关于矩阵分解的专题讨论

子木月日

January 24, 2015

1 相关结论及其证明

1.1 矩阵分解之相抵分解

结论 1.1.1 设$A \in M_{m\times n}(F), r(A) = r$，则存在可逆阵$P,Q$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

注 1 此结论称为相抵分解，也可叫等价分解；后面的专题中会涉及到等价标准形的讨论，其实矩阵分解的思想和矩阵标准形的思想是同一内容的不同表现形式，其中$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为矩阵的相抵标准形，以后类似的还会有相合标准形，相似标准形，正交相似标准形

结论 1.1.2 设A是秩为r的$m\times n$矩阵，则存在$m\times r$列满秩矩阵H和$r\times n$行满秩矩阵L，使得

$$A = HL$$

证明一 由等价分解知，存在可逆阵P,Q，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q$$

取

$$H = P\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} E_r & 0 \end{pmatrix} Q$$

则结论成立

注 2 此结论称为满秩分解，若A有另一个满秩分解$A = H_1L_1$，则存在r阶可逆阵P，使得

$$H = H_1P, L = P^{-1}L_1$$

结论 1.1.3 设$A(\lambda)\in M_{mn}(F(\lambda)), r(A(\lambda))=r$，则存在可逆的$\lambda$矩阵$P(\lambda), Q(\lambda)$，使得

$$A(\lambda)=P(\lambda)\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & \ddots & & \\ & & d_r(\lambda) & \\ & & & 0 \end{pmatrix} Q(\lambda)$$

其中$d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$为不变因子，且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$；一般地，对于$n$阶$\lambda$矩阵$A(\lambda)$，存在可逆的$\lambda$矩阵$P(\lambda), Q(\lambda)$，使得

$$P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n(\lambda) \end{pmatrix}$$

注 3 这里是λ矩阵的相抵分解，或称为等价分解，其中等价标准形保持了不变因子，行列式因子，初等因子，秩不变

1.2 矩阵分解之相合分解

结论 1.2.1 设A为n阶对称阵，则存在可逆阵P，使得

$$A=P'\begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} P$$

证明 对对称矩阵A的阶数n应用数学归纳法.当$n=1$时结论显然成立，假设对于$n-1$阶对称阵结论成立，下面证明对n阶对称阵A结论成立.

设$A=(a_{ij})_{n\times n}$，若$A=0$，则结论显然成立；若$A\neq 0$，则不妨设$a_{11}\neq 0$，否则总可以通过交换行与列的合同初等变换，使得$a_{11}\neq 0$，此时记

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha' \\ \alpha & A_1 \end{pmatrix}$$

其中α为列向量，A_1为$n-1$阶对称阵.由合同变换知

$$\begin{pmatrix} 1 & -{a_{11}}^{-1}\alpha' \\ 0 & E \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha' \\ \alpha & A_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -{a_{11}}^{-1}\alpha' \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1-{a_{11}}^{-1}\alpha\alpha' \end{pmatrix}$$

取$P_1=\begin{pmatrix} 1 & -{a_{11}}^{-1}\alpha' \\ 0 & E \end{pmatrix}$，则

$$P_1{}'AP_1=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & A_1-{a_{11}}^{-1}\alpha\alpha' \end{pmatrix}$$

其中$n-1$阶对称阵$A_2=A_1-{a_{11}}^{-1}\alpha\alpha'$，则由归纳假设知，存在$n-1$阶可逆阵$P_2$，使得

$$
{P_2}'A_2P_2=\begin{pmatrix} a_2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}
$$

取$P=P_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix}$，则结论成立，其中$a_1=a_{11}$

注 4 这里是对称阵的相合分解，也叫合同分解，下面是这个定理的一个推论：设A为n阶对称阵且秩为r，则存在可逆阵P，使得

$$
A=P'\begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}P
$$

注 5 关于合同变换我们会在合同标准形之合同变换的专题中有所讨论

结论 1.2.2 设A为n阶实对称阵，则存在可逆阵P，使得

$$
A=P'\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}P
$$

其中正,负惯性指数p,q由A唯一确定

证明一 存在性.由A实对称知，存在可逆阵P_1，使得

$$
{P_1}'AP_1=\operatorname{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)
$$

现不妨设$a_1,\cdots,a_p>0,a_{p+1},\cdots,a_{p+q}<0,a_{p+q+1}=\cdots=a_n=0$，取

$$
P_2=\operatorname{diag}\left(\sqrt{a_1},\cdots,\sqrt{a_p},\sqrt{|a_{p+1}|},\cdots,\sqrt{|a_{p+q}|},1,\cdots,1\right)^{-1}
$$

则$P=P_1P_2$即为所证

唯一性.设A同时合同于$\operatorname{diag}(E_p,-E_q,0)$和$\operatorname{diag}(E_{p_1},-E_{q_1},0)$，则存在可逆阵$M$，使得

$$
M\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0 \end{pmatrix}M'=\begin{pmatrix} E_{p_1} & & \\ & -E_{q_1} & \\ & & 0 \end{pmatrix}
$$

令(M_1,M_2,M_3)为M前p_1行，其中M_1为$p_1\times p$矩阵，M_2为$p_1\times q$矩阵，从而

$$(M_1,M_2,M_3)\begin{pmatrix} E_p & & \\ & -E_q & \\ & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1{}' \\ M_2{}' \\ M_3{}'\end{pmatrix}=E_{p_1}$$

即有

$$M_1M_1{}'-M_2M_2{}'=E_{p_1}$$

于是$M_1M_1{}'=M_2M_2{}'+E_{p_1}$，从而可知$M_1M_1{}'$正定，则$r\left(M_1M_1{}'\right)=p_1$,而$r\left(M_1M_1{}'\right)\leqslant r\left(M_1\right)\leqslant p$，故$p_1\leqslant p$，又同理可知$p\leqslant p_1$，所以$p_1=p$；而合同变换不改变矩阵的秩，所以$q=q_1$

注 6 这里是实对称阵的相合分解，也称合同分解，也称为**Sylvester**惯性定理；后面还有实对称阵的正交相似分解

注 7 方法一的唯一性是从矩阵合同的角度来证明的，当然也可从型的角度来证明，一般教材上有证明过程.惯性定理的另一种叙述：实二次型$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=x'Ax$经过可逆线性变换可转化为平方和，其中正负个数由$f$唯一确定

注 8 下面我来写一下惯性定理的几个推论，而且这些推论的应用会在例题中一一体现.

(1)设A为n阶实可逆对称阵，则存在可逆阵P，使得

$$A=P'\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q\end{pmatrix}P$$

(2)设A为n阶实对称正定阵，则存在可逆阵P，使得

$$A=P'EP=P'P$$

(3)设A为n阶实对称半正定阵且秩为r，则存在可逆阵P，使得

$$A=P'\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0\end{pmatrix}P$$

结论 1.2.3 设A为n阶反对称阵，则存在可逆阵P，使得

$$A=P'\begin{pmatrix} J & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}P$$

其中$J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$

证明 对反对称阵A的阶数n用数学归纳法.对于一阶反对称阵结论显然成立，对于二阶反对称阵$A=\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$，若$a_{12}=0$，则结论显然成立；若$a_{12}\neq 0$，则对$A$作合同变换，将$A$的第一行及第一列乘以${a_{12}}^{-1}$，即得$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，因此结论成立.假设对阶数小于$n-1$的反对称阵结论成立，下证对$n$阶反对称阵结论也成立

若$A=0$，则结论显然成立；若$A\neq 0$，则总可以用交换行与列的合同变换，使得A的元素a_{12}不为零，再对A作合同变换，将A的第一行除以a_{12}以及第一列除以a_{12}，则存在可逆阵P_1，使得

$$P_1{}'AP_1=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中$A_{11}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$，$A_{22}$是$n-2$阶矩阵，从而由引理可知，存在可逆阵$P_2$，使得

$$P_2{}'P_1{}'AP_1P_2=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}$$

其中B_{22}为$n-2$阶反对称阵，于是由归纳假设知，存在可逆阵P_3，使得

$$P_3{}'B_{22}P_3=\operatorname{diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},0,\cdots,0\right)$$

取$P=P_1P_2\begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & P_3 \end{pmatrix}$，则有结论成立

注 9 这里是反对称阵的合同分解，后面还有实反对称阵的正交相似分解

引理：设分块矩阵$G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为反对称阵，且$A$可逆，则存在可逆阵$P$，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

其中H是与D同阶的反对称阵；其实可以按对称阵的证明过程那样由合同变换可知，而不用引理，这里为了排版的方便，也为了把经常会用到的小结论抽离出来；对称阵也有类似的结论，证明过程可参考下面附录

注 10

1.3 矩阵分解之相似分解

结论 1.3.1 设$A\in M_n(F)$且A的特征值均在F中，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P^{-1}$$

证明 对矩阵A的阶数应用数学归纳法.当$n=1$时结论显然成立，假设结论对$n-1$阶矩阵成立，下面证明对n阶矩阵结论也成立.

