POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

CAHIER D'EXAMEN

Matricule

1954607

CONTRÔLE PÉRIODIQUE - HIVER 2021

Nom : Kim
(lettres moulées)

Prénom : Victor
(lettres moulées)

No du cours : **MTH2302D** Section :

Titre du cours : **PROBABILITÉS ET STATISTIQUE**

DIRECTIVES:

1. Remplissez la partie ci-haut et signez immédiatement cette page. Cette page doit être la page de présentation de votre document des réponses que vous déposerez dans la boîte de remise
2. Rédigez vos réponses de façon claire sur des feuilles blanches de votre choix avec les numéros de pages et les numéros des questions. Lors du dépôt de votre document, assurez-vous que les feuilles sont dans l'ordre des questions.
3. Donnez une réponse complète à chaque question et cette réponse doit être **expliquée et justifiée**. Autrement, la note zéro sera attribuée pour la question.
4. Écrivez aussi lisiblement que possible, de manière à ce que le correcteur comprenne vos réponses.
5. **Documentation : Toute.**
6. **Calculatrice non-programmable permise.**
7. ***Par souci d'équité envers tous les étudiants, le professeur ne répondra à aucune question durant cet examen. Si vous estimez que vous ne pouvez pas répondre à une question (données manquantes, données erronées, et.), veuillez le justifier (maximum 2 lignes) et passez à la question suivante.***

Réservé	
1.	1,5
2.	0
3.	2
4.	3,25
5.	0,75
6.	1,25
7.	
8.	
9.	
10.	
TOTAL	8,75 /20

L'étudiant doit honorer l'engagement pris lors de la signature du code de conduite.

Signature de l'étudiant(e)

Date :	**dimanche, le 14 mars 2021**
Heure :	**10h00 à 12h00**

$P(X_1=1) = \binom{2}{1}\binom{3}{1}$ 2.1 1

Question 1

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A)P(B|A)}{P(B|A)P(A) + P(B|\bar{A})P(\bar{A})}$

1 $= \dfrac{0.3\,P(B|A)}{P(B|A)\cdot 0.3 + 0.2\cdot 0.7}$

$= \dfrac{0.3 \cdot 0.7}{0.3\cdot 0.7 + 0.14} = \boxed{0.6}$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
$= 0.7$

$P(\bar{B}|A) = \dfrac{P(\bar{B}\cap A)}{P(A)}$

$P(\bar{B}\cap A) = P(\bar{B}|A)\cdot P(A)$
$= 0.1\cdot 0.3$
$= 0.03$

$P(\bar{B}\cap A) = P(\bar{B})\cdot P(A)$

$P(\bar{B}) = \dfrac{0.03}{0.1} = 0.3$

$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 0.7$

$P(B|A) = \dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}$
$= \dfrac{P(B)\cdot P(A)}{P(A)}$
$= 0.7$

b) $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$P(A|B) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$P(A\cap B) = P(A|B)\cdot P(B)$ $= P(B|A)P(A)$!!

$= 0.6\cdot 0.7$

$= 0.42$

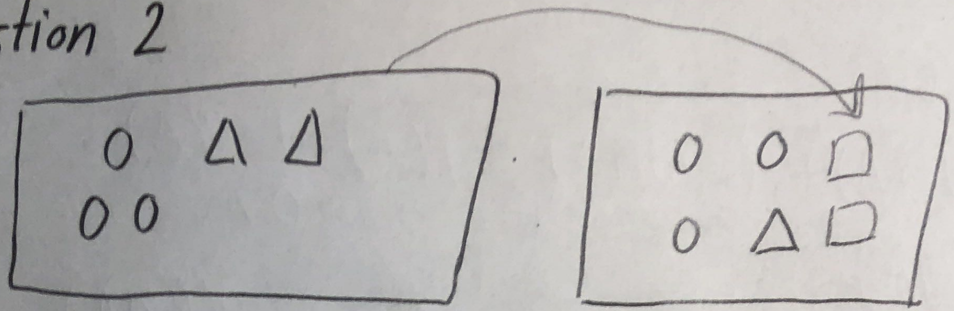
$P(A\cup B) = 0.3 + 0.7 - 0.42$

$\boxed{= 0.58}$

0,5

Question 2

a)



