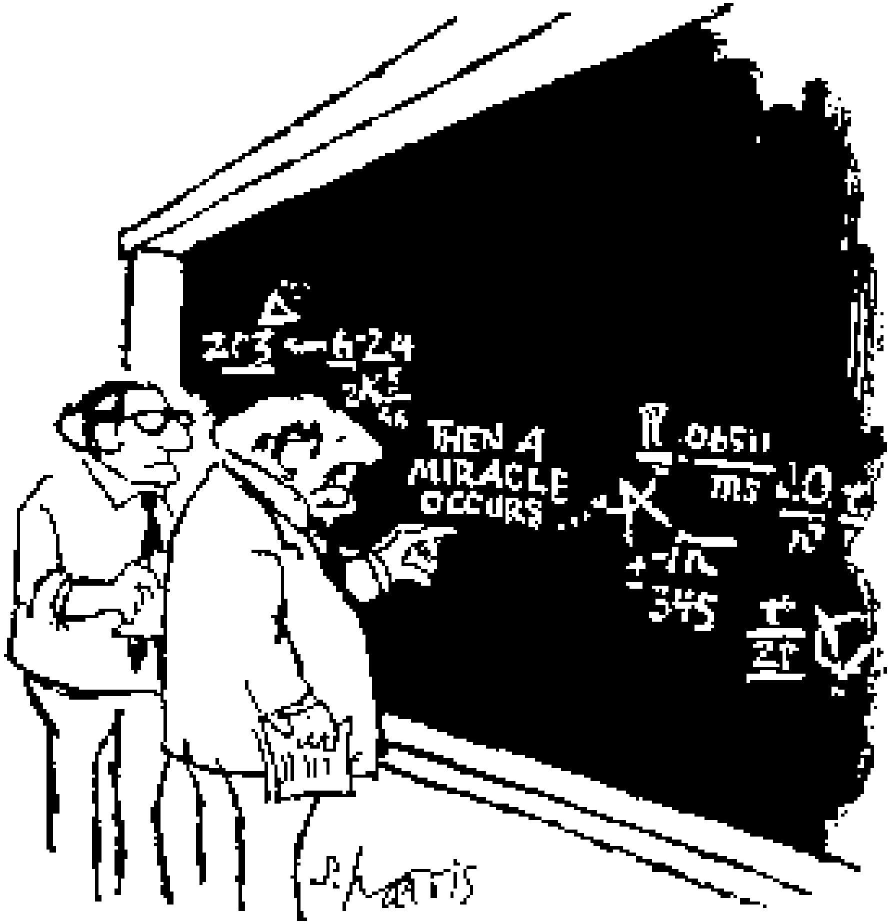
ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



“ I think you should be more explicit here in step 2.”

Προτασιακός Λογισμός – Γρήγορα ☺

Η Πριγκίπισσα και το

Αν ρώταγα ένα μέλος της φυλής που δεν ανήκεις για το ποιον δρόμο πρέπει να πάρω για το κάστρο τι θα μου έλεγε;

Μία πριγκίπισσα επισκέπτεται ένα νησί που κατοικείται από 2 φυλές. Τα μέλη της μίας φυλής λένε πάντα αλήθεια ενώ τα μέλη της άλλης πάντα ψέματα.

Η πριγκίπισσα φτάνει σε δύο μονοπάτια. Θα πρέπει να ξέρει ποιο μονοπάτι θα ακολουθήσει έτσι ώστε να αποφύγει το δράκο που βρίσκεται στο ένα μονοπάτι και να σώσει τον πρίγκιπα από την κακή μάγισσα στο κάστρο που βρίσκεται στο άλλο μονοπάτι.

Στην αρχή των δύο μονοπατιών υπάρχει 1 μέλος από κάθε φυλή χωρίς όμως να ξέρει ποιος λέει αλήθεια και ποιος ψέματα. Ποια ερώτηση πρέπει να κάνει η πριγκίπισσα για να βρει το δρόμο προς το κάστρο;

Κάτι για να σκεφτόμαστε...

Κάτω από μία καρυδιά κάθονται 3 άνθρωποι. Ο Κωστίκας (*Κ*), ο Γιωρίκας (*Γ*) και ο Πανίκας (*Π*). Ας υποθέσουμε ότι καθένας από αυτούς μπορεί να λέει μόνο αλήθεια ή ψέματα.

- Ο *Κ* λέει, «Όλοι μας είμαστε ψεύτες»
- Ο *Γ* λέει «Ακριβώς ένας λέει αλήθεια»

Ποιος από τους τρεις λέει ψέματα και ποιος αλήθεια;

(μπορεί η πληροφορία να μην είναι αρκετή.....)

Λογική

«Λογική είναι η επιστήμη των απαραίτητων κανόνων της σκέψης, χωρίς τους οποίους δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κατανόηση ή συλλογισμός.»

Immanuel Kant, 1785

«Αν ένα γεγονός είναι ενάντια στη κοινή λογική, αλλά παρόλα αυτά είμαστε υποχρεωμένοι να το δεχθούμε και να ασχοληθούμε μαζί του, τότε μαθαίνουμε να αλλάζουμε την έννοια της κοινής λογικής.»

P. J Davis and R. Hersh, 1981

Λογικές προτάσεις

- Λογική πρόταση ή απλά ***πρόταση*** (proposition-statement):
  - Δήλωση αποτελούμενη από σύμβολα ή λέξεις και η οποία είναι είτε ***ψευδής*** (False) είτε ***αληθής*** (True) αλλά όχι και τα δύο
- Η πρόταση έχει μία μόνο ***τιμή αληθείας*** (truth value)
- Συμβολισμός: $F - \Psi - 0,\ T - A - 1$

Παραδείγματα

- Ο αριθμός 3 διαιρεί τέλεια τον αριθμό 10 (F)
- Ο κροκόδειλος μπορεί να πετάξει (F)
- $2^7=128$ (T)
- Κάθε άρτιος αριθμός μεγαλύτερος του 2 μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα δύο πρώτων αριθμών (*εικασία του Goldbach*) (F ή T;)

Δεν θεωρούνται προτάσεις:

$$x \in \mathbf{N}$$

$$x^2 = -1$$

Ποιοι είναι οι διαιρέτες του 123;

Να δείξετε τη σχέση:

Σύνθετες προτάσεις

- ***Σύνθετες*** (compound) ***προτάσεις:*** προκύπτουν από σύνδεση άλλων προτάσεων με λογικούς συνδέσμους (υποδηλώνει μεταξύ τους σχέση)
- Σύνδεσμοι: ***λογικές πράξεις*** ή ***λογικοί τελεστές*** (logical operators).
- Οι λογικές πράξεις ορίζονται με τη βοήθεια του ***πίνακα αληθείας*** (truth table)

Προτασιακή Λογική

Ο τομέας της λογικής που ασχολείται με προτάσεις.

Σύζευξη (conjunction)

- "*p* και *q*"

Είναι αντιμεταθετική;

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Σύζευξη;

Διάζευξη (disjunction)

- "p ή q"

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Διάζευξη;

Αποκλειστική Διάζευξη (disjunction)

- "*p* ή *q αλλά όχι και τα δύο*"

p	q	$p \oplus q$
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	F

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή.»

«Σήμερα δεν βρέχει»

Αποκλειστική Διάζευξη;

Λογικές Πράξεις: Άρνηση (negation)

- "όχι " p :

Πίνακας Αληθείας

p	$\neg p$
F	T
T	F

Παράδειγμα

«Σήμερα είναι Παρασκευή»

«Είμαι από τον Άρη.»

Άρνηση;

Συνεπαγωγή (implication)

- «*p* συνεπάγεται την *q*»
- «Αν *p* τότε *q*»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

$$p \to q$$

Συνεπαγωγή (implication)

Αν εκλεγώ θα μειώσω τους φόρους.

- «*p* συνεπάγεται την *q*»
- «Αν *p* τότε *q*»

Υπόθεση

Συμπέρασμα

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$(p \wedge q) \rightarrow q$ θέλουμε να είναι πάντα αληθής

<u>*Ένα ανέκδοτο*</u>:
Κάποιος θεώρησε λάθος την ιδέα ότι ξεκινώντας από λάθος προτάσεις μπορείς να καταλήξεις σε μία οποιαδήποτε πρόταση και προκάλεσε τον B. Russell να δείξει ότι αν 4=5 τότε ο B.R. είναι ο πάπας. Τί νομίζετε ότι είπε;

Έστω 4=5. Τότε 1=2. Έγω και ο πάπας είμαστε δύο, άρα εγώ και ο πάπας είμαστε ένα.

Συνεπαγωγή

$$p \rightarrow q \equiv (\neg p \vee q)$$

Συνεπαγωγή

Αν σήμερα είναι Πάσχα, τότε αύριο είναι Δευτέρα.

1. Η *αντίστροφη* της $p \to q$ είναι η $q \to p$.
2. Η *αντίθετη* της $p \to q$ είναι η $\neg p \to \neg q$.
3. Η *αντιθετοαντίστροφη* της $p \to q$ είναι η $\neg q \to \neg p$.

Μία συνεπαγωγή είναι ισοδύναμη με την αντιθετοαντίστροφή της. (απόδειξη με πίνακα αληθείας ή με ιδιότητες)

Ισοδυναμία (equivalence)

«p είναι ισοδύναμη με q»

είναι ισοδύναμο με $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	T
F	T	F
T	F	F
T	T	T

p=“Είμαι ενήλικας”
q=“Είμαι $\geq$18 χρονών”

Ικανή και Αναγκαία Συνθήκη

Η *r* είναι μία ***ικανή συνθήκη*** για την *s*

«αν *r* τότε *s*»

Η *r* είναι μία ***αναγκαία συνθήκη*** για την *s*

«αν όχι *r* τότε όχι *s*»

«αν *s* τότε *r*»

«*s* μόνο αν *r*»

Παράδειγμα: «Αν ο Γιάννης έχει δικαίωμα ψήφου, τότε είναι τουλάχιστον 18 ετών.»

