

Numerische Analysis, WS 2022
Beispiele für 14.12.2022

- 31) Sei $[a, b] = [0, 1]$, $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{4}$, $T_{i0} := T_{h_i}(f)$, $i = 0, 1, 2$. Bestimmen Sie explizit die Quadraturformeln T_{11} , T_{21} , T_{22} , die sich durch Extrapolation ergeben (z.B. T_{22} läßt sich in der Form $T_{22} = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f(\frac{1}{4}) + \alpha_2 f(\frac{1}{2}) + \alpha_3 f(\frac{3}{4}) + \alpha_4 f(1)$ schreiben. Gesucht sind die Gewichte $\alpha_0, \dots, \alpha_4$)
- 32) Wie 31), nur für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{3}$.
- 33) Bestimmen Sie mittels Extrapolation mit der Schrittweitenfolge $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{4}$ die Näherungswerte T_{11} , T_{21} , T_{22} für die Integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} \, dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x} \, dx.$$

Wie groß ist der jeweilige Fehler?

- 34) Wie 33), nur für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$, $h_2 = \frac{1}{3}$.

P2) Erstellen Sie eine MATLAB Funktion

```
function [I, exitflag] = E.Trapez(fun, a,b, m_max, N0, e)
```

für die Berechnung des bestimmten Integrals

$$I = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dabei soll **fun** ein Handle auf die zu integrierende Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sein und einen Inputvektor x akzeptieren. Der zurückgegebene Wert sollte ein Vektor y sein, dessen Komponenten $y_i = f(x_i)$ die Funktionswerte an den einzelnen Komponenten von x sind. Startend mit $m = 2$ sollte zuerst das gesamte Tableau T_{ik} , $0 \leq k \leq i \leq m$ berechnet werden. Falls

$$|T_{i+1,k} - T_{i,k}| \leq es$$

wobei $s = |b-a|F$ und F der betragsgrößte Funktionswert von f ist, der bis dahin ausgewertet wurde, soll die Extrapolationsprozedur abgebrochen werden, und die Werte $I = T_{i+1,k+1}$, **exitflag=0** zurückgegeben werden. Sonst wird m um 1 erhöht und die letzte Zeile des Tableaus T_{m0}, \dots, T_{mm} berechnet, solange bis entweder obiges Abbruchkriterium erfüllt ist oder $m = m_max$. Im letzteren Fall soll $I = T_{m_max, m_max}$, **exitflag=1** zurückgegeben werden.

Für die Schrittweiten soll gelten

$$h_0 = \frac{b-a}{N0}, \quad h_1 = \frac{h_0}{2}, \quad h_2 = \frac{h_0}{3}, \dots, h_i = \frac{h_{i-2}}{2}, i > 2.$$

Die Funktion soll auch nur mit 3,4 oder 5 Parametern aufrufbar sein, in diesem Fall sind die Defaultwerte `m_max=6`, `N0=ceil((b-a)/0.1)`, `e=1.e-10`. Achten Sie auf effiziente Programmierung, insbesondere vermeiden Sie unnütze Funktionsauswertungen.

Testen Sie Ihre Prozedur für

$$\int_{-1.25}^1 \sqrt{|x|} \, dx, \quad \int_0^\pi \sin x \, dx, \quad \int_{1.1}^{3.7} e^x - \frac{x^2}{2} \, dx$$

sowie 3 weiteren Funktionen Ihrer Wahl.

Geben Sie den m-File sowie Ihre gut dokumentierten Testbeispiele bis zum Fr., 23.12.2022, 23:59 per Moodle ab.