MTH2302D: Quelques lois continues

Wissem Maazoun

École Polytechnique de Montréal,
Département de Mathématiques et de génie industriel

Quelques lois continues

Introduction

Certaines v.a. continues sont souvent utilisées en pratique et leurs distributions (densité et fonction de répartition) sont connues à des paramètres près.
On distingue entre autres :

- la loi uniforme ;
- la loi exponentielle ;
- la loi gamma ;
- la loi de Weibull ;
- la loi normale ou Gaussienne et la loi lognormale (que nous verrons au chapitre 7).

La loi uniforme (ou rectangulaire)

Introduction

La loi uniforme constitue le modèle le plus simple parmi les v.a. de type continu. Sa fonction de densité est constante

Definition

Une v.a. continue X est dite de loi uniforme dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$ si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim U(\alpha, \beta)$.

La loi uniforme (ou rectangulaire)

Fonction de répartition

Si X est une v.a. de loi uniforme dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$, alors sa fonction de répartition est

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \alpha \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha} & \text{si } \alpha \leq x \leq \beta \\ 1 & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

Espérance et variance

Si X est une v.a. de loi uniforme dans l'intervalle $[\alpha, \beta]$,alors

- $\mu = E(X) = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$;
- $\sigma^2 = V(X) = \dfrac{(\beta - \alpha)^2}{12}$.

La loi uniforme (ou rectangulaire)

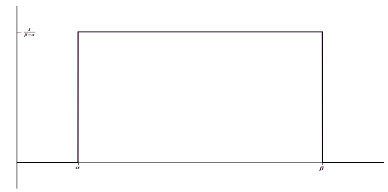

FIGURE: Fonction de densité de loi Uniforme $[\alpha, \beta]$

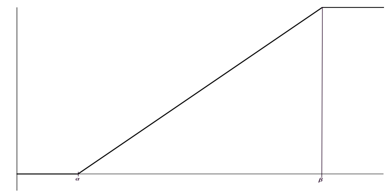

FIGURE: Fonction de répartition de loi Uniforme $[\alpha, \beta]$

La loi uniforme (ou rectangulaire)

Exemple

Soit X une v.a. de loi uniforme dans l'intervalle $[0, 5]$. Calculer

1. $P(2 < X < 4,2)$.
2. $E(X)$ et $V(X)$.

Introduction

La loi exponentielle est un modèle de loi continue qui permet de modéliser un certain nombre de phénomènes en pratique, en particulier des temps d'attente.

Definition

Une v.a. continue X est dite de loi exponentielle de paramètre λ, où $\lambda > 0$, si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On écrit $X \sim Exp(\lambda)$.

Théorème

Soit X une v.a. de loi exponentielle $Exp(\lambda)$. Alors

- Espérance : $\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}$.
- Variance : $\sigma^2 = V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a. X de loi exponentielle $Exp(\lambda)$ est

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Exemple

La durée de vie d'un certain type de composant peut être approchée par une distribution exponentielle de moyenne 2 ans.

1. Calculer la probabilité qu'un composant de ce type fonctionne pendant plus d'un an.
2. Déterminer la durée de fonctionnement qui est dépassée par 75% des composants du type considéré.

La loi exponentielle

Lien avec la loi (processus) de Poisson

Dans un processus de Poisson d'intensité λ (λ désigne ici le nombre moyen de réalisations par unité de temps), le temps d'attente pour la première réalisation ou le temps d'attente entre deux réalisations consécutives suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Précisément, soit Y le nombre de réalisations de l'évènement considéré dans l'intervalle de temps $[0, t]$, avec $t > 0$, et soit T le temps d'attente pour la première réalisation de l'événement. La v.a. Y suit une loi de Poisson de paramètre λt et on a l'équivalence suivante :

$$\{T > t\} \Longleftrightarrow \{Y = 0\}.$$

La loi exponentielle

Lien avec la loi (processus) de Poisson (Suite)

Cette équivalence se traduit comme suit : le temps d'attente est de plus de t unités de temps si et seulement si il n'y a aucune réalisation dans l'intervalle de temps $[0, t]$.
On en déduit donc que

$$P(T > t) = P(Y = 0) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t},$$

c'est-à-dire que T est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ.

La loi exponentielle

Exemple

À un certain poste de péage, il arrive en moyenne 5 automobiles en une minutes selon un processus de Poisson. Une automobile arrive au poste à 12h00, quelle est la probabilité que la prochaine arrivée ait lieu après 12h02 ?