设λ_1为A的一个特征值，α_1为对应的特征向量，即$A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1$，将$\alpha_1$扩充为$F^n$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，记$P_1=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$P_1{}^{-1}AP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & *\\ 0 & A_1\end{pmatrix}$$

这里A_1都是$n-1$阶复矩阵，则由归纳假设知存在$n-1$阶可逆阵P_2，使得

$$P_2{}^{-1}A_1P_2=\begin{pmatrix}\lambda_2 & & *\\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

取$P=P_1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}$，则有结论成立

注 11 这里是**Schur**三角化分解

注 12 （**Schur**定理）设$A\in M_n(C)$，则存在酉矩阵Q，使得

$$Q^HAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & *\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

结论 1.3.2 设$A\in M_n(C)$，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix}P^{-1}$$

其中

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & \lambda_i & \end{pmatrix}_{n_i\times n_i},\sum_{i=1}^{s}n_i=n$$

注 13 这里是矩阵的**Jordan**分解，也是若当标准形理论；由**Jordan**标准形理论可知，幂零矩阵的循环分解：设n阶幂零阵A的幂零指数为n，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

其中，若幂零阵A满足$A^n=0,A^{n-1}\neq 0$，则称n为幂零指数；幂零矩阵的循环分解的应用会在例题得到体现，另外关于**Jordan** 标准形的知识会在相似标准形之若当标准形中有所讨论

结论 1.3.3 设数域F上的n阶幂零阵A的幂零指数为k，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}J_k(0) & A_1\\ 0 & A_2\end{pmatrix}P^{-1}$$

其中

$$J_k(0)=\begin{pmatrix}0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0\end{pmatrix}_{k\times k}$$

证明 易知存在$\alpha\in F^n$，使得$A^k\alpha=0,A^{k-1}\alpha\neq 0$，下证

$$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$$

线性无关.设

$$l_0\alpha+l_1A\alpha+\cdots+l_{k-1}A^{k-1}\alpha=0$$

用A^{k-1}作用上式两边可得，$l_0A^{k-1}\alpha=0$，而$A^{k-1}\alpha\neq 0$，故$l_0=0$，同理可证$l_1=\cdots=l_{k-1}=0$，于是将

$$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha$$

扩充为F^n的一组基

$$\alpha,A\alpha,\cdots,A^{k-1}\alpha,\beta_{k+1},\cdots,\beta_n$$

则A在此基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix}J_k(0) & A_1\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$$

结论 1.3.4 设A为n阶幂等阵且其秩为r，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

证明一 设$r(A)=r$，则存在可逆阵P_1,Q_1，使得

$$A=P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1$$

于是

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1P_1=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_4 & B_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中B_1为r阶方阵，从而由$A^2=A$知

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} B_1{}^2 & B_1B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即$(B_1,B_2)=\left(B_1{}^2,B_1B_2\right)=B_1(B_1,B_2)$，也即是

$$(B_1-E_r)(B_1,B_2)=0$$

而$r(B_1,B_2)=r$，则由**Sylvester**公式易知$B_1=E_r$，因此

$$P_1^{-1}AP_1=\begin{pmatrix} E_r & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取$P=P_1\begin{pmatrix} E_r & -B_2 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} E & -B_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1}P_1^{-1}AP_1\begin{pmatrix} E & -B_2 \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明二 首先，我们可证$\mathrm{F}^n=\mathrm{Ker}(E-A)\oplus\mathrm{Ker}(A)$，事实上$\forall\alpha\in\mathbb{F}^n$，有

$$\alpha=A\alpha+\alpha-A\alpha\in\mathrm{Ker}(E-A)+\mathrm{Ker}(A)$$

即$\mathbb{F}^n\subseteq\mathrm{Ker}(E-A)+\mathrm{Ker}(A)$，而显然$\mathrm{Ker}(E-A)+\mathrm{Ker}(A)\subseteq\mathbb{F}^n$，故$\mathbb{F}^n=\mathrm{Ker}(E-A)+\mathrm{Ker}(A)$；另一方面，$\forall\alpha\in\mathrm{Ker}(E-A)\cap\mathrm{Ker}(A)$，有

$$(E-A)\alpha=0,A\alpha=0$$

即知$\alpha=0$，所以直和分解得证

其次，取$\operatorname{Ker}(E-A)$的一组基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，取$\operatorname{Ker}(A)$ 的一组基$\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$，则$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$\mathrm{F}^n$的一组基，于是

$$A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

证明三 由$A^2=A$知，A的零化多项式为$g(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$.由于$g(\lambda)$无重根，所以$A$ 可对角化，而A的特征值只能为$0,1$，故结论成立

证明四 由若当标准形理论知，存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$$

则由$A^2=A$知${J_i}^2=J_i$，记$J_i=\lambda_iE+N_i$，则

$${\lambda_i}^2E+2\lambda_iN_i+{N_i}^2=\lambda_iE+N_i$$

即$N_i=0,{\lambda_i}^2=\lambda_i$，故$J_i=0$或$1$，这说明$A$相似于对角阵

注 14 这里是幂等矩阵的分解，对合阵以及类似于幂等阵的一类矩阵也有类似的分解；由幂等矩阵的相似分解可知其秩等于其迹，下面说一下幂等阵的等价命题：设$A\in M_n(F)$，则

$$\begin{aligned} A^2=A\Leftrightarrow r(E-A)+r(A)=n\Leftrightarrow \mathrm{F}^n=\operatorname{Ker}(E-A)\oplus\operatorname{Ker}(A) \\ \Leftrightarrow A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} \end{aligned}$$

由等价命题的后面两个可知，证明相似分解的问题可考虑直和分解，因此以后看到相似分解的问题应该想到直和分解，看到直和分解的问题也可想到相似分解

注 15 我个人比较喜欢证明方法二，其中那个向量的分解是经过逻辑推导出来的，当然凭经验写出来那最好不过了；关于证明方法三中出现的矩阵对角化的问题可见相似标准形之相似对角化的专题讨论；证明方法一主要体现了等价标准形的思想，矩阵分块的思想，相似初等变换的思想，还有那个有点难想的$B_1=E_r$，这里涉及到关于矩阵的秩的问题，可见矩阵的标准形的特征之矩阵的秩的专题讨论；当然这里$B_1=E_r$也可由$(B_1-E_r)(B_1,B_2)=0$中的矩阵(B_1,B_2) 行满秩容易得到，因为这是满秩分解理论的一个小结论，这个小结论在等价标准形中有所讨论

结论 1.3.5 设$A\in M_n(F)$，若$r(A)=r(A^2)$，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中D为可逆阵

证明一 设$r(A)=r$，则存在可逆阵P_1,Q_1，使得

$$A=P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1$$

将Q_1P_1分块为$Q_1P_1=\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ D_4 & D_2 \end{pmatrix}$，其中$D_1$为$r$阶方阵，于是

$$A^2=P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1$$

$$A=P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1P_1\cdot {P_1}^{-1}=P_1\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}{P_1}^{-1}$$

由$r(A)=r(A^2)$知，$r(D_1)=r$，即D_1可逆，从而由相似初等变换知

$$\begin{pmatrix} E_r & -{D_1}^{-1}D_3 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & -{D_1}^{-1}D_3 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取

$$P=P_1\begin{pmatrix} E_r & -{D_1}^{-1}D_3 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

则结论成立，其中$D=D_1$

注 16 设$A\in M_n(F)$，则

$$r(A)=r\left(A^2\right)\Leftrightarrow \mathrm{F}^n=\mathrm{Im}\,A\oplus \mathrm{Ker}A\Leftrightarrow A=P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

结论 1.3.6 设$A\in M_n(F)$，则存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中D为可逆阵，N为幂零阵

证明一 对阶数n应用数学归纳法.当$n=1$时结论显然成立.假设当阶数小于n时成立，下面证明阶数为n时成立.

