MTH2302D: Introduction à la fiabilité

Wissem Maazoun

École Polytechnique de Montréal

Département de Mathématiques et de génie industriel

Automne 2011

Introduction

La théorie de fiabilité sert à étudier l'aptitude de systèmes de dispositifs à fonctionner correctement, durant une période donnée. Un dispositif peut se trouver dans l'un des deux états suivants :

- apte à fonctionner correctement, c'est-à-dire en état de service ;
- inapte à fonctionner correctement, c'est-à-dire en panne ou hors service.

Nous posons les hypothèses suivantes :

- au départ, chaque dispositif est en état de service ;
- les défaillances se produisent généralement de façon aléatoire

Nous définissons la *fiabilité* d'un dispositif comme étant la probabilité qu'aucune défaillance ne se produise pendant cette durée.

Définitions

Étant donné que les défaillances se produisent d'une façon aléatoire et afin de pouvoir traiter le concept de fiabilité, nous associons alors à chaque dispositif sa durée de vie T, qui peut-être considérée comme une v.a. continue et non négative.

- La fiabilité du dispositif à l'instant t, $R(t)$: la probabilité qu'il fonctionne encore à l'instant t.

$$R(t) = P(T > t) = \int_t^\infty f(x)dx.$$

- La fonction de répartition de la v.a. T est,

$$F(t) = P(T \leq t) = \int_0^t f(x)dx = 1 - R(t).$$

Définitions

- La fonction de densité de T est

$$f(t) = \frac{dF(t)}{dt} = -\frac{dR(t)}{dt}.$$

- Le taux de défaillance instantané $\lambda(t)$, qui est définie comme :

$$\lambda(t)\Delta t = P(t < T \leq t + \Delta t | T > t) \simeq \frac{f(t)\Delta t}{R(t)}.$$

On a donc

$$\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} \Longrightarrow R(t) = exp\left[-\int_0^t \lambda(x)dx\right].$$

Définitions

- Une caractéristique de la fiabilité qui ne dépend pas du temps est la durée de vie moyenne τ d'un dispositif, qui est définie par

$$\tau = \int_0^\infty t\, f(t)dt = \int_0^\infty R(t)dt.$$

Distribution exponentielle

Dans la pratique, il est souvent admis qu'une durée de vie T obéit à une loi exponentielle. Dans ces conditions :

- $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad (t \geq 0).$
- $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}, \quad (t \geq 0).$
- $\tau = 1/\lambda.$
- $\lambda(t) = \lambda.$

Cette dernière relation est d'ailleurs une caractéristique de la loi exponentielle (non viellisssement). En fait, nous avons vu au chapitre 6 que la loi exponentielle est "sans mémoire"

Systèmes non réparables

Partie présentée en classe.

Exemple 1

Une distribution du temps de fonctionnement avant défaillance d'un dispositif est donnée par la loi uniforme

$$f(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

1. Trouver la fonction de fiabilité.
2. Trouver $\lambda(t)$.
3. Calculer le temps moyen de bon fonctionnement du dispositif.

Exemple 2

Soit un montage en série de trois dispositifs qui fonctionnent et tombent en panne indépendamment. La distribution du temps de fonctionnement avant défaillance de chaque dispositif est exponentielle avec le taux des pannes $\lambda_1 = 3 \times 10^{-2}, \lambda_2 = 6 \times 10^{-3}, \lambda_3 = 4 \times 10^{-2}$.

1. Trouver $R(60)$ pour ce système.
2. Calculer le temps moyen de bon fonctionnement de ce système.

MTH2302D: Introduction à la fiabilité 9 / 12
Systèmes non réparables

Wissem Maazoun MTH2302D: Introduction à la fiabilité 9 / 12

Exemple 3

La loi de Weibull est un modèle de fiabilité des systèmes. Sa fonction de densité, qui généralise celle de la loi exponentielle, est donnée par

$$f(x) = \beta\lambda(\lambda x)^{\beta-1}e^{-(\lambda x)^{\beta}} \text{ pour } x \geq 0$$

où $\lambda > 0$ et $\beta > 0$.

1. Calculer $R(10)$ pour une loi de Weibull de paramètre $\lambda = 0,5$ et $\beta = 1,5$.
2. Pour quelles valeurs de β trouve-t-on que $\lambda(t)$ est une fonction : i) croissante ? ii) constante ? iii) décroissante ?

MTH2302D: Introduction à la fiabilité 10 / 12
Systèmes non réparables

Wissem Maazoun MTH2302D: Introduction à la fiabilité 10 / 12

Exemple 4

On dispose de 50 piles pour faire fonctionner un système. Les piles sont utilisées en redondance passive, c'est-à-dire qu'une seule pile est utilisé à la fois et, lors d'une défaillance, elle est remplacée par une pile neuve.
On suppose que les durées de vie des piles suivent toutes une loi $U[0,1]$ et qu'elles sont indépendantes les unes des autres.

1. Calculer la moyenne et la variance de la durée de vie du système.
2. On propose d'utiliser les piles en redondance active (en parallèle). Combien de piles faudrait-il utiliser pour que la redondance active soit préférable à l'utilisation de 50 piles en redondance passive ? Justifier.

MTH2302D: Introduction à la fiabilité 11 / 12
Systèmes non réparables

Wissem Maazoun MTH2302D: Introduction à la fiabilité 11 / 12

Exemple 5

On dispose de n composants identiques et indépendants possédants tous une durée de vie exponentielle de moyenne τ inconnue. Pour estimer τ, tous les composants sont utilisées en même temps et un observateur étudie la variable aléatoire T^*, représentant le temps de défaillance du premier composant.

1. Calculer le biais et l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de τ noté $\hat{\tau} = nT^*$.
2. Est-ce que $\hat{\tau}$ est un bon estimateur d'un point de vue statistique ? Justifier.
3. Quel avantage y a-t-il ‡ calculer $\hat{\tau}$ au lieu de la moyenne des durées de vie expérimentales $\bar{T}$? Justifier.

MTH2302D: Introduction à la fiabilité 12 / 12
Systèmes non réparables

Wissem Maazoun MTH2302D: Introduction à la fiabilité 12 / 12