LOG 2810 – Éléments de structures discrètes
Mini-contrôle 3

Prof. John Mullins

Hiver 2020

Nom : Solutionnaire	
Matricule :	
Signature :	

Directives

— Veuillez indiquer votre nom, votre matricule et votre signature.
— Toute documentation est permise.
— La durée de l'épreuve est de **120 minutes**.
— Vous devez scanner vos réponses ainsi que cette page et déposer en **un seul fichier PDF** sur le site Moodle.
— Prévoyez au moins 30 minutes pour compléter la procédure de dépôt.
— Le site de dépôt ferme à 11h00
— Assurez-vous de la lisibilité de votre copie numérisée .
— Ce contrôle est calculé sur 20 points.

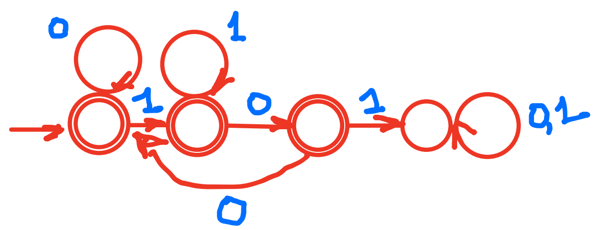
Engagement sur l'honneur à remettre

Sur mon honneur, je déclare avoir complété cet examen par moi-même, sans communication avec personne, et en conformité avec les directives identifiées sur la première page de l'énoncé.

Signature :

Question 1 (3 points)

Donnez un automate déterministe qui reconnait les mots sur l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ **ne contenant pas** le facteur 101.

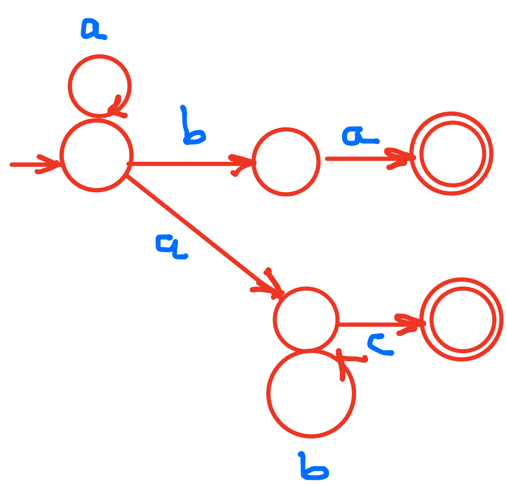


Question 2 (4 points)

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

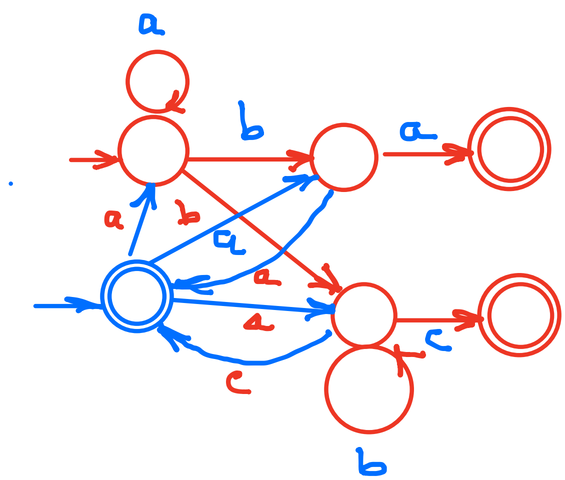
a. **(2 points)** Construisez un automate qui reconnait le langage

$$a^*ba + a^+b^*c.$$



b. **(2 points)** Même question pour

$$(a^*ba + a^+b^*c)^*.$$



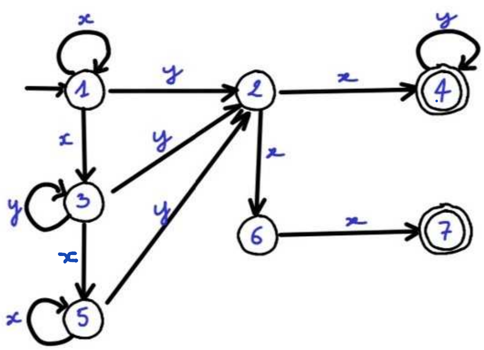


Figure 1 – L'automate de la question 3.

Question 3 (2 points)

Trouvez le langage reconnu par l'automate $\mathcal{A}$ de la figure 1 en résolvant le système d'équations linéaires associé à $\mathcal{A}$.

$L1 = xL1 + xL3 + yL2$

$L2 = xL4 + x\,L6$

$L3 = yL3 + yL2 + xL5$

$L4 = yL4 + e$ donc $L4 = y^*$

$L5 = xL5 + yL2$

$L6 = xL7$

$L7 = e$

On a alors:

$L6 = x$

$L2 = xy^* + xx$

$L5 = xL5 + yx(y^*+x)$

$\quad = x^*yx(y^*+x)$

$L3 = yL3 + yx(y^*+x) + xx^*yx(y^*+x)$

$L3 = y^*(e + xx^*yx^*)yx(y^*+x)$

$L1 = x^*(xL3+yL2)$

$\quad = x^*(xy^*(e+xx^*yx^*)yx(y^*+x)+ yx(y^*+x))$

Question 4 (2 points)

Déterminisez l'automate de la figure 1.

		x	y
→	1	13	2
	2	46	∅
	3	5	23
*	4	∅	4
	13	135	23
	5	5	2
	6	7	∅
*	7	∅	∅
*	46	7	4
	23	456	23
	135	135	23
*	456	57	24
*	57	5	2

Question 5 (2 points)

Calculez l'automate minimal qui reconnait le language reconnu par l'automate de la figure 1.

Bonus de 2 points à tous. L'algorithme de minimisation présenté au cours ne s'applique que sur les automates finis déterministes. C'est mon erreur.

Question 6 (2 points)

Soit la grammaire $G = \{V, T, S, P\}$ avec $V = \{S, A, B, 0, 1\}$, $T = \{a, b\}$ et P, composé des productions :

$$S \to A1B,\ A \to 0A,\ A \to \epsilon,\ B \to 0B,\ B \to 1B,\ B \to \epsilon$$

Trouvez le langage produit par la grammaire G.

$A \xrightarrow{*} 0^*$

$B \xrightarrow{*} (0+1)^*$

$S \xrightarrow{*} 0^* 1 (0+1)^*$

$L(G) = 0^* 1 (0+1$

Question 7 (3 points)

Un **palindrome** est une chaîne qui peut être lue de gauche à droite ou de droite à gauche en donnant le même résultat. Autrement dit, c'est une chaîne w où $w = w^R$, où w^R est l'inverse de la chaîne w. Construisez une grammaire syntaxique qui produit l'ensemble de tous les palindromes sur l'alphabet $\{0, 1\}$.

$S \to 0S0 \mid 1S1 \mid 1 \mid 0 \mid \varepsilon$

Question 8 (2 points)

Montrez que le langage

$$\{0^n 1^m 0^{n+1} : m \geq 0, n \geq 0\}$$

n'est pas régulier.

En vue d'une contradiction supposons le contraire.
Soit le N du lemme de pompage et $w = 0^N 0^{N+1}$
On a $w \in L$ et $|w| \geq N$. Par le lemme, il existe
x, y, z t.q. $w = xyz$, $y \in 0^+$ et $xy \in 0^*$ mais
$w' = xy^2z \notin L$ car il est de la forme
$0^{N+m} 1^N$
avec $m > 0$, ce qui contredit le lemme.