

PHS1101 – Mécanique pour ingénieurs
Contrôle périodique 1
Hiver 2018

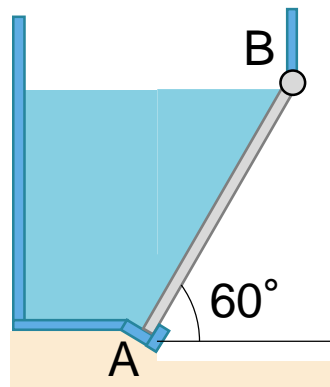
Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes**. Une réponse sans justification ne vaut aucun point. Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

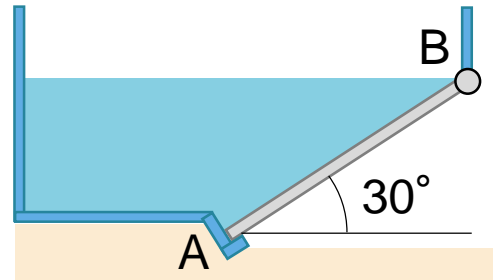
Les questions sont indépendantes les unes des autres.

- A.** Vrai ou faux. Lorsqu'une particule se déplace sur une trajectoire circulaire à vitesse constante, la somme des forces sur la particule est nulle. Justifiez. (10 points)
- B.** En tant qu'ingénieur, vous devez concevoir un réservoir pour contenir un certain volume de fluide. Parmi les deux solutions suivantes, dites laquelle minimise la force exercée par le fluide sur la vanne AB. Les dimensions de la vanne AB sont les mêmes dans les deux situations. Justifiez votre réponse à l'aide des équations appropriées. (15 points)

Situation 1



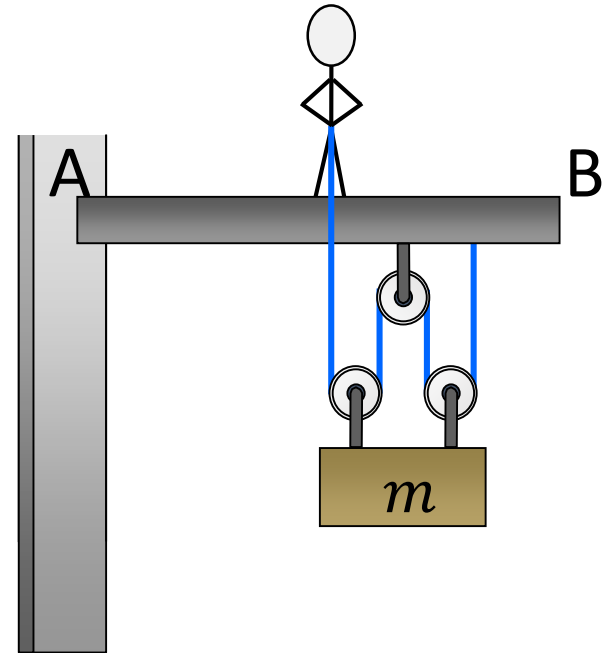
Situation 2



Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

- C. Considérez la situation suivante où une personne de masse m_p , debout au centre d'une poutre encastree homogène de masse M_p et de longueur L , tire avec une force F sur un câble vertical afin de supporter une pièce de masse m immobile. Le câble passe par un ensemble de poulies, toutes de rayon r , et son extrémité est fixée sur le bas de la poutre. En traçant les DCL appropriés pour appuyer votre démarche :

- Déterminez l'expression de la force F exercée par la personne ; (10 points)
- Posez une équation, sans la résoudre, devant être respectée pour que la poutre soit en équilibre statique en rotation. L'équation doit être appliquée de manière spécifique au problème, c'est-à-dire qu'elle doit être exprimée en fonction des paramètres de l'énoncé et des différents forces et couples en jeu. (15 points)



Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

Répondez aux questions suivantes en **expliquant votre raisonnement et en incluant les équations pertinentes. Une réponse sans justification ne vaut aucun point.** Vous êtes invités à inclure des schémas dans vos explications si vous le jugez pertinent.

Les questions sont indépendantes les unes des autres.

- A.** Vrai ou faux. Lorsqu'une particule se déplace sur une trajectoire circulaire à vitesse constante, la somme des forces sur la particule est nulle. Justifiez. (10 points)

FAUX. Même si le module de la vitesse est constante, son orientation change à chaque instant. Le vecteur vitesse n'est donc pas constant et la particule subit une force non nulle qui crée l'accélération nécessaire au changement du vecteur vitesse.

