Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos

Atividade 12

3-SAT $\leq_p$ VERTEX-COVER

José Antônio Alcântara da Silva de Andrade Mat: 232013031

Professor:
Flávio Leonardo Calvacanti de Moura
Turma 02

Brasília, DF

10 de julho de 2025

Exercício

"Mostre que VERTEX-COVER é um problema NP-Hard a partir da redução de 3-SAT."

Resolução

Para reduzir 3-SAT em VERTEX-COVER, precisa-se garatir que uma equação 3-SAT ϕ pode ser satisfeita se e somente se seu grafo G equivalente possuir uma cobertura de exatamente γ vértices. O objetivo é, então, definir o grafo G equivalente e o valor de γ. Pode-se modelar o comportamento de 3-SAT em formato de VERTEX-COVER separando as cláusulas e os literais da equação ϕ em duas diferentes secções em G.

Primeiramente, para cada literal l_j, cria-se um par de nós (l_j) e $(\neg l_j)$, representando o estado 1 e 0 que um literal pode atender, respectivamente. Tais são conectados com uma aresta, permitindo que apenas um seja incluído na cobertura.

Em seguida, para cada cláusula $(l_i \vee l_j \vee l_k)$ cria-se um trio de nós $\{(l_i), (l_j), (l_k)\}$ conectados dois a dois por arestas, cada qual representando o argumento da cláusula. Adicionalmente, conecta-se cada argumento com seu nó equivalente na estrutura de literais anteriormente descrita. Agora, basta escolher um dos literais verdadeiros e adicionar os outros dois na cobertura.

Note, agora, que para que a varredura mínima seja atendida, γ deve possuir um dos dois vértices da categoria dos literais, e dois dos três vértices da categoria das cláusulas. Para uma equação ϕ que contém r literais e s cláusulas, a varredura do gráfico G equivalente deve ser de tamanho $\gamma = r + 2s$.

Conversamente, uma varredura em G de tamanho γ também garante a satisfação da equação ϕ equivalente. A cobertura deve possuir r nós da categoria dos literais e $2s$ da categoria das cláusulas. Para cada um dos nós da categoria dos literais designamos sua marcação como verdadeiro — ou seja, se $l_i = 1$ então o vértice (l_i) estará na varredura, e se $\neg l_i = 1$ então o vértice $(\neg l_i)$ estará na varredura. Similarmente, após adicionar dois nós da cláusula na cobertura, o terceiro literal requisita que seu nó correspondente esteja incluso na varredura — ou seja, que seja verdadeiro, para que a cláusula seja verdadeira.

Desta forma, prova-se que 3-SAT pode ser polinomialmente reduzido a um problema de VERTEX-COVER. Como 3-SAT é NP-Hard, isso prova que VERTEX-COVER deve ser, também, NP-Hard. Adicionalmente, como a verificação de VERTEX-COVER é P (VERTEX-COVER $\in$ NP), isso também prova que VERTEX-COVER deve ser NP-Complete.