Ικανή και Αναγκαία

- Ικανή συνθήκη για να είναι ο x άρτιος είναι να διαιρείται από το 4. Είναι αναγκαία;

- Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο x άρτιος είναι να διαιρείται από το 2. Είναι ικανή;

- Αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $x \geq 3$ πρώτος είναι να μη διαιρείται από το 2. Είναι ικανή;

Προτεραιότητα Λογικών Τελεστών

Γενικά καθορίζουμε την προτεραιότητα με τις παρενθέσεις. Όταν δεν το κάνουμε αυτό τότε οι τελεστές με σειρά προτεραιότητας από υψηλότερη προς χαμηλότερη είναι:

1. Άρνηση
2. Σύζευξη
3. Διάζευξη
4. Συνεπαγωγή
5. Ισοδυναμία

Σύνθετες προτάσεις

- Προτάσεις $p_1, \ldots, p_n$

- Λογικές πράξεις $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

- Σύνθετες προτάσεις $\mathrm{P}(p_1, \ldots, p_n)$

Από Φυσική Γλώσσα

«Δεν μπορείτε να ανεβείτε στο τρενάκι του λούνα παρκ, αν έχετε ύψος κάτω από 1.2 μέτρα, εκτός, αν είστε παραπάνω από 16 χρονών»

Λογική πρόταση;

q : «μπορείτε να ανεβείτε στο τρενάκι του λούνα παρκ»

r : «έχετε ύψος κάτω από 1.2 μέτρα»

s : «είστε παραπάνω από 16 χρονών»

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$$

Πίνακας Αληθείας Σύνθετης Πρότασης

Όταν μια σύνθετη πρόταση αποτελείται από n απλές προτάσεις, ο πίνακας αληθείας αποτελείται από 2^n γραμμές

Παράδειγμα

$$P(p,q,r) = \neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$$

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$p \vee \neg q$	$\neg(p \vee \neg q)$	$\neg p \vee r$	$\neg(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee r)$
T	T	T	F	F	T	F	T	F
T	T	F	F	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	T	F
T	F	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	F	T	F
F	F	F	T	T	T	F	T	F

Ταυτολογία και αντίφαση

- ***Ταυτολογία*** (tautology):
  - Σύνθετη πρόταση η οποία παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας T
- ***Αντίφαση*** (contradiction):
  - Σύνθετη πρόταση που παίρνει σε όλες τις περιπτώσεις τιμή αληθείας F

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

Ίσες προτάσεις

Δεν είναι λογικός σύνδεσμος. Η $p \equiv q$ δεν είναι λογική πρόταση.

- ***Ίσες ή λογικά ισοδύναμες*** σύνθετες προτάσεις:

$$P(p_1,\ldots,p_n) \equiv Q(p_1,\ldots,p_n)$$

- Όταν οι πίνακες αληθείας τους είναι ίδιοι
- Αποδεικνύεται ότι η ισότητα δύο προτάσεων ισχύει αν και μόνο αν η πρόταση

$$P(p_1,\ldots,p_n) \leftrightarrow Q(p_1,\ldots,p_n)$$

είναι ταυτολογία

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	F

Παράδειγμα – Νόμοι De Morgan

$$(p \wedge q) \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(\neg p \vee \neg q)$	$(p \wedge q) \leftrightarrow \neg(\neg p \vee \neg q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	F	T

Λογικές Ισοδυναμίες

Νόμος	**Περιγραφή**
Ταυτότητας	$p \leftrightarrow p$
Διπλής άρνησης	$p \leftrightarrow \neg(\neg p)$
Αποκλείσεως τρίτου	$p \vee \neg p \leftrightarrow T$
Αντιφατικότητας	$\neg(p \wedge \neg p) \leftrightarrow T$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
Αντιμεταθετικότητας	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$ $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
Προσεταιριστικότητας	$(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Αντιθετικός	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
Επιμεριστικός	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Αναδιάταξης	$[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [q \rightarrow (p \rightarrow r)]$
Εξαγωγής	$[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$

Παράδειγμα (από εξετάσεις):

(1 Μονάδα)

Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία χωρίς τη χρήση πίνακα αληθείας, αναγράφοντας τις ιδιότητες που χρησιμοποιείτε σε κάθε βήμα.

$$((p \rightarrow q) \land \neg q) \rightarrow \neg p$$

Παράδειγμα

(Ερώτημα από Πρόοδο)

Θέμα 8ο: (1 Μονάδα) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση σε κάθε ερώτημα.

Α) Έστω οι παρακάτω προτάσεις: p: «Η Γωγώ εργάζεται μέχρι αργά», q: «Ο Μήτσος εργάζεται μέχρι αργά» και r: «θα φάνε στο σπίτι». Για κάθε πρόταση που δίνεται να κυκλώσετε την αντίστοιχη λογική πρόταση.

«Αν η Γωγώ ή ο Μήτσος δεν εργαστούν μέχρι αργά τότε θα φάνε στο σπίτι.»

α) $\neg(p \vee q) \rightarrow r$ β) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$

γ) $\neg(p \wedge q) \rightarrow r$ δ) $r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

«Η Γωγώ και ο Μήτσος δεν εργάζονται μέχρι αργά.»

α) $\neg(p \vee q)$ β) $\neg p \vee \neg q$ γ) $p \wedge q$ δ) $p \rightarrow \neg q$

«Θα φάνε στο σπίτι μόνο αν η Γωγώ δεν εργάζεται μέχρι αργά.» (αναγκαία συνθήκη)

α)$r \rightarrow p$ β) $\neg p \rightarrow \neg r$ γ) $p \rightarrow \neg r$ δ) $p \rightarrow r$

Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Μέθοδοι Απόδειξης

Θεώρημα: Μία δήλωση που μπορούμε να αποδείξουμε ότι αληθεύει.

Απόδειξη: Το επιχείρημα που αποτελείται από τη σειρά δηλώσεων που χρησιμοποιούμε για να καταλήξουμε στο θεώρημα.

Αξίωμα: Υποθέσεις που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του θεωρήματος.

Κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων: τα μέσα που χρησιμοποιούνται για εξαγωγή συμπερασμάτων από άλλες δηλώσεις (βήματα απόδειξης)

Εγκυρότητα Απόδειξης

Αν κάθε φορά που όλες οι υποθέσεις (ή αξιώματα) είναι αληθείς τότε είναι αληθές και το συμπέρασμα.

Δείξτε ότι η παρακάτω απόδειξη δεν είναι έγκυρη:

$$p \to q \vee \neg r$$

$$q \to p \wedge r$$

$$\therefore p \to r$$

Κανόνας Απόσπασης (modus ponens)

$$(p \wedge (p \to q)) \to q \text{ ή}$$

$$p \to q$$

$$p$$

$$\therefore q$$

Παράδειγμα:

«Αν σήμερα χιονίσει τότε θα κάνουμε σκι.»

«Σήμερα χιονίζει.»

Άρα: «Θα κάνουμε σκι.»

Μέθοδος Άρνησης (modus tollens)

$$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p \text{ ή}$$

$$p \to q$$

$$\neg q$$

$$\therefore\ \neg p$$

Παράδειγμα:

«Αν ο Δίας είναι άνθρωπος, τότε ο Δίας είναι θνητός.»

«Ο Δίας δεν είναι θνητός.»

Άρα: «Ο Δίας δεν είναι άνθρωπος.»

Κανόνες

$p \rightarrow (p \vee q)$	Πρόσθεση (γενίκευση)
$(p \wedge q) \rightarrow p$	Απλοποίηση (ειδίκευση)
$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	Σύζευξη
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	Modus Ponens
$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	Modus Tollens
$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	Υποθετικός Συλλογισμός (Μεταβατικότητα)
$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	Διαζευκτικός Συλλογισμός (Απαλοιφή)
$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	Διαχωρισμός

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα τότε θα κολυμπήσουμε.»

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

∴ « Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα δεν είναι έγκυρο.

Παράδειγμα – Είναι έγκυρο;

«Δεν έχει ήλιο σήμερα το απόγευμα και έχει περισσότερο κρύο από χθες.»

«Αν δεν έχει ήλιο τότε δεν θα κολυμπήσουμε.»

(Θα κολυμπήσουμε μόνο αν έχει ήλιο)

«Αν δεν θα κολυμπήσουμε, τότε θα πάμε με το κανό.»

«Αν θα πάμε με το κανό, θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

$\therefore$ « Θα γυρίσουμε σπίτι με το ηλιοβασίλεμα.»

Το συμπέρασμα είναι έγκυρο.

Ποιο να Ανοίξω; – Το Χρωστάω

Αν αυτό το σεντούκι είναι άδειο το μήνυμα στο άλλο σεντούκι είναι αληθές.

Αυτό το σεντούκι έχει θησαυρό ή το άλλο σεντούκι περιέχει σκορπιούς.

Υποθέσεις:

1. Μία και μόνο μία από τις δύο προτάσεις είναι αληθής.
2. Έστω ότι το σεντούκι μπορεί να είναι σε μία από τις τρεις καταστάσεις: άδειο, γεμάτο με θησαυρό και γεμάτο με σκορπιούς

Λογικές Πλάνες

Σφάλμα κατά τον συλλογισμό που μας οδηγεί σε λάθος συμπέρασμα.

1. Σφάλμα αντιστρόφου:

   «Αν ο Κώστας αντιγράφει, τότε κάθεται στην τελευταία σειρά.»

   «Ο Κώστας κάθεται στην τελευταία σειρά.»

   ∴ «Ο Κώστας αντιγράφει.»

2. Σφάλμα αντιθέτου:

   «Αν τα επιτόκια αυξηθούν, οι τιμές στο χρηματιστήριο θα πέσουν.»

