Seminar zu *Mathematische Modelle in der Technik* - Schaltkreismodellierung

Felix Dreßler (k12105003)
email FelixDressler01@gmail.com

29. Juli 2024

1 Elektrische Netzwerke, Gleichstromkreis

In den folgenden beiden Kapitel beziehen wir uns in großen Teilen auf das Buch *C. Eck, H. Garcke, P. Knabner, Mathematische Modellierung, Springer (2017).* Elektrische Netzwerke findet man heutzutage in fast allen technischen Anwendungen. Sie bestehen üblicherweise aus einer durch Leiter verbundenen Kombination von Widerständen, Spulen, Kondensatoren, Strom- und Spannungsquellen. Weitere Bauteile sind zum Beispiel Dioden oder Transistoren, auf welche wir hier jedoch nicht genauer eingehen. Ein Beispiel für ein elektrisches Netzwerk ist in Abbildung 1 dargestellt aus Widerständen und Spannungsquellen.

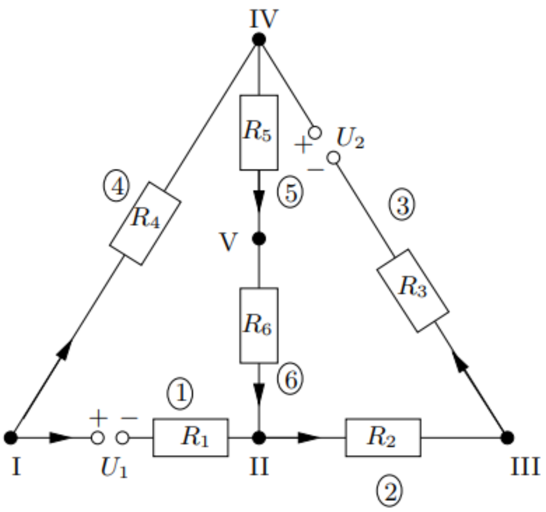

Abbildung 1: Elektrisches Netzwerk

Wichtige Größen in der Elektrotechnik und Elektronik sind unter anderem

- Strom [I] = A ... Ampere
- Spannung [U] = V ... Volt
- Widerstand [R] = $\frac{V}{A}$ = Ω ... Ohm

Ein Ampere entspricht dem Fluss von einem Coulomb pro Sekunde, wobei ein Coulomb $6,24150965 * 10^{18}$ Elementarladungen entspricht. Die Spannung ist die Ursache des Stromflusses und gibt die „Stärke“ einer Spannungsquelle an. Der Widerstand ist ein Maß für die benötigte Spannung um eine bestimmte elektrische Stromstärke durch einen Leiter fließen zu lassen. In der Wechselstromtechnik werden wir später noch Induktivität und Kapazität verwenden.

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns vorerst nur mit Gleichstromnetzwerken. Das heißt dass alle vorkommenden Spannungen zeitlich unveränderlich sind.

1.1 Mathematische Modellierung

Solche Netzwerke werden üblicherweise als Graphen dargestellt. Wir definieren zunächst eine Nummerierung der Knoten und Kanten. Ebenso legen wir eine *positive* Stromrichtung an jeder Kante fest.

Diese Stromrichtung sagt nichts über die tatsächliche Flussrichtung aus, sie dient lediglich zur mathematischen Darstellung. Die Modellierung eines Netzwerks über solche Knoten (oder Englisch „Nodes") bezeichnet man auch als Modified-Nodal-Analysis. Modified deshalb, weil man bei der klassischen Modal-Analysis nur die Spannungen, nicht aber die Ströme berechnet.

