)



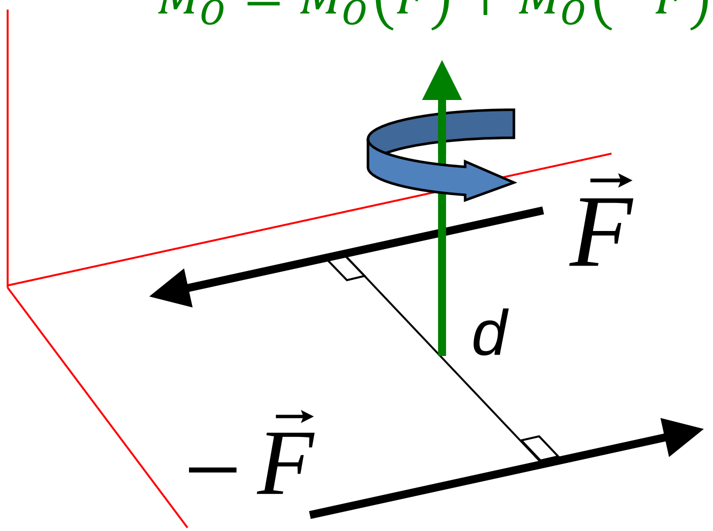
Couple de forces

Définition
Un couple de forces est formé de deux forces d'égale grandeur, de même direction (parallèles) et de sens opposés.

Chaque force crée un moment de force autour d'un point ou d'un axe choisi.

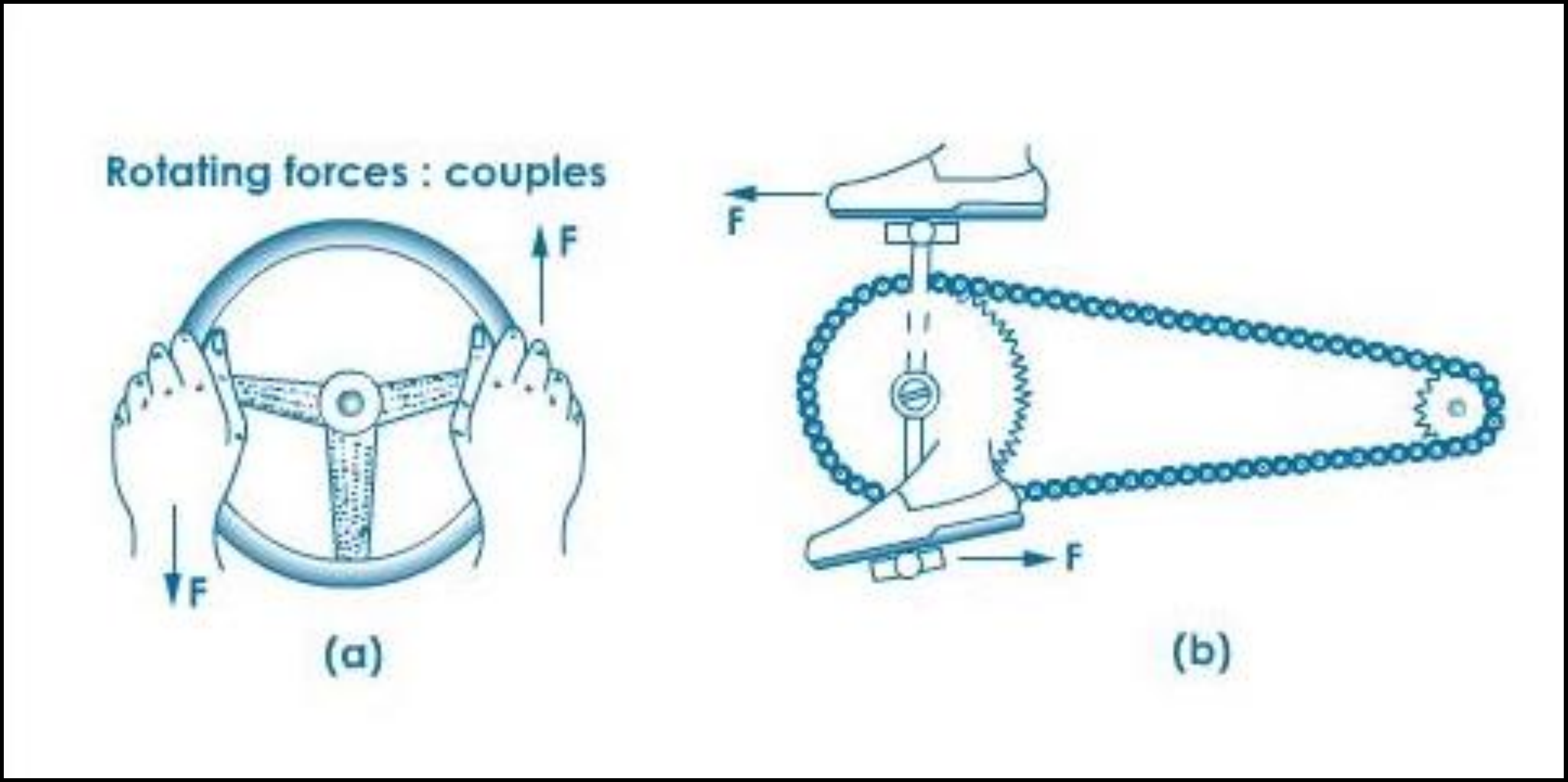
Moment de force d'un couple
C'est la somme vectorielle des moments de couple individuels produits par $\vec{F}$ et $-\vec{F}$.

