POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

UNIVERSITÉ D'INGÉNIERIE

LOG2810

STRUCTURES DISCRÈTES

TD 3 : INFÉRENCE ET TECHNIQUES DE PREUVES

Directives pour la remise:

- La remise est individuelle et se fait à la fin de la séance de TD.
- Répondez directement sur ce document Word (docx).
- Lorsque vous avez terminé, générez un PDF avec le nom sous le format: ***SectionDeTD-Matricule.pdf*** (exemple: *04-1234567.pdf*).
- Téléchargez votre fichier PDF dans la boîte de remise située dans la Zone TDs de la page Moodle du cours.
- Choisissez la boîte de remise qui correspond à votre section de TD.
- Aucun retard et aucune remise par courriel ne seront accepté.
- Le non-respect des consignes entraînera automatiquement la note 0 pour ce TD.

La remise est individuelle mais le travail en équipe est encouragé. Veuillez inscrire votre nom, prénom et matricule ainsi que les noms des collègues avec lesquels vous avez collaboré pour le TD.

Nom:

Prénom:

Matricule:

Collègues:

Exercice 1

Trouvez la règle d’inférence utilisée pour l'argument suivant et déterminez s'il est valide. Peut-on conclure que la conclusion est vraie si les prémisses sont vraies?

> Si Gustave ne fait pas de ski alors il ne porte pas de lunettes
>
> Gustave porte des lunettes
>
> ---
>
> ∴ Gustave fait du ski

Réponse:
La première déclaration est $p \rightarrow q$, où p est « Gustave ne fait pas de ski » et q est « Gustave ne porte pas de lunettes ». La deuxième déclaration est $\neg q$. Le conclusion est $\neg p$. Ce qui est bien une application du modus tollens.

On peut donc conclure que la conclusion de l'argument est vraie, étant donné que les hypothèses (les deux premières affirmations) sont vraies.

Exercice 2

Pour l'argument suivant, expliquez quelles règles d'inférence sont utilisées pour chaque étape. (Voir en particulier les pages 5 et 22 des notes de cours de cette semaine.)

Melissa, Aaron, Ralph, Vanessa et Shawn sont cinq colocataires. Tous les cinq colocataires prennent le cours de structures discrètes. Tout étudiant ayant suivi le cours de structures discrètes peut suivre le cours d'analyse et conception d'algorithmes. Par conséquent, les cinq colocataires pourront suivre le cours d'analyse et conception d'algorithmes.

Utilisez

- les fonctions propositionnelles:
  - $C(x)$: « x est l'un des cinq colocataires »
  - $D(x)$: « x a suivi le cours de structures discrètes »
  - $A(x)$: « x peut suivre un cours d'analyse et conception d'algorithmes. »
- les prémisses:
  - $\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$
  - $\forall x(D(x) \rightarrow A(x))$
- et la conclusion:
  - $\forall x(C(x) \rightarrow A(x))$

Réponse:

Dans ce qui suit, z représente une personne arbitraire.

Étapes	**Justifications**
1. $\forall x(C(x) \rightarrow D(x))$	Hypothèse
2. $C(z) \rightarrow D(z)$	Instanciation universelle utilisant (1)
3. $\forall x(D(x) \rightarrow A(x))$	Hypothèse
4. $D(z) \rightarrow A(z)$	Instanciation universelle utilisant (3)
5. $C(z) \rightarrow A(z)$	Syllogisme par hypothèse utilisant (2) et (4)
6. $\forall x(C(x) \rightarrow A(x))$	Généralisation universelle utilisant (5)

Exercice 3

Utilisez la preuve directe pour démontrer que la somme de deux entiers pairs est paire.

Fait:

- Les entiers pairs peuvent s'écrire $s = 2n$ pour un certain entier n.

Réponse:

Nous devons démontrer que chaque fois que nous avons deux entiers pairs, leur somme est paire. Supposons que a et b soient deux entiers pairs. Alors il existe des entiers n et m tels que $a = 2n$ et $b = 2m$. En additionnant, on obtient $a+b = 2n+2m = 2(n+m)$. Puisque cela représente $a+b$ comme 2 fois l'entier $n+m$, nous concluons que $a+b$ est pair, comme souhaité.

Exercice 4

Démontrez en utilisant la notion « sans perte de généralité » que $5x+5y$ est un entier impair lorsque x et y sont des entiers de parité opposée.