Mit Hilfe dieser Knoten und Kanten lassen sich nun drei wichtige physikalische Gesetze formulieren:

- Ohmsches Gesetz: Dieses Gesetz gibt uns einen Zusammenhang zwischen der an einem Widerstand abfallenden Spannung und dem durch den Widerstand fließenden Strom,

$$U = R * I,$$

- Kirchhoffsches Stromgesetz: Dieses Gesetz beschreibt die Erhaltung der elektrischen Ladung innerhalb eines „Knotens ". In einem Knoten ist die Summe aller eingehenden Ströme gleich der Summe aller ausgehenden Ströme.
- Kirchhoffsches Spannungsgesetz: Dieses Gesetz gibt Aufschluss über die auftretenden Spannungen in einer *Schleife* bzw. *Masche*. Eine Masche ist ein geschlossener Umlauf zwischen Knoten eines elektrischen Netzwerks. Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz besagt nun, dass die Summe aller in einer Masche auftretenden Spannungen Null ist. Mit anderen Worten muss die Summe aller Potentialunterschiede in einer Masche gleich Null sein.

Weiters werden Variablen für alle unbekannten Größen eingeführt. Diese Variablen unterteilen wir in:

- Knotenvariablen: In einem Vektor $x = (x_1, ..., x_m)$ werden die Spannungspotentiale an den Knoten zusammengefasst.
- Kantenvariablen: In einem Vektor $y = (y_1, ..., y_n)$ werden die Ströme der Kanten zusammengefasst.

Die Spannungen $e = (e_1, ..., e_n)$ berechnen sich aus den Potentialen durch $e_i = x_{u(i)} - x_{o(i)}$ mit $i = 1, ..., n$, wobei $u(i)$ den „unteren" und $o(i)$ den „oberen" Index einer Kante bezüglich der Stromrichtung angibt.

Die Beziehung zwischen Potentialen und Spannungen lässt sich schreiben als

$$e = -Bx,$$

wobei $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ komponentenweise definiert ist

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & j = o(i) \\ -1 & j = u(i) \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Die Matrix B wird *Inzidenzmatrix* genannt.

Der Zusammenhang zwischen Strom- und Spannungsvektor ist durch das Ohmsche Gesetz gegeben. Dabei sind natürlich Spannungsquellen zu berücksichtigen. Die folgende Abbildung zeigt ein Leiterstück mit Widerstand und Spannungsquelle.

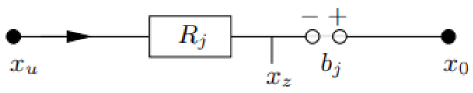

Abbildung 2: Leiterstück mit Widerstand und Spannungsquelle

Für die Potentiale x_u, x_z, x_o gilt mit der Spannung b_j der Spannungsquelle

$$x_z = x_u - R_j y_j, \qquad x_o = x_z + b_j,$$

und damit

$$e_j = x_u - x_o = R_j y_j - b_j.$$

Hier bezeichnet $R_j y_j$ also den Spannungsabfall am Widerstand und b_j die von der Spannungsquelle zusätzlich erzeugte Potentialdifferenz. In Vektorschreibweise erhalten wir

$$y = C(e + b),$$

wobei $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix ist, deren Einträge die Leitwerte R_j^{-1} enthalten. Das Kirchhoffsche Gesetz lässt sich somit als ein lineares Gleichungssystem der Form

$$Ay = 0$$

schreiben, wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ komponentenweise definiert ist als

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & i = o(j) \\ -1 & i = u(j) \\ 0 & sonst. \end{cases}$$

Bei genauerer Betrachtung erkennen wir, dass $A = B^\top$. Das Kirchhoffsche Spannungsgesetz ist also durch den Potentialvektor x bereits in das System eingebaut.

Zusammenfassend ist die Modellierung eines elektrischen Netzwerks mit m Knoten und n Leitungen bestimmt durch

i) einen Potentialvektor $x \in \mathbb{R}^m$,

ii) einen Spannungsvektor $e \in \mathbb{R}^n$,

iii) einen Stromvektor $y \in \mathbb{R}^n$,

iv) eine Inzidenzmatrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$,

v) eine Leitwertmatrix $C \in \mathbb{R}^{n \times n}$

vi) einen Spannungquellenvektor $b \in \mathbb{R}^n$,

sowie den Zusammenhängen:

i) $e = -Bx$,

ii) $y = C(e + b)$,

iii) $B^\top y = 0$ (Kirchhoffsches Spannungsgesetz).