若A可逆或幂零时结论显然成立，若不然可设A有等价分解

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

其中P_1, Q为可逆阵，从而

$$A = P_1 \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} QP_1 \cdot {P_1}^{-1} = P_1 \begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} {P_1}^{-1}$$

其中A_1为r阶方阵.由归纳假设知，存在可逆阵P_2，使得

$$A_1 = P_2 \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} {P_2}^{-1}$$

于是

$$A = P_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 & 0 & B_1 \\ 0 & N_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {P_2}^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} {P_1}^{-1}$$

取

$$P = P_1 \begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & {A_2}^{-1}B_1 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

则结论成立，其中

$$D = A_2, N = \begin{pmatrix} N_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

证明二 设σ为n维线性空间V上的线性变换，则我们将问题转化为找出σ的不变子空间V_1和V_2，使得$V = V_1 \oplus V_2$，且$\sigma|_{V_1}$是V_1的可逆线性变换，$\sigma|_{V_2}$是V_2的幂零线性变换. 由于$Ker\sigma \subseteq Ker\sigma^2 \subseteq \cdots \subseteq Ker\sigma^n \subseteq \cdots$，则存在正整数$m$，使得

$$\mathrm{Ker}\sigma^m = \mathrm{Ker}\sigma^{m+i}, i = 1, 2, \cdots$$

首先，我们来证明$V = \mathrm{Im}\,\sigma^m \oplus \mathrm{Ker}\sigma^m$，事实上$\forall \alpha \in \mathrm{Im}\,\sigma^m \cap \mathrm{Ker}\sigma^m$，有$\sigma^m\alpha = 0$，且存在$\beta \in V$，使得$\sigma^m\beta = \alpha$，于是

$$\sigma^{2m}\beta = \sigma^m\alpha = 0$$

即$\beta \in \mathrm{Ker}\sigma^{2m} = \mathrm{Ker}\sigma^m$，所以$\alpha = \sigma^m\beta = 0$；而显然有$\dim \mathrm{Im}\,\sigma^m + \dim \mathrm{Ker}\sigma^m = n$，故得证

其次，我们来证明$\sigma|_{\mathrm{Im}\,\sigma^m}$是可逆变换，$\sigma|_{\mathrm{Ker}\sigma^m}$是幂零变换.事实上，对$\forall \sigma^m x \in \mathrm{Im}\,\sigma^m, \sigma\left(\sigma^m x\right)=0$可推出$x \in \mathrm{Ker}\sigma^{m+1}=\mathrm{Ker}\sigma^m$，即$\sigma^m x=0$，这说明$\sigma|_{\mathrm{Im}\,\sigma^m}$是单射，则为双射，即为可逆变换；另外对$\forall x \in \mathrm{Ker}\sigma^m$，有$\sigma^m x=0$，即$\sigma|_{\mathrm{Ker}\sigma^m}$是幂零变换

注 17 这里是**Fitting**分解

注 18 方法一的证明过程中涉及到的矩阵分块的思想和相似初等变换的思想可能是理解的障碍

1.4 矩阵分解之正交相似分解

结论 1.4.1 设A为实可逆阵，则存在唯一的正交阵Q与上三角阵R，使得$A=QR$，其中R的主对角元均为正数

证明 存在性.设实可逆阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则由**Schimidt**正交化知

$$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\ \quad\cdots\cdots\\ \beta_n=\alpha_n-\dfrac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\alpha_1=\beta_1\\ \alpha_2=\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\beta_2\\ \quad\cdots\cdots\\ \alpha_n=\dfrac{(\alpha_n,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1+\dfrac{(\alpha_n,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2+\cdots+\dfrac{(\alpha_n,\beta_{n-1})}{(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}+\beta_n\end{cases}$$

从而可知

$$
\begin{aligned}
(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n) &= (\beta_1,\beta_2\cdots,\beta_n)\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\frac{\beta_n}{|\beta_n|}\right)\begin{pmatrix} |\beta_1| & & & \\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\beta_n| \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\frac{\beta_n}{|\beta_n|}\right)\begin{pmatrix} |\beta_1| & & & * \\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\beta_n| \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

取$Q = \left(\frac{\beta_1}{|\beta_1|},\frac{\beta_2}{|\beta_2|},\cdots,\frac{\beta_n}{|\beta_n|}\right), R = \begin{pmatrix} |\beta_1| & & & * \\ & |\beta_2| & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\beta_n| \end{pmatrix}$，则$Q,R$分别为正交阵与主对角元为正数的上三角阵，且$A=QR$

唯一性.假设还存在正交阵Q_1与主对角元为正数的上三角阵R_1，使得$A=Q_1R_1$，则$QR=Q_1R_1$，即

$$
{Q_1}^{-1}Q = R_1R^{-1} \triangleq B
$$

显然B为正交阵且是主对角元为正数的上三角阵，容易验证$B=E$，故唯一性得证

注 19 此结论为**QR**分解，也叫正交三角分解，另外，取逆或取转置可得到**QR**分解的几个其他的形式；任意实(复)可逆阵可分解为一个正交阵(酉矩阵)与一个实(复)非奇异上三角矩阵之积

注 20 为什么说容易验证$B=E$？这里源自正交阵的一个小结论：上三角的正交阵必为对角阵，且对角线的元素为1或-1.证明过程见下面附录

结论 1.4.2 设A为n阶实方阵且其特征值均为实数，则存在正交阵Q，使得

$$
A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1}
$$

证明 由**Schur**三角化分解知，存在实可逆阵P，使得

$$A = P \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

由**QR**分解知，存在正交阵Q与非奇异的上三角阵R，使得

$$P = QR$$

所以有

$$A = QR \begin{pmatrix} a_1 & & & * \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix} R^{-1}Q^{-1} = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

注 21 上三角阵的乘积仍是上三角阵，这是个小结论，当然如果要证明的话，由数学归纳法和矩阵分块的思想也容易证明；特征值为相似不变量；一般地，任意实方阵A正交相似于准上三角阵，即存在正交阵Q，使得

$$A = Q \begin{pmatrix} A_1 & & & & & * \\ & \ddots & & & & \\ & & A_s & & & \\ & & & \lambda_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_t \end{pmatrix} Q^{-1}$$

为准上三角阵，其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_t$为实数，$A_1, \cdots, A_s$为二阶实方阵且均无实特征值；证明过程可参考张贤科老师的高等代数学

结论 1.4.3 设A为n实正规阵，$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$为$A$的实特征值，$a_1 \pm b_1 i, \cdots, a_s \pm b_s i$为$A$的复特征值，则存在正交阵$Q$，使得

$$A = Q \begin{pmatrix} D & & & \\ & A_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix} Q^{-1}$$

其中$D = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \cdots, \lambda_r\right), A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}, i = 1, \cdots, s$

证明 由于A酉相似于对角阵，则存在n个标准正交的特征向量

$$\xi_1, \cdots, \xi_r, \eta_1, \overline{\eta_1}, \cdots, \eta_s, \overline{\eta_s}$$

使得他们分别属于$\lambda_1, \cdots, \lambda_r, a_1 \pm b_1 i, \cdots, a_s \pm b_s i$，取

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}i}(\eta_i - \overline{\eta_i})$$
$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_i + \overline{\eta_i})$$

则α_i, β_i为实向量，且有

$$(\alpha_i, \alpha_j) = (\beta_i, \beta_j) = \delta_{ij}$$

$$(\alpha_i, \beta_j) = 0$$

从而可知$\xi_1, \cdots, \xi_r, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_s, \beta_s$为$\mathbb{R}^n$上的一组标准正交基，令$Q = (\xi_1, \cdots, \xi_r, \alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_s, \beta_s)$，则由

$$A\xi_i = \lambda_i \xi_i, i = 1, \cdots, r$$

$$A\alpha_j = a_j\alpha_j - b_j\beta_j, A\beta_j = b_j\alpha_j + a_j\beta_j, j = 1, \cdots, s$$

知

$$AQ = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & a_1 & b_1 & & & \\ & & & -b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & a_s & b_s \\ & & & & & & -b_s & a_s \end{pmatrix}$$

注 22 此结论为实正规矩阵的正交相似分解，若A为n阶正规矩阵，则存在酉阵Q，使得

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^{-1} = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}Q^H$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$为$A$的全部特征值

注 23 正规矩阵的定义：若$A \in M_n(C), A^HA = AA^H$，则$A$称为复正规阵；若$A \in M_n(R), A^TA = AA^T$，则$A$称为实正规阵。(1)对称阵($A^T = A$)是正规阵，(2)反对称阵($A^T = -A$)是正规阵，(3)$k$对称阵($A^T = kA$)是正规阵，(4)正交阵($A^TA = E$)是实正规阵，(5)$k$ 正交阵($A^TA = kE$)是实正规阵，(6)酉矩阵($A^HA = E$)是复正规阵，(7)**Hermite**矩阵($A^H = A$)是复正规阵，(8) 反**Hermite**矩阵($A^H = -A$) 是复正规阵

注 24 由实正规矩阵的正交相似分解可得出一个简单的推论：相似的两个实正规矩阵必正交相似

结论 1.4.4 设A为n阶正交阵，则存在正交阵Q，使得

$$A = Q\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & J_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_s \end{pmatrix}Q^{-1}$$

其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_r$是$A$的全部实特征值，且

$$J_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & \sin\theta_i \\ -\sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, s$$

注 25 这里是正交阵的正交相似分解，此结论为实正规矩阵正交相似分解的一个推论；由正交矩阵特征值的情况可知结论：设A为n阶正交阵，则存在正交阵Q，使得

$$Q^{-1}AQ = \left(E_p, -E_q, \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} \cos\theta_s & \sin\theta_s \\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s \end{pmatrix}\right)$$

结论 1.4.5 设A为n阶实反对称阵，则存在正交阵Q，使得

$$A = Q\begin{pmatrix} J_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & J_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

其中$J_i = \begin{pmatrix} 0 & a_i \\ -a_i & 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, s$

注 26 这里是实反对称阵的正交相似分解，此结论为实正规矩阵正交相似分解的一个推论

结论 1.4.6 设A为n阶实对称阵，则存在正交阵Q，使得

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$$

其中λ_i为矩阵A的特征值

证明 对实对称矩阵A的阶数n应用数学归纳法.当$n = 1$时结论显然成立，假设对$n-1$阶实对称阵结论成立，下面证明对n阶实对称矩阵A结论也成立.