$$\vec{M}_O = \vec{M}_O(\vec{F}) + \vec{M}_O(-\vec{F})$$

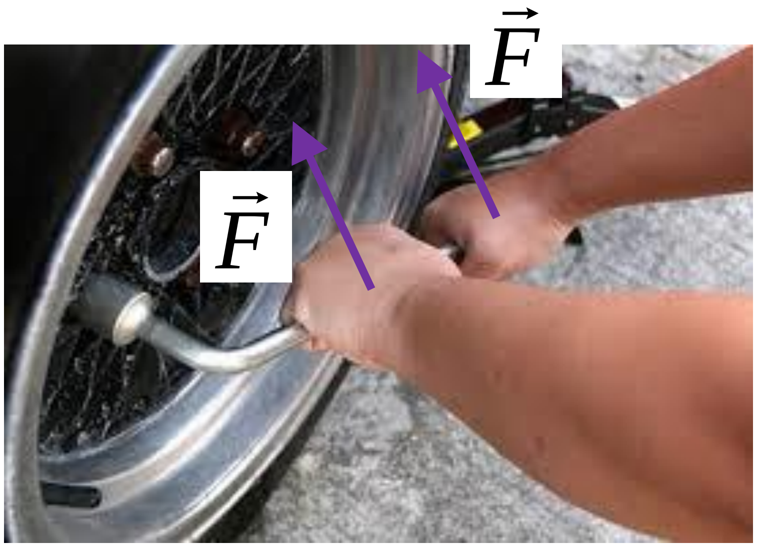


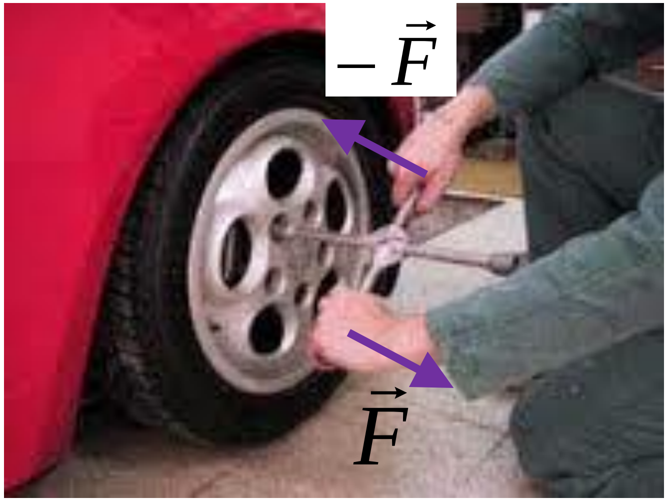
Intérêt du couple de forces
Puisque $\sum \vec{F} = \vec{0}$, un couple induit uniquement une **rotation sans translation** !

Exemples de couples



Est-ce un couple ?





NON

Les deux forces s'exercent dans la même direction.

OUI…

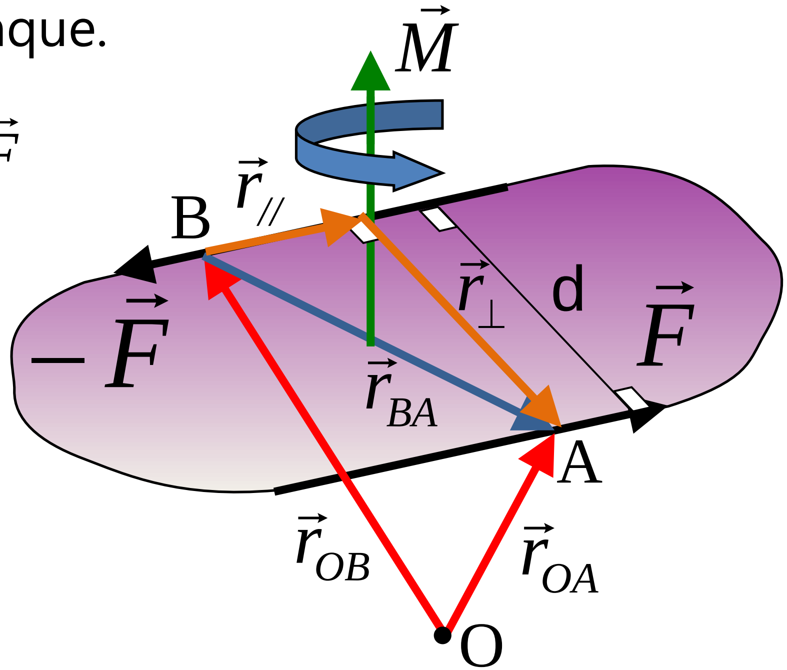
À condition que :

- Chaque main exerce la même force (en module).
- La main de gauche tire dans la même direction, mais en sens opposé par rapport à la main droite.

