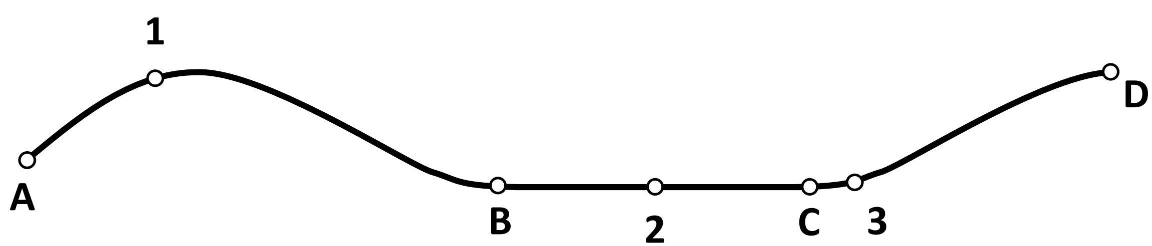
PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 2
Été 2018

Question 1 – Concepts et réponses courtes (30 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

A. Un corps est en mouvement sur la trajectoire ci-dessous du point A vers le point D. Les portions AB et CD de la trajectoire sont curvilignes tandis que la portion BC est rectiligne. La vitesse du corps augmente sur la portion AB, puis diminue sur les portions BC et CD. Directement sur le schéma, représentez les vecteurs vitesse et accélération du corps aux points 1, 2 et 3 sur la trajectoire en utilisant le composantes normales et tangentielles. (15 points)

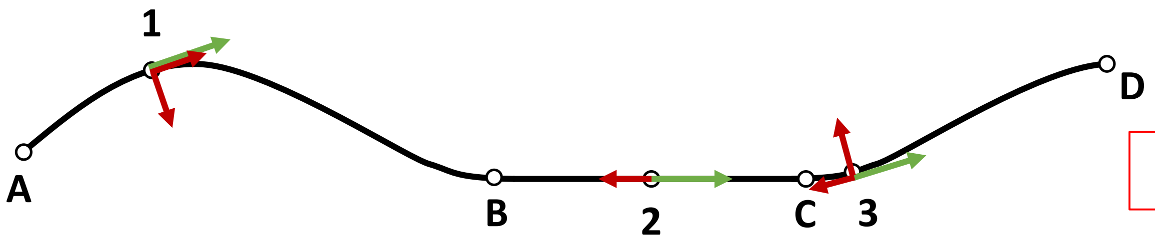


B. Donnez un exemple d'une situation où l'énergie mécanique est conservée même s'il y a une force non conservative qui s'applique sur le système. (15 points)

Question 1 – Concepts et réponses courtes (30 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. **Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

A. Le vecteur vitesse (vert) est toujours tangente à la trajectoire, dans la direction du mouvement. Il doit y avoir une accélération (rouge) tangentielle selon si la vitesse augmente ou diminue, et une accélération (rouge) normale vers le centre de courbure dans les portions curvilignes. Les longueurs des vecteurs ne sont pas importantes.