设λ_1为A的任意特征值，α_1为对应的特征向量，不妨设α_1为单位向量，又设$Q_1 = (\alpha_1, Q_0)$是以α_1为第一列的n阶正交阵，则

$$Q_1{}^{-1}AQ_1 = Q_1{}'AQ_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \alpha_1{}'AQ_0 \\ Q_0{}'A'\alpha_1 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

其中$A_1 = Q_0{}'AQ_0$，则由归纳假设知，存在$n-1$阶正交阵Q_2，使得

$$Q_2{}^{-1}A_1Q_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

取$Q = Q_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}$，则

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2{}^{-1} \end{pmatrix} Q_1{}^{-1}AQ_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

注 27 这里是实对称阵的正交相似分解，也可称实对称阵的谱分解，此结论为实正规矩阵正交相似分解的一个推论

结论 1.4.7 设A为n阶正定阵，则存在唯一的正定阵S，使得$A = S^m$，其中m为正整数

证明一　存在性.由A正定知，存在正交阵Q，使得

$$A = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q'$$

其中$\lambda_i > 0$，取$S = Q\mathrm{diag}\left(\sqrt[m]{\lambda_1}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_n}\right) Q'$，则存在性得证

唯一性.若存在正定阵S, T，使得$A = S^m = T^m$，则存在正交阵Q_1, Q_2，使得

$$S = Q_1 \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} {Q_1}', T = Q_2 \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix} {Q_2}'$$

其中$\mu_i, \rho_i > 0$，于是由$S^m = T^m$知

$$\begin{pmatrix} {\mu_1}^m & & \\ & \ddots & \\ & & {\mu_n}^m \end{pmatrix} {Q_1}' Q_2 = {Q_1}' Q_2 \begin{pmatrix} {\rho_1}^m & & \\ & \ddots & \\ & & {\rho_n}^m \end{pmatrix}$$

所以有$\mu_i = \rho_i$，我们不妨设

$$\begin{pmatrix} {\mu_1}^m E & & \\ & \ddots & \\ & & {\mu_s}^m E \end{pmatrix} {Q_1}' Q_2 = {Q_1}' Q_2 \begin{pmatrix} {\mu_1}^m E & & \\ & \ddots & \\ & & {\mu_s}^m E \end{pmatrix}$$

从而由交换矩阵的性质知

$$ {Q_1}' Q_2 = \begin{pmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_s \end{pmatrix}$$

其中$\Delta_1,\cdots,\Delta_s$是与${\mu_1}^m E,\cdots,{\mu_s}^m E$分别同阶的正交阵，于是

$$\begin{aligned}
S &= Q_1 \begin{pmatrix} \mu_1 E & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_s E \end{pmatrix} {Q_1}' \\
&= Q_2 ({Q_1}' Q_2)' \begin{pmatrix} \mu_1 E & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_s E \end{pmatrix} ({Q_1}' Q_2)\, {Q_2}' \\
&= Q_2 \begin{pmatrix} \mu_1 E & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_s E \end{pmatrix} {Q_2}'
\end{aligned}$$

注 28 这里是正定阵的分解，半正定阵也有类似的分解；关于交换矩阵可见特殊矩阵之交换阵的专题讨论

结论 1.4.8 设A为实可逆阵，则存在唯一的正定阵P与正交阵Q，使得$A=PQ$

证明一 存在性.由于A可逆，则AA'正定，于是存在正定阵S，使得

$$AA' = S^2$$

则$A = S^2(A')^{-1} = S \cdot S(A')^{-1}$，下面我们只需证明$S(A')^{-1}$为正交阵即可，事实上

$$\left(S(A')^{-1}\right)' S(A')^{-1} = A^{-1} S^2 (A')^{-1} = A^{-1} \cdot AA' \cdot (A')^{-1} = E$$

取$P = S, Q = S(A')^{-1}$，则P, Q分别为正定阵与正交阵，且$A = PQ$

唯一性.假设还存在正定阵P_1与正交阵Q_1，使得$A = P_1 Q_1$，则

$$AA' = P_1 Q_1 \cdot {Q_1}' P_1 = {P_1}^2$$

而正定阵的分解是唯一的，故唯一性得证

注 29 此结论称为极分解，这里是可逆阵的分解之一；任意实可逆阵也可分解为正交阵与正定阵之积，且分解式唯一；当然这都是极分解的特殊情况，一般地，设$A \in M_n(C)$，则存在酉阵Q与唯一的半正定阵P，使得$A = PQ$.其中当A可逆时，极分解中的酉阵也是唯一的；当数域为实数域时，酉阵是正交阵；关于实方阵时的极分解情况的证明可参考李炯生老师线性代数中用奇异值分解证明的过程

结论 1.4.9 设$A \in M_{m\times n}(R)$，则存在正交阵U,V，使得

$$A = U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

其中$\Sigma = \mathrm{diag}\left(\sigma_1, \cdots, \sigma_r\right), \sigma_i$为$A'A$的非零特征值的算术平方根

证明一 由于$A'A$实对称，则存在正交阵Q，使得

$$Q'A'AQ = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & {\sigma_r}^2 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

取$M = \mathrm{diag}\left({\sigma_1}^{-1}, \cdots, {\sigma_r}^{-1}, 1, \cdots, 1\right)$，则

$$M'Q'A'AQM = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令$AQM = (A_1, A_2)$，则

$$\begin{pmatrix} {A_1}' \\ {A_2}' \end{pmatrix}(A_1, A_2) = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即${A_1}'A_1 = E_r, {A_2}'A_2 = 0$.由${A_2}'A_2 = 0$知$A_2 = 0$，由${A_1}'A_1 = E_r$知$A_1$的各列标准正交，则存在$A_3$，使得$U = (A_1, A_3)$为正交阵，于是

$$AQM = (A_1, 0) = U\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

取$V = Q^{-1}$，则

$$A = U\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} M^{-1} \cdot Q^{-1} = U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} V$$

注 30 此结论为**SVD**分解，也叫奇异值分解，也叫正交相抵分解；若结论中改为复数域，则类似地将正交阵上升为酉阵即可

2 典型例题及其分析

2.1 矩阵分解之相抵分解

例题 2.1.1 证明：任意方阵A可分解为可逆阵与对称阵之积

分析一 设$r(A)=r$，则存在可逆阵P,Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=PQ'^{-1}\cdot Q'\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

取

$$B=PQ'^{-1},C=Q'\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$$

则B,C分别为可逆阵与对称阵，且$A=BC$

注 31 我个人觉得做这样的题要有等价分解的思想或者等价标准形的思想，构造矩阵的意识；另外任意方阵也可以分解为可逆阵与幂等阵之积

例题 2.1.2 设A是秩为1的n阶矩阵，则存在非零列向量α,β，使得

$$A=\alpha\beta'$$

分析一 由于$r(A)=1$，则存在可逆阵P,Q，使得

$$A=P\begin{pmatrix}E_1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q=P\varepsilon_1{\varepsilon_1}'Q$$

其中$\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0)'$，取$\alpha=P\varepsilon_1,\beta'={\varepsilon_1}'Q$，则结论成立
分析二 将矩阵A按列分块为

$$A=(A_1,A_2,\cdots,A_n)$$

则列向量组$A_1,A_2,\cdots,A_n$的秩为1，不妨设A_1为其极大无关组，则可设

$$A_2=k_2A_1,\cdots,A_n=k_nA_1$$

于是

$$A=A_1\left(1,k_2,\cdots,k_n\right)$$

取$\alpha=A_1,\beta'=(1,k_2,\cdots,k_n)$，则结论成立

注 32 这里是秩1矩阵的分解，其实这个结论是充要的：n阶矩阵A的秩为1的充要条件是存在非零列向量α,β，使得$A=\alpha\beta'$

注 33 方法一体现了等价分解的思想，当然也可用满秩分解直接得到；方法二体现了矩阵分块的思想

例题 2.1.3 设A, A_1, A_2为n阶方阵，满足$A^2 = A, A = A_1 + A_2, r(A) = r(A_1) + r(A_2)$，证明：

$$A_iA_j = \begin{cases} A_i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

分析一 设$r(A) = r, r(A_i) = r_i, i = 1, 2$，且

$$A_i = H_iL_i, i = 1, 2$$

为A_i满秩分解，即H_i为$n \times r_i$阶列满秩矩阵，L_i为$r_i \times n$阶行满秩矩阵，则

$$A = A_1 + A_2 = H_1L_1 + H_2L_2 = (H_1, H_2)\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

故

$$r_1 + r_2 = r(A) \leqslant r\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} \leqslant r_1 + r_2$$

即

$$r\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix} = r_1 + r_2$$

这说明$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$为行满秩矩阵，同理可知$(H_1, H_2)$为列满秩矩阵，所以

$$A = (H_1, H_2)\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}$$

为A的满秩分解，从而由$A^2 = A$知

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \end{pmatrix}(H_1, H_2) = E_r = \begin{pmatrix} E_{r_1} & \\ & E_{r_2} \end{pmatrix}$$