   «Τα επιτόκια δεν αυξάνονται.»

   ∴ «Οι τιμές στο χρηματιστήριο δεν θα πέσουν.»

Ο Κωστίκας, ο Γιωρίκας και ο Πανίκας...

- Για κάθε όνομα μία boolean μεταβλητή έτσι ώστε αν λέει ψέματα να είναι 0, αν λέει αλήθεια να είναι 1.
- Η πρόταση Ρ=«Όλοι μας λέμε ψέματα» είναι η Ρ=Κ΄Γ΄Π΄.
- Η πρόταση Σ=«Ακριβώς ένας λέει αλήθεια» είναι η Σ=ΚΓ΄Π΄+Κ΄ΓΠ΄+Κ΄Γ΄Π.

- Φτιάχνουμε τον πίνακα αληθείας για όλους τους συνδυασμούς ΡΣ(ΚΓ), Ρ΄Σ(Κ΄Γ), Ρ΄Σ΄(Κ΄Γ΄), ΡΣ΄(ΚΓ΄). Αν υπάρχει ένα **1** λύθηκε αλλιώς ....

Άλλος Τρόπος

Έστω ότι ο Κ λέει αλήθεια.

∴ Όλοι λένε ψέματα (από αυτό που λέει ο Κ)

∴ Αντίφαση: Ο Κ λέει αλήθεια και ψέματα

∴ Η υπόθεση είναι εσφαλμένη

∴ Άρα ο Κ λέει ψέματα

…

Ποιος σκότωσε τον λόρδο Lordaton;

«Ο λόρδος Lordaton, το θύμα, σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι με ένα μπρούτζινο κηροπήγιο.»

«Είτε η λαίδη Lordaton είτε η υπηρέτρια Sara, ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου.»

«Αν η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε ο μπάτλερ σκότωσε το λόρδο Lordaton με μία μοιραία δόση στρυχνίνης.»

«Αν η λαίδη Lordaton ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σοφέρ σκότωσε τον λόρδο Lordaton.»

«Αν η μαγείρισσα δεν ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε η Sara δεν ήταν στο καθιστικό όταν διαπράχτηκε ο φόνος.»

«Αν η Sara ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σερβιτόρος σκότωσε το λόρδο Lordaton.»

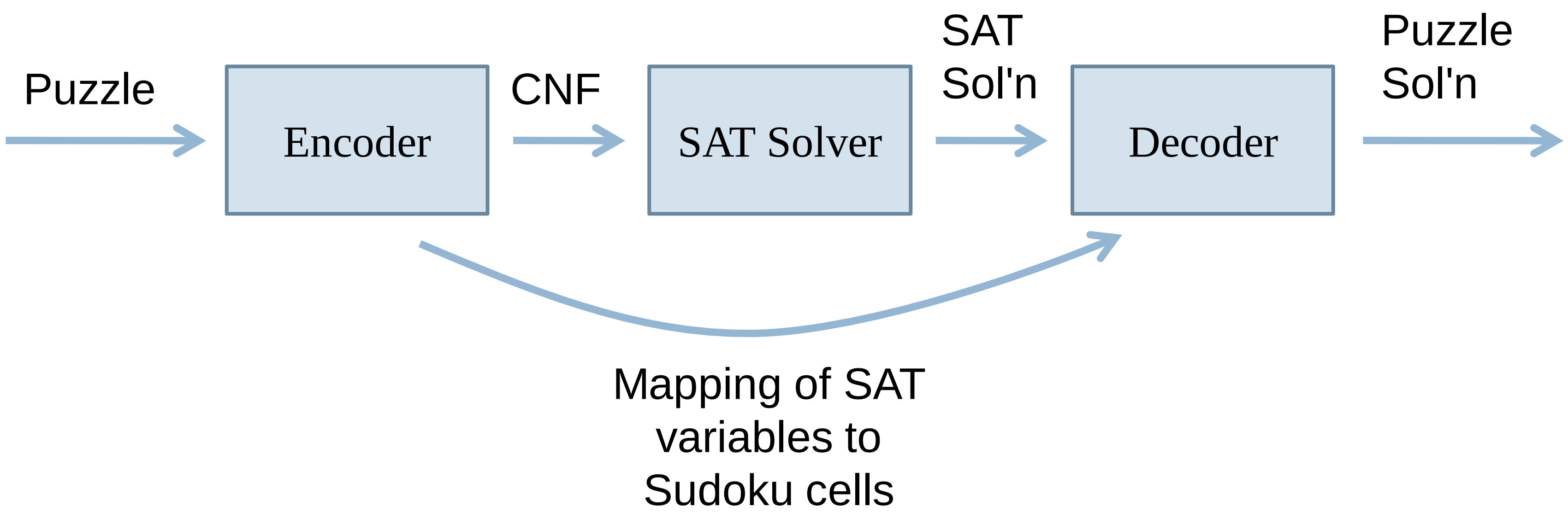
Για Πλάκα…

What is Sudoku?

		6	1		2	5		
	3	9				1	4	
				4				
9		2		3		4		1
	8						7	
1		3		6		8		9
				1				
	5	4				9	1	
		7	5		3	2		

- Played on a $n \times n$ board.
- A single number from 1 to n must be put in each cell; some cells are pre-filled.
- Board is subdivided into $\sqrt{n} \times \sqrt{n}$ blocks.
- Each number must appear exactly once in each row, column, and block.
- Designed to have a unique solution.

Puzzle-Solving Process



Naive Encoding (1a)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$".
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c.

Example of Variable Encoding

3	2	1	4
4	1	2	3
1	4	3	2
2	3	4	1

Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the digit d is in the cell at row r, column c.

$$x_{1,1,3} = \texttt{true},\ x_{1,2,2} = \texttt{true},\ x_{1,3,1} = \texttt{true},\ x_{1,4,4} = \texttt{true}$$

$$x_{2,1,4} = \texttt{true},\ x_{2,2,1} = \texttt{true},\ x_{2,3,2} = \texttt{true},\ x_{2,4,3} = \texttt{true}$$

$$x_{3,1,1} = \texttt{true},\ x_{3,2,4} = \texttt{true},\ x_{3,3,3} = \texttt{true},\ x_{3,4,2} = \texttt{true}$$

$$x_{4,1,2} = \texttt{true},\ x_{4,2,3} = \texttt{true},\ x_{4,3,4} = \texttt{true},\ x_{4,4,1} = \texttt{true}$$

All others are false.

digit

column

row

Naive Encoding (1b)

- Use n^3 variables, labelled "$x_{0,0,0}$" to "$x_{n,n,n}$".
- Variable $x_{r,c,d}$ represents whether the number d is in the cell at row r, column c.

- "Number *d* must occur exactly once in column *c*" $\Rightarrow$ "Exactly one of $\{x_{1,c,d}, x_{2,c,d}, \ldots, x_{n,c,d}\}$ is true".
- How do we encode the constraint that ***exactly one*** variable in a set is true?

Naive Encoding (2)

- How do we encode the constraint that ***exactly one*** variable in a set is true?
- We can encode "**exactly one**" as the conjunction of "**at least one**" and "**at most one**".
  - Encoding "**at least one**" is easy: simply take the logical OR of all the propositional variables.
  - Encoding "**at most one**" is harder in CNF.
    Standard method: "no two variables are both true".
  - I.e., enumerate every possible pair of variables and require that one variable in the pair is false.
    This takes O(n^2) clauses.
  - [Example on next slide]

Naive Encoding (3)

- Example for 3 variables (*x1*, *x2*, *x3*).
- "At least one is true":

$$x1 \vee x2 \vee x3.$$

- "At most one is true":

$$(\sim x1 \vee \sim x2) \ \& \ (\sim x1 \vee \sim x3) \ \& \ (\sim x2 \vee \sim x3).$$

- "Exactly one is true":

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \ \& \ (\sim x_1 \vee \sim x_2) \ \& \ (\sim x_1 \vee \sim x_3) \ \& \ (\sim x_2 \vee \sim x_3).$$

Naive Encoding (4)

The following constraints are encoded:

- Exactly one digit appears in each cell.
- Each digit appears exactly once in each row.
- Each digit appears exactly once in each column.
- Each digit appears exactly once in each block.

Each application of the above constraints has the form:
"exactly one of a set variables is true".

All of the above constraints are
independent of the prefilled cells.

Problem with Naive Encoding

- We need n^3 total variables.
  (n rows, n cols, n digits)
- And $O(n^4)$ total clauses.
  - To require that the digit "1" appear exactly once in the first row, we need $O(n^2)$ clauses.
  - Repeat for each digit and each row.
- For n = 9 (9 × 9), the naive encoding is OK.
- For large n, it is a problem.

<u>1.</u> (Epp 30) Γράψτε την άρνηση των παρακάτω λογικών προτάσεων:

Α) Ο Γιάννης έχει ύψος 1,80 μέτρα και ζυγίζει τουλάχιστον 90 κιλά.

Β) Το λεωφορείο άργησε ή το ρολόι του Νίκου πήγαινε πίσω.

<u>Λύση:</u>

Α) Ο Γιάννης δεν έχει ύψος 1,80 μέτρα ή ζυγίζει λιγότερο από 90 κιλά.

Β) Το λεωφορείο δεν άργησε και το ρολόι του Νίκου δεν πήγαινε πίσω.

<u>2.</u> (Epp 34) Απλοποιήστε την παρακάτω λογική πρόταση:

$$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$$

<u>Λύση:</u>

$\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv$ (De Morgan)
$p \vee (\neg q \wedge q) \equiv$ (επιμεριστική)
$p \vee F \equiv$ (ΚΑΙ αντίθετων μεταβλητών)
p

<u>3.</u> (Epp 40) Γράψτε την άρνηση των παρακάτω λογικών προτάσεων:

Α) Αν το αυτοκίνητό μου είναι στο συνεργείο, τότε δεν μπορώ να πάω για μάθημα.