10 points de compréhension

- B.** En tant qu'ingénieur, vous devez concevoir un réservoir pour contenir un certain volume de fluide. Parmi les deux solutions suivantes, dites laquelle minimise la force exercée par le fluide sur la vanne AB. Les dimensions de la vanne AB sont les mêmes dans les deux situations. Justifiez votre réponse à l'aide des équations appropriées. (15 points)

La force hydrostatique exercée par le fluide est donnée par $F_H = \rho g \frac{h}{2} S$. Le fluide étant le même dans les deux situations, ρ ne change pas. La vanne ayant les mêmes dimensions, S ne change pas. La gravité étant identique, g ne varie pas. Par contre, la hauteur de fluide en contact avec la vanne est plus petite dans la situation 2 : la force est donc plus petite dans la situation 2.

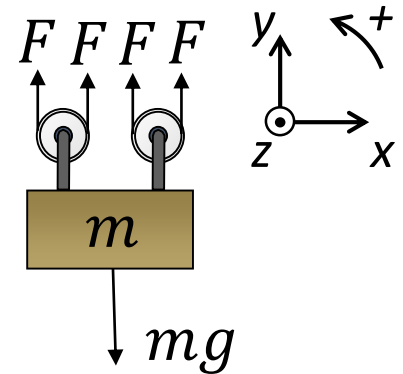
15 points de compréhension

Question 1 – Concepts et réponses courtes (50 points)

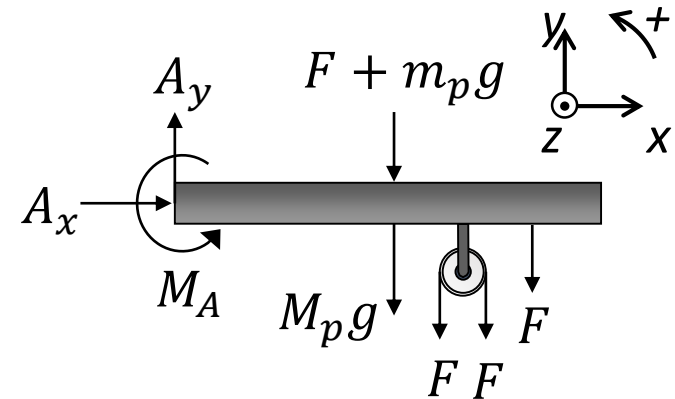
c.

i. En faisant le DCL de la masse et en se rappelant que la tension dans le câble est partout la même, on applique les équations de l'équilibre statique et on trouve :

