1. Probabilités élémentaires

MTH2302D

S. de Montigny en collaboration avec S. Le Digabel
École Polytechnique de Montréal

A2018

(v1)

Plan

1. Expériences aléatoires et événements
2. Probabilités
3. Analyse combinatoire
4. Probabilité conditionnelle et indépendance
5. Règle des probabilités totales et théorème de Bayes
6. Exemples supplémentaires

Expériences aléatoires

1. Une *expérience aléatoire* est une épreuve que l'on peut (en principe) répéter autant de fois que l'on veut et telle que :
   - L'ensemble de tous les résultats possibles est connu.
   - On ne peut pas prévoir avec certitude lequel des résultats sera obtenu.

2. L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé *l'espace échantillon* de l'expérience.

   L'espace échantillon est habituellement dénoté Ω.

Remarque : L'espace échantillon d'une expérience aléatoire peut être discret (fini, infini dénombrable) ou continu (infini non dénombrable).

Exemple 1

Décrivons l'espace échantillon des expériences aléatoires suivantes :

1. E_1 : On lance une pièce de monnaie une fois et on note le côté qui apparaît.
2. E_2 : On lance une pièce de monnaie 3 fois et on note le nombre de PILEs observés.
3. E_3 : On lance deux dés (à six faces) et on note les faces obtenues.
4. E_4 : On tire 6 boules parmi 49 boules numérotées de 1 à 49.

Exemple 1 (suite)

5. E_5 : On compte le nombre de pièces défectueuses dans un lot de N pièces.
6. E_6 : On lance continuellement une pièce de monnaie jusqu'à ce qu'on obtienne FACE et on compte le nombre de lancers nécessaires.
7. E_7 : On mesure la durée de vie d'une ampoule.
8. E_8 : On mesure, en MW, la quantité d'électricité produite en 24 heures par une éolienne.

Événements

Un *événement* associé à une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'espace échantillon.

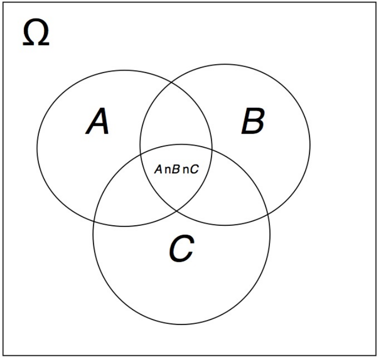
- Un résultat élémentaire $=$ événement simple.
- Événement composé $=$ ensemble d'au moins deux résultats élémentaires.
- En général, on note les événements A, B, C, etc.
- Difficulté de cette partie du cours : bien exprimer les événements.

Exemple 2

1. Pour l'expérience E_1, soit l'événement A : Obtenir PILE.
2. Pour l'expérience E_2, soit l'événement B : Obtenir au moins 2 PILEs.
3. Pour l'expérience E_3, soit l'événement C : Obtenir une paire.
5. Pour l'expérience E_5, soit l'événement D : Compter au plus 10 pièces défectueuses.
7. Pour l'expérience E_7, soit l'événement E : L'ampoule fonctionne pendant au moins 200 heures.
8. Pour l'expérience E_8, soit l'événement F : L'éolienne produit au moins 5 MW.

Diagrammes de Venn

- Utilisés pour représenter Ω et des événements.
- Exemples du livre.



Quelques événements particuliers

1. L'*événement certain* Ω.
2. L'*événement impossible* $\emptyset$.
3. Si A est un événement alors son *complément*

$$\overline{A} = A' = A^c = \{x \in \Omega \,|\, x \notin A\}$$

   est aussi un événement.

   $\overline{A}$ représente la non réalisation de A.

Quelques événements particuliers (suite)

4. Si A et B sont des événements alors leur *union*

$$A \cup B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

est aussi un événement.

$A \cup B$ représente la réalisation **d'au moins un** des deux événements.

Ceci se généralise à plus de deux événements :

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

représente la réalisation d'au moins un des n événements.

Quelques événements particuliers (suite)

5. Si A et B sont des événements alors leur intersection

$$A \cap B = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ et } x \in B\}$$

est aussi un événement.

$A \cap B$ représente la réalisation **simultanée des deux** événements.

Ceci se généralise à plus de deux événements :

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

représente la réalisation simultanée de tous les n événements.

