1,

Wir betrachten die Funktion $f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{f. } x \neq 1 \\ 3 & \text{f. } x = 1 \end{cases}$

a) Für welche x ist das Problem gut konditioniert?

Für $x=1$ ist das Problem offensichtlich gut konditioniert, wir betrachten daher $x \neq 1$.

$$e_y \approx \frac{f'(x)}{f(x)} x e_x =$$

$$\boxed{\begin{aligned}&(x^2+x+1)(x-1) = x^3 \cancel{-x^2} \cancel{+x^2} \cancel{-x} \cancel{+x} -1 = x^3-1 \\ &\frac{(x^2+x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}} = x^2+x+1\end{aligned}}$$

$$= \frac{2x+1}{x^2+x+1} x e_x = \frac{2x^2+x}{x^2+x+1} e_x$$

·) für $x \to 1$: $\frac{2x^2+x}{x^2+x+1} \xrightarrow{x\to 1} 1$ $\Rightarrow$ gut konditioniert für $x \approx 1$

·) für $x \to \pm\infty$: $\frac{2x^2+x}{x^2+x+1} \xrightarrow{x\to\pm\infty} 2$ $\Rightarrow$ gut konditioniert für große x

·) $\text{Max}\left(\frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\right)$: $\max_{x\in\mathbb{R}}\left(\frac{2x^2+x}{x^2+x+1} \text{eps}\right) \xrightarrow[\text{MaxValue}]{\text{Mathematica}} 1+\frac{2}{\sqrt{3}} \text{eps}$ $\left(\text{MinValue} = 1-\frac{2}{\sqrt{3}},\ |\text{MaxValue}| > |\text{MinValue}|\right)$

Die Funktion $\left(x \mapsto \frac{2x^2+x}{x^2+x+1}\right)$, mit der der relative Fehler angenähert wird, übersteigt für kein x den Wert $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$. Das ist in der Größenordnung von 1. Daher ist f für alle x (eher) gut konditioniert.

---

b) Unvermeidbarer Fehler: $|\Delta y^{(0)}| = \text{eps}(|f'(x)||x| + |f(x)|) = \text{eps}(\underbrace{|2x+1||x| + |x^2+x+1|}_{2x^2+|x|})$

Funktion 1:

$$\begin{array}{lll} 1) & r = x * x = x^2, & \varphi^{(0)}(x) = (x^2, x) = (r, x) \\ 2) & s = r * x = x^3, & \varphi^{(1)}(r,x) = (x^3, x) = (s,x) \\ 3) & t = s-1 & \varphi^{(2)}(s,x) = (s-1, x) = (t,x) \\ 4) & u = x-1 & \varphi^{(3)}(t,x) = (x-1, t) = (u,t) \\ 5) & v = t/u & \varphi^{(4)}(u,t) = (t/u) = (v) \end{array}$$

$$\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}(r,x) = \frac{x^2-x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x}{x-1}$$

$$\frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial s}(s,x) = \frac{x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{\partial \psi^{(3)}}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{\partial \psi^{(4)}}{\partial u}(u,t) = -\frac{t}{u^2}$$

Restabbildungen:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)}(r,x) &= (r*x-1)/(x-1) \\ \psi^{(2)}(s,x) &= (s-1)/(x-1) \\ \psi^{(3)}(t,x) &= t/(x-1) \\ \psi^{(4)}(t,u) &= t/u \end{aligned}$$

Restlicher Fehler:

$$|\Delta y^{(n)}| \leq \text{eps}\left(\left|\frac{\partial\psi^1}{\partial r} r\right| + \left|\frac{\partial\psi^2}{\partial s} s\right| + \left|\frac{\partial\psi^3}{\partial t} t\right| + \left|\frac{\partial\psi^4}{\partial u} u\right|\right) =$$

$$= \text{eps}\left(\left|\frac{rx}{x-1}\right| + \left|\frac{s}{x-1}\right| + \left|\frac{t}{x-1}\right| + \left|\frac{t}{u}\right|\right) =$$

$$= \text{eps}\left(\left|\frac{x^3}{x-1}\right| + \left|\frac{x^3}{x-1}\right| + \left|\frac{x^3-1}{x-1}\right| + \left|\frac{x^3-1}{x-1}\right|\right)$$

$$= \text{eps}\left(\left|\frac{4x^3-2}{x-1}\right|\right) = \text{eps}\left(2\left|\frac{2x^3-1}{x-1}\right|\right)$$