Die Inzidenzmatrix B beschreibt dabei die Geometrie des Netzwerkes, die Leitwertmatrix C die Materialeigenschaften und der Vektor b die „außeren Triebkräfte".

Zur Berechnung der Ströme y, Spannungen e und Potentiale x im Netzwerk wählen wir eine zu bestimmende Variable, zum Beispiel x, und leiten durch Kombination der obigen Beziehungen eine Gleichung für x her. Durch Einsetzen in das Kirchhoffsche Spannungsgesetz erhalten wir

$$B^\top C(b - Bx) = 0$$

und durch anschließendes Ausmultiplizieren und Umformen

$$B^\top CBx = B^\top Cb.$$

Die Matrix $M = B^\top CB$ ist symmetrisch, falls C symmetrisch ist. Da

$$\langle x, Mx\rangle = \langle Bx, CBx\rangle,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das euklidische Skalarprodukt bezeichnet, sehen wir, dass

- C positiv semidefinit $\Rightarrow$ M positiv semidefinit,
- C positiv definit und $ker(B) = \{0\}$ $\Rightarrow$ M positiv definit.

Für die meisten Netzwerke ist C auch tatsächlich positiv definit. Die Inzidenzmatrix hat jedoch stets einen nichttrivialen Kern, da $(1, ..., 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ im Kern von B liegt. Das lineare Gleichungssystem hat deshalb keine eindeutige Lösung. Dies hat auch eine physikalische Interpretation. Die Potentiale sind nämlich nur bis auf eine Konstante bzw. einen gemeinsamen Nullpunkt eindeutig.

Zur Lösbarkeit gilt jedoch folgendes Resultat aus der linearen Algebra:

Satz 1 (siehe [1], Seite 42)**.** *Sei $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, dann gilt für $M = B^\top CB$:*

i) $ker(M) = ker(B)$

ii) Das Gleichungssystem $Mx = B^\top b$ hat für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung.

Beweis. i) Aus der Definition von M sehen wir sofort, dass $ker(B) \subseteq ker(M)$. Umgekehrt gilt für $x \in ker(M)$

$$0 = \langle x, B^\top CBx\rangle = \langle Bx, CBx\rangle$$

Da aber C positiv definit ist, muss $Bx = 0$ gelten und somit $x \in ker(B)$.

ii) Die Gleichung ist lösbar, falls $B^\top b \perp ker(M^\top)$ gilt. Weil C symmetrisch ist, gilt auch, dass M symmetrisch ist. Für $x \in ker(M^\top) = ker(M) = ker(B)$ gilt

$$\langle B^\top b, x\rangle = \langle b, Bx\rangle = 0$$

womit die Aussage bewiesen ist. □

Bemerkung 1. *Da C vollen Rang hat, reicht es in obigem Satz die Lösbarkeit des Gleichungssystems $Mx = B^\top b$ anstatt $Mx = B^\top Cb$ zu zeigen.*

Definition 1. *Ein Netzwerk heißt zusammenhängend, wenn je zwei Knoten durch einen Weg aus Kanten verbunden sind.*

Äquivalente Kriterien dazu liefert folgender Satz welchen wir hier nicht beweisen werden.

Satz 2 (siehe [1], Seite 44)**.** *Für ein Netzwerk mit Inzidenzmatrix B sind folgende Aussagen äquivalent:*

i) *Das Netzwerk ist zusammenhängend.*

ii) *B kann nicht durch Umsortieren von Zeilen und Spalten in die Form*

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

gebracht werden.

iii) *$ker(B) = span(1, ..., 1)^\top$.*

2 Wechselstromkreise

Im Wechselstromkreis liegt ein zeitlich oszillierender Strom vor. Ist die Frequenz ω bekannt, so können wir folgenden Ansatz für die Stromstärke wählen:

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t).$$

Aus dem Ohmschen Gesetz folgt nun

$$U(t) = RI_0 \cos(\omega t) = U_0 \cos(\omega t) \qquad \text{mit } U_0 = RI_0.$$

Wir erkennen also, dass ein Wechselstromkreis, der nur Widerstände und keine weiteren Bauteile enthält anhand der Amplituden genauso simuliert werden kann wie ein Gleichstromkreis. Neue Effekte kommen jedoch durch weitere elektrische Bauteile ins Spiel.