$$\sum F_y = 4F - mg = 0 \Rightarrow F = \frac{mg}{4}$$

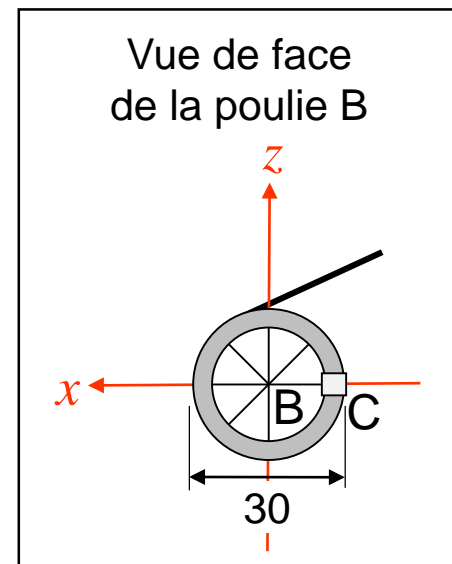
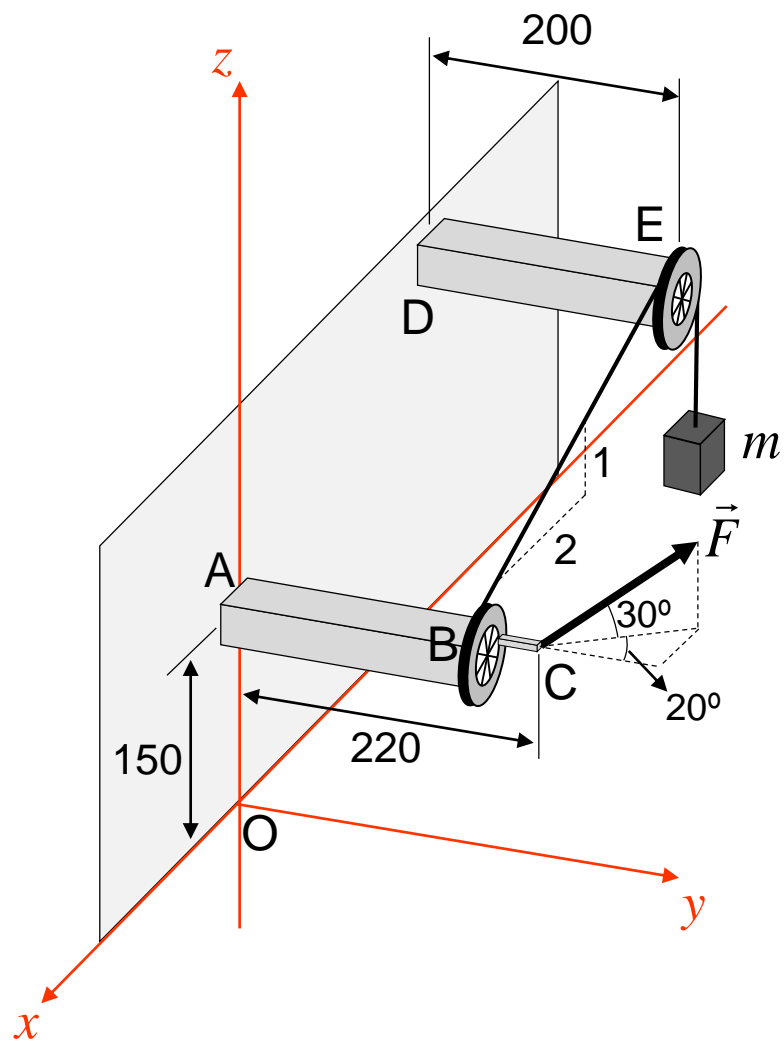


ii. En faisant le DCL de la poutre, en incluant les réactions appropriées pour l'encastrement en A, puis en appliquant une somme des moments par rapport à A (l'étudiant aurait pu choisir un autre point de référence, ce qui aurait fait apparaître les forces de réactions au point A), on trouve :



$$\sum M_{A,z} = M_A - \frac{(F + M_p g + m_p g)L}{2} - \left(\frac{L}{2} + 2r\right)F - \left(\frac{L}{2} + 4r\right)F - \left(\frac{L}{2} + 6r\right)F = 0$$

25 points de compréhension et de calculs simples



Question 2 (50 points)

Un système de levage mécanique est constitué d'une poutre AB à l'extrémité de laquelle se trouve une poulie B que l'on fait tourner autour de son axe central à l'aide d'une manivelle C. En tournant, la poulie B entraîne avec elle le câble qui s'appuie sur la poulie E, ce qui permet de soulever la masse m .

Dans la situation illustrée, une force $F = 800 \text{ N}$ est appliquée sur la manivelle C afin de maintenir la charge de masse $m = 40 \text{ kg}$ immobile.

N.B. L'origine O du système d'axes est au niveau du sol (plan xy). L'extrémité A de la poutre est encastree dans le mur (plan xz). Les poutres AB et DE sont horizontales et de même longueur.

A. Exprimez les vecteurs de la force F et de la tension T appliquée sur la poulie B en composantes cartésiennes selon x , y et z . (15 points)

B. Calculez le système force-couple équivalent au point A de la force F et de la tension T . Donnez votre réponse sous forme vectorielle. (35 points)

Bonus. Si l'on avait calculé le système force-couple équivalent au point O, aurait-on obtenu le même couple équivalent ? Justifiez. (5 points)

Q2 – Solution (1/2)

A. Force \vec{F} : $F_x = -F \cos 30^\circ \sin 20^\circ = -237 \text{ N}$

$$F_y = F \cos 30^\circ \cos 20^\circ = 651 \text{ N}$$

$$F_z = F \sin 30^\circ = 400 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (-237\vec{i} + 651\vec{j} + 400\vec{k}) \text{ N}$$

Tension \vec{T} : $T = mg = 392,4 \text{ N}$

$$\hat{u}_{BE} = \frac{-2\vec{i} + 0\vec{j} + 1\vec{k}}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 1^2}} = -0,8944\vec{i} + 0,4472\vec{k}$$

$$\vec{T} = T\hat{u}_{BE} = (-351\vec{i} + 175\vec{k}) \text{ N}$$

15 points de calculs simples

B. Force équivalente = résultante des deux forces :

$$\vec{R} = \vec{F} + \vec{T} = (-588\vec{i} + 651\vec{j} + 575\vec{k}) \text{ N}$$