Moment de force produit par un couple

On prend un point de référence **O** quelconque.

$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} + \vec{r}_{OB} \times \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_{OA} - \vec{r}_{OB}\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_{BA} \times \vec{F}$$



Que vaut $\vec{r}_{BA} \times \vec{F}$? $\quad \vec{r}_{BA} = \vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{//}$

$$\vec{M}_O = \left(\vec{r}_{\perp} + \vec{r}_{//}\right) \times \vec{F} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F} + \cancelto{0}{\vec{r}_{//} \times \vec{F}}$$

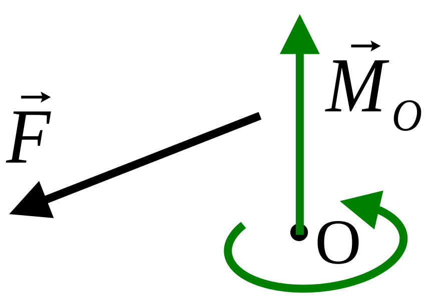
$$\boxed{\begin{gathered}\vec{M} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{F} \\ M = Fd\end{gathered}}$$

- Module : $M = Fd$.
- Direction : Perpendiculaire au plan des forces.
- Sens : Règle de la main droite.

Moment d'une force vs Moment d'un couple

Force

Une force $\vec{F}$ et un point de référence **O**



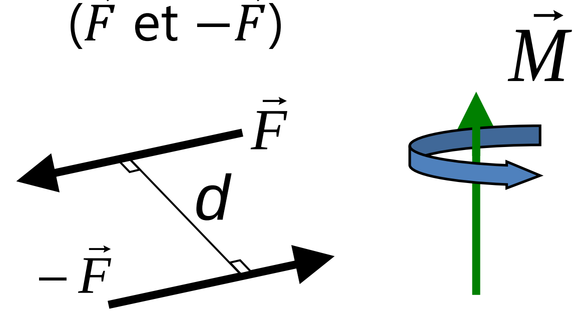
$\sum \vec{F} \neq \vec{0}$

Induit une translation et peut induire une rotation.

Le moment $\vec{M}_O$ de la force $\vec{F}$ est un vecteur lié au point de référence O choisi.

Couple

Deux forces ($\vec{F}$ et $-\vec{F}$)



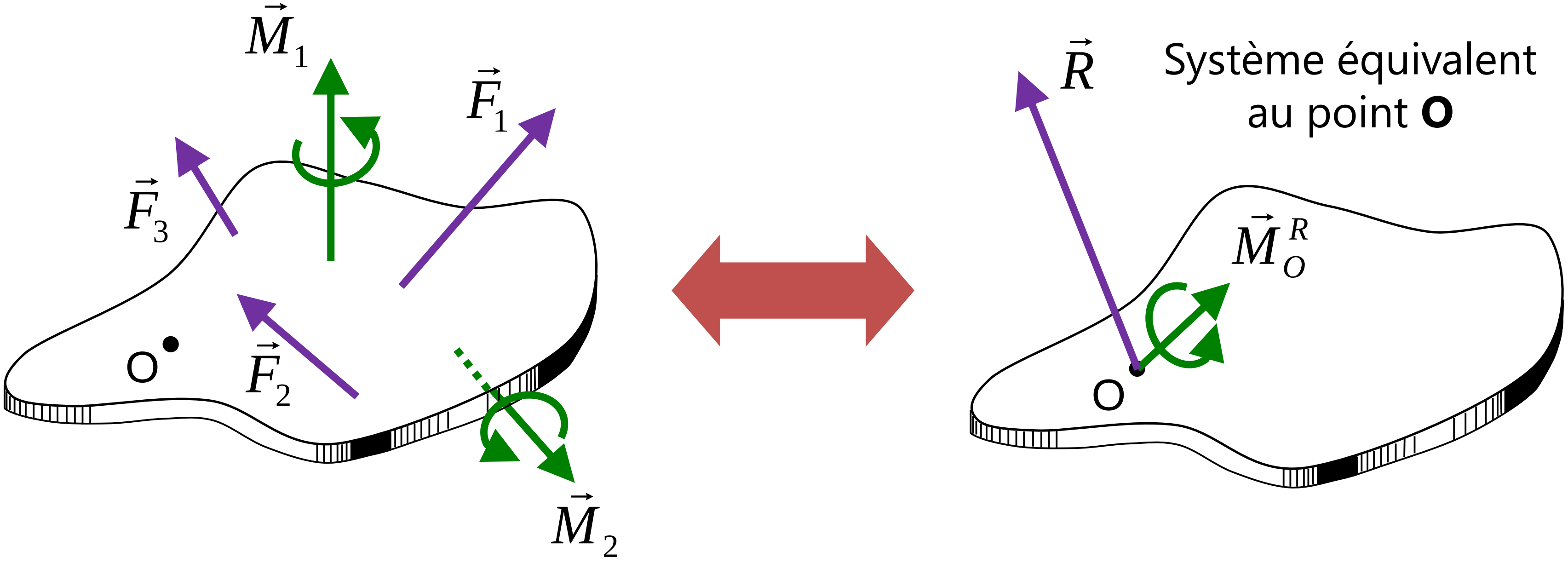
Induit une rotation sans translation.