即有

$$L_1H_1 = E_{r_1}, L_1H_2 = 0$$

从而

$${A_1}^2 = H_1L_1H_1L_1 = H_1L_1 = A_1$$

且

$$A_1A_2 = H_1L_1H_2L_2 = 0$$

同理可知

$$A_2{}^2 = A_2, A_2A_1 = 0$$

所以结论成立

分析二 首先，我们可证$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2$，事实上由$A = A_1 + A_2$知$\operatorname{Im} A \subseteq \operatorname{Im} A_1 + \operatorname{Im} A_2$，于是

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Im} A = r(A) &= r(A_1) + r(A_2)\\ &= \dim \operatorname{Im} A_1 + \dim \operatorname{Im} A_2\\ &\geqslant \dim(\operatorname{Im} A_1 + \operatorname{Im} A_2) \geqslant \dim \operatorname{Im} A\end{aligned}$$

所以有

$$\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} A_1 \oplus \operatorname{Im} A_2$$

其次，$\forall A_1\alpha \in \operatorname{Im} A_1$，存在$\beta \in V$，使得$A_1\alpha = A\beta$，于是

$$A_1\alpha = A\beta = A^2\beta = (A_1 + A_2) A\beta = A_1{}^2\alpha + A_2A_1\alpha$$

由直和分解的唯一性可知

$$A_1\alpha = A_1{}^2\alpha, A_2A_1\alpha = 0$$

即有$A_1{}^2 = A_1, A_2A_1 = 0$，其他同理可证

注 34 方法一中用到了这样一个小结论：设n阶矩阵A的秩为r且有满秩分解$A = HL$，则$LH = E_r$当且仅当A为幂等阵

例题 2.1.4 设G为非零矩阵A的一个广义逆，即$AGA = A$，则存在可逆阵P, Q，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q, G = Q^{-1}\begin{pmatrix} E_s & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

分析一 设$r(A) = r$，则存在可逆阵S, T，使得

$$A = S\begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}T \tag{1}$$

从而由$AGA = A$知

$$TGS = \begin{pmatrix} E_r & Y_1\\ Y_2 & Y_3\end{pmatrix} \tag{2}$$

其中Y_1, Y_2, Y_3为任意矩阵，则对(2)作初等变换有

$$\begin{pmatrix} E_r & 0\\ -Y_2 & E_{n-r}\end{pmatrix}TGS\begin{pmatrix} E_r & -Y_1\\ 0 & E_{n-r}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0\\ 0 & Y_3 - Y_2Y_1\end{pmatrix} \tag{3}$$

此时对(1)式有

$$\begin{pmatrix} E_r & -Y_1 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} \left(S^{-1}AT^{-1}\right) \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -Y_2 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

由(2)知$r\left(G\right) \geqslant r$，设$r\left(G\right) = s$，则由(3)知$Y_3 - Y_2Y_1$的秩为$s-r$，故存在$n-r$阶可逆阵$H, L$，使得

$$H\left(Y_3 - Y_2Y_1\right)L = \begin{pmatrix} E_{s-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

从而对(3)式作初等变换有

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ -Y_2 & E_{n-r} \end{pmatrix} TGS \begin{pmatrix} E_r & -Y_1 \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

再对(4)式分别左乘$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}^{-1}$，右乘$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}^{-1}$，则(4)右端还是$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以有结论成立

注 35

例题 2.1.5 设同型矩阵A, B满足$r\left(A\right) = r, r\left(B\right) = s$，若$r\left(A+B\right) = r\left(A\right) + r\left(B\right)$，则存在可逆阵$P, Q$，使得

$$A = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q, B = P\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}Q$$

其中$r+s$不超过矩阵A的行数及列数

分析一 由等价分解知，存在可逆阵S, T，使得

$$SAT = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

令

$$SBT = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} \tag{2}$$

则

$$S\left(A, B\right)T = \begin{pmatrix} E_r & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & B_3 & B_4 \end{pmatrix} \tag{3}$$

由$r\left(A+B\right)\leqslant r\left(A,B\right)\leqslant r\left(A\right)+r\left(B\right)$知，$r\left(A,B\right)=r+s$，即有$r\left(B_3,B_4\right)=s$，同理可知$r\begin{pmatrix} B_2 \\ B_4 \end{pmatrix}=s$，于是$r\left(B_4\right)=s$，故存在可逆阵$H,L$，使得

$$HB_4L=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \tag{4}$$

从而可知

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}(SAT)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

以及

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}(SBT)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2L \\ HB_3 & HB_4L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 & B_2L \\ HB_3 & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{6}$$

而由$r\left(B\right)=s$知，(6)式只能是

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}(SBT)\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & * \\ * & E_s \end{pmatrix} \tag{7}$$

最后只需对(7)式作一定的初等变换就可以化为$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_s \end{pmatrix}$，而且以同样的初等变换作用于(5)式，其结果仍为$\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，即存在相同的可逆阵$P,Q$，使得

$$A=P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q,G=Q^{-1}\begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

注 36 其中$r\left(B_4\right)=s$要用到引理：设$r\left(A\right)=r$，若A的第$i_1,i_2,\cdots,i_r$个行向量线性无关，以及A的第$j_1,j_2,\cdots,j_r$个列向量线性无关，则由这r行与列确定的一个r阶子式不为零

例题 2.1.6 证明：存在X,Y，使得$AX-YB=C$的充要条件是

$$r\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

分析一 必要性.由$AX-YB=C$可知

$$\begin{pmatrix} E & -Y \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

即必要性得证，下面证明充分性.不妨设

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, MBN = \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} E & \begin{pmatrix} -C_1 & 0 \\ -C_3 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} E_r & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & \begin{pmatrix} 0 & -C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4 \\ 0 & 0 & E_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是由

$$r \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

可得$C_4 = 0$，所以存在$R = \begin{pmatrix} -C_1 & 0 \\ -C_3 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & -C_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix} E & R \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} PAQ & PCN \\ 0 & MBN \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & S \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} E_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

即有

$$PAQS + PCN + RMBN = 0$$

所以有

$$X = -QSN^{-1}, Y = P^{-1}RM$$

注 37

2.2 矩阵分解之相合分解

例题 2.2.1 设A为n阶实对称阵，C为$m\times n$矩阵，证明：CAC'的正惯性指数小于等于A的正惯性指数，CAC'的负惯性指数小于等于A的负惯性指数

分析一 由惯性定理以及惯性定理唯一性的证明过程可证

注 38 下面说一下这个结论的一个推论：设A,B为n阶实对称阵，记p_A,q_A分别为A的正负惯性指数，则

$$p_{A+B}\leqslant p_A+p_B, q_{A+B}\leqslant q_A+q_B$$

例题 2.2.2 设A为n阶实可逆对称阵，证明：A一定合同于下列形式的矩阵之一

$$\begin{pmatrix} 0 & E_p & 0 \\ E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n-2p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & E_q & 0 \\ E_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-2q} \end{pmatrix}$$

分析一 由于A为n阶实可逆对称阵，则存在可逆阵P_1，使得

$$P_1{}'AP_1=\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_q \end{pmatrix}\triangleq B$$

若$p\leqslant q$，则$B=\operatorname{diag}(E_p,-E_p,-E_{n-2p})$，于是由合同初等变换知

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_p & E_p \\ -\frac{1}{2}E_p & E_p \end{pmatrix}'\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_p & E_p \\ -\frac{1}{2}E_p & E_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & E_p \\ E_p & 0 \end{pmatrix}$$

取

$$P_2=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}E_p & E_p \\ -\frac{1}{2}E_p & E_p \end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & E_{n-2p} \end{pmatrix}$$

则

$$P'BP=\begin{pmatrix} 0 & E_p & 0 \\ E_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E_{n-2p} \end{pmatrix}$$

而A与B合同，故结论成立；若$p\geqslant q$，则同理可证

注 39

例题 2.2.3 设$A=(a_{ij}),B=(b_{ij})$均为n阶正定阵，证明：**Hadamard**积$H=(a_{ij}b_{ij})$也是正定阵

分析一 由于B正定，则存在可逆阵C，使得$B = C'EC = C'C$.