Q2 – Solution (2/2)

B. Couple équivalent = résultante des deux moments des forces par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} + \vec{r}_{T/A} \times \vec{T}$$

$$\vec{r}_{F/A} = \vec{r}_{C/A} = (-0,15\vec{i} + 2,20\vec{j}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{T/A} = \vec{r}_{T/B} + \vec{r}_{B/A} = 0,15 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k} \right) + (2,00\vec{j}) = (0,0671\vec{i} + 2,00\vec{j} + 0,134\vec{k}) \text{ m}$$

$$\vec{r}_{F/A} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0,15 & 2,20 & 0 \\ -237 & 651 & 400 \end{vmatrix} = (880\vec{i} + 60,0\vec{j} + 424\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{r}_{T/A} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0,0671 & 2,00 & 0,134 \\ -351 & 0 & 175 \end{vmatrix} = (350\vec{i} - 58,8\vec{j} + 702\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{F/A} \times \vec{F} + \vec{r}_{T/A} \times \vec{T} = (1230\vec{i} + 1,20\vec{j} + 1126\vec{k}) \text{ N} \cdot \text{m}$$

35 points de résolution de problème

Bonus. Non. Il faudrait ajouter à \vec{M}_A le moment de \vec{R} (appliquée en A) par rapport à O. Ce moment est non nul, car \vec{R} n'est pas parallèle à $\vec{r}_{A/O}$.

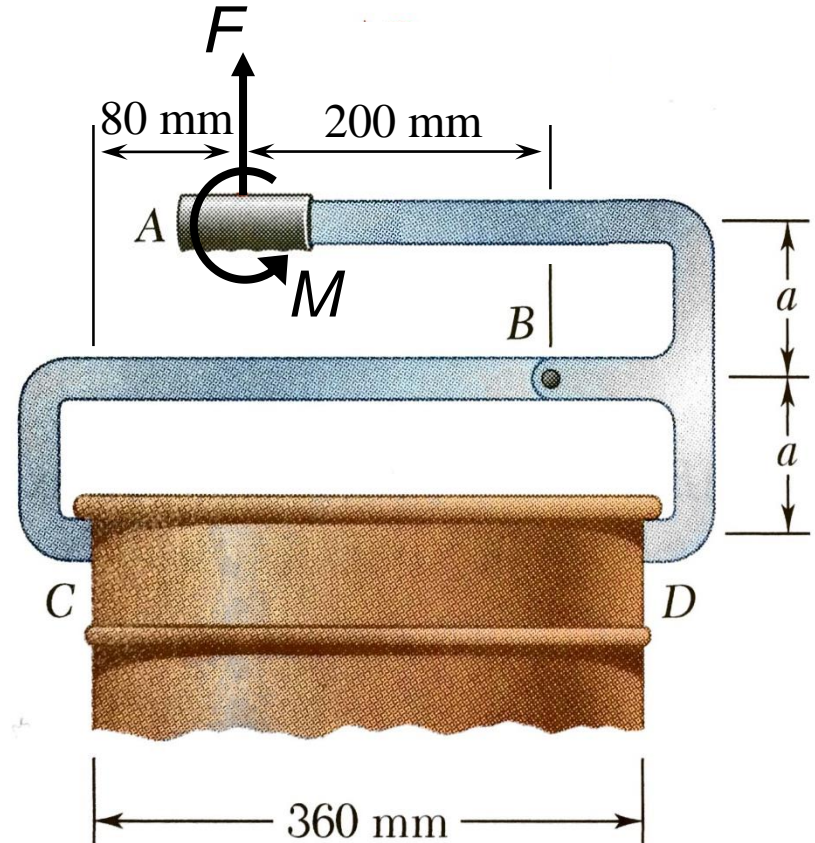
5 points de compréhension

Question 3 (50 points)

Un outil formé des membrures ABD et BC est utilisé pour soulever un baril de masse m . Pour ce faire, l'outil s'appuie aux points C et D sous le rebord et sur les côtés du baril. Pour soulever le baril verticalement à vitesse constante sans le faire pencher, il faut appliquer une force F et un couple M sur le manche A de l'outil.

