Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos

Atividade 03

Exercício Big-O

José Antônio Alcântara da Silva de Andrade Mat: 232013031

Professor:
Flávio Leonardo Calvacanti de Moura
Turma 02

Brasília, DF

29 de abril de 2025

Exercício

Sejam $f(n)$, $g(n)$ e $h(n)$ funções definidas em $\mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+^*$. Mostraremos que, se $f(n) = O(g(n))$ e $g(n) = O(h(n))$, então $f(n) = O(h(n))$.

Por hipótese, temos que $f(n) = O(g(n))$. Então, existe algum $c_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c_1$$

E, da mesma forma que $g(n) = O(h(n))$, existe algum $c_2 \in \mathbb{R}_+$ tal que:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{g(n)}{h(n)} = c_2$$

Com isso, consideremos o limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(n)}{h(n)}$$

Mantendo a expressão, multiplica-se e divide-se por $g(n)$ dentro do limite.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(n)}{h(n)}\right) &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(n)}{h(n)} \cdot \frac{g(n)}{g(n)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)} \cdot \frac{g(n)}{h(n)}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{f(n)}{g(n)}\right) \cdot \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{g(n)}{h(n)}\right) \\
&= c_1 \cdot c_2
\end{aligned}$$

Como c_1 e c_2 são ambos constantes reais positivas, teremos que sua multiplicação também será real e positiva. Ou seja, o limite tende a um valor constante, real e positivo, o que, por definição, indica $f(n) = O(h(n))$, como queríamos provar.