Β) Αν η Αλίκη ζει στο Μέτσοβο, τότε ζει στην Ελλάδα.

<u>Λύση:</u>

Προκύπτει από την άρνηση της συνεπαγωγής.
Α) Το αυτοκίνητό μου είναι στο συνεργείο και μπορώ να πάω για μάθημα.
Β) Η Αλίκη ζει στον Μέτσοβο και δεν ζει στην Ελλάδα.

4. (Ensley 24) Συναντούμε δύο κατοίκους στο Νησί. Ο Α λέει: «Ακριβώς ένας από εμάς λέει ψέματα» ενώ ο Β λέει «Τουλάχιστον ένας λέει την αλήθεια». Ποιος λέει αλήθεια;

Λύση:

Έστω p «Ο Α λέει αλήθεια» και q «Ο Β λέει αλήθεια.».

p	q	«Ακριβώς ένας από εμάς λέει ψέματα»	«Τουλάχιστον ένας λέει την αλήθεια»
F	F	F	F
F	T	T	T
T	F	T	T
T	T	F	T

5. (Ensley 1.3.9) Το s αντιστοιχεί στο «Το ποδόσφαιρο αρέσει στον Χρήστο», το r στο «Το διάβασμα αρέσει στον Χρήστο.» και το p στο «Η πίτσα αρέσει στον Χρήστο.». Γράψτε σε μορφή προτασιακής λογικής τις παρακάτω προτάσεις:

1. «Στον Χρήστο αρέσει η πίτσα αλλά όχι το ποδόσφαιρο.»
2. «Στον Χρήστο αρέσει να διαβάζει και να τρώει πίτσα, ή του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο.»
3. «Στον Χρήστο δεν αρέσει η πίτσα, αλλά του αρέσει να παίζει ποδόσφαιρο ή να διαβάζει.»
4. «Στον Χρήστο αρέσει να κάνει δύο από αυτές τις ασχολίες αλλά όχι και τις τρεις.»

Λύση:

1. $(p \wedge \neg s)$
2. $(p \wedge r) \vee s$
3. $\neg \mathrm{p} \wedge (r \vee s)$
4. $(p \wedge r \wedge \neg s) \vee (p \wedge \neg r \wedge s) \vee (\neg p \wedge r \wedge s)$

<u>6.</u> (Epp 1.1.50) Αποδείξτε την παρακάτω λογική ισοδυναμία:

$$\neg\big((\neg p \land q) \lor (\neg p \land \neg \mathrm{q})\big) \lor (p \land q) \equiv p$$

<u>Λύση:</u>

$\big(\neg(\neg p \land q) \land \neg(\neg p \land \neg \mathrm{q})\big) \lor (p \land q) \equiv$

$\big((p \lor \neg q) \land (p \lor \mathrm{q})\big) \lor (p \land q) \equiv$ De Morgan

$\big((p \lor \neg q) \land (p \lor \mathrm{q})\big) \lor (p \land q) \equiv$ Επιμεριστική

$\big(p \lor (q \land \neg q)\big) \lor (p \land q) \equiv$ Ταυτότητα

$(p \lor F) \lor (p \land q) \equiv$ Ταυτότητα

$p \lor (p \land q) \equiv$ Αφομοίωση

p

<u>7.</u> (Epp 1.3.36) Με δεδομένες τις παρακάτω πληροφορίες για ένα πρόγραμμα υπολογιστή, βρείτε το σφάλμα στο πρόγραμμα.

1. «Υπάρχει μία αδήλωτη μεταβλητή ή ένα συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές.»
2. «Αν υπάρχει ένα συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές, τότε είτε λείπει ένα ελληνικό ερωτηματικό είτε το όνομα μιας μεταβλητής δεν είναι σωστά γραμμένο.»
3. «Δεν λείπει κανένα ελληνικό ερωτηματικό.»
4. «Καμίας μεταβλητής το όνομα δεν είναι γραμμένο λάθος.»

<u>Λύση:</u>

p :«Υπάρχει αδήλωτη μεταβλητή στις πέντε πρώτες γραμμές.»

q :«Υπάρχει συντακτικό λάθος στις πέντε πρώτες γραμμές.»

r :«Λείπει ελληνικό ερωτηματικό.»

s :«Το όνομα μιας μεταβλητής είναι γραμμένο λάθος.»

Τότε:

$$1{:}\,(p \lor q)$$
$$2{:}\,q \to (r \lor s)$$
$$3{:}\,\neg r$$
$$4{:}\,\neg s$$

$\therefore (\neg r \wedge \neg s)$ Από ορισμό

$\therefore \neg(r \vee s)$ De Morgan

$\therefore \neg q$ Modus Tollens $\Big(\big(\neg(r \vee s) \wedge q \to (r \vee s)\big) \to \neg q\Big)$

$\therefore p$ Απαλοιφή $\Big(\big((p \vee q) \wedge \neg q\big) \to p\Big)$

8. (Epp 1.3.39) Ο διάσημος ντετέκτιβ S. Holmes κλήθηκε να εξιχνιάσει έναν μπερδεμένο και μυστήριο φόνο. Προσδιόρισε λοιπόν τα παρακάτω γεγονότα.

1. «Ο λόρδος Hazelton, το θύμα, σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι με ένα μπρούτζινο κηροπήγιο.»
2. «Είτε η λαίδη Hazelton είτε η υπηρέτρια Sara, ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου.»
3. «Αν η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε ο μπάτλερ σκότωσε το λόρδο Hazelton με μία μοιραία δόση στρυχνίνης.»
4. «Αν η λαίδη Hazelton ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σοφέρ σκότωσε τον λόρδο Hazelton.»
5. «Αν η μαγείρισσα δεν ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου, τότε η Sara δεν ήταν στο καθιστικό όταν διαπράχτηκε ο φόνος.»
6. «Αν η Sara ήταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου, τότε ο σερβιτόρος σκότωσε το λόρδο Hazelton.»

Από τα παραπάνω γεγονότα, είναι δυνατό ο ντετέκτιβ να προσδιορίσει την ταυτότητα του δολοφόνου; Αν ναι, τότε ποιος είναι ο δολοφόνος; (θεωρήστε ότι υπάρχει μόνο μία αιτία θανάτου).

Λύση:

p : «Ο λόρδος Hazelton σκοτώθηκε από χτύπημα στο κεφάλι»

q : «Ο λόρδος Hazelton δηλητηριάστηκε»

r : «Η λαίδη Hazelton καθόταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου»

s : «Η Sara καθόταν στο καθιστικό την ώρα του φόνου»

t : «Η μαγείρισσα ήταν στην κουζίνα την ώρα του φόνου»

u : «Ο μπάτλερ είναι ο δολοφόνος»

v : «Ο σοφέρ είναι ο δολοφόνος»

w : «Ο σερβιτόρος είναι ο δολοφόνος»

Τότε:

$$1: p$$

$$2: (r \lor s)$$
$$3: t \to (u \land q)$$
$$4: r \to v$$
$$5: \neg t \to \neg s$$
$$6: s \to w$$
$$Από\ υπόθεση: (p \land \neg q) \lor (\neg p \land q)$$

$7. \therefore \neg q$ Από (1) και υπόθεση
$8. \therefore t \to F$ αφού από 7 και 3 $(u \land q) \land \neg q \equiv F$ προσεταιριστική και ταυτότητα
$9. \therefore \neg t$ από (8)
$10. \therefore \neg s$ από (5,9) και Modus Ponens
$11. \therefore r$ από (2,10) και Απαλοιφή
$12. \therefore v$ από (4,11) και Modus Ponens

Άρα ο δολοφόνος είναι ο σοφέρ

9. (2.6.6 κ) Να γίνει ο πίνακας αληθείας της σύνθετης πρότασης:

$$(p \lor \neg r) \land (q \lor \neg r)$$

Λύση:

Χρειαζόμαστε $2^3=8$ γραμμές αφού έχουμε 3 μεταβλητές.

p	q	r	¬r	p∨¬r	q∨¬r	(p∨¬r)∧(q∨¬r)
F	F	F	T	T	T	T
F	F	T	F	F	F	F
F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F
T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	T	F	T	T	T	T
T	T	T	F	T	T	T

10. <u>(2.6.7 ζ)</u> Να εξεταστεί αν η παρακάτω σύνθετη πρόταση είναι αντίφαση ή ταυτολογία:

$$p\rightarrow(q\wedge r)\leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$$

Προσοχή $(p\rightarrow q)$ είναι F μόνο όταν $(T\rightarrow F)$

<u>Λύση:</u>

p	q	r	$q\wedge r$	$p\rightarrow(q\wedge r)$	$p\rightarrow q$	$p\rightarrow r$	$(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$	$p\rightarrow(q\vee r)\leftrightarrow(p\rightarrow q)\wedge(p\rightarrow r)$
F	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T
T	T	F	F	F	T	F	F	T
T	T	T	T	T	T	T	T	T

Άρα είναι ταυτολογία.

11. <u>(2.6.9)</u> Να δειχτεί με πράξεις ότι η παράσταση $(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ απλοποιείται στην $(p\wedge q)\vee r$

$(p\wedge\neg q\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)\equiv$

$\equiv [(p\wedge\neg q)\wedge r]\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$

$\equiv\{[(p\wedge\neg q)\vee(p\wedge q)]\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ εφαρμογή επιμεριστικής ιδιότητας

$\equiv\{[(p\wedge(\neg q\vee q)]\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ κοινός παράγοντας

$\equiv\{p\wedge[r\vee(p\wedge q)]\}\vee(\neg p\wedge r)$ το $(\neg q\vee q)$ είναι T

$\equiv(p\wedge r)\vee(p\wedge p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ επιμεριστική

$\equiv(p\wedge r)\vee(p\wedge q)\vee(\neg p\wedge r)$ το $p\wedge p$ είναι p

$\equiv[(p\vee\neg p)\wedge r]\vee(p\wedge q)$ κοινός παράγοντας

$\equiv r\vee(p\wedge q)$ το $(\neg p\vee p)$ είναι T

Αποδείχτηκε.