1

2

X_1 : nb de composantes défectueux dans le tirage de 2 dans la boite 1

$X_1 \sim H(2,5,2)$

$$P(X_1=2)=\frac{\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}}=\frac{\frac{\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,0!}\cdot\frac{\cancel{3!}}{\cancel{0!}\,3!}}{\frac{5!}{2!\,3!}}=\frac{1}{10}$$

X_2 : nb de composantes défectueux dans le tirage de boite 2

$X_2 \sim \text{Binomial}(2, 0.0025)$

$$p=\underbrace{\frac{1}{10}}\cdot\frac{1}{4}=0.025$$

proba des 2 de la boite 1 soit défectueux

$$P(X_2=2)=\binom{2}{2}\cdot(0.025)^2(1-0.025)^0$$

$$\boxed{=0.000625}$$

b) X_2 : nb de défectueux dans les 2 composantes pris de la boite 2

$X_2=1$

$$P(X_1=1|X_2=1)=\frac{P(X_1=1\cap X_2=1)}{P(X_2=1)}=\frac{P(X_1=1)\cdot P(X_2=1)}{P(X_2=1)}=$$

$$P(X_1=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{2\cdot 1}{10}=\frac{1}{5}$$

0

Question 3.

a) $\int_{-\infty}^{\infty} f_x(x)dx = 1 = \int_{-6}^{0} \frac{m}{3} dx + \int_{0}^{4} mx\,dx$

$0 - -6$

$\frac{6}{3} = 2$

$= \frac{m}{3}[x]_{-6}^{0} + \frac{m}{2}[x^2]_0^4$

$16 - 0$

$\frac{16}{2} = 8$

$1 = 2m + 8m$

$1 = 10m$

$m = \frac{1}{10}$

$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx = \int_{-6}^{0} x f_x(x)dx + \int_{0}^{4} x f_x(x)dx$

$= \int_{-6}^{0} x \frac{1}{30} dx + \int_{0}^{4} \frac{x^2}{10} dx$

$= \frac{1}{60}[x^2]_{-6}^{0} + \frac{1}{30}[x^3]_0^4 = 0.6 + 2,13 = \boxed{2.73}$

b) $Y = X^2 - 2X$

$P(Y > 0) = P(X^2 - 2X > 0)$

$P(X > 2) = \int_{2}^{4} \frac{1}{10} x\,dx$

$= \frac{1}{20}[x^2]_2^4 = \boxed{0.6}$

$X^2 - 2X$

$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(0)$

$= 4$

$X_1 = 0$ $\boxed{X_2 = 2}$

$$V[X] = E[X^2] - E[X]^2 \leftarrow 0.25$$

$$E[X^2] = (-1)^2 \cdot 0{,}25 + 0^2 \cdot 0{,}25 + 1^2 \cdot 0{,}5$$

$$= 0{,}75$$

$$V[X] = 0{,}75 - 0{,}0625 = 0{,}6875$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Scanner dans l'ordre svp!!

$$E(XY) = -1 \cdot 1 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2 = 0{,}1$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0{,}1 - 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0$$

$$V[T] = 4 \cdot 0{,}24 + 9 \cdot 0{,}6875 = \boxed{7{,}1475}$$

b) $U = X^2$

$P(U,Y) \quad P(0,0) = 0{,}15$

$P(U=0) = P_X(0^2) = 0.25$

$0{,}25$ / 1

$P(Y=0) = 0{,}6$

$0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}15$

$\boxed{0{,}15 = 0{,}15}$

oui U et Y sont ind

par supposant

Question 4

Y \ X	-1	0	1	$P_Y(y)$
0	0.15	0.15	0.3	0.6
1	0.10	0.1	0.2	0.4
$P_x(x)$	0.25	0.25	0.5	1