$\sum \vec{F} = \vec{0}$

Le moment de force $\vec{M}$ du couple est un vecteur libre qui ne dépend pas du point de référence choisi pour le calcul.

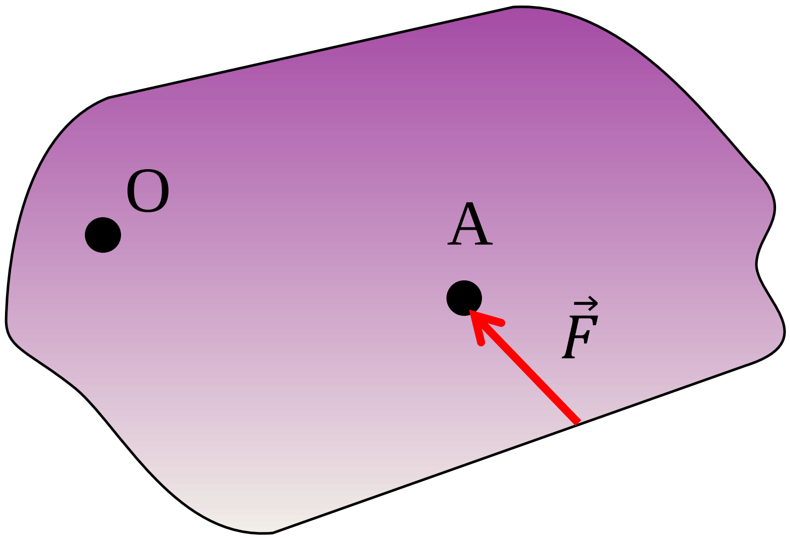
Système force-couple équivalent

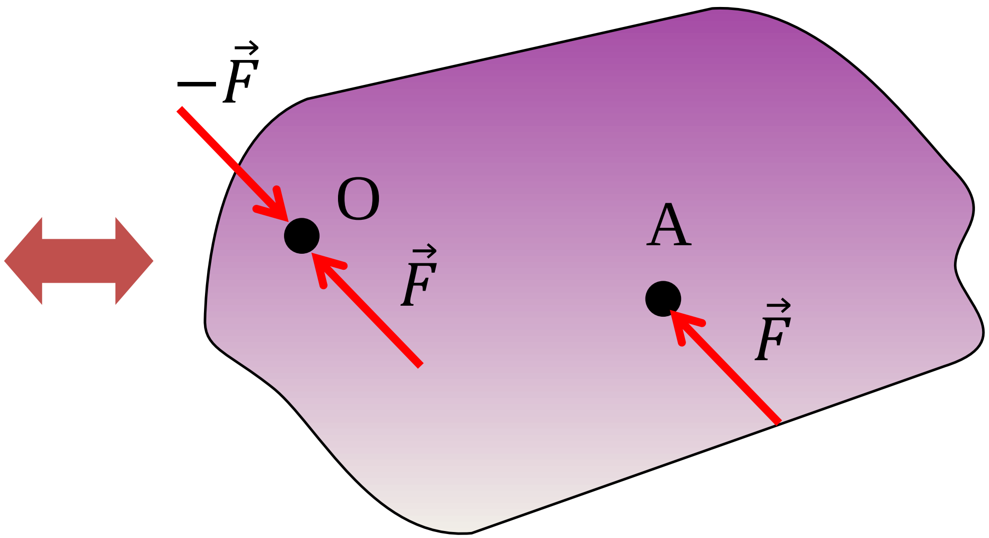
Intérêt : Remplacer un ensemble de forces (appliquées en différents points) et de couples par une seule force appliquée en un point et un seul couple.



Système force-couple équivalent

Déplacer une force vers un point hors de sa ligne d'action.