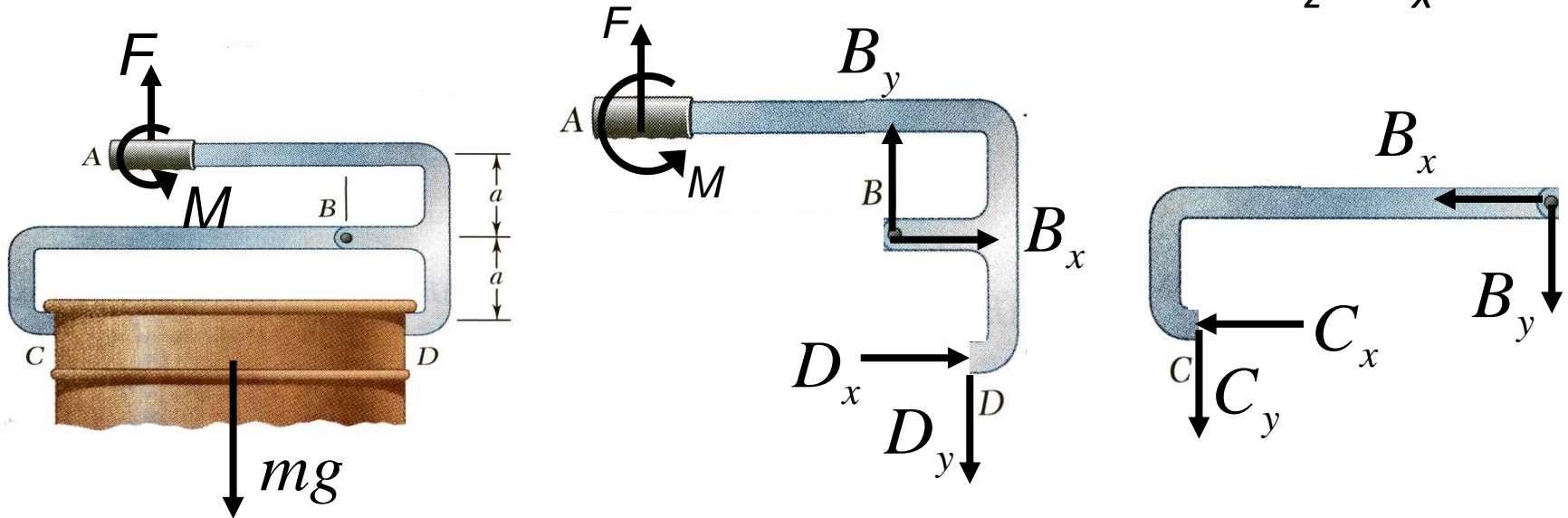
N.B. On donne $a = 100$ mm. On néglige tout frottement dans ce problème. Considérez que le centre de masse du baril coïncide avec son centre géométrique.

- A. Faites le DCL : (15 points)
- de l'outil entier avec le baril ;
 - de la membrure ABD ;
 - de la membrure BC.
- B. Déterminez les expressions de la force F et du moment M du couple qu'il faut appliquer pour soulever le baril verticalement à vitesse constante sans le faire pencher. (15 points)
- C. Sachant que l'articulation au point B peut supporter une force maximale de 1000 N, quelle est la masse maximale que peut soulever l'objet ? (20 points)



Q3 – Solution (1/2)

A. DCL de la structure et des sous-structures.



Éléments importants

- Les normales en C et en D doivent être dessinées dans le sens représenté ci-dessus.
- Le sens des réactions B_x et B_y est arbitraire, tant que le principe action-réaction est respecté entre les membrures ABD et BC.

15 points de compréhension

Q3 – Solution (2/2)

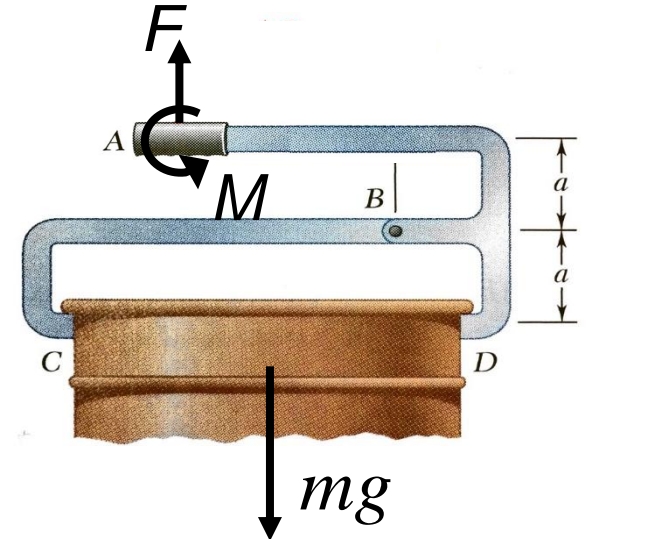
B. Puisque la structure est immobile, la structure et toutes ses sous-structures sont à l'équilibre statique.