设$C = (c_{ij})$，则$b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ki}c_{kj}$，于是

$$\begin{aligned} f(X) = X'HX = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}x_ix_j &= \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ij}c_{ki}c_{kj}x_ix_j \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}c_{ki}x_ic_{kj}x_j \\ &= \sum_{k=1}^{n} Y_k{}'AY_k \end{aligned}$$

其中$Y_k{}' = (c_{k1}x_1, c_{k2}x_2, \cdots, c_{kn}x_n)$
由于C可逆，则当$X \neq 0$时，至少有一个$Y_k{}' \neq 0$，故$f(X) > 0$，即H正定

注 40

例题 2.2.4 设n阶实对称阵A为两个实对称半正定阵之积，证明：A相似于实对称半正定阵

分析一 设$A = BC$，其中B, C半正定，则由B半正定知，存在可逆阵P，使得

$$B = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'$$

于是

$$A = BC = P\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P'CP \cdot P^{-1}$$

令$D = P'CP$，则D半正定，将D分块为$D = \begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ D_4 & D_2 \end{pmatrix}$，其中$D_1$为$r$阶半正定阵，则

$$A = P\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

而由D半正定知，存在X，使得$D_3 = D_1X$，从而由相似初等变换知

$$\begin{pmatrix} E_r & -X \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} D_1 & D_3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_r & -X \\ 0 & E_{n-r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以有结论成立

注 41 分析过程中需要的引理：设实对称半正定矩阵$M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$，其中$A$为$r$阶方阵，则$AX = B$有解；引理的证明过程见下面附录

2.3 矩阵分解之相似分解

例题 2.3.1 证明：任意n阶复矩阵A和它的转置A'相似

分析一 由若当标准形理论知，存在可逆阵P，使得

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}$$

其中J_i是特征值λ_i的$n_i \times n_i$若当块，令$Q = \mathrm{diag}\left(Q_1, Q_2, \cdots, Q_s\right)$，其中

$$Q_i = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}_{n_i \times n_i}, i = 1, 2, \cdots, s$$

则由若当块的性质有

$$Q^{-1}JQ = J'$$

于是

$$Q^{-1}P^{-1}APQ = J' = P'A'P'^{-1}$$

即$\left(PQP'\right)^{-1}A\left(PQP'\right) = A'$，所以结论成立

分析二 设A为n阶矩阵且$\lambda E - A$的不变因子为

$$d_1\left(\lambda\right), d_2\left(\lambda\right), \cdots, d_n\left(\lambda\right)$$

则存在可逆阵$P\left(\lambda\right), Q\left(\lambda\right)$，使得

$$P\left(\lambda\right)\left(\lambda E - A\right)Q\left(\lambda\right) = \begin{pmatrix} d_1\left(\lambda\right) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\left(\lambda\right) \end{pmatrix}$$

两边取转置得

$$Q(\lambda)'\left(\lambda E - A'\right)P(\lambda)' = \begin{pmatrix} d_1\left(\lambda\right) & & \\ & \ddots & \\ & & d_n\left(\lambda\right) \end{pmatrix}$$

即$\lambda E - A$与$\lambda E - A'$有相同的不变因子，所以结论成立

注 42 方法一中体现了若当块的一个性质，我在附录中写了几个常见的若当块的性质，至于其它的性质将在相似标准形之若当标准形中讨论

例题 2.3.2 任意复矩阵A均可分解为两个对称阵之积，且其中之一可逆

分析一　由引理可知，存在复对称可逆阵S，使得$A = S^{-1}A'S$.
记$S_1 = S^{-1}, S_2 = A'S$，则$A = S_1S_2$，于是由$A'S = SA$知

$$S_2{}' = (A'S)' = (SA)' = A'S = S_2$$

即S_2对称，而显然S_1是对称可逆的.另外，记$\tilde{S}_1 = S^{-1}A', \tilde{S}_2 = S$，则$A = \tilde{S}_1\tilde{S}_2$，于是由

$$S^{-1}A' = AS^{-1}$$

可知

$$\tilde{S}_1' = \left(S^{-1}A'\right)' = \left(AS^{-1}\right)' = S^{-1}A' = \tilde{S}_1$$

即$\tilde{S}_1$对称，而显然$\tilde{S}_2$是对称可逆的.
分析二　由若当标准形理论以及若当块的性质可证

注 43 这里是矩阵的**Voss**分解

例题 2.3.3 证明：任意矩阵A均可分解为$A = D + N$，且$DN = ND$，其中D为可对角化矩阵，N为幂零阵

分析一　由若当标准形理论知，存在可逆阵P，使得

$$A = P\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}P^{-1}$$

其中J_i是特征值λ_i的$n_i \times n_i$若当块，令

$$N_i = J_i - \lambda_i E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i \times n_i} ,i = 1, 2, \cdots, s$$

则$N_i^{n_i} = 0$，即N_i幂零，于是

$$A = P\begin{pmatrix} N_1 & & & \\ & N_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & N_s \end{pmatrix}P^{-1}$$

是幂零阵，又令

$$D=P\begin{pmatrix}\lambda_1E_{n_1} & & & \\ & \lambda_2E_{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sE_{n_s}\end{pmatrix}P^{-1}$$

则D为可对角化矩阵，且有$A=D+N$，$DN=ND$

注 44 此例题的结论和下面这个结论都是**Jordan − Chevally**分解定理的内容，推广：设A为n阶复方阵，则存在常数项等于0的多项式$g(\lambda),h(\lambda)$，使得$g(A)$ 为可对角化矩阵，$h(A)$ 为幂零阵，并且$A=g(A)+h(A)$

例题 2.3.4 设$A\in F^{n\times n}$是幂零指数为n的幂零矩阵，证明：不存在$X\in F^{n\times n}$，使得$A=X^2$

分析一 由若当标准形理论知，存在可逆阵P，使得

$$A=P\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}P^{-1}$$

即

$$r(A)=n-1$$

假设存在$X\in F^{n\times n}$，使得$A=X^2$，则$X^{2n}=A^n=0$，即X也为幂零阵，且有$r(A)\leqslant n-1$，而

$$r(X)\geqslant r\left(X^2\right)=r(A)=n-1$$

故

$$r(X)=n-1$$

于是X的若当标准形中若当块的总数为$n-r(X)=n-(n-1)=1$，故存在可逆阵P_1，使得

$$X=P_1\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}{P_1}^{-1}$$

从而可知

$$A=X^2=P_1\begin{pmatrix}0 & E_{n-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}^2{P_1}^{-1}=P_1\begin{pmatrix}0 & E_{n-2}\\ 0 & 0\end{pmatrix}{P_1}^{-1}$$

这说明$r(A)=n-2$，与前面的$r(A)=n-1$矛盾

2.4 矩阵分解之正交相似分解

例题 2.4.1 设A为n阶实方阵，证明：若$AA'=A^2$，则A为对称矩阵

分析一 由于$A'-A$为反对称阵，而反对称阵为正规阵，则存在酉阵Q，使得

$$A'-A=Q\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^H$$

其中D为r阶可逆阵，令

$$A=Q\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}Q^H$$

于是由$A\left(A'-A\right)=0$知

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_4 & A_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=0$$

即可知$A_1=A_4=0$，于是

$$A'-A=A^H-A=Q\begin{pmatrix} 0 & -A_2 \\ {A_2}^H & {A_3}^H-A_3 \end{pmatrix}Q^H=Q\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^H$$

即知$D=0$，故$A'-A=0$

分析二 由奇异值分解知，存在正交阵U,V，使得

$$A=U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V$$

其中$\Sigma=\mathrm{diag}\left(\sigma_1,\cdots,\sigma_r\right),\sigma_1,\cdots,\sigma_r$为$A$的奇异值，于是由$AA'=A^2$ 可知

$$\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VU\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VU$$

令

$$VU=\begin{pmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \Delta_3 & \Delta_4 \end{pmatrix}$$

其中Δ_1为r阶方阵，代入上式可得，$\Sigma^2=\Sigma\Delta_1\Sigma\Delta_1,0=\Sigma\Delta_1\Sigma\Delta_2=0$，由此推出$\Delta_1$可逆且$\Delta_2=0$，进而由$VU$正交可知，$\Delta_3=0,{\Delta_1}'={\Delta_1}^{-1}$，于是$\Sigma\Delta_1={\Delta_1}^{-1}\Sigma={\Delta_1}'\Sigma'$，即$\Sigma\Delta_1$ 对称，所以有

$$A=U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}V=U\begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}VUU'=U\begin{pmatrix} \Sigma\Delta_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U'=A'$$

分析三 对实对称阵来说，$B=0\Leftrightarrow B'B=0\Leftrightarrow tr\left(BB'\right)=0$，故利用此结论只需证明$tr\left(A-A'\right)\left(A-A'\right)'=0$，而在条件$AA'=A^2$下利用迹的相关性质，结论容易证明，关于这方面的知识在矩阵标准形特征之矩阵的迹的专题中有所讨论