- **Kondensatoren:**

  Ein Kondensator kann elektrische Ladungen speichern. Die Menge der gespeicherten Ladung ist proportional zur angelegten Spannung. Bei Spannungsänderung nimmt ein Kondensator daher Ströme auf bzw. gibt diese ab. Dies wird durch

  $$I(t) = C\dot{U}(t)$$

  beschrieben, wobei C die Kapazität des Kondensators mit der Einheit *Farad* $[F]$ und $\dot{U}(t)$ die Zeitableitung der Spannung U bezeichnet. In einem Wechselstromkreis mit obiger Stromform gilt also

  $$U(t) = \frac{I_0}{C\omega}\sin(\omega t) = \frac{I_0}{C\omega}\cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

  Der Kondensator verursacht also eine Phasenverschiebung um $-\frac{\pi}{2}$ zwischen Strom und Spannung.

- **Spulen:**

  Eine stromdurchflossene Spule erzeugt ein Magnetfeld, dessen Stärke proportional zur Stromstärke ist. In diesem Magnetfeld ist Energie gespeichert, welche beim Aufbau des Magnetfeldes aus dem Strom der Spule entnommen wird. Dadurch entsteht ein Spannungsabfall an der Spule, der proportional zur Änderung der Stromstärke ist, also

  $$U(t) = L\dot{I}(t),$$

  wobei L die Induktivität der Spule mit der Einheit *Henry* $[H]$ beschreibt und $\dot{I}(t)$ die Zeitableitung des Stroms I bezeichnet. Im Wechselstromkreis gilt also

  $$U(t) = -LI_0\omega\sin(\omega t) = L\omega I_0 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}),$$

  es tritt also eine Phasenverschiebung um $+\frac{\pi}{2}$ auf.

Diese Phasenverschiebungen machen die Berechnungen komplizierter. Zur Darstellung von Strom und Spannung ist es hilfreich komplexe Zahlen zu verwenden. Man nutzt dazu die Eulersche Formel

$$e^{i\phi} = \cos(\phi) + i\sin(\phi).$$

Wodurch gilt

$$\cos(\omega t) = Re(e^{i\omega t}), \qquad \text{und} \qquad \sin(\omega t) = Re(-ie^{i\omega t})$$

Damit gilt für den Strom

$$I(t) = I_0 Re(e^{i\omega t}),$$

und für die Spannungsabfälle

- am ohmschen Widerstand gilt $U(t) = Re(RI_0 e^{i\omega t})$,
- am Kondensator gilt $U(t) = Re(-\frac{i}{\omega C} I_0 e^{i\omega t})$,
- an der Spule gilt $U(t) = Re(i\omega L I_0 e^{i\omega t})$.

Wir können dies durch komplexe Impedanzen R, $-\frac{i}{\omega C}$ und $i\omega L$ darstellen, welche die Rolle der reellen Widerstände übernehmen. Sind diese Bauteile auf einem Leiterstück „in Serie“ eingebaut, lassen sich wie bei reellen Widerständen die komplexen Impedanzen addieren.