Quelques événements particuliers (suite)

6. Si A et B sont des événements alors la *différence*

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = \{x \in \Omega \,|\, x \in A \text{ et } x \notin B\}$$

est aussi un événement.

$A \setminus B$ représente la réalisation de A seul.

De même

$$B \setminus A = \overline{A} \cap B = \{x \in \Omega \,|\, x \notin A \text{ et } x \in B\}$$

représente la réalisation de B seul.

Relations entre événements

- Deux événements A et B sont *disjoints* si $A \cap B = \emptyset$, c'est-à-dire qu'ils ne peuvent pas être réalisés en même temps.

  On dit aussi que ce sont des événements *incompatibles* ou *exclusifs*.

- Deux événements A et B forment une *partition* de Ω si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cup B = \Omega$ (se généralise avec un nombre quelconque d'événements).

Théorème : lois de De Morgan

Si $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sont des événements alors

- $\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_n}$.
- $\overline{A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \cdots \cup \overline{A_n}$.

Relations entre événements (suite)

- $\overline{(\overline{A})} = (A')' = A$.
- $A \cup B = B \cup A$ et $A \cap B = B \cap A$.
- Lois associatives :
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$.
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.
- Lois distributives :
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Probabilités

Soit Ω l'espace échantillon associé à une expérience aléatoire. Une *probabilité* sur Ω est une fonction P associant à chaque sous-ensemble A de Ω un nombre réel $P(A)$ (ou $P[A]$) tel que

1. $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
3. Si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont des événements mutuellement disjoints ($A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$) alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Probabilités (suite)

Supposons qu'une expérience aléatoire ait été répétée m fois et que l'événement A se soit produit m_A fois. La *fréquence relative* de A est le rapport

$$f_A = \frac{m_A}{m}.$$

On définit

$$P(A) = \lim_{m \to \infty} f_A.$$

Exemple 3 : calcul d'une probabilité à partir de la fréquence relative

On lance une pièce truquée un grand nombre de fois pour déterminer la probabilité de l'événement A : obtenir FACE. Les résultats suivants ont été obtenus :

m	m_A	f_A
10	7	0.7
100	62	0.62
1000	603	0.603
10 000	6 118	0.6118
100 000	60 050	0.6005
1 000 000	599 601	0.599601

Que semble valoir $P(A)$?

Probabilités : espace échantillon dénombrable

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un espace échantillon dénombrable. Alors une probabilité sur Ω est une fonction P qui associe à chaque résultat x_i de Ω un nombre réel $p_i = P(\{x_i\})$ tel que

1. $0 \leq p_i \leq 1$ pour tout i.
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.
3. $P(A) = \displaystyle\sum_{x_i \in A} p_i$ avec $A \subseteq \Omega$.

Probabilités : espace échantillon fini

Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ une espace échantillon fini. Si tous les résultats ont la même probabilité alors on dit qu'ils sont *équiprobables*.

Dans ce cas

$$P(A) = \frac{n_A}{n} = \frac{\text{nombre d'éléments dans } A}{\text{nombre d'éléments dans } \Omega} \quad .$$

Règles de calcul des probabilités

Soient A, B et C des événements associés à un espace échantillon Ω.

- Rappel : $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subseteq B$, alors $P(A) \leq P(B)$.
- Important : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

  et si A et B sont disjoints alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Règles de calcul des probabilités (suite)

- Pour trois événements :

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

- Enfin

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$$

et

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B).$$

Exemple 4

Une firme de génie conseil a déposé une soumission pour deux projets. La firme estime que la probabilité d'obtenir le projet 1 est de 0.22, celle d'obtenir le projet 2 est de 0.25 et la probabilité d'obtenir les deux projets est de 0.11.

Calculer la probabilité que la firme

1. Obtienne au moins un des deux projets.
2. Aucun des deux projets.
3. Seulement le projet 2.
4. Un seul des deux projets.

Exemple 5

Dans une ville, les habitants ont le choix entre trois journaux : J_1, J_2 et J_3. Une étude a produit les données suivantes :

Lisent :	J_1	J_2	J_3	J_1 et J_2	J_1 et J_3	J_2 et J_3	les trois
	20%	20%	25%	15%	10%	10%	5%

Si on choisit au hasard un habitant de la ville, quelle est la probabilité que cette personne

1. Ne lise aucun journal ?
2. Lise exactement 2 journaux ?

Techniques de dénombrement

- **Diagramme en arbre :** une façon systématique d'énumérer tous les résultats possibles d'une expérience aléatoire *(voir exemples du livre)*.