注 45

例题 2.4.2 设A为n阶实反对称阵，B为n阶正定阵，证明：$|A+B|>0$

分析一 由B正定知，存在可逆阵P，使得

$$P'AP=E$$

于是由A反对称知$P'AP$反对称，则存在正交阵Q，使得

$$Q'P'APQ=\mathrm{diag}\left(J_1,\cdots,J_s,0,\cdots,0\right)$$

这里$J_i=\begin{pmatrix}0 & a_i\\ -a_i & 0\end{pmatrix},i=1,\cdots,s.$令$R=PQ$，则存在可逆阵$R$，使得

$$R'BR=E,R'AR=\mathrm{diag}\left(J_1,\cdots,J_s,0,\cdots,0\right)$$

则

$$R'\left(A+B\right)R=\mathrm{diag}\left(T_1,\cdots,T_s,1,\cdots,1\right)$$

这里$T_i=\begin{pmatrix}1 & a_i\\ -a_i & 1\end{pmatrix}$，所以有

$$|R|^2\,|A+B|=\prod_{i=1}^{s}\left(1+{a_i}^2\right)\geqslant|R|^2\,|B|$$

即

$$|A+B|\geqslant|B|$$

所以有结论成立

分析二 我们要证$|A+B|\geqslant|B|$，即证$|E+B^{-1}A|\geqslant1.$

由于B正定，则B^{-1}正定，从而存在正定阵S，使得$B^{-1}=S^2$，于是

$$B^{-1}A=S^2A=S\left(S'AS\right)S^{-1}$$

即$B^{-1}A$与$S'AS$相似，而A反对称，故$S'AS$反对称，所以$B^{-1}A$的特征值为

$$\lambda_1i,-\lambda_1i,\cdots,\lambda_si,-\lambda_si,0,\cdots,0$$

则$E+B^{-1}A$的特征值为

$$1+\lambda_1i,1-\lambda_1i,\cdots,1+\lambda_si,1-\lambda_si,1,\cdots,1$$

即

$$\left|E+B^{-1}A\right|=\prod_{i=1}^{s}\left(1+{\lambda_i}^2\right)\geqslant1$$

分析三　首先，我们可证$|A+B|\neq 0$，否则存在$\alpha\neq 0$，使得$(A+B)\alpha=0$，于是

$$0=\alpha'(A+B)\alpha=\alpha' A\alpha+\alpha' B\alpha=\alpha' B\alpha$$

这与B正定矛盾，故$|A+B|\neq 0$

其次，我们可证$|A+B|>0$.事实上，构造函数

$$f(x)=|Ax+B|,x\in[0,1]$$

由于A反对称知Ax反对称，则由上可知$|Ax+B|\neq 0,x\in[0,1]$，如果假设$|A+B|<0$，而$|B|>0$，即

$$f(0)>0,f(1)<0$$

所以由连续函数的介值性知，存在$x_0\in[0,1]$，使得$|Ax_0+B|=0$，矛盾，所以$|A+B|<0$不成立

注 46 方法一用到了实反对称阵的正交相似标准形，证明过程有点同时合同对角化的味道，关于同时合同对角化我们会在合同标准形之同时合同对角化的专题中讨论；方法二体现了正定阵的分解，还有反对称阵的性质；方法三体现了连续性的思想，或者微小摄动的思想

例题 2.4.3 设A,B分别为$m\times n$与$n\times p$实矩阵，则

$$\operatorname{tr}(AB)(AB)'\leqslant \operatorname{tr}(AA')\max\{\lambda(BB')\}$$

其中$\max\{\lambda(BB')\}$表示BB'的最大特征值

分析一　由BB'实对称知，存在正交阵Q，使得

$$Q'(BB')Q=\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

其中$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n\geqslant 0$是$BB'$的特征值，于是

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(AB)(AB)'&=\operatorname{tr}(AB)'(AB)\ =\operatorname{tr}(B'A'AB)=\operatorname{tr}(A'ABB')\\&=\operatorname{tr}(Q'(A'A)Q\cdot Q'(BB')Q)=\operatorname{tr}(Q'(A'A)Q\operatorname{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n))\\&\leqslant\operatorname{tr}(Q'(A'A)Q\cdot\lambda E)=\lambda_1\operatorname{tr}(Q'A'AQ)=\lambda_1\operatorname{tr}(AA')\end{aligned}$$

其中的不等号是由于$Q'(A'A)Q$的对角线元素均非负

分析二　由奇异值分解知，存在正交阵Q_1,Q_2，使得

$$B=Q_1\operatorname{diag}(\mu_1,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)Q_2$$

其中$\mu_1,\cdots,\mu_r$为B的奇异值，且$\mu_1\geqslant\cdots\geqslant\mu_r>0$，则

$$BB'=Q_1\operatorname{diag}\left({\mu_1}^2,\cdots,{\mu_r}^2,0,\cdots,0\right)Q_1{}'$$

于是有

$$\left(AB\right)\left(AB\right)'=AQ_1\operatorname{diag}\left({\mu_1}^2,\cdots,{\mu_r}^2,0,\cdots,0\right)\left(AQ_1\right)'$$

记$AQ_1=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$，则

$$\operatorname{tr}\left(AB\right)\left(AB\right)'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}{\mu_j}^2{a_{ij}}^2\leqslant{\mu_1}^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{r}{a_{ij}}^2\leqslant{\mu_1}^2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}}^2$$

由奇异值的定义知${\mu_1}^2=\max\left\{\lambda\left(BB'\right)\right\}$，而

$$\operatorname{tr}\left(AA'\right)=\operatorname{tr}\left(AQ_1\right)\left(AQ_1\right)'=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}{a_{ij}}^2$$

所以有结论成立

注 47 方法一中多次运用到迹的性质：$tr(AB)=tr(BA)$，注意要有整体思维

例题 2.4.4 设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_m$为n维欧氏空间V的两个向量组，证明：存在正交变换σ，使得$\sigma\alpha_i=\beta_i\left(i=1,\cdots,m\right)$的充要条件是$\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=\left(\beta_i,\beta_j\right)\left(i,j=1,\cdots,m\right)$，即

$$G\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_m\right)=G\left(\beta_1,\cdots,\beta_m\right)$$

分析一 取V中的一组标准正交基，将问题转化为：设$A,B\in R^{n\times m}$，则$A'A=B'B\Leftrightarrow$存在正交阵Q，使得$B=QA$. 此时充分性显然，下面证明必要性.由奇异值分解知

$$\begin{aligned}B&=U_2\begin{pmatrix}\Sigma_B&0\\0&0\end{pmatrix}V_2=U_2V_2\cdot V_2{}'\begin{pmatrix}\Sigma_B&0\\0&0\end{pmatrix}V_2\\&=U_2V_2(B'B)^{\frac{1}{2}}=U_2V_2(A'A)^{\frac{1}{2}}\\&=U_2V_2V_1{}'\begin{pmatrix}\Sigma_A&0\\0&0\end{pmatrix}V_1=U_2V_2V_1{}'U_1{}'\cdot U_1\begin{pmatrix}\Sigma_A&0\\0&0\end{pmatrix}V_1\end{aligned}$$

取$Q=U_2V_2V_1{}'U_1{}'$即可

注 48

例题 2.4.5 设A为n阶正定阵，则存在对角线为正的下三角阵L，使得

$$A = LL'$$

分析一 由A正定知，存在实可逆阵C，使得$A = C'C$，从而对于实可逆阵C，由**QR**分解知，存在正交阵Q与非奇异上三角阵L'，使得

$$C = QL'$$

于是

$$A = C'C = (QL')'QL' = LQ'QL' = LL'$$

注 49 这里是**Cholesky**分解

3 相关问题及其训练

问题 3.1 设A是从m维欧氏空间E_m到n维欧氏空间E_n的线性映射，证明：存在E_m和E_n的标准正交基，使得A在它们下的矩阵形如$\begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$其中$D$是一个对角方阵

2000中科院

问题 3.2 证明：(**i**)任何n阶实对称阵A必合同于对角阵

$$D = \mathrm{diag}\left(\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\right)$$

即存在n 阶非奇异实方阵C使得$C'AC = D$，这里$\delta_i = -1$或0或1；
(**ii**)任何n阶实反对称非奇异方阵B必为偶数阶即$n = 2k$，且合同于块对角阵

$$F = \mathrm{diag}\left(J_1, J_2, \cdots, J_k\right)$$

即存在n阶非奇异实方阵E使得$E'BE = F$，这里$J_i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$；
(**iii**)对于迹为零的n阶实方阵G，存在实正交阵H，使得$H'GH$的主对角元全为0

2005中科院

问题 3.3 设A为n阶实矩阵，其特征值都是实数，且$AA' = A'A$，证明：A为实对称阵

2010南开大学

问题 3.4 设$A_1,\cdots,A_k$为数域F上的n阶方阵，且$A_1+\cdots+A_k=E_n$，证明：

(1)若$A^2=A$，则A的迹等于A的秩，即$tr\left(A\right)=rank\left(A\right)$

(2)$A^2=A$当且仅当$rank\left(A\right)+rank\left(E_n-A\right)=n$

(3)${A_i}^2=A_i,i=1,\cdots,k$当且仅当$rank\left(A_1\right)+\cdots+rank\left(A_k\right)=n$

2014中山大学

问题 3.5 设$f\left(x\right)=x^TAx$是一个非退化的二次型，证明：f可用正交变换化为规范形当且仅当A为正交阵

2006南开大学

问题 3.6 设A为n阶复矩阵，证明：A为对称阵的充要条件是存在n阶复矩阵B，使得$A=B'B$

2006华南理工

问题 3.7 证明：任意实方阵为反对称阵的充要条件是$AA'=-A^2$

2012南开大学

问题 3.8 设ϕ为n维欧氏空间的正交变换，证明：ϕ最多可以表示为$n+1$个镜面反射的复合

2012浙江大学

问题 3.9 设$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=x'Ax$和$g\left(y_1,\cdots,y_n\right)=y'By$均为实数域上的$n$元二次型，且存在实数域上的$n$阶方阵$C$和$D$，使得$A=D'BD,B=C'AC$，证明：$f\left(x_1,\cdots,x_n\right)=x'Ax$与$g\left(y_1,\cdots,y_n\right)=y'By$具有相同的规范形