En prenant le DCL de l'outil entier et du baril :

$$\sum F_y = F - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = mg}$$

$$\sum M_A = M - mg(0,360/2 - 0,080) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{M = 0,100mg}$$



C. On remarque que la membrure BC est une membrure à 2 forces. La force résultante en B doit donc être orientée selon l'axe BC. On a donc :

$$B_y = \frac{100}{280} B_x$$

En effectuant une somme des moments par rapport à D dans le DCL de ABD, on trouve :

$$\sum M_D = M - (0,360 - 0,080)F - (0,360 - 0,280)B_y - 0,100B_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad B_x = -\frac{0,180mg}{0,080 \cdot \frac{100}{280} + 0,100} = -1,40mg$$

$$B_y = -0,50mg$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = 1,487mg$$

$$\boxed{m_{\max} = \frac{B_{\max}}{1,487g} = 68,6 \text{ kg}}$$

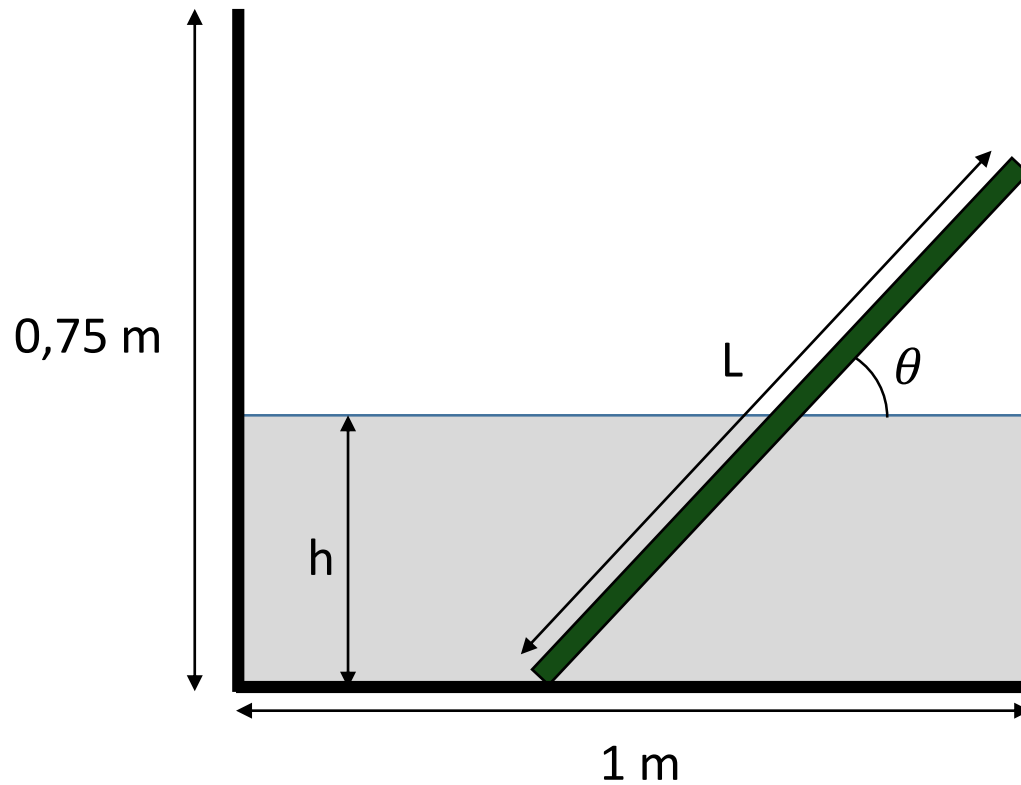
Question 4 (50 points)

Une tige cylindrique de rayon $r = 5$ cm, de longueur $L = 60$ cm et de masse volumique $\rho = 1600$ kg/m³ est plongée dans un récipient d'eau ($\rho_{eau} = 1000$ kg/m³). La tige fait un angle $\theta = 40^\circ$ avec la surface de l'eau et l'eau monte jusqu'à une hauteur $h = 25$ cm, de sorte que 35% de la tige est située hors de l'eau. Le récipient a la forme d'un prisme de dimensions 1 m x 0,75 m x 2 m (voir schéma).

