Numerische Analysis, WS 2022
Beispiele für 9.11.2022

6) Sei $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$. Zeigen Sie: Die Matrix

$$I - 2\frac{vv^H}{\|v\|_2^2}$$

ist unitär.

7) Sei $a \in \mathbb{C}^n$, $\beta = \pm\frac{a_1}{|a_1|}$ falls $a_1 \neq 0$ bzw. beliebig mit $|\beta| = 1$ falls $a_1 = 0$ und sei $v \in \mathbb{C}^n$ gegeben durch

$$v = \begin{pmatrix} a_1 - \beta\|a\|_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Zeigen Sie:

$$(I - 2\frac{vv^H}{\|v\|_2^2})a = \beta\|a\|_2 e_1 \text{ (1.Einheitsvektor)}$$

(Bemerkung: Mit Hilfe dieses Beispiels kann man analog zu reellen Matrizen die Existenz einer QR-Zerlegung für komplexe Matrizen herleiten)

8) Eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix A heißt *diagonaldominant* $:\Longleftrightarrow$

$$a_{ii} > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \ i = 1, \dots, n.$$

Zeigen Sie: Jede diagonaldominante Matrix A ist positiv definit.

9) a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Was sind die Eigenwerte von A. Ist A diagonalisierbar?
Wählen Sie nun zufällig (mit Hilfe des Befehls `rand`) einen Vektor $v \in \mathbb{R}^4$ und berechnen in MATLAB die Matrizen $Q = I - 2\frac{vv^T}{\|v\|_2^2}$ und $\tilde{A} := QAQ^T$. Was sind (theoretisch) die Eigenwerte von $\tilde{A}$ und wie stehen sie in Bezug zu den Eigenwerten von A. Was berechnet MATLAB?
Berechnen Sie nun in MATLAB die Kondition der Eigenvektormatrix X von $\tilde{A}$. Wählen Sie anschließend (wieder mit dem Befehl `rand`) eine zufällige 4×4-Matrix ΔA und berechnen Sie die Eigenwerte der Matrix $\tilde{A}+10^{-12}\Delta A$. Stimmen die Abweichungen dieser Eigenwerte von denen der Matrix $\tilde{A}$ mit den theoretischen Aussagen von Satz 2.5 überein?

b) Wie in a), nur mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Wie in a), nur mit Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

10) Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -8 & 8 & -6 & 4 & -2 \\ -14 & 13 & -9 & 6 & -3 \\ -7 & 6 & -4 & 4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

besitzt die Eigenwerte $(1 \pm i, 1, 2, 3)$ sowie die Eigenvektormatrix (auf 4 Dezimalstellen gerundet)

$$X = \begin{pmatrix} -0.4743 + 0.1581i & -0.4743 - 0.1581i & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.7906 & -0.7906 & -0.4082 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.3162 - 0.1581i & -0.3162 + 0.1581i & -0.8165 & -0.4082 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -0.4082 & -0.8165 & 0.4472 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.4082 & 0.8944 \end{pmatrix}.$$

Für welche der folgenden Werte von $\bar{\lambda}$ wird die inverse Vektoriteration angewandt auf die Matrix $C - \bar{\lambda} I$ mit Startvektor $v^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)^T$ konvergieren? Und wenn sie konvergiert, welcher Eigenwert von C kann berechnet werden?

(a) $\bar{\lambda} = 0$.

(b) $\bar{\lambda} = 1.5 + 0.5i$.

(c) $\bar{\lambda} = 2.15 + i$.

(d) $\bar{\lambda} = 2.5$.

P1) Programmieren Sie eine `MATLAB` Funktion

```
function [lambda,x,exitflag] = EigenWert(A,mu,max_iter)}
```

die mittels inverser Vektoriteration für eine reelle quadratische Matrix `A` denjenigen Eigenwert `lambda` berechnet, der am nächsten bei `mu` liegt. Der Outputvektor `x` soll ein zugehöriger normierter Eigenvektor sein. Ist die Berechnung erfolgreich, soll `exitflag=0`, ansonsten ein anderer Wert zurückgegeben werden. `max_iter` soll eine vorgegebene Maximal Anzahl von Iterationen sein. Die Funktion soll auch nur mit 2 Parametern aufrufbar sein: In diesem Fall soll `max_iter` auf 500 gesetzt werden.

Achten Sie auf effiziente Programmierung! Führen Sie ausreichend Tests durch: auch für Beispiele, wo Verfahren nicht konvergiert bzw. berechnen Sie auch komplexe Eigenwerte von reellen Matrizen. Geben Sie den m-File sowie Ihre gut dokumentierten Testbeispiele bis zum 9.11.2022, 23:59 in Moodle ab.