

Numerische Analysis, WS 2022
Beispiele für 25.1.2023

46) Sei $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $F(\bar{x}) = 0$ und sei $x^{(0)}$ gegeben, sodass die folgenden Voraussetzungen erfüllt sind:

- a) Die Menge $K := \{x \mid \|F(x)\| \leq \|F(x^{(0)})\|\}$ ist kompakt.
- b) Für alle $x \in K \setminus \{\bar{x}\}$ existiert $F'(x)^{-1}$ und es gilt

$$\limsup_{x \rightarrow \bar{x}} \|F'(x)^{-1}\| \|x - \bar{x}\| < \infty.$$

Zeigen Sie: Das gedämpfte Newtonverfahren mit Startpunkt $x^{(0)}$ konvergiert gegen eine Nullstelle von F .

Die Bedeutung der nächsten beiden Beispiele wird erst in der nächsten VL ersichtlich:

47) Sei B eine $m \times n$ Matrix und $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$. Zeigen Sie: Für jede $m \times n$ Matrix A mit $Au = v$ gilt

$$\|A - B\|_2 \geq \frac{\|v - Bu\|_2}{\|u\|_2}$$

48) Sei B eine $m \times n$ Matrix und $0 \neq u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^m$, $\bar{A} := B + \frac{(v-Bu)u^T}{\|u\|_2^2}$. Zeigen Sie: $\bar{A}u = v$ und für alle $m \times n$ Matrizen A mit $Au = v$ gilt $\|A - B\|_2 \geq \|\bar{A} - B\|_2$.

(Interpretation dieses Results: Unter allen möglichen Matrizen, die die Quasi-Newtonbedingung erfüllen, liefert die Broydenmethode diejenige Matrix $A^{(k+1)}$, die bezüglich der Spektralnorm am wenigsten von $A^{(k)}$ abweicht.)

P3) Erstellen Sie eine MATLAB Funktion

```
function [x, exitflag, iter, f_eval] = solveEq(fun, x0)
```

die für eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, gegeben durch die MATLAB Funktion fun, eine Nullstelle x mit dem gedämpften Newtonverfahren mit Startpunkt x0 ermittelt. Ist die Berechnung erfolgreich, soll exitflag=0 zurückgegeben werden. iter sollen die benötigten Iterationen und f_eval die benötigten Funktionsauswertungen bezeichnen. Dabei soll fun die Signatur

```
function [val, jacobi] = fun(x)
```

besitzen, wobei val den Funktionswert $F(x)$ und jacobi die Jacobimatrix $F'(x)$ beinhaltet. Testen Sie Ihr Programm mit den Funktionen F1, F2 und Startpunkt $x_0 = (10, \dots, 10)$ sowie weiteren Funktionen Ihrer Wahl.

Führen Sie dann die Tests des vorhergehenden Beispiels mit der MATLAB Funktion fsolve zum Lösen nichtlinearer Gleichungen durch und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Geben Sie die m-Files sowie Ihre gut dokumentierten Testbeispiele bis zum Di, 31.1.2023, 23:59 in Moodle ab.