N.B. Il y a du frottement dans le fond du récipient, mais il n'y a aucun frottement sur les parois du récipient.

- a) Faites le DCL de la tige (15 points) ;
- b) Déterminez les forces de réaction (vecteurs) exercées par la paroi et par le fond du récipient sur la tige (15 points) ;
- c) Quelle est la valeur minimale du coefficient de frottement statique qui permet de maintenir la tige immobile ? (10 points)
- d) Quel est la force totale exercée par la tige et par l'eau sur la paroi de droite du récipient ? (10 points)

Question 4 (50 points)

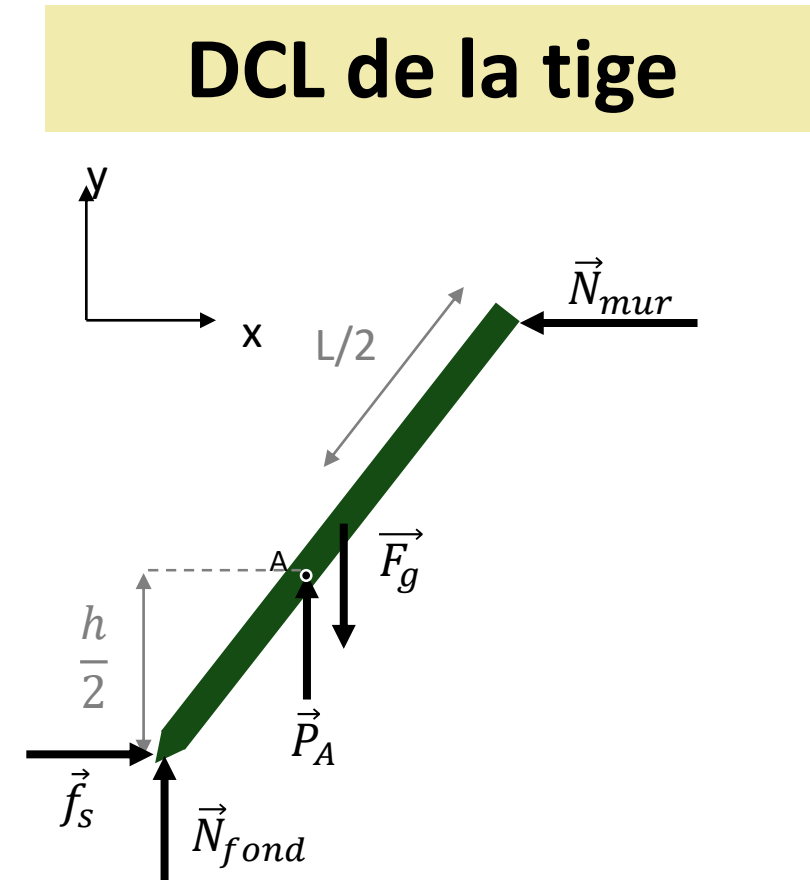


On cherche :

- Les forces de réaction au mur et au fond du récipient. On cherche également le coefficient de frottement et la force totale sur le mur de droite.

Stratégie de résolution :

- Faire le DCL de la tige
- Déterminer l'emplacement des différentes forces qui agissent
- Déterminer la poussée d'Archimède
- Appliquer les équation d'équilibre statique
- Poser $f_s = \mu_s N$
- Calculer la force hydrostatique sur le mur de droite



Équations utiles

Poussée d'Archimède:

$$P_A = \rho g V_{sub}$$

Équilibre statique:

$$\sum M = 0 \quad \sum F = 0$$

Force hydrostatique:

$$R = \rho g \frac{h}{2} A$$

Poussée d'Archimède

b) Module de la force: **Rappel :** Il faut prendre la densité de l'eau pour la poussée d'Archimède

$$P_A = \rho g V_{sub}$$

Le volume submergé de la tige correspond à 65 % du volume total de la tige.
On cherche le volume total :

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = \pi (0,05)^2 \cdot 0,6 = 4,71 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$V_{sub} = 0,65 \times V = 3,06 \times 10^{-3} \text{ m}^3$$