15 points de compréhension

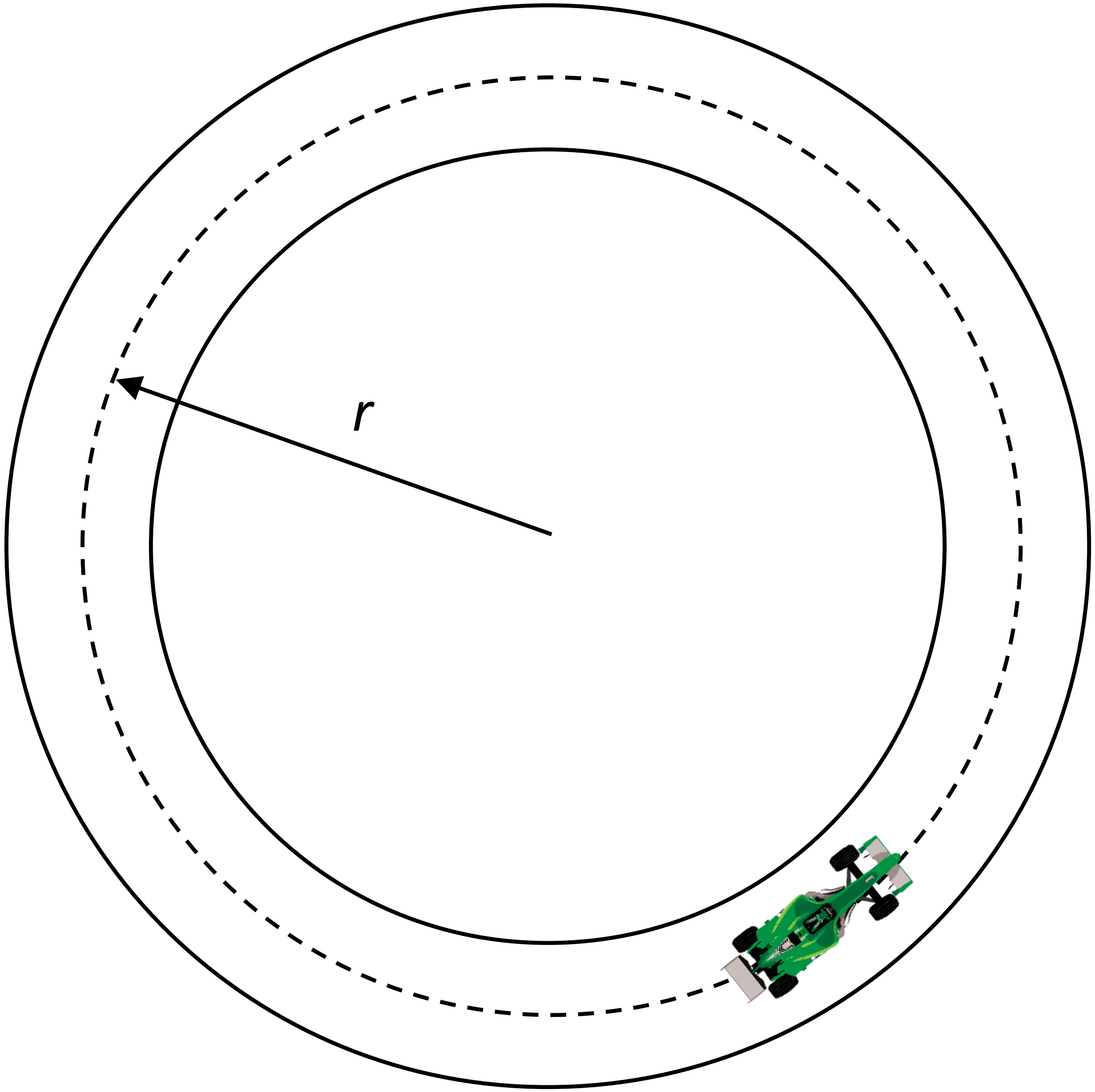
B. L'exemple doit contenir une force non conservative qui fait un travail nul.

Exemple 1 : un bloc qui glisse horizontalement à vitesse constante. Le poids est conservatif, la normale est non conservative, mais fait un travail nul puisqu'elle est perpendiculaire au mouvement du bloc. Même s'il y a des forces non conservatives selon x, leur travail total est nul, car on suppose que la vitesse du bloc est constante.

Exemple 2 : un pendule fixé au plafond par un câble qui oscille avec une résistance de l'air négligeable. La tension du câble sur le pendule est non conservative, mais son travail est nul, car elle est perpendiculaire au mouvement.

15 points de compréhension

Question 2 (60 points)



Question 2 (60 points)

Une voiture de course parcourt une piste circulaire de rayon moyen *r*. L'objectif du pilote est d'atteindre une vitesse maximale en partant du repos. En tout temps, le moteur est donc exploité au maximum : il génère alors une force constante F_m dans la direction du mouvement de la voiture. Par contre, la voiture subit la résistance de l'air, une force de module $F_r = bv$ (en newton) qui s'exerce en direction opposée au mouvement de la voiture, où v est la vitesse de la voiture.

N.B. La gravité s'exerce dans la direction perpendiculaire à la page. On suppose que la piste est parfaitement horizontale, c'est-à-dire qu'elle n'a aucun dénivelé. Enfin, on suppose que la voiture ne dérape pas en tout temps (les pneus adhèrent à la piste considérée comme une surface rugueuse).

