3. dubna 2010

3. úkol z předmětu Složitost

Petr Zemek
xzemek02@stud.fit.vutbr.cz
Fakulta Informačních Technologií, Brno

Příklad 1

Věta 1. *Problém PARTITION*[1] *je* $\boldsymbol{NP}$*-úplný.*

Důkaz. Redukcí problému SUBSET-SUM, který je **NP**-úplný, a ukázáním, že PARTITION $\in$ **NP**.

(1) SUBSET-SUM $\leq$ PARTITION: Nechť je problém SUBSET-SUM dán trojicí $\langle S_s, v_s, V\rangle$, kde S_s je konečná množina položek, $v_s\colon S_s \to \mathbb{N}$ je totální váhovací funkce a V je hledaná suma. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $U = \sum_{a \in S_s} v_s(a) > 2V$ (pokud tomu tak není, tak lze do S_s přidat novou položku s váhou $2V + 1$, která na náležitost instance $\langle S_s, v_s, V\rangle$ do problému SUBSET-SUM do nemá vliv, protože $v(a) \in \mathbb{N}$, pro všechna $a \in S_s$). Redukujeme jej na problém PARTITION se vstupem $\langle S_p, v_p\rangle$, kde $S_p = S_s \cup \{z\}$, $z \notin S_s$ je nová položka, $v_p = v_s \cup \{(z, U - 2V)\}$. Tato redukce je zjevně polynomiální.

Zbývá dokázat, že tato redukce zachovává příslušnost, to jest $\langle S_s, v_s, V\rangle \in$ SUBSET-SUM tehdy a jen tehdy, když $\langle S_p, v_p\rangle \in$ PARTITION.

"$\Rightarrow$": Nechť $\langle S_s, v_s, V\rangle \in$ SUBSET-SUM, tudíž v S_s existuje množina položek $A \subseteq S_s$ taková, že $\sum_{a\in A} v_s(a) = V$. Pak $\sum_{a \in S_s \setminus A} v_s(a) = U - V$. Rozdělme množinu S_p na $S_{p_1}, S_{p_2} \subseteq S_p$ takové, že $S_{p_1} = S_s \setminus A$, $S_{p_2} = \{z\} \cup A$. Pro tyto množiny platí, že $S_{p_1} \cup S_{p_2} = S_p$, $S_{p_1} \cap S_{p_2} = \emptyset$, a $\sum_{a \in S_{p_1}} v_p(a) = \sum_{a \in S_{p_2}} v_p(a) = U - V$, tudíž $\langle S_p, v_v\rangle \in$ PARTITION.

"$\Leftarrow$": Nechť $\langle S_p, v_p\rangle \in$ PARTITION, tudíž existuje rozdělení množiny S_p na $S_{p_1}, S_{p_2} \subseteq S_p$ takové, že $S_{p_1} \cup S_{p_2} = S_p$, $S_{p_1} \cap S_{p_2} = \emptyset$, a $\sum_{a \in S_{p_1}} v_p(a) = \sum_{a \in S_{p_2}} v_p(a) = W$. Potom $W = (\sum_{a \in S_p} v_p(a))/2 = U - V$. Dále platí, že $z \in S_{p_i}$ pro nějaké $1 \leq i \leq 2$. Zvolme množinu $A \subseteq S_{p_i}$ tak, že $z \notin A$, a tudíž $\sum_{a \in A} v_s(a) = V$. Jelikož $A \subseteq S_s$, tak $\langle S_s, v_s, V\rangle \in$ SUBSET-SUM.

(2) PARTITION $\in$ **NP**: Nechť je problém PARTITION dán dvojicí $\langle S, v\rangle$. Sestrojíme NTS, který nedeterministicky zvolí množinu $S' \subseteq S$ a v polynomiálním čase ověří, že $\sum_{a \in S'} v(a) = \sum_{a \in S \setminus S'} v(a)$.

$\square$

Příklad 2

Věta 2. *Nechť* $L_t = \{true\}$ *je jazyk nad abecedou* $\{true, false\}$*. Pak platí* $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{NP} \Rightarrow L_t$ *je* $\boldsymbol{NP}$*-úplný.*

Důkaz. Nechť **P** = **NP**. Zjevně $L_t \in$ **NP**. **NP**-těžkost jazyka L_t ukážeme redukcí problému SAT, který je **NP**-úplný. Nechť Σ označuje abecedu, nad níž je SAT definován. Z předpokladu, že **P** = **NP** a z faktu, že třída **P** je uzavřena vůči doplňku, plyne, že existuje DTS M_{SAT}, který rozhoduje SAT v polynomiálním čase. Redukci R problému SAT na L_t definujeme tak, že pro $x \in \Sigma^*$, $R(x) = true$ pokud M_{SAT} akceptuje x a $R(x) = false$ pokud M_{SAT} zamítne x. Jelikož M_{SAT} rozhoduje SAT v polynomiálním čase, R je polynomiální redukce. To, že R zachovává příslušnost, plyne přímo z popisu této redukce. $\square$

Příklad 3

Věta 3. $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{NP} \Rightarrow$ *každý jazyk* $L \in \boldsymbol{NP}$ *je* $\boldsymbol{NP}$*-úplný.*

Důkaz. Vyplývá z Věty 2 (L_t je **NP**-úplný $\Rightarrow$ lze jej triviálně použít k dokázání **NP**-těžkosti libovolného $L \in$ **NP** ukázáním $L_t \leq_R L$; stačí, když si zvolíme libovolné $x \in L$ a $y \notin L$ a položíme $R(true) = x$ a $R(w) = y$, pro všechny $w \in \{true, false\}^* \setminus \{true\}$. $\square$

[1] Zadání problémů PARTITION a SUBSET-SUM mám dle 6. přednášky, 11. a 12. slajd, respektive. Předpokládám, že funkce v je totální a její vyčíslení lze provést v polynomiálním čase.