$E(x) = 0.25$

$P(Y=0) = \frac{3}{2} P(Y=1)$

a) $E(x) = -1 \cdot 0.25 + 0 \cdot (V_2 + V_3) + 1(V_1 + 0.3) = 0.25$

$0.25 = -0.25 + V_1 + 0.3$

$\boxed{V_1 = 0.2}$

$V_2 + V_3 = 0.25 \qquad V_3 = 0.25 - V_2$

$P_Y(0) = V_2 + 0.45 \qquad P_Y(1) = V_3 + 0.3$

$V_2 + 0.45 = \frac{3}{2}(V_3 + 0.3)$

$V_2 + 0.45 = \frac{3V_3}{2} + 0.45$

$V_2 = \frac{3}{2} V_3$

3/3

$\frac{3}{2} V_3 + V_3 = 0.25 \qquad V_2 = 0.25 - 0.1$

$\boxed{V_3 = 0.1} \qquad \boxed{V_2 = 0.15}$

$V[T] = 2^2 V[Y] + (-3)^2 V[X] + 2(2)(-3)\,Cov(X, Y)$

$V[Y] = E[Y^2] - E[Y]^2$

$E[Y] = 0 \cdot 0.6 + 1 \cdot 0.4 = 0.4 \qquad V[Y] = 0.4 - 0.16$

$E[Y^2] = 0^2 \cdot 0.6 + 1^2 \cdot 0.4 = 0.4 \qquad = 0.24$

Da fin!!

Question 5

X : durée fonctionnement d'un type de composante

$X \sim Exp(\lambda)$ $P(X \geq 4) = 0.4$ entière

a) $P(X \geq 4) = 1 - F_X(4)$

$0.4 = 1 - (1 - e^{-\lambda 4})$

$0.4 = e^{-\lambda 4}$

$\lambda = \frac{\ln(0.4)}{-4} = 0.229$

$\cancel{P(X < 2) = P(X=0) + P(X=1)}$

$\cancel{= (1 - e^{-0.229 \cdot 0}) + (1 - e^{-0.229 \cdot 1})}$

$\cancel{= 0.205}$

2 composantes $0.205 \cdot 0.205 = 0.042$

Y : nb combosants qui dure moins que 2 ans dans l'échantillon de 10

$Y \sim Binomial(10, \cancel{0.205})$

$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y \leq 2)$

$P(Y \leq 2) = P(Y=0) + P(Y=1) + P(Y=2)$

$P(Y < 2) = \binom{10}{0} (0.205)^0 (1 - 0.205)^{10} + \binom{10}{1} (0.205)^1 (1 - 0.205)^9$

$1 - \downarrow$ = reponse

b) $P(X \geq 4) = 1 - \cancel{(1 - e^{-0.229 \cdot 4})} = 0.4$ 0.4

$Y' \sim Binomial($ 30 mois

Question 6 $\quad E(X)=6 \quad$ X : nb client par jour

$X \sim \text{Poisson}(\lambda) \quad \lambda = 6$

a) $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq \cancel{4}\,3)$

1,25/4

$P(X \leq 4) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$

0,125

$$= \frac{e^{-6}6^0}{0!} + \frac{e^{-6}6^1}{1!} + \frac{e^{-6}6^2}{2!} + \frac{e^{-6}6^3}{3!} + \cancel{\frac{e^{-6}6^4}{4!}}$$

$= 0{,}00248 + 0{,}0149 + 0{,}0446 + 0{,}0892 + 0{,}134$

≈ 0.285

$P(X \geq 4) = 1 - 0{,}285 = 0{,}715$

b) $T \sim \text{Binomial}(5, p)$

0,25

c) C : nb Clients dirigé à l'hopital

$P(X \geq 4) = 0.715$

$E(X) = 6$

non 0,25

$E(C) = 6 \cdot P(X \geq 4)$

$= 6 \cdot 0.715 = 4.29$ clients par jour