- **Principe de multiplication :** soient $A_1, A_2, \ldots, A_k$ des ensembles contenant $n_1, n_2, \ldots, n_k$ éléments respectivement.

  Alors il y a $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ façons de choisir d'abord un élément de A_1, puis un élément de A_2 et ainsi de suite jusqu'à A_k.

  Exemple 6 : Une pièce de monnaie est lancée 4 fois. Combien de résultats peut-on observer en tout ?

Techniques de dénombrement (suite)

- **Permutations :** donnés n objets discernables, il existe $n!$ façons de les ordonner.

  Chacune de ces façons est appelée une *permutation* des n objets.

  $n!$ est aussi le nombre de façons de ranger n objets distincts dans n emplacements distincts.

- Plus généralement le nombre de permutations de k objets choisis parmi n objets distincts est

$$P_k^n = \frac{n!}{(n-k)!} \quad .$$

  On le note aussi A_k^n (nombre d'arrangements).

Techniques de dénombrement (suite)

- **Combinaisons :** Le nombre de façons de choisir k objets parmi n objets discernables (sans remise) est égal à

$$C_k^n = \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) = \frac{P_k^n}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

pour $0 \leq k \leq n$. Chacune de ces façons est appelée *combinaison* de k objets parmi n.

- **Exemple 7 :** Montrer que $P_1^n = C_1^n = n$, $P_0^n = C_0^n = 1$, $P_n^n = P_{n-1}^n = n!$, $C_n^n = 1$, et $C_{n-1}^n = n$.

- Binôme de Newton :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n x^k y^{n-k} \quad \text{avec } x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Calculs

1. Factorielle $n!$:
   - Excel : FACT(n).
   - R : factorial(n).
   - Fonction Gamma : $n! = \Gamma(n+1)$.
   - Approximation de Stirling : $n! \simeq \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$.
2. Permutation P_k^n :
   - Excel : PERMUTATION(n,k).
   - R : factorial(n)/factorial(n-k).

- Combinaison C_k^n :
  - Excel : COMBIN(n,k).
  - R : choose(n,k).

Exemples

8. Combien de comités de 3 personnes peut-on former avec un groupe de 10 personnes ?

9. Quelle est la probabilité de choisir le numéro gagnant au loto $6/49$?

10. Une boîte contient 5 composants parmi lesquels 2 sont défectueux. On prélève un échantillon de 2 composants, sans remise. Calculer la probabilité d'observer dans l'échantillon :
    - Exactement un composant défectueux.
    - Aucun composant défectueux.
    - Au moins un composant défectueux.

Probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un espace échantillon Ω. La *probabilité conditionnelle de A sachant B* est

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si} \quad P(B) \neq 0.$$

La probabilité de B sachant A est

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \text{si} \quad P(A) \neq 0.$$

Probabilité conditionnelle (suite)

- **Règle de multiplication** (si $P(A)P(B) > 0$) :

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A).$$

- **Généralisation** (avec $P(A_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$

$$P(A_1) \times P(A2|A1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

- **Complémentaire** : $P(\overline{A}|B) = 1 - P(A|B)$.

Exemple 11

Une firme de génie conseil a déposé une soumission pour deux projets. La firme estime que la probabilité d'obtenir le projet 1 est de 0.22, celle d'obtenir le projet 2 est de 0.25 et la probabilité d'obtenir les deux projets est de 0.11.

Calculer la probabilité d'obtenir le projet 2 étant donné qu'elle a obtenu le projet 1.

Exemple 12

Une boîte contient 10 composants dont 7 sont conformes et 3 sont défectueux. On prélève successivement et sans remise 4 composants dans la boîte.

Calculer la probabilité que :

1. Le troisième soit défectueux étant donné que les deux premiers sont conformes.
2. Les 2 premiers soient conformes.
3. Le premier soit défectueux, le deuxième soit conforme, le troisième soit défectueux et le quatrième soit conforme.
4. Le deuxième composant est défectueux.
5. Exactement deux des quatre composants sont défectueux.