<u>12.</u> Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία χωρίς τη χρήση πίνακα αληθείας.

$$\left((p \to q) \wedge \neg q\right) \to \neg p$$

<u>Λύση:</u>

$$((p \to q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$((\neg p \vee q) \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$((\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$(\neg p \wedge \neg q) \to \neg p \equiv$$
$$\neg(\neg p \wedge \neg q) \vee \neg p \equiv$$
$$p \vee q \vee \neg p \equiv 1 \vee q \equiv 1$$

Άλυτες Ασκήσεις

1. (Bradley 3.4.19) Να δείξετε ότι η παρακάτω έκφραση είναι ταυτολογία.

$$((p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κατηγορηματικός Λογισμός

Μορφές Θεωρημάτων

- Υπάρχει ένα αντικείμενο ώστε να ισχύει κάτι.
  - Υπαρξιακός ποσοδείκτης ∃

- Για κάθε αντικείμενο ισχύει ότι κάτι.
  - Καθολικός ποσοδείκτης ∀

Κατηγορήματα

Κατηγόρημα είναι μία πρόταση που περιέχει πεπερασμένο πλήθος μεταβλητών και η οποία γίνεται λογική πρόταση όταν οι μεταβλητές αντικαθίστανται από συγκεκριμένες τιμές.

$$x > 3$$

«Το x είναι μεγαλύτερο του 3»

Υποκείμενο Δήλωσης

Κατηγόρημα ή
Κατηγορηματικό Σύμβολο

«Το x είναι μεγαλύτερο του 3» = $P(x)$

$P \rightarrow$ κατηγόρημα («μεγαλύτερο του 3)

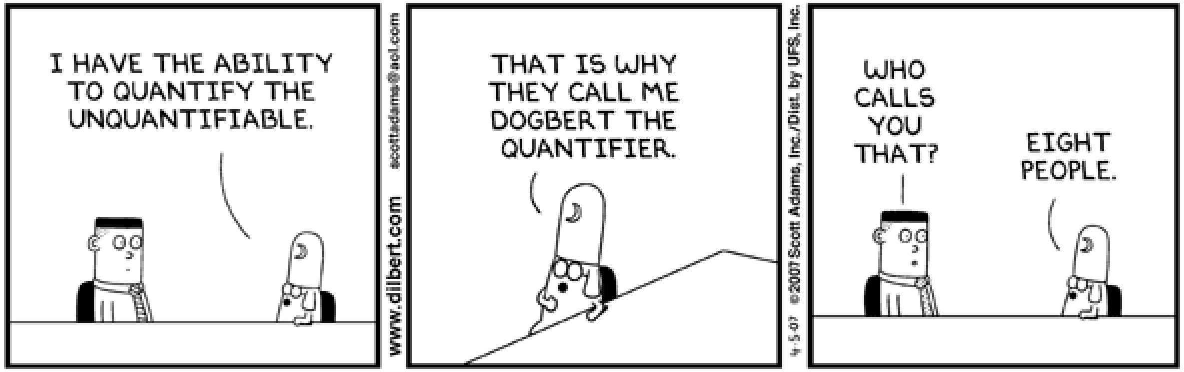
$x \rightarrow$ μεταβλητή

Τιμή (T ή F) της προτασιακής συνάρτησης P στο x

Κατηγορηματικός Λογισμός

Ο τομέας της Λογικής που ασχολείται με:

- Κατηγορήματα
- Ποσοτικοποιητές (σε λίγο…)



Ο Καθολικός Ποσοτικοποιητής ∀

$$\forall x P(x)$$

Η $P(x)$ είναι αληθής για όλες τις τιμές του x στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς*.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$$\forall x\ P(x)\ ???$$

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

Σχέση ∀ και ∧

$$\forall x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2<10\text{”}$$

$$\forall x(P(x)) \equiv P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(4)$ ψευδής και άρα είναι ψευδής.

Ο Υπαρξιακός Ποσοτικοποιητής ∃

$$\exists x\, P(x)$$

Υπάρχει ένα στοιχείο x στο *πεδίο ορισμού* ή *τομέα αναφοράς* έτσι ώστε η $P(x)$ να είναι αληθής.

$$P(x) = x^2 \geq x$$

$$\exists x\, P(x) \text{ ???}$$

(φυσικούς αριθμούς; πραγματικούς;)

Σχέση $\exists$ και $\vee$

$$\exists x(P(x)),\ 0 < x \leq 4$$

$$P(x) = \text{“}x^2 < 10\text{”}$$

$$\exists x(P(x)) \equiv P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$$

Μέθοδος της εξάντλησης.

$P(1)$ αληθής και άρα είναι αληθής.

Δέσμευση Μεταβλητών

- ***Δεσμευμένη*** μεταβλητή (εξαρτάται από ποσοδείκτη)
- ***Ελεύθερη*** μεταβλητή (δεν εξαρτάται από ποσοδείκτη)

Γενικά:

Όλες οι μεταβλητές σε προτασιακή συνάρτηση πρέπει να είναι δεσμευμένες είτε με ποσοτικοποιητές ή με ανάθεση τιμής ώστε να θεωρείται λογική πρόταση.

Μερικά Παραδείγματα

- Να δειχτεί ότι $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

- Να δειχτεί ότι $\forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ δεν είναι λογικά ισοδύναμη με την $\forall x(P(x) \vee Q(x))$.

Αρνήσεις

Έστω $P(x)$=«Ο x έχει κάνει διακριτά μαθηματικά»

Τι σημαίνει $\forall x\, P(x)$;

Τι σημαίνει $\neg\, (\forall x\, P(x))$;

Άρνηση	**Ισοδύναμο**	**Πότε η άρνηση είναι Αληθής;**	**Πότε η άρνηση είναι Ψευδής;**
$\neg(\exists x\, \mathrm{P}(x))$	$\forall x\, \neg P(x)$	Για κάθε x, η $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής.	Υπάρχει x έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Αληθής.
$\neg(\forall x\, P(x))$	$\exists x\, \neg \mathrm{P}(x)$	Υπάρχει x έτσι ώστε $\mathrm{P}(x)$ είναι Ψευδής.	Η $\mathrm{P}(x)$ είναι αληθής για όλα τα x.

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

"Κάθε φοιτητής σε αυτή την τάξη έχει παρακολουθήσει Java."

Λύση:

Πρώτα αποφασίζουμε τον τομέα αναφοράς U.

Λύση 1: Αν το U είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης, ορίζουμε τη συνάρτηση $J(x)$ = "x έχει παρακολουθήσει Java"

$$\forall x \; J(x)$$

Λύση 2: Όταν το U είναι όλοι οι άνθρωποι, ορίζουμε τη συνάρτηση $S(x)$ = "x είναι φοιτητής αυτής της τάξης" και μεταφράζουμε

$$\forall x \; (S(x) \rightarrow J(x))$$

$\forall x \; (S(x) \wedge J(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

"Κάποιος φοιτητής αυτής της τάξης έχει παρακολουθήσει Java."

Λύση:
Ποιος είναι ο τομέας αναφοράς *U*;

Λύση 1: Αν *U* είναι όλοι οι φοιτητές της τάξης

$$\exists x\ J(x)$$

Λύση 2: Αν *U* είναι όλοι οι άνθρωποι

$$\exists x\ (S(x) \land J(x))$$

$\exists x\ (S(x) \rightarrow J(x))$ είναι λάθος. Τι σημαίνει;

Μετάφραση από Γλώσσα σε Λογική Έκφραση

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το x πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

1. $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
2. $\exists x(P(x) \land \neg R(x))$
3. $\exists x(Q(x) \land \neg R(x))$

Εμφωλευμένοι Ποσοτικοποιητές

$$\forall x \exists y \, (x + y = 0)$$

«Για κάθε x υπάρχει κάποιο y έτσι ώστε το άθροισμά τους να είναι 0.»

$$\forall x \, \forall \, y \, (x + y = y + x)$$

Αντιμεταθετικός κανόνας πρόσθεσης.

Μετάφραση και Αρνήσεις

«Κάθε πραγματικός αριθμός εκτός από το 0 έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο.

$$\forall x\ ((x \neq 0) \rightarrow \exists y\ (xy=1))$$

$$\neg(\forall x \exists y\ (xy=1))$$

$$\Downarrow$$

$$\exists x \forall y\ (xy \neq 1)$$

Παράδειγμα

Ένας Έλληνας πεθαίνει από αυτοκινητιστικό κάθε μέρα.

$\exists E \forall M$[Ο E πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα M]

$\forall M\ \exists E$[Ο E πεθαίνει από αυτοκινητιστικό την ημέρα M]

Παράδειγμα

A = Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι άγευστα. (F)

Τι σημαίνει όχι A;

Α) Όλα τα ξένα πορτοκάλια είναι καλά.

Β) Όλα τα ξένα πορτοκάλια δεν είναι άγευστα.

Γ) Τουλάχιστον ένα ξένο πορτοκάλι είναι εύγευστο.

Δ) Τουλάχιστον ένα ξένο πορτοκάλι δεν είναι άγευστο.

Ε) Όλα τα ντόπια πορτοκάλια είναι καλά.

Ένα Ακόμα Παράδειγμα (1)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Όλα είναι ψείρες"

$$\forall x\, F(x)$$

Παράδειγμα (2)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Κανένα δεν είναι κοριός."

