Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos

Atividade 05

José Antônio Alcântara da Silva de Andrade Mat: 232013031

Professor:
Flávio Leonardo Calvacanti de Moura
Turma 02

Brasília, DF

13 de maio de 2025

Teorema Mestre

Seja $T(n)$ uma função eventualmente não-decrescente que satisfaz a recorrência $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ para $n = b^k$ com $k \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, $T(1) = c$. Onde $a \geq 1$, $b \geq 2$ e $c \geq 0$. Se $f(n) = \Theta(n^d)$, onde $d \geq 0$, então:

$$T(n) = \begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^d \\ \Theta(n^d \cdot \log_{10} n) & \text{se } a = b^d \\ \Theta(n^d) & \text{se } a < b^d \end{cases}$$

Exercício

Item 1

Deve-se resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = T(2n/3) + 1$.

Para esse tipo de equação de recorrência, utilizamos do Teorema Mestre. Primeiramente, diremos que o caso base será $T(1) = c$ com $c \in \mathbb{R}_+$. Conseguinte, identifica-se todos os valores relacionados ao Teorema Mestre:

$$\begin{aligned} f(n) &= 1 \\ a &= 1 \\ b &= 3/2 \end{aligned}$$

Como $f(n) = 1$, obtemos que $f(n) = \Theta(1) = \Theta(n^0)$, ou seja, $d = 0$. Então $b^d = (3/2)^0 = 1 \implies a = b^d$, caindo no segundo caso do Teorema Mestre.

O segundo caso diz que $T(n) = \Theta(n^d \cdot \log_{10} n) = \Theta(\log_{10} n)$, resolvendo a recorrência.

Item 2

Deve-se resolver a seguinte equação de recorrência: $T(n) = T(n-1) + n$.

Pode-se obter uma fórmula generalizada para essa recorrência por meio de substituição. Primeiramente, define-se o caso base como $T(1) = a$, com $a \in \mathbb{R}$. Considere, então, a seguinte sequência:

$$\begin{aligned} T(1) &= a \\ T(2) = T(1) + 2 &= a + 2 \\ T(3) = T(2) + 3 &= a + 2 + 3 \\ &\vdots \\ T(k) = T(k-1) + k &= a + (2 + 3 + \cdots + (k-1) + k) \end{aligned}$$

Como $(2 + 3 + \cdots + k)$ representa a soma $\sum_{i=2}^{k} i$, podemos obter sua fórmula e, por fim, generalizar $T(n)$:

$$T(n) = a + \frac{(n+2)(n-1)}{2}$$

Como $(n+2)(n-1)/2 = \Theta(n^2)$, e a é uma constante, teremos que $T(n) = \Theta(n^2)$, resolvendo a recorrência.