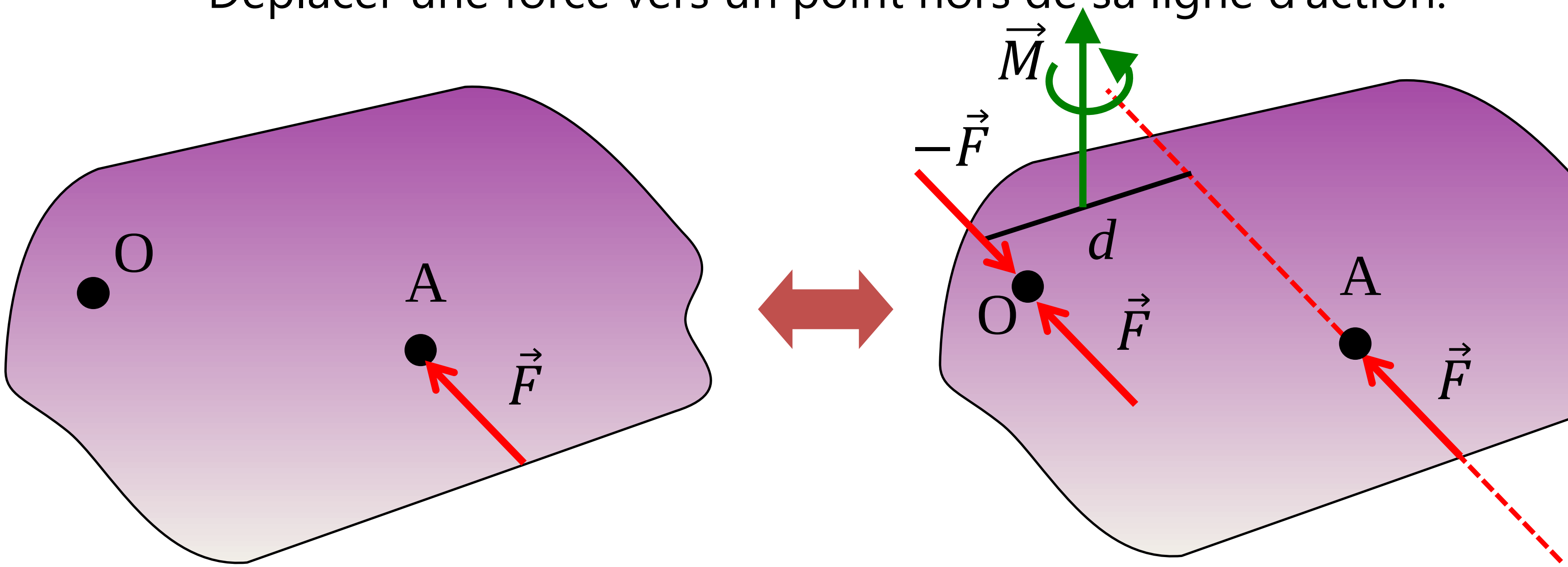
On fait apparaître $\vec{F}$ et $-\vec{F}$ au point **O** : cela ne génère aucune force ni moment résultant.

Une force appliquée en A

Que se passe-t-il en O ?

Système force-couple équivalent

Déplacer une force vers un point hors de sa ligne d'action.



La force $\vec{F}$ au point **A** et la force $-\vec{F}$ au point **O** forment un couple de moment $M = Fd$. Puisque le moment du couple est un vecteur libre, on peut le déplacer au point **O**.

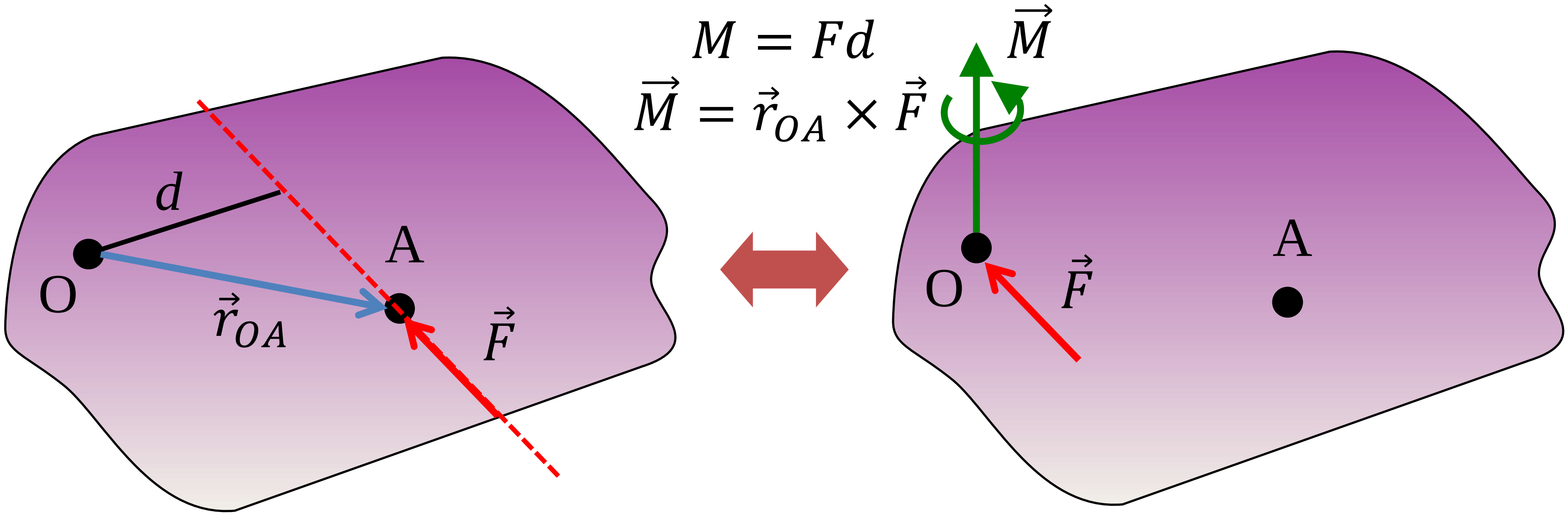
Une force appliquée en A **Que se passe-t-il en O ?**