$\neg(\exists x\ S(x))$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x \neg S(x)$

Παράδειγμα (3)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Όλες οι ψείρες είναι κοριοί"

$\forall x\, (F(x) \rightarrow S(x))$

Παράδειγμα (4)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

“Μερικοί κοριοί είναι τσιμπούρια”

$\exists x\,(S(x) \wedge T(x))$

Παράδειγμα (5)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Κανένας κοριός δεν είναι τσιμπούρι"

$\neg(\exists x\ (S(x) \wedge T(x)))$ Με τί είναι ισοδύναμο;

$\forall x\ (\neg S(x) \vee \neg T(x))$

Παράδειγμα (6)

U = {ψείρες, κοριοί, τσιμπούρια}

$F(x)$: x είναι ψείρα

$S(x)$: x είναι κοριός

$T(x)$: x είναι τσιμπούρι

"Αν κάποια ψείρα είναι κοριός τότε είναι και τσιμπούρι"

$$\forall x\,((F(x) \land S(x)) \rightarrow T(x))$$

Σειρά Ποσοτικοποιήσεων

$$\exists x \forall y \, (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

$$\forall x \exists y \, (x + y = 0)$$

Αυτή η πρόταση είναι αληθής ή ψευδής; Γιατί;

Παράδειγμα

Έστω U το σύνολο των πραγματικών αριθμών

$P(x,y) : x \cdot y = 0$

Ποια είναι η τιμή αληθείας των:

1. $\forall x \forall y P(x,y)$

   Ψευδής

2. $\forall x \exists y P(x,y)$

   Αληθής

3. $\exists x \forall y\ P(x,y)$

   Αληθής

4. $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$

   Αληθής

Μετάφραση Προτάσεων σε Γλώσσα

Παράδειγμα: $\forall x \ (C(x) \vee \exists y\, (C(y) \wedge F(x, y)))$

$C(x)$ = “x έχει Η/Υ” και $F(x,y)$ = “x και y είναι φίλοι” και ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι όλοι οι φοιτητές του τμήματος.

Κάθε φοιτητής στο τμήμα έχει Η/Υ ή έχει φίλο που έχει Η/Υ.

Παράδειγμα: $\exists \mathrm{x} \forall y \forall z\, ((F(x, y) \wedge F(x,z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y,z))$

Υπάρχει φοιτητής του οποίου κανένας φίλος δεν είναι φίλος με τους υπόλοιπους φίλους του.

(2 Μονάδες)

Α. Έστω ότι ο τομέας αναφοράς είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί και έστω η δήλωση $P(x, y) = "y^2 = x"$. Να αιτιολογήσετε σχετικά με το αν είναι αληθής η ψευδής η εξής δήλωση: $\forall x \exists y\, P(x, y)$.

Β. Να δείξετε ότι η λογική πρόταση $\neg\Big(\big(\forall x(Q(x) \wedge P(x))\big) \wedge \big(\exists y(\neg P(y))\big)\Big)$ είναι ταυτολογία.

(2 Μονάδες)

α) Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αναφέρει ότι αν ένας αριθμός είναι θετικός και ένας δεύτερος αριθμός είναι μεγαλύτερος από τον αρχικό αριθμό τότε και ο δεύτερος αριθμός είναι θετικός.
1. $\forall x \exists y \big((x > 0) \to (y > 0)\big)$
2. $\forall x \forall y \Big(\big((x > 0) \land (y > x)\big) \to (y > 0)\Big)$
3. $\forall x \forall y \big((x > 0) \land (y > x)\big)$
4. $\forall x \exists y \Big((x > 0) \to \big((y > 0) \land (y > x)\big)\Big)$

β) Έστω ότι P(x,y) είναι ένα κατηγόρημα όπου ο τομέας αναφοράς για τα x και y είναι το {1,2,3}. Επιπλέον, έστω ότι το κατηγόρημα είναι Αληθές μόνο στις εξής περιπτώσεις: P(1,3), P(2,1), P(3,1), P(3,2), P(3,3). Να αναφέρετε ποια από τις παρακάτω λογικές προτάσεις είναι Ψευδής.
1. $\exists x \forall y P(x, y)$
2. $\forall x \exists y P(x, y)$
3. $\exists y \forall x P(x, y)$
4. $\forall y \exists x P(x, y)$

γ) Έστω η πρόταση: $\exists y \forall x \big(C(x) \to \neg C(x, y)\big)$, όπου C(x) σημαίνει «Ο x είναι φοιτητής Πληροφορικής», C(x,y) σημαίνει ότι «ο x τελείωσε την y» και ο τομέας αναφοράς της x είναι όλοι οι φοιτητές και της y είναι όλες οι ασκήσεις. Ποια από τις παρακάτω προτάσεις αποτελεί την μετάφραση σε φυσική γλώσσα αυτής της λογικής πρότασης;
1. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας δεν τελείωσε.
2. Υπάρχει μία άσκηση που κανένας φοιτητής της Πληροφορικής δεν τελείωσε.
3. Κάποιος φοιτητής Πληροφορικής δεν τελείωσε καμία άσκηση.
4. Κάθε φοιτητής Πληροφορικής απέτυχε να τελειώσει τουλάχιστον μία άσκηση.

Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Κανόνες Εξαγωγής Συμπερασμάτων για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Καθολική αμεσότητα:

$$\forall x P(x) \to P(c)$$

όπου c αυθαίρετο μέλος του πεδίου ορισμού της x.

Καθολική Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για αυθαίρετο } c \to \forall x P(x)$$

Καθολική Συνεπαγωγή

Καθολικό *Modus Ponens*:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

$$P(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ Q(a)$$

Καθολικό *Modus Tollens*:

$$\forall x(P(x) \to Q(x))$$

$$\neg Q(a) \text{ για συγκεκριμένο } a$$

$$\therefore\ \neg P(a)$$

Κανόνες για Ποσοτικοποιημένες Δηλώσεις

Υπαρξιακή Αμεσότητα:

$$\exists x P(x) \rightarrow P(c) \text{ για κάποιο } c$$

όπου c συγκεκριμένο μέλος του πεδίου ορισμού της x.

Υπαρξιακή Γενίκευση:

$$P(c) \text{ για κάποιο στοιχείο } c \rightarrow \exists x P(x)$$

Παράδειγμα Εξαγωγής Συμπεράσματος

1.«Όλα τα λιοντάρια είναι άγρια.»

2.«Κάποια λιοντάρια δεν πίνουν καφέ.»

3.«Κάποια άγρια πλάσματα δεν πίνουν καφέ.»

$P(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι λιοντάρι.»

$Q(x)$ είναι η δήλωση «Το x είναι άγριο.»

$R(x)$ είναι η δήλωση «Το x πίνει καφέ.»

Πεδίο ορισμού: Όλα τα πλάσματα

$$1.\ \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$2.\ \exists x(P(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\therefore \exists x(Q(x) \wedge \neg R(x))$$

Παράδειγμα

Να δειχτεί ότι οι προϋποθέσεις: 1.«Ένας σπουδαστής στην τάξη αυτή δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.» και 2.«Ο καθένας στην τάξη αυτή πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.» συνεπάγονται «Κάποιος που πέρασε το πρώτο διαγώνισμα δεν έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$C(x)$: «Ο x είναι στην τάξη αυτή.»

$B(x)$: «Ο x έχει διαβάσει το βιβλίο.»

$P(x)$: «Ο x πέρασε το πρώτο διαγώνισμα.»

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$
2. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$

$\therefore\ \exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$

1. $\exists x(C(x) \wedge \neg B(x))$ Προϋπόθεση
2. $C(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Υπαρξιακή Αμεσότητα από 1
3. $C(\alpha)$ απλοποίηση από 2
4. $\forall x(C(x) \rightarrow P(x))$ Προϋπόθεση
5. $C(\alpha) \rightarrow P(\alpha)$ Καθολική αμεσότητα από 4
6. $P(\alpha)$ Modus Ponens 3,5
7. $\neg B(\alpha)$ απλοποίηση από 2
8. $P(\alpha) \wedge \neg B(\alpha)$ Σύζευξη 6,7
9. $\exists x(P(x) \wedge \neg B(x))$ Υπαρξιακή Γενίκευση από 8

Σφάλμα Αντιστρόφου

1. «Όλοι οι εγκληματίες της πόλης συχνάζουν στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».
2. «Ο Γιάννης συχνάζει στο μπαρ Η Φωλιά της Κότας».

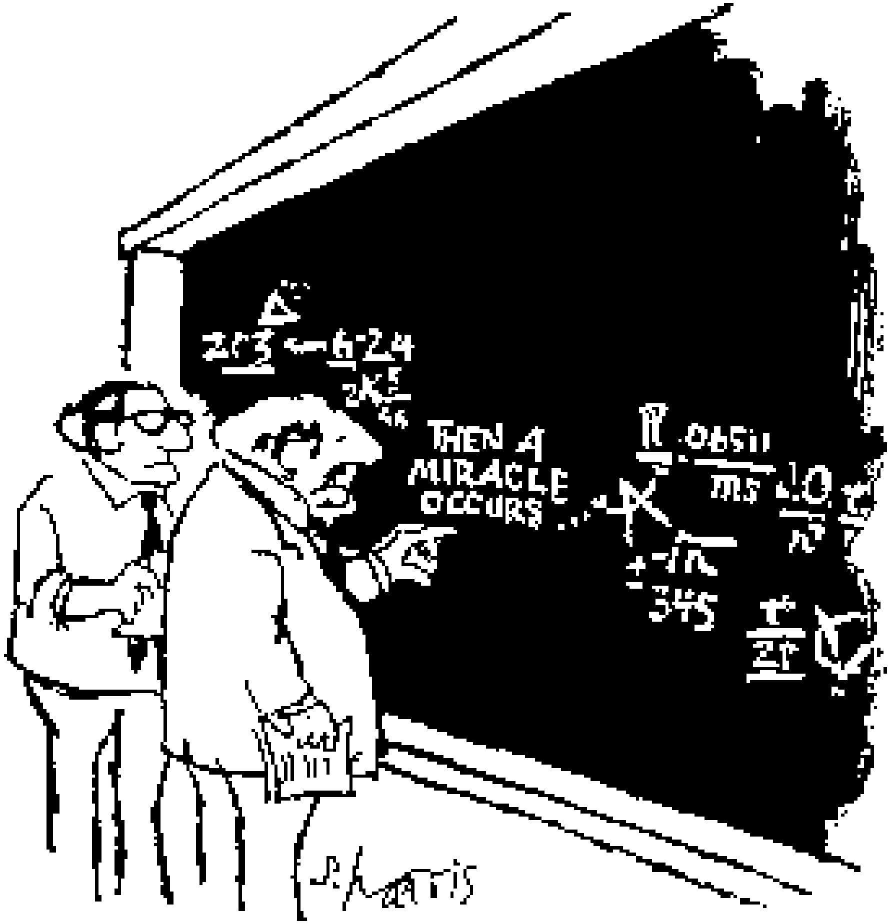
∴ «Ο Γιάννης είναι ένας από τους εγκληματίες της πόλης»

Όμως αν (τρόπος σκέψης γιατρών, μηχανικών κτλ.):

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$$

είναι αληθής και η $Q(a)$ είναι αληθής για συγκεκριμένο a τότε η $P(a)$ ***μπορεί*** να είναι Αληθής.

