Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos

Atividade 01

Correção de Algoritmos

José Antônio Alcântara da Silva de Andrade Mat: 232013031

<u>Professor:</u>
Flávio Leonardo Calvacanti de Moura
Turma 02

Brasília, DF

27 de março de 2025

Exercício 1

"Prove que $|\, l_1 \circ l_2 \,| = |\, l_1 \,| + |\, l_2 \,|$, quaisquer sejam as listas l_1 e l_2."

A prova será realizada com a indução de l_1, com l_2 assumida genérica. Para tal, primeiro realiza-se a verificação do caso base $l_1 = nil$.

$$\begin{aligned}
|\, l_1 \circ l_2 \,| &= |\, nil \circ l_2 \,| \\
&= |\, l_2 \,| \\
&= 0 + |\, l_2 \,| \\
&= |\, nil \,| + |\, l_2 \,| \\
&= |\, l_1 \,| + |\, l_2 \,|
\end{aligned}$$

Em seguida faz-se $l_1 = a :: l_1'$ e tem como hipótese indutiva $|\, l_1' \circ l_2 \,| = |\, l_1' \,| + |\, l_2 \,|$. Enfim, realiza-se o passo indutivo.

$$\begin{aligned}
|\, l_1 \circ l_2 \,| &= |\, (a :: l_1') \circ l_2 \,| \\
&= |\, a :: (l_1' \circ l_2) \,| \\
&= 1 + |\, l_1' \circ l_2| \\
&\overset{\text{hi}}{=} 1 + |\, l_1' \,| + |\, l_2 \,| \\
&= |\, a :: l_1' \,| + |\, l_2 \,| \\
&= |\, l_1 \,| + |\, l_2 \,|
\end{aligned}$$

Portanto provando a propriedade.

Exercício 2

"Prove que $l \circ nil = l$ qualquer seja a lista l."

Caso base será $l = nil$.

$$\begin{aligned}
l \circ nil &= nil \circ nil \\
&= nil = l
\end{aligned}$$

Faz-se $l = a :: l'$ e tem como hipótese indutiva $l' \circ nil = l'$. Segue passo indutivo.

$$\begin{aligned}
l \circ nil &= (a :: l') \circ nil \\
&= a :: (l' \circ nil) \\
&\overset{\text{hi}}{=} a :: l' \\
&= l
\end{aligned}$$

Portanto provando a propriedade.

Exercício 3

"Prove que a concatenação de listas é associativa, isto é, $(l_1 \circ l_2) \circ l_3 = l_1 \circ (l_2 \circ l_3)$ quaisquer que sejam as listas l_1, l_2 e l_3."

A prova será realizada com a indução de l_1, com l_2 e l_3 assumidas genéricas. O caso base será $l_1 = nil$.

$$\begin{aligned}
(l_1 \circ l_2) \circ l_3 &= (nil \circ l_2) \circ l_3 \\
&= (l_2) \circ l_3 \\
&= l_2 \circ l_3 \\
&= nil \circ (l_2 \circ l_3) \\
&= l_1 \circ (l_2 \circ l_3)
\end{aligned}$$

Faz-se $l_1 = a :: l_1'$ e tem como hipótese indutiva $(l_1' \circ l_2) \circ l_3 = l_1' \circ (l_2 \circ l_3)$. Segue passo indutivo.

$$\begin{aligned}
(l_1 \circ l_2) \circ l_3 &= ((a :: l_1') \circ l_2) \circ l_3 \\
&= (a :: (l_1' \circ l_2)) \circ l_3 \\
&= a :: ((l_1' \circ l_2)) \circ l_3) \\
&\overset{\text{hi}}{=} a :: (l_1' \circ (l_2 \circ l_3)) \\
&= (a :: l_1') \circ (l_2 \circ l_3) \\
&= l_1 \circ (l_2 \circ l_3)
\end{aligned}$$

Portanto provando a propriedade.

Exercício 4

"Prove que $|\, rev(l) \,| = |\, l \,|$ qualquer que seja a lista l."

Caso base será $l = nil$.

$$\begin{aligned}
|\, rev(l) \,| &= |\, rev(nil) \,| \\
&= |\, nil \,| = |\, l \,|
\end{aligned}$$

Faz-se $l = a :: l'$ e tem como hipótese indutiva $|\, rev(l') \,| = |\, l' \,|$. Segue passo indutivo.

$$\begin{aligned}
|\, rev(l) \,| &= |\, (rev(l')) \circ (a :: nil) \,| \\
&\overset{1}{=} |\, rev(l') \,| + |\, (a :: nil) \,| \\
&\overset{hi}{=} |\, l' \,| + 1 \\
&= 1 + |\, l' \,| \\
&= |\, a :: l' \,| \\
&= |\, l \,|
\end{aligned}$$

Portanto provando a propriedade. Note que foi necessário o uso da propriedade obtida no exercício 1 para a resolução.

Exercício 5

"Prove que $rev(l_1 \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))$, quaisquer que sejam as listas l_1 e l_2."

A prova será realizada com a indução de l_1, com l_2 assumida genérica. O caso base será $l_1 = nil$.

$$
\begin{aligned}
rev(nil \circ l_2) &= rev(l_2) \\
&\overset{2}{=} (rev(l_2)) \circ nil \\
&= (rev(l_2)) \circ (rev(nil)) \\
&= (rev(l_2)) \circ (rev(l_1))
\end{aligned}
$$

Note que foi necessário o uso da propriedade do exercício 2. Faz-se $l_1 = a :: l_1'$ e tem como hipótese indutiva $rev(l_1' \circ l_2) = (rev(l_2)) \circ (rev(l_1'))$. Segue passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
rev(l_1 \circ l_2) &= rev((a :: l_1') \circ l_2) \\
&= rev(a :: (l_1' \circ l_2)) \\
&= rev(l_1' \circ l_2) \circ (a :: nil) \\
&\overset{hi}{=} (\,(rev(l_2)) \circ (rev(l_1'))\,) \circ (a :: nil) \\
&\overset{3}{=} (rev(l_2)) \circ (\,(rev(l_1')) \circ (a :: nil)\,) \\
&= (rev(l_2) \circ (rev(a :: l_1')) \\
&= (rev(l_2) \circ (rev(l_1))
\end{aligned}
$$

Portanto provando a propriedade. Note que foi necessário o uso da propriedade do exercício 3.

Exercício 6

"Prove que $rev(rev(l)) = l$, qualquer que seja a lista l."

Caso base será $l = nil$.

$$
\begin{aligned}
rev(rev(l)) &= rev(rev(nil)) \\
&= rev(nil) \\
&= nil = l
\end{aligned}
$$

Faz-se $l = a :: l'$ e tem como hipótese indutiva $rev(rev(l')) = l'$. Segue passo indutivo.

$$
\begin{aligned}
rev(rev(l)) &= rev(\,(rev(l')) \circ (a :: nil)\,) \\
&\overset{5}{=} rev(a :: nil) \circ rev(rev(l')) \\
&\overset{hi}{=} (nil :: a) \circ l' \\
&= a :: l' = l
\end{aligned}
$$

Portanto provando a propriedade. Note que foi necessário o uso da propriedade obtida no exercício 5 para a resolução.