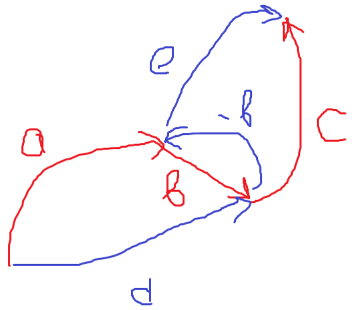
Федер Евгений, Домашнее задание №13

Задание 1.

Давайте докажем от противного: пусть существуют пути A и B для которых $w(A) > w(B)$ и B найден позже, чем A. Теперь рассмотрим 2 случая:

1) Они пересекаются по ребру, причем потоки идут в одну сторону. Тогда алгоритм опять бы взял B, а потом A.

2) Они пересекаются по ребру и потоки идут в разные стороны. Рассмотрим пример.



Красный - A, синий - B.

$w(A) > w(B) \Rightarrow a+b+c > d-b+e$ Но заметим, что так как мы сначала выбрали A, то

$a + b < d$

$b + c < e$

Складывая 2 нижних и сравнивая с верзним получаем противоречие.

Теперь давайте разобьем пути на кусочки, как выше(если их нет, то хорошо, мы бы выбрали B раньше чем A). И на каждом кусочке применим рассуждения выше(это будет верно, так как на кусочках минимализация веса должна сохраняться).

Задание 2.

Наша задача эквивалентна нахождению макс потока мин стоимости из B в A и C. Преобразуем граф следующим образом. Каждому ребру G поставим стоимость - вес ребра, а вместимость - 1. Также добавим фиктивную вершину F, в которую проведем ребра из A и C весом 0 и вместимостью 1.

Теперь нам нужно найти вершинно простой путь. Для этого каждую вершину(кроме B и F) раздвоим и сделаем ребро из одной в другую вместимостью 1, и весом 0. Теперь все входящие ребра в вершину пусть входят в первую, а выходящие выходят из второй.

Ищем максимальный поток мин стоимости из B в F. Если он не смог насытить оба ребра в F, то простого пути нет. Если насытил, то восстановим путь по массиву предков.

Время - работа 2 Дейкстры, что с обычной кучей работает $(ElogV)$

Задание 4.

Построим полный двудольный граф с фейковыми вершинами S и T. Слева будут цвета шаров. Справа будут ящики. На каждом ребре из i в j вместимость будет 1, а стоимость - количества шаров i цвета, которые не лежат в j ящике. Из S в левую и из правой в T добавим ребра (1, 0).

Теперь ищем max flow min cost(что значит найти совершенное паросочетание минимального веса). Итоговой стоимостью будет ответ, если поток насытит все ребра в T(оно насытит, так как у нас полный двудольный граф). Время работа - (V) Дейкстры за (V^2) - (V^3)