3 Ein Beispiel (Zeitharmonischer Ansatz)

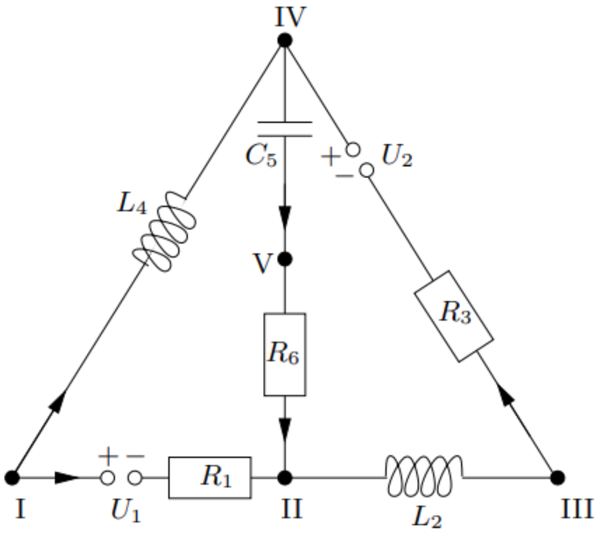

Abbildung 3: Elektrisches Netzwerk mit Kondensatoren und Spulen

Wir betrachten ein Beispiel mit $m = 5$ Knoten und $n = 6$ Kanten. In Abb. 3 sind bereits die Nummerierungen und die positiven Stromrichtungen vorgegeben. Die angelegten Spannungen sind gegeben durch

$$U_1(t) = U_{01}cos(\omega t) \quad \text{und} \quad U_2(t) = U_{02}cos(\omega t).$$

Wichtig ist hier, dass beide Spannungen die gleiche Frequenz aufweisen, ansonsten liegt kein Wechselstromnetz mit bekannter Frequenz vor. Phasenverschiebungen können jedoch mit einigen Überlegungen ins Modell eingebaut werden. Weiters benötigen wir zur Modellierung noch

- einen Potentialvektor $x \in \mathbb{C}^m$,
- einen Stromvektor $y \in \mathbb{C}^n$ und
- einen Spannungsvektor $e \in \mathbb{C}^n$.

Es gelten wieder die Beziehungen

$$e = -Bx \quad \text{und} \quad y = C(e + b).$$

Die Inzidenzmatrix B, die Impedanzmatrix C und der Spannungsvektor b haben folgende Form:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\omega L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i\omega L_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{i\omega C_5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} -U_{01} \\ 0 \\ U_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten wie beim Gleichstrom ein lineares Gleichungssystem, mit dem Unterschied, dass die Koeffizienten in C und b nun im Allgemeinen komplexe Zahlen sind.

Seien nun $R_1 = R_3 = R_6 = 1\Omega$, $L_2 = L_4 = 0,01H$, $C_5 = 0,02F$, $\omega = 50Hz$ sowie $U_{01} = 10V$, $U_{02} = 5V$. Ohne Einheiten folgt damit

$$C = diag(1, -2i, 1, -2i, i, 1) \quad \text{und} \quad b = (-10, 0, 5, 0, 0, 0)^\top.$$

Damit hat das Gleichungssystem $B^\top CBx = B^\top Cb$ die Form

$$\begin{pmatrix} 1-2i & -1 & 0 & 2i & 0 \\ -1 & 2-2i & 2i & 0 & -1 \\ 0 & 2i & 1-2i & -1 & 0 \\ 2i & 0 & -1 & 1-i & -i \\ 0 & -1 & 0 & -i & 1+i \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 10 \\ -10 \\ -5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x = \begin{pmatrix} 2i \\ 2i-6 \\ 2i-5 \\ 0 \\ 4i-2 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei $z \in \mathbb{C}$.

Daraus lassen sich Spannungen und Ströme berechnen:

$$e = -Bx = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2i-5 \\ 2i \\ 2-4i \\ 4+2i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = C(e+b) = \begin{pmatrix} -4 \\ 2i \\ 2i \\ 4 \\ 4+2i \\ 4+2i \end{pmatrix}$$

Um wieder den zeitlichen Verlauf von Spannung und Strom zu erhalten verwenden wir für eine komplexe Zahl $c \in \mathbb{C}$ den Realteil $c(t) = Re(ce^{i\omega t})$. Zum Beispiel hat der Strom in Leiter 5 die Form

$$y_5(t) = Re((4+2i)e^{i\omega t}) = 4cos(\omega t) - 2sin(\omega t).$$

Liegt an den Spannungsquellen eine Phasenverschiebung vor, so enthält der Vektor b komplexe Einträge. Ist beispielsweise $U_2(t) = U_{02}sin(\omega t)$ dann gilt $U_2(t) = Re(-iU_{02}e^{i\omega t})$ und somit

$$b = \begin{pmatrix} -U_{01} \\ 0 \\ -iU_{02} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4 Differential Algebraische Gleichungen

4.1 Was sind Differential Algebraische Gleichungen (DAE - Differential Algebraic Equations)

Dieses Kapitel basiert hauptsächlich auf der Vorlesung *Special Topics Numerical Analysis, Herbert Egger (Johannes Kepler Universität, Linz)*. Die Modellierung dynamischer Systeme bzw. Prozesse führt typischerweise auf mathematische Modelle, die Differential- und algebraische Gleichungen beinhalten.

