Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação
Projeto e Análise de Algoritmos

Atividade 07

José Antônio Alcântara da Silva de Andrade Mat: 232013031

Professor:
Flávio Leonardo Calvacanti de Moura
Turma 02

Brasília, DF

3 de junho de 2025

Exercício

"Mostre que, em um heap de n elementos e raiz $A[i]$, cada uma das subárvores com raiz em $2i$ e $2i+1$ têm, no máximo, $2n/3$ nós."

Resolução

Considere uma estrutura de heap com n nós implementada como um subvetor $A[i..(i+n)]$ de $A[1..l]$ ($1 \leq i \leq i+n \leq l$) tal que independente da raiz $A[j]$ escolhida, o filho à esquerda terá índice $2j$ e o filho à direita índice $2j+1$.

Dessa forma, observa-se que o maior heap possível será aquele que cobre o vetor inteiro, com raiz $A[1]$: todas as outras possíveis raízes desconsideram elementos de níveis superiores. Portanto, se a propriedade for válida à raiz $A[1]$, ela será válida para toda outra raíz do heap.

Note, também, que, proporcionalmente, a maior quantidade de nós nos filhos de $A[1]$ (neste caso, $A[2]$ e $A[3]$) ocorre quando o tamanho do heap $n = 3 \cdot 2^{k-2} - 1$ com $k \in \mathbb{N}$ onde $k \geq 2$ é a altura do heap. Se diminuírmos o tamanho de n, tanto o ramo da esquerda quanto o total diminuirá, facilitando a validade da propriedade. Se aumentarmos o valor de n, o tamanho total aumenta enquanto o ramo da esquerda mantém estático, e o ramo da direita está apenas alcançando o tamanho do ramo esquerdo.

Os casos $k \leq 1$ são excluídos nessa definição, mas tais serão analizados individualmente.

No caso geral, teremos que a quantidade de nós no ramo da esquerda ($A[2]$) será $2^{k-1} - 1$, enquanto a quantidade do ramo da direita ($A[3]$) será $2^{k-2} - 1$. Note que, para o ramo da esquerda:

$$
\begin{aligned}
2^{k-1} - 1 &\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot 2^{k-2} - 1)}{3} \\
2^{k-1} - 1 &\leq \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 2}{3} \\
2^{k-1} - 1 &\leq 2^{k-1} - \frac{2}{3} \\
-1 &\leq -\frac{2}{3} \\
3 &\geq 2
\end{aligned}
$$

É verdade, e, para o ramo da direita:

$$
\begin{aligned}
2^{k-2} - 1 &\leq \frac{2 \cdot (3 \cdot 2^{k-2} - 1)}{3} \\
2^{k-2} - 1 &\leq \frac{3 \cdot 2^{k-1} - 2}{3} \\
2^{k-2} - 1 &\leq 2^{k-1} - \frac{2}{3} \\
-1 + \frac{2}{3} &\leq 2^{k-1} - 2^{k-2} \\
-\frac{1}{3} &\leq 2^{k-2}
\end{aligned}
$$

O que também é verdade, uma vez que $k \geq 2$. Ou seja, a propriedade é válida para heaps de altura $k \geq 2$.

Para o caso $k = 1$, teremos um heap de apenas um nó: $A[1]$. Ou seja, teremos que a quantidade de nós nos filhos da raíz é zero, assim cumprindo a propriedade, uma vez que: $0 \leq 2/3$. Já para o caso $k = 0$, o resultado é semelhante: $0 \leq 0$.

Portanto, a propriedade vale para todo heap.