·) $x \approx 1$: $|\Delta y^{(0)}| = |3| + |3| = 6$

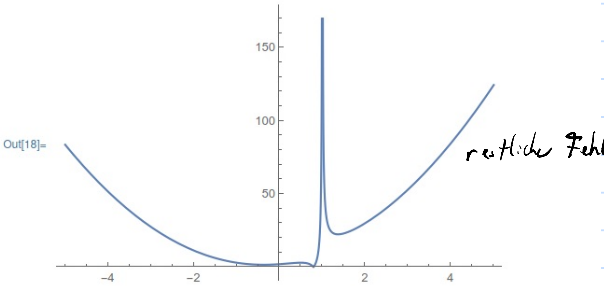
$|\Delta y^{(1)}| = \lim_{x \to 1} 2\left|\frac{2x^3-1}{x-1}\right| = „\infty"$ $\Rightarrow$ numerisch instabil für $x \approx 1$

·) Für die anderen x liegen $2\left|\frac{x^3-1}{x-1}\right|$ und $|2x+1||x| + |x^2+x+1|$ in derselben Größenordnung, daher ist die Funktion dort numerisch stabil.

Out[16]= $2\,\mathrm{Abs}\left[\frac{-1+2x^3}{-1+x}\right]$

In[18]:= `Plot[2*Abs[(2*x^3 - 1) / (x - 1)], {x, -5, 5}]`

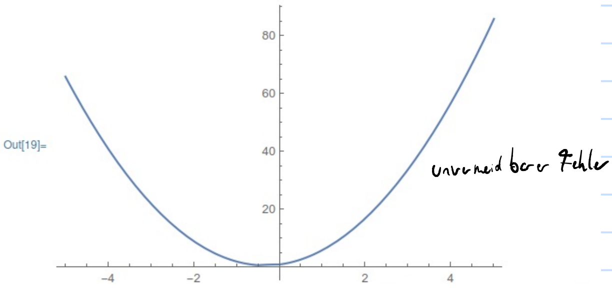
Out[18]=



restliche Fehler

In[19]:= `Plot[Abs[2*x + 1]*Abs[x] + Abs[x^2 + x + 1], {x, -5, 5}]`

Out[19]=



unvermeidbarer Fehler

Der Plot der Fehler stellt die Instabilität auch noch einmal anschaulich dar.

Funktion 2:

$a = x * x = x^2$, $\varphi^{(0)}(x) = (x \cdot x, x) = (a, x)$

$b = a + x = x^2 + x$, $\varphi^{(2)}(a,x) = (a+x, x) = (b, x)$

$f = b + 1 = x^2 + x + 1$, $\varphi^{(3)}(b,x) = (b+1, x) = (f, x)$

Restabb.: $\psi^{(1)}(a,x) = a + x + 1$

$\psi^{(2)}(b,x) = b + 1$

Restlicher Fehler:

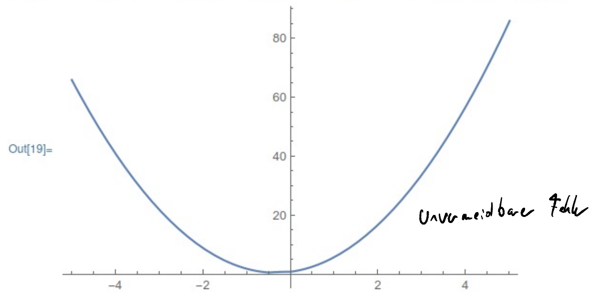
$$|\Delta y^{(r)}| \le eps\left(\left|\frac{\partial \psi^1}{\partial a} a\right| + \left|\frac{\partial \psi^2}{\partial b} b\right|\right) = \left(|1x^2| + |1 \cdot x^2 + x|\right)$$

$$|x^2| + |x^2 + x| \le |x^2||1 + x| + |1 + x^2 + x|$$

$\Rightarrow$ $f2$ ist numerisch stabil, weil der Restliche Fehler $|x^2| + |x^2+x|$ etwa gleich groß ist wie der Unvermeidbare.

In[19]:= `Plot[Abs[2*x + 1]*Abs[x] + Abs[x^2 + x + 1], {x, -5, 5}]`

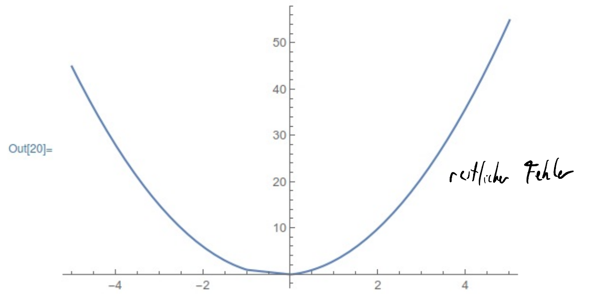
Out[19]=



Unvermeidbarer Fehler

In[20]:= `Plot[Abs[x^2] + Abs[x^2 + x], {x, -5, 5}]`

Out[20]=



restlicher Fehler

Vergleicht man hier die Plots der Funktionen, so ist die Stabilität auch anschaulich.