Événements indépendants

Deux événements A et B sont *indépendants* si et seulement si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

ou, de façon équivalente :

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{ou} \quad P(B|A) = P(B).$$

Plus généralement, les événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont dits indépendants si et seulement si

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Événements indépendants (suite)

Remarque : Si $P(A)P(B) > 0$ et que A et B sont incompatibles, alors ils ne peuvent pas être indépendants. En effet $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B) = 0 \neq P(A)$.

Théorème

Si A et B sont des événements indépendants alors

1. A et $\overline{B}$ sont indépendants.
2. $\overline{A}$ et B sont indépendants.
3. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Exemples d'événements indépendants

13. Une firme de génie conseil a déposé une soumission pour deux projets. La firme estime que la probabilité d'obtenir le projet 1 est de 0.22, celle d'obtenir le projet 2 est de 0.25 et la probabilité d'obtenir les deux projets est de 0.11. Soient A : obtenir le projet 1 et B : obtenir le projet 2.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

14. On lance un dé deux fois. Soient les événements :
A : le premier lancer donne un 4.
B : la somme des lancers donne 7.

Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Règle des probabilités totales

Définition

Des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une *partition* de l'espace échantillon Ω si

1. $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (les B_i sont mutuellement disjoints).
2. $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = \Omega$.

Autrement dit, un et un seul des événements B_i sera réalisé lors de l'expérience aléatoire.

Règle des probabilités totales (suite)

Règle des probabilités totales

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω, et si $P(B_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alors pour tout événement A de Ω :

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

Théorème de Bayes

Théorème

Si $B_1, B_2, \ldots, B_n$ forment une partition de Ω avec $P(B_i) > 0 \ \forall i$, alors pour tout événement A de Ω :

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$.

Se simplifie en la *règle de Bayes* pour deux évènements A et B tels que $P(A)P(B) > 0$:

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Ex. 15 : probabilités totales et théorème de Bayes

Trois machines A, B et C sont utilisées pour la production d'une pièce. La machine A fournit 30% de la production totale, la machine B, 50%, et la machine C, 20%.

De plus, 3% des pièces produites par la machine A sont défectueuses ; cette proportion est de 5% pour la machine B et 2% pour la machine C.

Une pièce est prise au hasard dans la production totale. Calculer la probabilité des événements suivants :

1. La pièce est défectueuse.
2. La pièce est produite par la machine B étant donnée qu'elle est défecteuse.

Ex. 16 : probabilités totales et théorème de Bayes

Dans un système de communications, des signaux binaires (0 et 1) sont émis. À cause des imperfections dans la transmission, le signal reçu peut ne pas être exact.

Ainsi, la probabilité qu'un 0 émis soit correctement reçu est de 0.98 ; la probabilité qu'un 1 émis soit correctement reçu est 0.96. Si 75% des signaux émis sont des 0, calculer :

1. Le pourcentage de 0 reçus.
2. Dans quel pourcentage des cas la transmission se fait correctement ?
3. La probabilité qu'un 0 ait été transmis si un 0 est reçu.

Exemple 17

Une firme dirige la construction de trois usines, A, B et C. La firme évalue que la probabilité pour que la construction de l'usine A soit complétée à temps est de 0.95 ; cette probabilité est de 0.8 pour l'usine B et de 0.75 pour l'usine C.

On suppose que les travaux de construction de chaque usine sont indépendants de ceux des autres.

1. Quelle est la probabilité que la construction des trois usines soit complétée à temps ?
2. Quelle est la probabilité que seule l'usine B soit complétée à temps ?
3. Si la construction d'une seule des trois usines est complétée à temps, quelle est la probabilité qu'il s'agisse de l'usine B ?

Exemple 18

Un fabricant de matériel informatique vend trois modèles d'ordinateurs : I, II et III dans les proportions respectives de 35%, 45% et 20%.

On sait que 2% des ordinateurs de modèle I vont présenter un problème de disque dur au cours des six premiers mois d'utilisation et cette proportion est de 4% pour le modèle II et de 6% pour le modèle III.

1. Quel pourcentage des ordinateurs de ce fabricant présentent un problème de disque dur au cours des six premiers mois d'utilisation ?
2. Si un ordinateur acheté de ce fabricant présente un problème de disque dur au cours des six premiers mois d'utilisation, quelle est la probabilité que cet ordinateur soit du modèle II ?