Faits:

- Les entiers pairs peuvent s'écrire $s = 2n$ pour un certain entier n.
- Les entiers impairs peuvent s'écrire $t = 2m + 1$ pour un certain entier m.

Réponse:
Parce que x et y sont de parités opposées, on peut supposer, sans perte de généralité, que x est pair et y est impair. Cela nous dit que $s = 2n$ pour un entier n et $t = 2m+1$ pour un entier m. Alors $5x+5y = 5(2n)+5(2m+1) = 10n+10m+5 = 2(5n+5m+2)+1$, ce qui satisfait à la définition d'être un nombre impair.

Exercice 5

À la page 35 des notes de cours de cette semaine vous pouvez trouver la preuve que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. L'étape 6 de la preuve est à compléter en exercice. Nous vous proposons de faire ici cet exercice.

Il est nécessaire de démontrer que si a^2 est un nombre pair alors a est un nombre pair. Procédez comme suit:

a) Utilisez d'abord une preuve directe pour montrer que le carré d'un nombre impair est un nombre impair.

Réponse:
Un nombre impair est de la forme $2n + 1$, où n est un entier. Alors le carré d'un nombre impair peut s'écrire $(2c + 1)^2 = (4c^2 + 4c) + 1$, où c est un entier. Le résultat peut ainsi se réécrire sous la forme $2n + 1$ où $n = 2a^2 + 2a$ et est donc nécessairement un nombre impair.

b) Utilisez la contraposée de l'énoncé précédent pour obtenir le résultat souhaité.

Réponse:
(Rappel: Une preuve par contraposition utilise le fait qu'un énoncé conditionnel $p \to q$ est équivalent à $\neg q \to \neg p$)
Nous avons déjà démontré que « si un nombre est impair alors le carré de ce nombre est impair ». Si on forme maintenant la contraposée de cette proposition nous obtenons, « si le carré d'un nombre est pair alors ce nombre est pair ».

Exercice 6

Voici une énigme posée aux jeunes enfants russes:
(un kopeck est une pièce de monnaie)

Il manquait 7 kopecks à Masha pour acheter un livre de lecture et il manquait 1 kopeck à Misha pour l'acheter. Elles ont combiné leur argent pour acheter le livre et le partager, mais elles n'en avaient toujours pas assez.

Combien coûtait le livre?

Prenez le temps de bien remarquer la manière dont vous vous y prenez pour résoudre un tel problème. Ensuite faite la démonstration que la réponse est unique.

a) Quel est l'inconnu du problème?

Réponse:
Le prix du livre: n *kopecks*

b) Testez au hasard une première solution hypothétique pour vous familiariser avec le problème. Laissez des traces de votre premier essai et de vos conclusions préliminaires.

Réponse:
Si Masha a 2 *kopeck* alors le livre coûte 9 *kopecks.* Si le livre coûte 9 kopecks alors Misha doit avoir 8 *kopecks.* La somme des avoirs est alors de 10 *kopecks*, ce qui serait suffisant pour acheter le livre au prix de 9 *kopecks.*

c) Quels sont les relations importantes entre les données du problème et l'inconnu ?

Réponse:
Supposons que le livre coûte n *kopecks*.

Alors Masha et Misha doivent avoir respectivement $n-7$ *et* $n-1$ *kopecks* pour un total de $2n-8$ *kopecks*.

De plus, pour qu'il puisse manquer 7 kopecks à Masha, le livre doit coûter au moins 7 kopecks et donc $7 \leq n$.

d) Élaborer un plan ou générer une hypothèse. Décrivez ce plan ou cette hypothèse.

Réponse:
Vérifions maintenant dans quelles circonstances la somme des *kopecks* de Masha et Misha est inférieur au coût du livre.

e) Exécuter votre plan afin de démontrer votre hypothèse.

Réponse:
Pour que la somme des kopecks de Masha et Misha soit inférieur au coût du livre il faut que $2n-8<n$. L'inégalité peut se réduire à $n<8$. Ainsi en considérant l'inégalité décrite en c), $7 \leq n$, nous obtenons $7 \leq n < 8$. Le seul entier possible est alors 7.

Le livre coûtait donc 7 *kopecks* et Masha et Misha avait respectivement 0 et 6 *kopecks*.