Федер Евгений, Домашнее задание №11

Задание 1.

Для удобности написания назовем функцию f

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

Сделаем такое действие. Пройдемся по всем простым числам и на каждом шагу будем вычеркивать числа делящиеся на какое-то простое число. Как это сделать? Пусть надо вычеркнуть число p.

$$\frac{1}{p^s} * f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (p * n)^{-s}$$

Это сумма чисел делящихся на р. Просто вычтем из исходной и получим сумму чисел не делящихся на p.

Таким образом в предельном переходе получаем

$$\prod_{p \in P} (1 - \frac{1}{p^s}) * f(s) = 1$$

$$f(s) = \prod_{p \in P} (1 - \frac{1}{p^s})^{-1}$$

Задание 2.

$$n = \prod p_i^{a_i}$$

Каждая комбинация этих делителей дает какой-то новый делитель n. Поэтому можно расписать так(зная свойства мультипликативности для ϕ):
$\sum\limits_{d|p} \phi(d) = (\phi(1) + \phi(p_1) + ... + \phi(p_1^{a_1})) * ... * (\phi(1) + \phi(p_k) + ... + \phi(p_k^{a_k}))$
На лекции было, что $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Зная это каждая сумма полчается телескопической и получаем
$\sum\limits_{d|p} \phi(d) = (\phi(1) + \phi(p_1) + ... + \phi(p_1^{a_1})) * ... * (\phi(1) + \phi(p_k) + ... + \phi(p_k^{a_k})) = \prod p_i^{a_i} = n$

Задание 3.

Зафиксируем $n = c_1$ и $p - q = c_2$, где $p > q$

$$p = q + c_2$$

$$n = c_1 = q * (q + c_2) \Rightarrow q^2 + c_2 * q - c_1 = 0$$

$$q = \frac{-c_2 + \sqrt{c_2^2 + 4 * c_1}}{2}$$

Таким образом нам надо найти p и q

1) c_1 дано

2) c_2 перебираем за $O(|p - q|)$

3) чекаем, что получили целый числа

4) полилог берется из-за того, что константы могут быть большими и все арифметические действия будут делаться за полином от длины