La loi exponentielle

Une propriété de la loi exponentielle

La loi exponentielle, tout comme la loi géométrique, possède la propriété de non vieillissement (ou absence de mémoire).
Précisément, si $X \sim Exp(\lambda)$, alors, pour tout $s > 0$ et $t > 0$,

$$P(X > s + t | X > t) = P(X > s).$$

Un aperçu de la fiabilité

Définition

En général, soit T une v.a. désignant la durée de vie (durée de fonctionnement sans panne) d'un composant (pièce d'équipement, etc.), et soit $F_T(t) = P(T \leq t)$ sa fonction de répartition.
On définit la fiabilité du composant au temps a par

$$\begin{aligned} R(a) &= P(T > a) \\ &= 1 - F_T(a). \end{aligned}$$

$R(a)$ désigne la probabilité que le composant fonctionne au temps a. On l'utilise pour calculer la fiabilité de systèmes formés de plusieurs compossants.
On note en particulier que si T est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre λ, alors
$R(a) = e^{-a\lambda}$.

Un aperçu de la fiabilité

Exemple

On considère un système formé de deux composants placés en parallèle et fonctionant indépendamment l'un de l'autre. Si la durée de fonctionnement de chaque composant est distribué selon une loi exponentielle de moyenne 3 ans, calculer la fiabilité de ce système pour une année.

La loi gamma

Introduction

La loi gamma est définie à partir de la fonction gamma (Γ) qui est définie par

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad \text{pour } \alpha > 0.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\Gamma(n) = (n-1)!$

Definition

Une v.a. continue X est dite de loi gamma de paramètres r et λ, si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\Gamma(r)} (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\lambda > 0$ et $r > 0$. On écrit $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$.

La loi gamma

Quelques caractéristiques de la loi Gamma

Si $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$, alors

- Espérance : $\mu = E(X) = \frac{r}{\lambda}$.
- Variance : $\sigma^2 = V(X) = \frac{r}{\lambda^2}$.
- Si $r = 1$, alors $X \sim Exp(\lambda)$.
- Si $X_i, i = 1, 2, \ldots, r$ est une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) selon une loi exponentielle, c-à-d. $X_i \sim Exp(\lambda), i = 1, 2, \ldots, r$, alors $Y = X_1, +X_2 + \ldots + X_r \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ (loi d'Erlang).
- Si $r \in \mathbb{N}$, alors $F_X(x) = 1 - F_Y(n-1)$, où $Y \sim \text{Poi}(\lambda\, x)$.

La loi gamma

Exemple

La durée de vie d'un certain type de composant peut être approchée par une distribution exponentielle de moyenne 2 ans. Ce composant est indispensable pour le fonctionnement d'une machine. On dispose de trois composants de ce type. Au début, le premier composant est mis en marche, tandis que les deux autres composants sont en attente. Dès que le premier composant tombe en panne, on active le deuxième. Lorsque ce dernier tombe en panne, on active le troisième.
Quelle est la probabilité que la machine fonctionne après sept ans ?

La loi de Weibull

Introduction

La loi de Weibull est un modèle de loi continue qui permet de modéliser un certain nombre de phénomènes en pratique, en particulier du temps de fonctionnement avant défaillance et de la fiabilité des systèmes.

Definition

Une v.a. continue X est dite de loi de Weibull de paramètres γ, β et δ, si sa fonction de densité est

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta}{\delta}\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{si } x \geq \gamma \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $\gamma \in \mathbb{R}$ est un paramètre de position, $\delta > 0$ un paramètre de dospersion et $\beta > 0$ un paramètre de forme. On écrit $X \sim \text{Weibull}(\gamma, \beta, \delta)$.

La loi de Weibull

Théorème

Soit X une v.a. de loi Weibull $X \sim \text{Weibull}(\gamma, \beta, \delta)$. Alors

- Espérance : $\mu = E(X) = \gamma + \delta\,\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$.
- Variance : $\sigma^2 = V(X) = \delta^2 \left\{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]^2\right\}$.

Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une v.a. X de loi Weibull $X \sim \text{Weibull}(\gamma, \beta, \delta)$ est

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \gamma \\ 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\delta}\right)^{\beta}\right] & \text{si } x \geq \gamma \end{cases}$$

La loi de Weibull

Exemple 6.7 p 143

Un certain sous-ensemble électrique a une durée de fonctionnementavant défaillance en heures qui obéit à une loi de Weibull de paramètres $\gamma = 0, \beta = 1/2$ et $\delta = 100$.

1. Calculer la probabilité qu'un sous-ensemble de ce type fonctionne pendant plus de 400 heures.
2. Déterminer la moyenne et la variance de la durée de fonctionnement avant défaillance d'un sous-ensemble de ce type considéré.