La poussée d'Archimède s'applique au point A qui est le centre de gravité du volume d'eau déplacé. Le point A est donc situé à une hauteur $h/2$ du fond.

$$P_A = \rho_{eau} g V_{sub} = 1000 \cdot 9,81 \cdot 3,06 \times 10^{-3} = 30,0 \text{ N}$$

Résolution

Somme des moments au point C:

$$\sum M_C = 0$$

$$-mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta + P_A \cdot \frac{h}{2 \tan \theta} + N_{mur} \cdot L \sin \theta = 0$$

$$N_{mur} = \frac{1}{L \sin \theta} \left(\rho V g \frac{L}{2} \cos \theta - P_A \frac{h}{2 \tan \theta} \right)$$

$$\vec{N}_{mur} = -30,6 \vec{i} \text{ N}$$

$$\sum F_y = 0$$

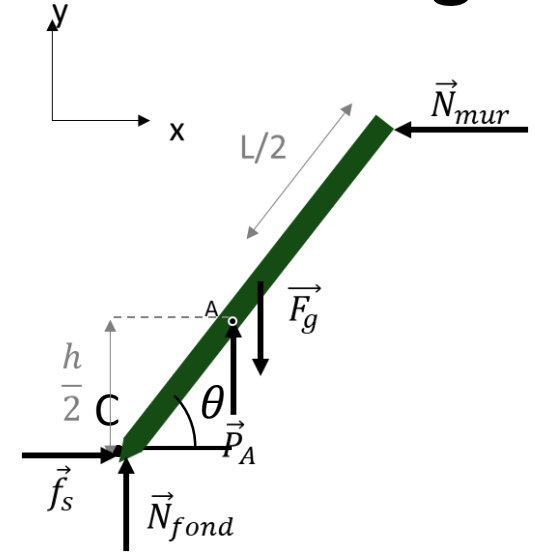
$$N_{fond} + P_A - F_g = 0$$

$$N_{fond} = F_g - P_A$$

$$N_{fond} = 73,9 - 30,0$$

$$\vec{N}_{fond} = 43,9 \vec{j} \text{ N}$$

DCL de la tige



Rappel :

$$m = \rho' V_{tige}$$

$$\Rightarrow F_g = 1600 \cdot 4,71 \times 10^{-3} \cdot 9,81$$

$$\Rightarrow F_g = 73,9 \text{ N}$$

Résolution

c) Coefficient de frottement statique

$$\sum F_x = 0$$

$$f_s - N_{mur} = 0$$

$$\mu_s N_{fond} = N_{mur}$$

$$\mu_s = \frac{N_{mur}}{N_{fond}} = \frac{30,6}{43,9} = 0,697$$

d) Force subie par le mur :

$$\vec{F}_{mur} = \vec{R} + \vec{N}_{tige \rightarrow mur}$$

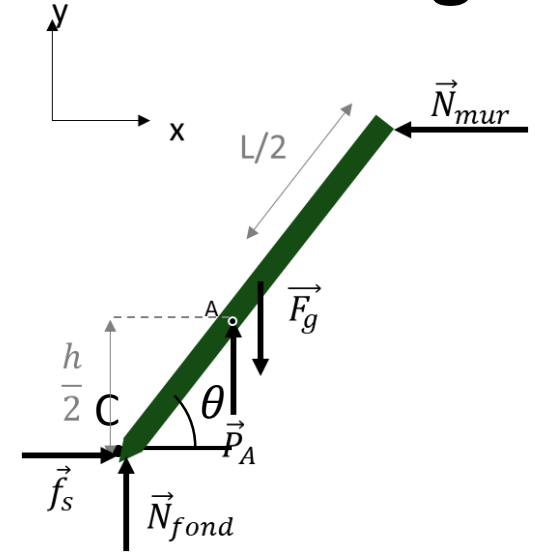
$$\vec{F}_{mur} = (\rho g \frac{h}{2} A + N_{mur}) \vec{i}$$

Aire de contact
entre l'eau et le mur

$$\vec{F}_{mur} = \left(1000 \cdot 9,81 \cdot \frac{0,25}{2} \cdot (0,25 \cdot 2) + 30,6 \right) \vec{i}$$

$$\vec{F}_{mur} = 644 \vec{i} \text{ N}$$

DCL de la tige



Note : $\vec{N}_{tige \rightarrow mur} = -\vec{N}_{mur \rightarrow tige}$