Système force-couple équivalent

Déplacer une force vers un point hors de sa ligne d'action.

$$M = Fd$$

$$\vec{M} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}$$

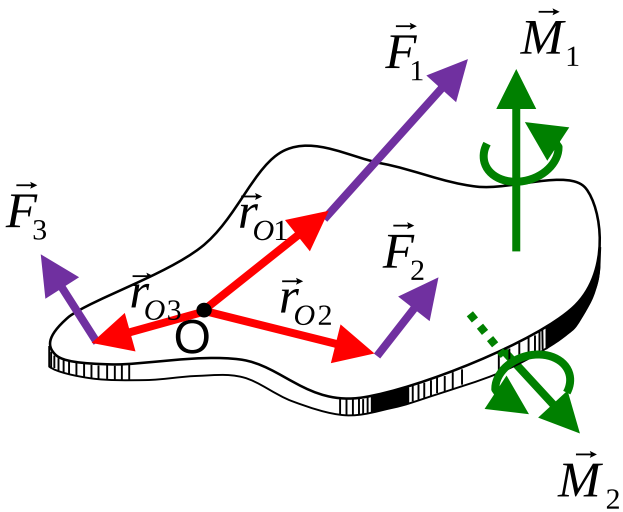


Conclusion

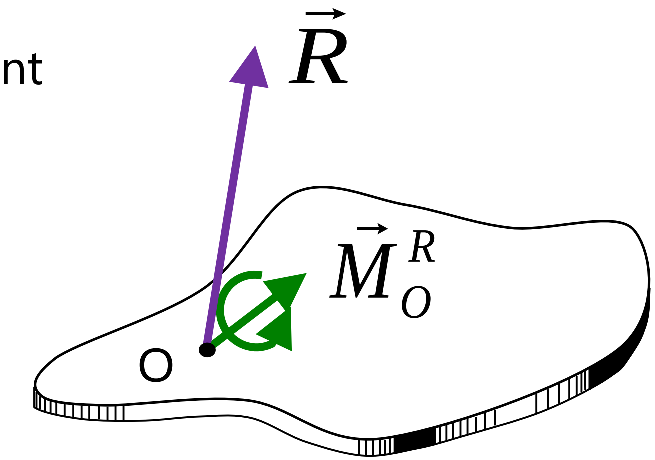
Force équivalente : Même module et de même orientation.

Couple équivalent : Égal au moment de la force $\vec{F}$ appliquée au point **A** par rapport au point **O**.

Système force-couple équivalent



Système équivalent
au point **O**



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

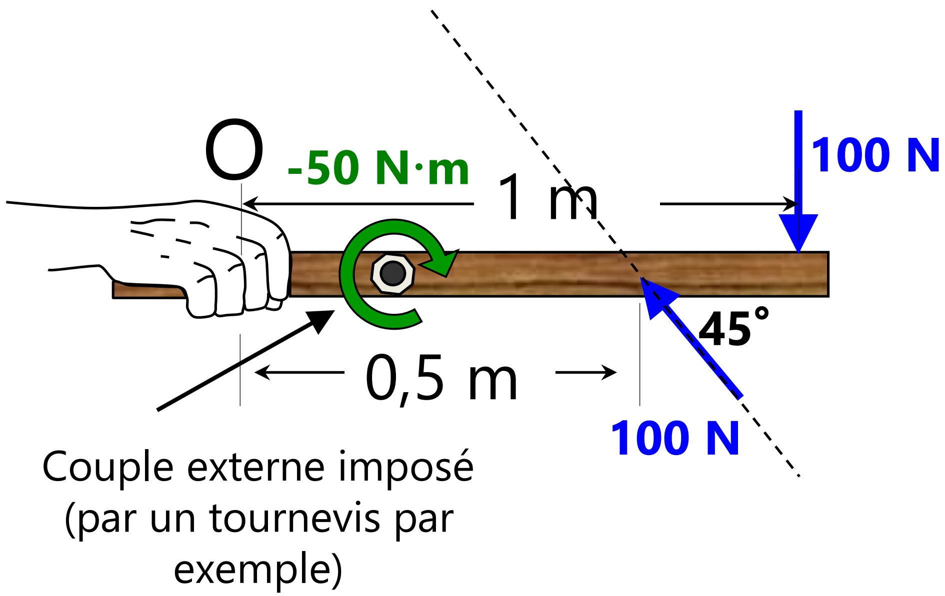
$$\vec{M}_O^R = \overbrace{\vec{M}_1 + \vec{M}_2}^{\text{Couples externes initiaux}} + \overbrace{\vec{r}_{O1} \times \vec{F}_1 + \vec{r}_{O2} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{O3} \times \vec{F}_3}^{\text{Moments des forces déplacées hors de leur ligne d'action}}$$

Force équivalente	Couple équivalent
$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$	$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i$

Système force-couple équivalent

Exemple

Quels sont la force et le couple ressentis par la main ?