A. Faites le DCL-DCE de la voiture en mouvement (15 points) :

i. Dans le plan de la piste (vue de haut) ;

ii. Selon la direction verticale (vue de côté).

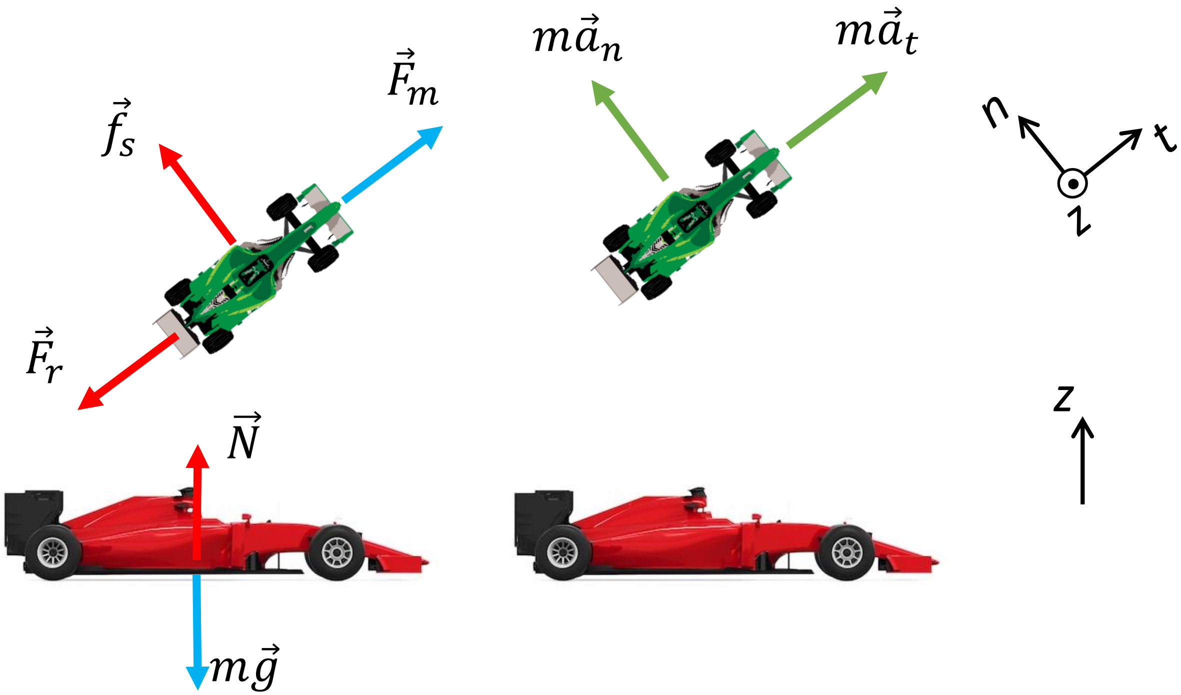
B. Quelle est la vitesse maximale que peut atteindre la voiture sans déraper ? (15 points)

C. Déterminez l'expression de la vitesse de la voiture en fonction du temps en supposant que la voiture ne dérape pas. (30 points)

BONUS. Déterminez l'expression du coefficient de frottement minimal entre les pneus et la piste qui permet de garantir que la voiture ne dérapera jamais dans cette situation. (10 points)

Q2 – Solution (1/3)

A. DCL-DCE de la voiture :



15 points de compréhension

Q2 – Solution (2/3)

