Федер Евгений, Домашнее задание №10

Задание 1.

Воспользуемся 2 заданием

$gcd(F_n, F_{n-1}) = gcd(F_n - F_{n-1}, F_{n-1}) = gcd(F_{n-2}, F_{n-1}) = gcd(F_{n-1}, F_{n-2})$

Таким образом мы спускаемся до F_2 и F_1, а их НОД равен 1.

Задание 2.

Докажем утверждение сразу в две стороны.

Когда $a == b$ случай очевиден. Все немного ломается. 0 - не натуральное число

Теперь рассмотрим $a < b$.

Покажем $gcd(a, b) = gcd(a, b \pm a)$

1) Так как a делится на gcd, и b делится на gcd, то $(a \pm b)$ делится на gcd.(вынести общий множитель)

2) Из 1 пункта, $gcd(a, a \pm b) \le gcd(a, b)$

3) Больше не может быть, так как тогда $\exists x : x * gcd(a, b)$ делит и a и на $a \pm b$ а значит делит и b

4) Следовательно они равны.

Отлично, из этого следует утверждение в обе стороны:

- Влево: возьмем a и b, вычтем из b a, и получим равенство.

- Также можно сделать и для вправо(прибавить a)

Задание 3.

d_x кратно x

- $\delta(a) * \delta(b) = \sum d_a^k * \sum d_b^k = \sum (d_a * d_b)^k$
- Пусть у нас есть $d_a b$, тогда разделим ее на множители и каждый множитель принадлежит или a или b. Следовательно $\delta(a * b) = \sum d_{a*b}^k = \sum (d_a * d_b)^k$
- приравниваем оба пункта и ЧТД

Задание 4.

- $p * q = x \Rightarrow p = x/q$
- $\phi(p * q) = (p-1) * (q-1) = (x/q - 1) * (q-1) = x - x/q - q + 1$
- $x - x/q - q + 1 = y \Rightarrow x * q - x - q^2 + q = q * y \Rightarrow q^2 + q * (y - x - 1) + x = 0$
- Решаем уравнение и проверяем. Если получилось - мы победили. Если нет - таких не существует.