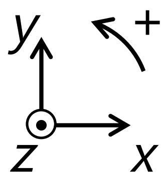


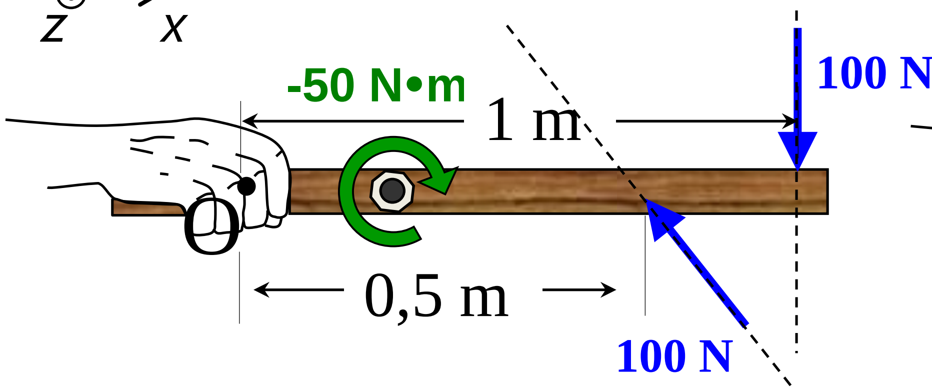
$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i$$

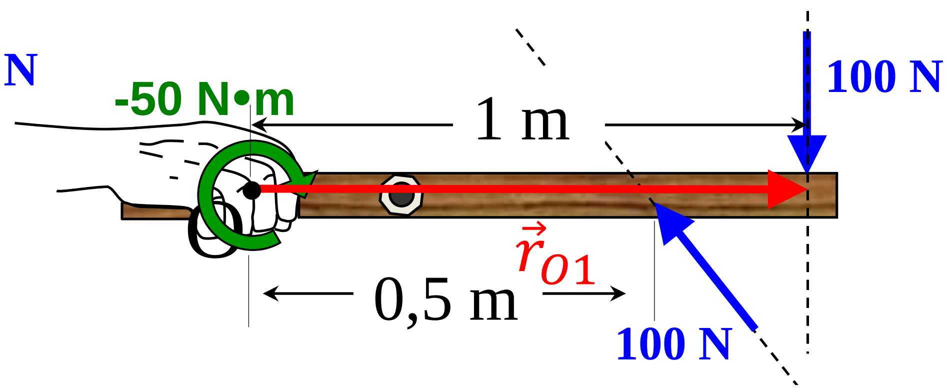
Il faut calculer le système équivalent au point O.

Stratégie

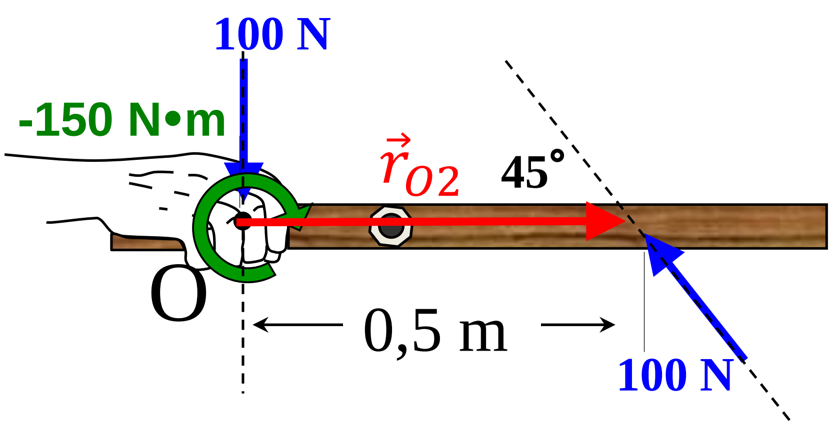




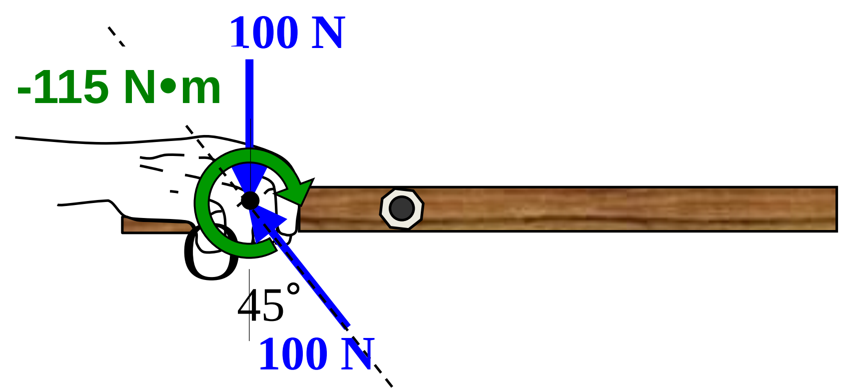
1) On déplace le couple externe à l'origine car c'est un vecteur libre.