Αυτή είναι η ***τεχνική της απαγωγής***.



“ I think you should be more explicit here in step 2.”

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τεχνικές Απόδειξης

Η Απόδειξη

Μια απόδειξη είναι ένα έγκυρο σύνολο επιχειρημάτων που καθιερώνει την αλήθεια μιας δήλωσης-πρότασης.

Μια απόδειξη μπορεί να χρησιμοποιήσει:

- τις **υποθέσεις** (αν υπάρχουν),
- τα **αξιώματα** που θεωρούνται ότι αληθεύουν (χωρίς απόδειξη),
- και προηγουμένως **αποδεδειγμένα θεωρήματα ή προτάσεις**.

Χρησιμοποιώντας αυτά τα συστατικά και τους κανόνες εξαγωγής συμπερασμάτων, καταγράφεται βήμα προς βήμα η απόδειξη που καθιερώνει την αλήθεια της δήλωσης-πρότασης.

Είδη αποδεικτικών προτάσεων

Θεώρημα (theorem): Είναι μία δήλωση-πρόταση η οποία μπορεί να αποδειχθεί. Στα μαθηματικά ονομάζουμε θεωρήματα τις προτάσεις που έχουν σημαντικές εφαρμογές.

Πρόταση (proposition): Είναι όπως το θεώρημα αλλά είναι λιγότερο σημαντική.

Λήμμα (lemma): Είναι μία πρόταση η οποία μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βοηθητική για την απόδειξη ενός άλλου θεωρήματος ή πρότασης.

Πόρισμα (corollary): Είναι μία πρόταση η οποία παράγεται άμεσα ή σχεδόν άμεσα από κάποιο θεώρημα ή πρόταση.

Εικασία (conjecture): Είναι μία πρόταση η οποία φαίνεται να αληθεύει για μερικές περιπτώσεις και υποθέτουμε ότι αληθεύει για όλες χωρίς όμως να υπάρχει απόδειξη γι’ αυτό. Αν μία εικασία αποδειχθεί τότε γίνεται θεώρημα.

Παραδείγματα

Θεώρημα (theorem): [Πυθαγόρειο] Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Α τότε: $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$.

Πρόταση (proposition): Αν $x^2 = \alpha^2$ τότε $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

Λήμμα (lemma): Το τετράγωνο κάθε κάθετης πλευράς ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της κάθετης πλευράς πάνω στην υποτείνουσα.

Πόρισμα (corollary): Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι: $ΒΓ^2 \neq ΑΒ^2 + ΑΓ^2$ τότε η γωνία Α δεν είναι ορθή.

Εικασία (conjecture): Μία από τις πιο διάσημες «πρώην» εικασίες είναι το τελευταίο θεώρημα του Fermat: «**Καμία τριάδα *α, β, γ* θετικών ακεραίων δεν μπορεί να είναι λύση της εξίσωσης: $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$ για κάθε ακέραιο *n* > 2**» (γενίκευση του Πυθαγορείου). Η εικασία έγινε το 1637 από τον Fermat στο περιθώριο των σημειώσεών του και αποδείχθηκε το 1995 από τον Andrew Wiles.

Pierre de Fermat

Andrew Wiles

Μέθοδοι Απόδειξης Θεωρημάτων

Άμεση Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε με διαδοχικά βήματα ότι αν p είναι Αληθής τότε και η q είναι αληθής.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο n είναι περιττός τότε και ο n^2 είναι περιττός.

Έμμεση Απόδειξη

Για να αποδείξουμε τη συνεπαγωγή $p \rightarrow q$, αρκεί να δείξουμε ότι η αντιθετοαντίστροφή της $\neg q \rightarrow \neg p$ ***είναι* Αληθής**.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι αν ο $3n+2$ είναι περιττός τότε και ο n είναι περιττός.

Απόδειξη με Αντίφαση

Έστω ότι μπορεί να βρεθεί μία αντίφαση (F) q έτσι ώστε $\neg p \rightarrow q$ να είναι Αληθής. Άρα η πρόταση $\neg p$ είναι Ψευδής και άρα η p θα πρέπει να είναι Αληθής.

<u>Παράδειγμα:</u> Αποδείξτε ότι ο αριθμός $2^{1/2}$ είναι άρρητος χρησιμοποιώντας απόδειξη με αντίφαση.

Σχετικά με την Απόδειξη με Αντίφαση

- Μπορείτε να αποδείξετε ότι δεν ισχύει κάτι με απόδειξη αντίφασης
  - Βρίσκετε ένα παράδειγμα για να δείξετε ότι κάτι είναι ψευδές (Αντιπαράδειγμα – σχετίζεται με τον καθολικό ποσοδείκτη)
- ΔΕΝ ΜΠΟΡΕΙΤΕ να αποδείξετε την καθολικότητα μίας πρότασης με παράδειγμα

Παράδειγμα: αποδείξτε αν ισχύει ή όχι ότι όλοι οι φυσικοί είναι άρτιοι:

- Απόδειξη με αντίφαση: το 1 δεν είναι άρτιος
- **(Λάθος)** απόδειξη με παράδειγμα: το 2 είναι άρτιος

Παράδειγμα

Θέμα 6ο: (1,5 Μονάδες)

Να αποδειχθεί ότι αν ο *n* είναι ακέραιος και ο n^3+5 είναι περιττός, τότε ο *n* είναι άρτιος χρησιμοποιώντας και τους δύο τρόπους απόδειξης: α) έμμεση απόδειξη (αντιθετοαντίστροφο) και β) απόδειξη με αντίφαση.

Στρατηγική

Συνήθως τα θεωρήματα έχουν τη μορφή συνεπαγωγών: $p \rightarrow q$

1η Προσπάθεια: *Άμεση*

2η Προσπάθεια: *Έμμεση*

3η Προσπάθεια: *Αντίφαση*

4η Προσπάθεια: *Εξάντληση;;; – Άλλες Μέθοδοι;;;*

Αποδείξεις κατά Περίπτωση

Για να αποδείξουμε μία συνεπαγωγή τη μορφής

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q$$

χρησιμοποιούμε την ταυτολογία:

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n) \rightarrow q) \leftrightarrow (p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q)$$

<u>Παραδείγματα:</u>

1. Να χρησιμοποιηθεί απόδειξη κατά περίπτωση για να δειχτεί ότι $|xy|=|x||y|$, όπου x και y είναι πραγματικοί αριθμοί.

Αποδείξεις Ισοδυναμίας

Για να αποδείξουμε θεώρημα που είναι ισοδυναμία, δηλαδή της μορφής $p \leftrightarrow q$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ταυτολογία:

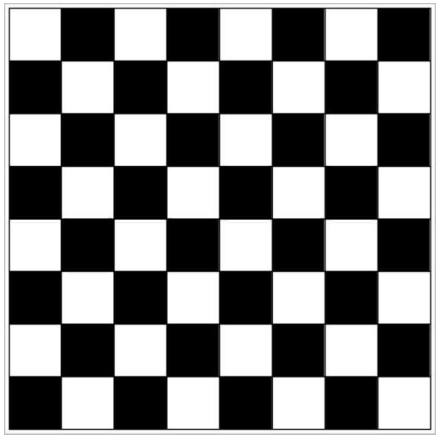
$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p))$$

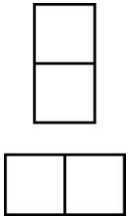
<u>Παράδειγμα:</u> Να αποδειχθεί ότι ο ακέραιος n είναι περιττός *αν και μόνο αν* ο n^2 είναι περιττός.

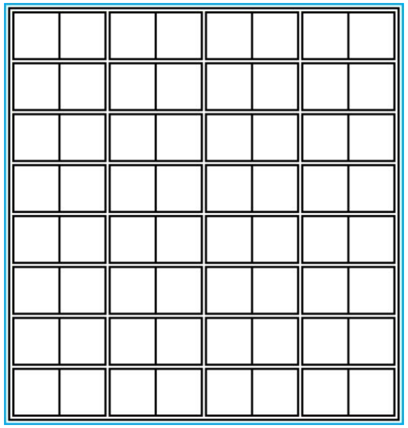
Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2;

Λύση: Ναι! Το παρακάτω παράδειγμα είναι μία κατασκευαστική απόδειξη.







Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε μία γωνία;

Λύση:

(Έστω ότι μπορεί να καλυφθεί)

Η σκακιέρα έχει $64 - 1 = 63$ τετράγωνα.