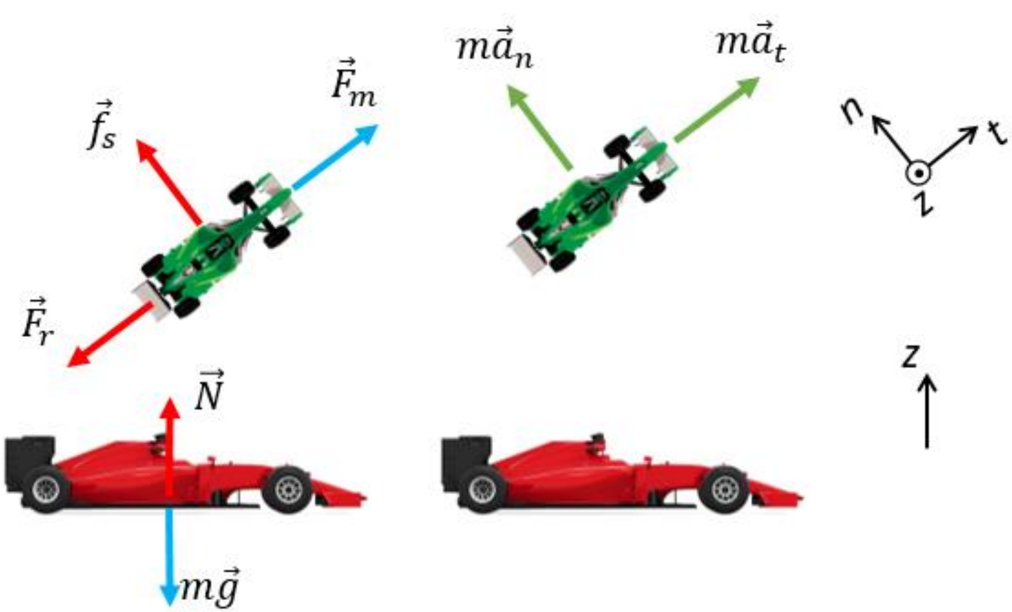
B. Vitesse maximale pour ne pas déraper.

Somme des forces selon n : $\sum F_n = ma_n \Rightarrow f_s = m\dfrac{v^2}{r}$

Sur le point de déraper, le frottement statique est maximal. $f_s = f_{s,\max} = \mu_s N$

Somme des forces selon z : $\sum F_z = ma_z = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

La vitesse maximale est donc : $\mu_s mg = m\dfrac{v_{\max}^2}{r} \Rightarrow \boxed{v_{\max} = \sqrt{\mu_s g r}}$



15 points de résolution de problème

Q2 – Solution (3/3)

C. Vitesse en fonction du temps.

Somme des forces selon t : $\sum F_t = ma_t \Rightarrow F_m - F_r = F_m - bv = ma_t \Rightarrow a_t = \dfrac{F_m - bv}{m}$

Accélération dépend de la vitesse :

$$\int_{t_0}^{t} dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \int_0^t dt = m\int_0^v \frac{dv}{F_m - bv} \Rightarrow t = -\frac{m}{b}\ln\left(F_m - bv\right)\Big|_0^v = \frac{m}{b}\ln\left(\frac{F_m}{F_m - bv}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{F_m}{b}\left(1 - e^{-bt/m}\right)}$$

20 points de résolution de problème

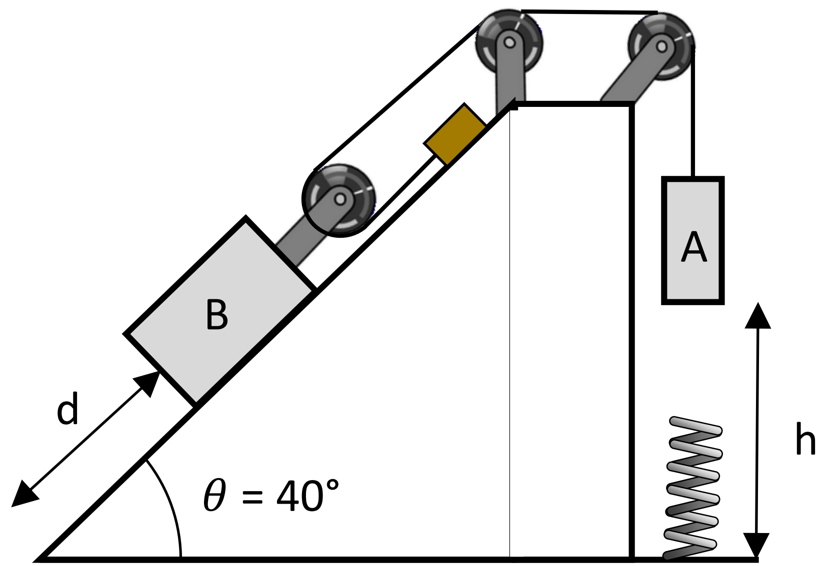
BONUS. La vitesse maximale atteinte par la voiture (après un temps très long) est F_m/b.