2) On change la force verticale de ligne d'action et on tient compte de son moment par rapport à sa nouvelle ligne d'action.

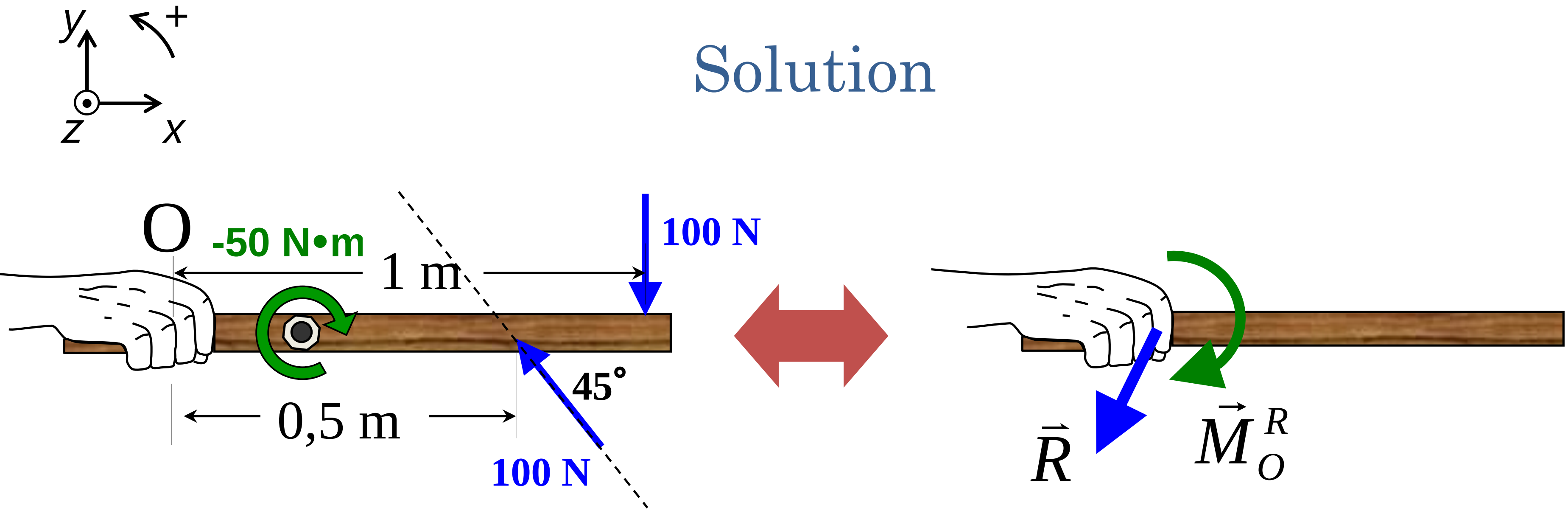


3) On change la force à 45° de ligne d'action et on calcule son moment par rapport à la nouvelle ligne d'action.



4) On additionne toutes les forces et tous les moments et on obtient le système force-couple équivalent.

Solution



$$\vec{R} = \sum \vec{F} = -100\vec{j} - 100\cos(45^\circ)\vec{i} + 100\sin(45^\circ)\vec{j}$$

$$\vec{M}_O^R = \sum \vec{M}_i + \sum \vec{r}_{Oi} \times \vec{F}_i = \left(-50 + 100 \cdot 0{,}5\sin 45^\circ - 100 \cdot 1\right)\vec{k}\ \mathrm{N \cdot m}$$

$$\boxed{\vec{R} = \left(-70{,}7\vec{i} - 29{,}3\vec{j}\right)\mathrm{N}} \qquad \boxed{\vec{M}_O^R = \left(-115\vec{k}\right)\mathrm{N \cdot m}}$$

Le système équivalent sert à simplifier une situation complexe pour préparer les calculs utilisant $\sum\vec{F}$ et $\sum\vec{M}$.

Vers où allons-nous ?

Chapitre 1

Manipuler des forces en 2D et en 3D

Calculer la résultante d'un ensemble de forces

Décrire des forces courantes (poids, tension, ressort et frottement)

Chapitre 2

Calculer le moment d'une force

Définir un couple et calculer son moment

Remplacer des forces et des couples par un système équivalent formé d'une seule force et d'un seul couple.

Chapitre 3

Étudier l'équilibre statique (1re loi de Newton) de structures

Équilibre en translation

Équilibre en rotation