In abstrakter Form lassen sich diese schreiben als

$$F(t, y(t), \dot{y}(t)) = 0$$

mit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt und $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.

Um eine Lösung eindeutig festzulegen müssen dann ebenso geeignete Anfangswerte gegeben werden.

Diese Form der Gleichung ist aber oft zu allgemein um eine einheitliche Behandlung zu ermöglichen. Deshalb versucht man stattdessen Probleme mit spezieller Struktur zu betrachten. Es gibt mehrere Arten von Differentialalgebraischen Gleichungen. Eine davon ist ein System mit konstanten Koeffizienten. Diese haben die Form

$$E\dot{u}(t) = Au(t) + f(t)$$

mit $E, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, A regulär und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ hinreichend glatt.

4.2 Beispiel: Laden eines Kondensators

Ein Beispiel für ein elektrisches Netzwerk welches durch eine lineare DAE modelliert werden kann das Laden eines Kondensators.

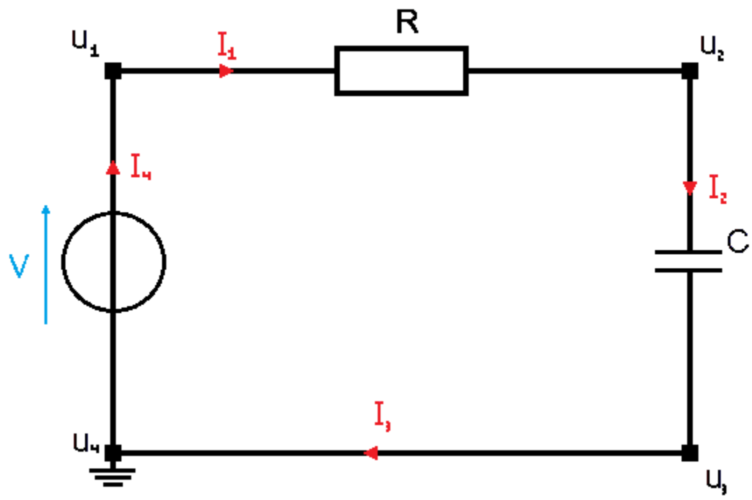

Abbildung 4: Laden eines Kondensators

Vorab lassen sich einige Beobachtungen machen. Die folgenden Formeln verstehen sich alle in Abhängigkeit der Zeit t, dieses Argument geben wir aus Gründen der Lesbarkeit hier jedoch nicht an.

i) Weil alle Knoten nur eine eingehende und eine ausgehende Kante besitzen liefert uns die Kirchhoffsche Knotenregel, dass

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4,$$

ii) Da die Kante 3 keine Bauteile enthält (Kurzschluss) gilt

$$u_3 = u_4,$$

iii) Der Spannungsabfall am Widerstand ist gegeben durch

$$u_2 - u_1 = RI_1,$$

iv) Für den Kondensator gilt

$$I_2 = C(\dot{u}_3 - \dot{u}_2),$$

v) Für die Spannungsquelle gilt

$$u_1 - u_4 = V,$$

vi) Aufgrund der Erdung gilt

$$u_4 = 0.$$

Daraus folgt ein System für u_1, u_2, I_3

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \dot{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & R \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ I_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix},$$

welches die Form $E\dot{y}(t) = Ay(t) + f(t)$ hat und somit eine lineare DAE mit konstanten Koeffizienten ist.

Literatur

[1] C. Eck, H. Garcke, P. Knabner, Mathematische Modellierung, Springer (2017)