Pour ne pas que la voiture ne dérape, on doit donc avoir la condition :

$$\frac{F_m}{b} \leq v_{\max} = \sqrt{\mu_s g r} \Rightarrow \boxed{\mu_s \geq \frac{1}{gr}\left(\frac{F_m}{b}\right)^2}$$

10 points de compréhension et de calculs

Question 3 (50 points)



Question 3 (50 points)

On souhaite faire monter la charge B (m_B = 70 kg) sur un plan incliné en utilisant le poids de la charge A (m_A = 30 kg). Les deux charges sont reliées entre elles par un câble et des poulies de masse négligeable, tel qu'illustré sur la figure.

Le système est initialement au repos avec la charge A maintenue à une hauteur h = 3 m et la charge B à une distance d = 1 m du bas du plan incliné, puis on lâche la charge A. Le système se met alors en mouvement. Un ressort vertical (k = 500 N/m) situé directement sous la charge A sert à amortir sa chute. Le ressort est initialement à sa longueur naturelle L_0 = 1,25 m. On néglige tout frottement dans ce problème.

A. Quelle est le module de la vitesse de A à l'instant où A atteint le ressort ? (30 points)

B. Déterminez quelle est la hauteur de A au-dessus du sol lorsque A atteint sa vitesse maximale. (20 points)

Q3 – Solution (1/2)

B. Vitesses de A et de B à l'instant où A atteint le ressort.

Mouvement contraint entre A et B

On pose un axe y_A dans la direction du mouvement de A et un axe x_B dans la direction du mouvement de B. Le sens des axes est arbitraire : les signes doivent simplement être cohérents.

Il y a un segment de câbles qui tire sur A. Quand A descend de Δy_A dans la direction de l'axe y_A, le segment de câble s'allonge de Δy_A. Il y a deux segments de câbles qui tirent sur B, et quand B monte de Δx_B en direction de l'axe x_B, les segments rétrécissent de $2\Delta x_B$.

$$\Delta y_A - 2\Delta x_B = 0$$

$$\boxed{\Delta y_A = 2\Delta x_B}$$

$$\boxed{\Delta v_A = 2\Delta v_B}$$

Conservation de l'énergie sur le système A + B

Le poids est une force conservative, les tensions sont non conservatives, mais la somme de leurs travaux est nulle car la longueur du câble est constante : l'énergie mécanique du système est donc conservée.

$$E_1 = E_2 \Rightarrow \Delta T + \Delta V = 0$$

État 1 : charges lâchées du repos.

État 2 : instant où A touche le ressort. Mouvement contraint : A descend de h-L0 donc B monte de (h-L0)/2 sur le plan.

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 - m_A g(h - L_0) + m_B g\left(\frac{h - L_0}{2}\right)\sin\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(m_A + \frac{1}{4}m_B\right)v_A^2 = \left(m_A - \frac{m_B}{2}\sin\theta\right)g(h - L_0)$$

$$\boxed{v_A = \sqrt{4g(h - L_0)\frac{2m_A - m_B\sin\theta}{4m_A + m_B}} = 2{,}33\,\mathrm{m/s}}$$

30 points de résolution de problème

Q3 – Solution (2/2)

A. Hauteur de la charge A lorsqu'elle atteint sa vitesse maximale.

La vitesse maximale de la charge A ne sera pas lorsqu'elle atteint le ressort. A continue d'accélérer vers le bas un bref instant lorsque la force exercée par le ressort est plus petite que la résultante de la tension et du poids s'exerçant sur A.

Puisque le ressort est une force conservative, on peut encore appliquer la conservation de l'énergie sur le système A + B.

État 1 : instant où A touche le ressort avec une vitesse vA1 = 2,33 m/s vers le bas.