2005南开大学

问题 3.10 设A为n阶实可逆阵，证明：存在正交阵Q_1,Q_2，使得Q_1AQ_2为对角阵，且对角阵元素全大于0

2012苏州大学

问题 3.11 设A为n阶实对称矩阵

(1)若$r\left(A\right)<n$，则存在非负整数s和可逆阵P，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0\\ 0 & -E_{r(A)-s} & 0\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)记$W=\{x\in R^n|x'Ax=0\}$，给出W为R^n的子空间的充要条件，并证明你的结论

2003重庆大学

问题 3.12 设$A\in R^{n\times m},r\left(A\right)=m$，证明：存在正交阵$Q$，使得

$$A(A'A)^{-1}A'=QQ'$$

2011浙江师大

问题 3.13 设A为n阶复可逆阵，证明：存在n阶矩阵B，使得$A=B^2$

2015苏州大学

问题 3.14 设$B=\begin{pmatrix} 0 & 2011 & 11\\ 0 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，证明：$X^2=B$无解，这里$X$为三阶未知复方阵

2012武汉大学

问题 3.15 设$A=(a_{ij})$为三阶实正交矩阵且$|A|=1$，证明：存在实正交阵P，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

且其中$\cos\theta=\frac{a_{11}+a_{22}+a_{33}-1}{2}$

2015武汉大学

问题 3.16 证明：对任何实系数可逆矩阵，存在正交矩阵Q以及实上三角矩阵T，使得$A=QT$，且若T的主对角线上的元素均大于零，则此分解是唯一的，并对$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 5\\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$作出这样的分解

2013华东师大

问题 3.17 设f为n维线性空间V上的线性变换，证明：存在f的不变子空间U,W，使得f在U上为可逆线性变换，在W上为幂零线性变换，且

$$V = U \oplus W$$

2015浙江大学

问题 3.18 设A为数域F上的n阶矩阵，证明：若A的各阶顺序主子式都不为零，则A可以唯一地分解为$A = LU$，其中L是对角元都为1的下三角阵，U是上三角阵；若A为数域F上的n阶可逆阵，则上述分解是否成立？请说明理由

2006北京大学

问题 3.19 设$f(X,Y)$为定义在数域P上的n维线性空间V上的一个双线性函数，证明：

$$f\left(X,Y\right) = X'AY = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j$$

可以表示为两个线性函数

$$f_1\left(X\right) = \sum_{i=1}^{n} b_ix_i, f_2\left(Y\right) = \sum_{i=1}^{n} c_iy_i$$

之积的充要条件是$f(X,Y)$的度量矩阵A的秩$\leqslant 1$

2009华南理工

问题 3.20 证明：实矩阵A的特征值全为实数的充要条件是存在正交阵Q，使得$Q^{-1}AQ$为三角阵

2006浙江大学

问题 3.21 设A为n阶正交阵，且其特征值均为实数，证明：A为对称阵

2014苏州大学

问题 3.22 设S为n阶实对称阵，S_1,S_2为m阶实对称阵，且$\begin{pmatrix} S & \\ & S_1 \end{pmatrix}$合同于$\begin{pmatrix} S & \\ & S_2 \end{pmatrix}$，证明：$S_1$与$S_2$是合同的

2009北京大学

问题 3.23 设$f(x)$为A的特征多项式，存在互素且次数分别为p,q的多项式$g(x),h(x)$，使得$f(x)=g(x)h(x)$，证明：秩$g(A)=q$，秩$h(A)=p$

2014南开大学

问题 3.24 设A,B均为n阶反对称阵，且A可逆，证明：$|A^2-B|>0$

2014南开大学

问题 3.25 设$\mathcal{A}$为n维欧氏空间V上的正交变换，证明：$\mathcal{A}$是第一类的当且仅当存在V上的正交变换$\mathcal{B}$，使得$\mathcal{A}=\mathcal{B}^2$

2008北京大学

问题 3.26 设实二次型$f(x)=x'Ax$的正,负惯性指数分别为p,q

(1)令$N_f=\{x\in R^n|f(x)=0\}$，证明：包含于N_f内的R^n的线性子空间的最大维数为$n-\max\{p,q\}$

(2)设W为R^n上的一个线性子空间，将f限制在W上得到新的二次型，记为$\tilde{f}$，即$\tilde{f}(x)=x'Ax,\forall x\in W$，证明：$\tilde{f}$的正,负惯性指数$p_1,q_1$满足$p_1\leq p,q_1\leq q$

2015武汉大学

问题 3.27 设$A,B\in M_n(F),AB=BA=0,r(A)=r(A^2)$，证明：

$$r(A+B)=r(A)+r(B)$$

问题 3.28 设A为n阶复对称阵，证明：存在复可逆阵P，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} E_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

问题 3.29 设A,B为n阶矩阵，且$r(A)=r(B),BA=A$，证明：$B^2=B$

问题 3.30 设A,B为n阶半正定矩阵，且$r(A)\leqslant p,r(B)\leqslant q$，证明：$A-B$的正惯性指数小于等于$p$，负惯性指数小于等于$q$

问题 3.31 设O为n阶正交阵且秩$(O-E)=1$，证明：方阵O正交相似于对角阵$\mathrm{diag}(-1,E_{n-1})$

问题 3.32 设A,B均为正交阵，且存在可逆阵P，使得$B=P^{-1}AP$，证明：存在正交阵Q，使得$Q^{-1}AQ=B$

问题 3.33 设S为n阶对称阵，证明：存在唯一的对称阵S_1，使得$S={S_1}^3$

问题 3.34 设A为$m\times n$实矩阵且其秩为r，证明：存在$m\times r$列正交阵W和行满秩的$r\times n$矩阵R，使得$A=WR$，其中W列正交的含义为$W'W=E_r$

总注 上面的分解基本上是按照矩阵的积来分解的，当然也有按矩阵的和来分解的，例如(1) 任意方阵可分解为对称阵和反对称阵之和(2)任意方阵可分解为数量矩阵和迹零矩阵之和

致谢 学生在这里由衷地感谢胡付高老师，谢启鸿老师，张祖锦老师，高等代数资源网的陈老师

附录

附录 1 设$J_i=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$，则存在可逆阵$Q_i=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$，使得

$$Q_i^{-1}J_iQ_i=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ 1 & \lambda & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda\end{pmatrix}=J_i'$$

其中$Q_i={Q_i}^{-1}={Q_i}'$

附录 2 设$J_i=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$，则

$$J_i=\begin{pmatrix}\lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0\end{pmatrix}$$

附录 3 设$J_i=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda\end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$，则若当块可分解为两对称阵之

积，且其中之一可逆，即

$$J_i = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & \cdots & \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & & \lambda \\ & & \lambda & 1 \\ & \cdots & \cdots & \\ \lambda & 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & 1 & \lambda \\ & \cdots & \lambda & \\ 1 & \cdots & & \\ \lambda & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & \cdots & \\ 1 & & \end{pmatrix}$$

附录 4 上三角的正交阵必为对角阵，且对角线的元素为1或-1

证明 设上三角阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$，则

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

而A为正交阵，则$A^T = A^{-1}$，从而可知

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & & * \\ & \ddots & \\ & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

即$a_{ij} = 0\,(i \neq j)$，故$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$，又由于$A^T A = E$，则${a_{ii}}^2 = 1$

附录 5 设实对称半正定矩阵$M = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}$，其中$A$为$r$阶方阵，则$AX = B$有解

引理 若实对称半正定阵A的第(i,i)元素为零，则A的第i行，第i列的元素全为零

引理的证明 任取$x \in R, 1 \leqslant i, j \leqslant n$，则由$a_{ii} = 0$有

$$(xe_i + e_j)' A\,(xe_i + e_j) = x^2 a_{ii} + 2xa_{ij} + a_{jj} = 2xa_{ij} + a_{jj}$$

由于A半正定，则$2xa_{ij} + a_{jj} \geqslant 0$，又由$x$的任意性可知$a_{ij} = 0$，故引理得证

原命题的证明 不妨设半正定阵A的前s行为行向量的极大无关组，则A可通过初等行变换将A的后$r - s$行消去，即存在可逆阵P，使得

$$PA = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中A_1为s阶方阵，进一步对PB进行相同的分块，可设

$$P(A,B)=(PA,PB)=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

对半正定阵M实施合同变换有

$$\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}'=\begin{pmatrix} PAP' & PB \\ DP' & C \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ B_1{}' & B_2{}' & C \end{pmatrix}$$

从而由引理知$B_2=0$，又注意到$r(A_1)=s$，则

$$r(A,B)=r(PA,PB)=r\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=r=r(A)$$

附录 6 设分块矩阵$G=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$为反对称阵，且$A$可逆，则存在可逆阵$P$，使得

$$P'AP=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & H \end{pmatrix}$$

其中H是与D同阶的反对称阵

证明 对G进行分块矩阵的初等变换，把G化为准对角阵，即

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

由于G反对称，则$C=-B', A'=-A$，取

$$P=\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

则

$$P'AP=\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -A^{-1}B \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

其中$H=D-CA^{-1}B, H'=-H$