État 2 : instant où A atteint sa vitesse maximale vA2. Le ressort est alors comprimé d'une longueur Δy.

$$E_1 = E_2 \quad \Rightarrow \quad \Delta T + \Delta V = 0$$

$$\left[\frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 - \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 - \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2\right] - m_A g \Delta y + m_B g\left(\frac{\Delta y}{2}\right)\sin\theta + \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(m_A + \frac{1}{4}m_B\right)v_{A2}^2 = \frac{1}{2}\left(m_A + \frac{1}{4}m_B\right)v_{A1}^2 + \left(m_A - \frac{m_B}{2}\sin\theta\right)g\Delta y - \frac{1}{2}k(\Delta y)^2$$

Pour trouver la vitesse maximale vA2, il faut trouver le maximum du terme de droite en fonction de Δy. On dérive donc par rapport à Δy, puis on pose égal à 0,

$$\left(m_A - \frac{m_B}{2}\sin\theta\right)g - k\Delta y = 0$$

$$\Delta y = \frac{(2m_A - m_B\sin\theta)g}{2k} = 0{,}147\ \text{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_A = L_0 - \Delta y = 1{,}10\ \text{m}}$$

Note : on aurait pu faire les DCL-DCE de A et de B, puis de trouver la position de A pour laquelle son accélération s'annule pour obtenir ce résultat.

20 points de résolution de problème

Question 4 (60 points)

Une locomotive A de 80 tonnes se déplace à 6,5 km/h vers un wagon plat immobile B de 20 tonnes portant une charge C de 30 tonnes (1 tonne = 1000 kg). Après l'impact, la locomotive reste accrochée au wagon. Immédiatement après l'impact entre la locomotive et le wagon, la charge se met à glisser sur le wagon (μ_k = 0,25).

On suppose que les freins du wagon sont desserrés et que le frottement dû au roulement sur les rails est négligeable.

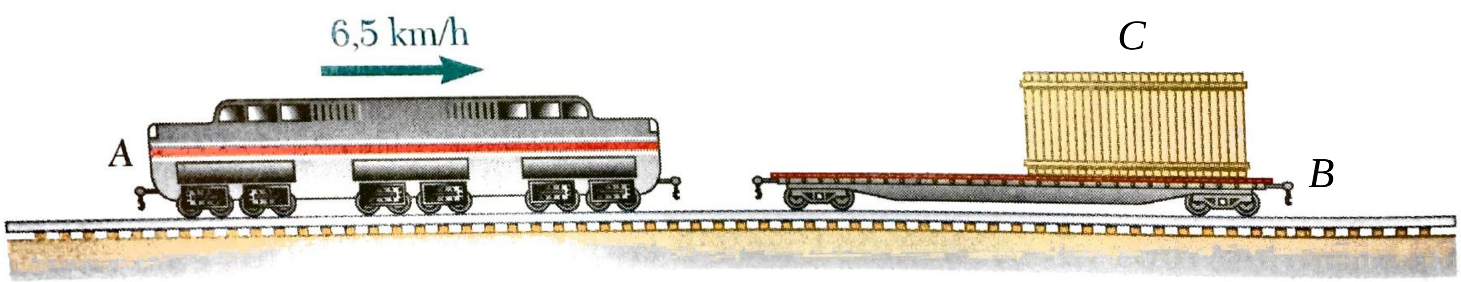
A. Déterminez la vitesse du wagon lorsque la charge arrête de glisser sur le wagon. (25 points)

B. Quelle est la puissance moyenne générée par le frottement exercé sur la charge par le wagon entre l'impact et l'instant où la charge arrête de glisser sur le wagon ? (25 points)

C. Quelle est la vitesse du centre de masse du système formé de la locomotive, du wagon et de la charge (10 points) :

  i. avant l'impact ?

  ii. après l'impact, pendant que la charge glisse sur le wagon ?



Q4 – Solution (1/3)

A. Il s'agit d'un problème de collision. On prend comme système A, B et C qui font tous partie de la collision. La QM horizontale totale de ce système est conservée pendant la collision, car il la somme des forces externes horizontales est nulle sur le système (l'énoncé ne mentionne pas de frottement entre les roues et les rails).

État 1 : la locomotive A est en mouvement et la wagon B et la charge C sont immobiles.

$$L_{1x} = m_A v_A = 80000 \cdot \frac{6{,}5}{3{,}6} = 1{,}444 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

État 2 : A, B et C se déplacent à la même vitesse.

$$L_{2x} = (m_A + m_B + m_C)v = 130000v$$

Conservation de la QM selon horizontale :

$$L_{1x} = L_{2x} \Rightarrow m_A v_A = (m_A + m_B + m_C)v$$

$$\Rightarrow \boxed{v = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B + m_C} = \frac{1{,}444 \times 10^5}{130000} = 1{,}11 \text{ m/s} = 4{,}00 \text{ km/h}}$$

25 points de résolution de problème

Note : il ne s'agit pas de la seule façon de faire le problème. On aurait pu trouver la vitesse de A et B juste après l'impact alors que C est encore immobile et glisse par rapport à B. Ensuite, en calculant la force de frottement cinétique $f_k = \mu_k m_C g$ entre B et C, on aurait pu trouver les accélérations de A-B et de C, et parce que ces accélérations sont constantes, écrire les équations des vitesses de A-B et de C sous la forme $v = v_0 + at$ du MUA. On peut ensuite résoudre un système de deux équations et deux inconnues (temps et vitesse commune de ABC quand C arrête de glisser), on trouve la vitesse recherchée.

Q4 – Solution (2/3)

B. Grâce à la conservation de la QM, on peut trouver la vitesse de A-B juste après l'impact, alors que C reste immobile et commence à glisser par rapport à B.

État 1 : la locomotive A est en mouvement et la wagon B et la charge C sont immobiles.

$$L_{1x} = m_A v_A = 1{,}444 \times 10^5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

État 2 : A et B se déplacent à la même vitesse, C reste immobile et commence à glisser sur B.

$$L_{2x} = (m_A + m_B) v_{AB} = 100000 v$$

Conservation de la QM selon horizontale :

$$L_{1x} = L_{2x} \Rightarrow v = \frac{m_A v_A}{m_A + m_B} = \frac{1{,}444 \times 10^5}{100000} = 1{,}444 \text{ m/s} = 5{,}20 \text{ km/h}$$

La force de frottement cinétique fait par B sur C est $f_k = \mu_k N = \mu_k m_C g$ (l'expression de la normale exercée par B sur C se trouve en faisant le DCL-DCE de la charge C et en posant que la somme des forces verticales est nulle puisque C ne bouge pas dans cette direction).

L'accélération de C avant qu'il n'arrête de glisser par rapport à B est :

$$\sum F_x = \mu_k m_C g = m_C a_{Cx} \Rightarrow a_{Cx} = \mu_k g$$

Puisque cette accélération est constante, on peut appliquer les équations du MUA :

$$v_{Cx} = v_{C0x} + a_{Cx} \Delta t \Rightarrow v = 0 + \mu_k g \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v}{\mu_k g} = \frac{1{,}111}{0{,}25 \cdot 9{,}81} = 0{,}453 \text{ s}$$

Q4 – Solution (3/3)

B. La puissance moyenne étant le travail de la force de frottement divisée par le temps écoulé, il faut calculer ce travail. Une méthode pour y arriver est d'appliquer le principe travail-énergie sur la charge C entre l'impact et l'instant où elle arrête de glisser.

$$\sum U_{nc} = U_{f_k} = \Delta T + \Delta V = \left(\frac{1}{2} m_C v^2 - 0\right) + (0 - 0) = \frac{1}{2} m_C v^2$$

La puissance recherchée est donc :

$$\boxed{\overline{P} = \frac{U_{f_k}}{\Delta t} = \frac{\mu_k m_C g v}{2} = 40{,}9 \text{ W}}$$

25 points de résolution de problème

Note : ce résultat peut aussi être trouvé en utilisant l'expression de la puissance instantanée Fv avec la valeur moyenne de la vitesse lorsque la charge glisse. Puisqu'il s'agit d'un MUA, cette vitesse moyenne vaut simplement (0+v)/2 = v/2.

C. Puisque la QM du système ABC est conservée en tout temps, la vitesse de son centre de masse est constante pendant tout le mouvement. Puisque A, B et C vont tous à 4 km/h lorsque C arrête de glisser, alors il s'agit de la vitesse du CM à cet instant et à tout instant avant, pendant et après l'impact.

La réponse à i. et à ii. est donc la même et vaut : $\boxed{v_{CM} = 1{,}11 \text{ m/s} = 4{,}00 \text{ km/h}}$

10 points de compréhension