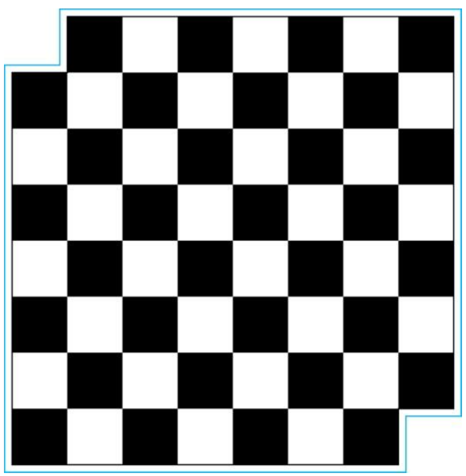
Αφού κάθε ντόμινο έχει 2 τετράγωνα, η σκακιέρα θα πρέπει να έχει άρτιο πλήθος τετραγώνων.

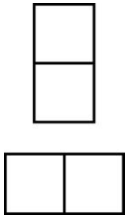
Το 63 δεν είναι άρτιος.

Άτοπο.

Ντόμινος

Μπορεί μία σκακιέρα 8×8 να καλυφθεί πλήρως από ντόμινο μεγέθους 1×2 αν αφαιρέσουμε δύο αντιδιαμετρικές γωνίες;





Αποδείξεις για Ποσοτικοποιημένες Προτάσεις

Αποδείξεις Ύπαρξης:

Πολλά θεωρήματα κάνουν ισχυρισμούς ότι υπάρχουν αντικείμενα συγκεκριμένου τύπου.

$$\exists x P(x)$$

Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: εύρεση στοιχείου a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής.

Μη Εποικοδομητική απόδειξη ύπαρξης: δεν βρίσκουμε στοιχείο a ώστε η $P(a)$ να είναι Αληθής, αλλά με άλλο τρόπο (π.χ. αντίφαση) βρίσκουμε ότι η $\exists x P(x)$ είναι Αληθής.

Παραδείγματα

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι υπάρχει θετικός ακέραιος που μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα κύβων θετικών ακέραιων με δύο διαφορετικούς τρόπους.

$$1729=10^3+9^3=12^3+1^3$$

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί x και y έτσι ώστε ο x^y να είναι ρητός.

Παράδειγμα: Αποδείξτε ότι ένας από τους δύο αριθμούς $2\times10^{500}+15$ και $2\times10^{500}+16$ δεν είναι τέλειο τετράγωνο

Αποδείξεις Μοναδικότητας

Κάποια θεωρήματα ισχυρίζονται ύπαρξη μοναδικού σημείου με συγκεκριμένη ιδιότητα.

Ο τρόπος απόδειξης είναι:

1. Ύπαρξη: αποδεικνύουμε ότι υπάρχει στοιχείο x με την ιδιότητα
2. Μοναδικότητα: Δείχνουμε ότι αν $x \neq y$, τότε το y δεν έχει την ιδιότητα.

$$\exists x(P(x) \land \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y))) \qquad \text{ή} \qquad \exists! x(P(x))$$

<u>Παράδειγμα:</u> Να δειχθεί ότι κάθε ακέραιος έχει έναν μοναδικό προσθετικό αντίθετο.

Αντιπαράδειγμα

Μπορούμε να δείξουμε ότι η δήλωση της μορφής $\forall x P(x)$ είναι ψευδής αν μπορούμε να βρούμε μία τιμή a για την οποία η $P(a)$ να είναι ψευδής (το αντιπαράδειγμα).

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η δήλωση «Κάθε θετικός ακέραιος είναι το άθροισμα των τετραγώνων τριών ακεραίων» είναι Ψευδής.

Παράδειγμα: Όλοι οι πρώτοι είναι περιττοί. (κάντε το παίρνοντας το συμπλήρωμα)

Εξάντληση

Όταν η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε δεν γίνεται με τις προηγούμενες μεθόδους:

Εξαντλητική Απόδειξη (Exhaustive Proof)

- Αποδεικνύουμε το ζητούμενο εξετάζοντας κάθε μία τιμή της μεταβλητής (ή συνδυασμούς των μεταβλητών) στο πεδίο ορισμού της πρότασης.

Παράδειγμα: Να αποδειχθεί ότι για κάθε θετικό ακέραιο $n \leq 4$ ισχύει: $(n+1)^3 \geq 3^n$

Χωρίς Βλάβη Γενικότητας

Να δείξετε ότι αν x και y ακέραιοι και τα $x \cdot y$ και $x+y$ είναι άρτιοι, τότε τα x και y είναι άρτιοι.

Απόδειξη:

Έμμεση. Έστω ότι x και y δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε ο ένας οι και οι δύο είναι περιττοί. *Χωρίς βλάβη γενικότητας*, έστω ότι ο x είναι περιττός.

Τότε: $x = 2m + 1$ για κάποιον ακέραιο m.

Περίπτωση 1: ο y άρτιος. Τότε $y = 2n$ για κάποιον ακέραιο n, και άρα

$$x+y = (2m + 1) + 2n = 2(m + n) + 1 \text{ είναι περιττός}$$

Περίπτωση 2: *ο* y περιττός. Τότε $y = 2n + 1$ για κάποιον ακέραιο n, και άρα $x \cdot y = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$ είναι περιττός

Η περίπτωση για να είναι ο y περιττός είναι παρόμοια.

Καθολικές Προτάσεις

Για να αποδείξουμε θεωρήματα της μορφής $\forall x P(x)$, υποθέτουμε αυθαίρετο x και δείχνουμε ότι η $P(x)$ είναι αληθής. Λόγω καθολικής γενίκευσης θα ισχύει ότι $\forall x P(x)$.

Παράδειγμα: Ένας ακέραιος x είναι άρτιος αν και μόνο αν ο x^2 είναι άρτιος.

Λύση: Θ.δ.ο. $\forall x$ [x άρτιος $\leftrightarrow$ x^2 άρτιος]

Ασκήσεις

- Έστω η λογική πρόταση $\forall x \forall y \forall z P(x, y, z)$.
  1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x, y, z): \big((x^2 = y^2 = z^2) \rightarrow (x = y = z)\big)$$

  2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x, y, z): \big((x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)\big)$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \exists y \exists z P(x, y, z)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re^+, z \in \Re^-, z \neq 0)$;

$$P(x, y, z): \left((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z)\right)$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y, z \in \Re)$;

$$P(x, y, z): \left((x^2 = y^2 = z^2) \wedge (x = y = z)\right)$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\exists x \forall y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 0$$

Ασκήσεις

Έστω η λογική πρόταση $\forall x \exists y P(x, y)$.

1. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι ψευδής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x \cdot y = 1$$

2. Αν θέλουμε να δείξουμε ότι είναι αληθής τι πρέπει να κάνουμε $(x, y \in \Re)$;

$$P(x, y): x + y = 0$$

Μαθηματική Επαγωγή

Αποδείξεις Ιδιοτήτων για Διακριτά Αντικείμενα

Χρήση

Η Μαθηματική Επαγωγή χρησιμοποιείται μόνο για την απόδειξη αποτελεσμάτων που έχουν ληφθεί με κάποιο άλλο τρόπο.

- Δεν αποτελεί εργαλείο ανακάλυψης τύπων ή θεωρημάτων

Μία Ισοδύναμη Ιδιότητα με τη Μαθηματική Επαγωγή

Η Ιδιότητα (Αξίωμα) της *Καλής Διάταξης*:

Κάθε μη κενό υποσύνολο του συνόλου των θετικών ακέραιων έχει ένα ελάχιστο στοιχείο.

Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής

- Ιδιότητα $P(n)$ στους φυσικούς αριθμούς
- Θέλουμε να δείξουμε ότι $\forall n\, P(n)$, όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων

$$\left[P(1) \land \forall s(P(s) \to P(s+1))\right] \to \forall n P(n)$$

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in N$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν η $P(n)$ είναι αληθής τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η P(n) είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

Παράδειγμα

$P(n)=\{n^3+2n$ διαιρείται από το 3, $n \in N-\{0\}\}$

$P(1)=1+2=3$ – ***Αληθές***

Έστω ότι ισχύει το $P(n\text{-}1)$

$P(n-1)= (n-1)^3+2(n-1)=n^3-3n^2+3n-1+2n-2=$

$n^3-3n^2+5n-3=3\kappa$ *για* $\kappa \in N$

$P(n)= (n^3-3n^2+5n-3)+(3n^2-3n+3)=3\kappa+3(n^2-n+1)$

Αποδείχτηκε.

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε με επαγωγή ότι:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

2. (Ανισότητα Bernoulli) Να αποδείξετε με επαγωγή ότι αν $h > -1$ τότε για κάθε μη αρνητικό ακέραιο n ισχύει ότι:

$$1 + nh \leq (1+h)^n$$

Ισχυρή Επαγωγή

Αν

(α) $P(k)$ αληθής για κάποιο $k \in N$

(β) Για κάθε $n \geq k$, αν οι $P(k)$, $P(k+1)$,…, $P(n)$ είναι αληθείς τότε και η $P(n+1)$ είναι αληθής

τότε η P(n) είναι αληθής για κάθε $n \geq k$

$$\left[P(1) \wedge \forall k((P(1) \wedge P(2) \wedge \ldots \wedge P(k)) \to P(k+1))\right] \to \forall n P(n)$$

Άσκηση

Rosen (Παράδειγμα 3) Θεωρήστε ένα παιχνίδι όπου δύο παίκτες με τη σειρά αφαιρούν ένα θετικό πλήθος σπίρτων από έναν εκ των δύο σωρών με σπίρτα που υπάρχουν. Ο παίκτης που θα αφαιρέσει το τελευταίο σπίρτο κερδίζει. Να δείξετε ότι, αν οι δύο σωροί έχουν το ίδιο πλήθος σπίρτων στην αρχή, ο δεύτερος παίκτης μπορεί πάντοτε να νικήσει.

Ποιο είναι το Σφάλμα;

Απόδειξη ότι όλα τα άλογα έχουν το ίδιο χρώμα:

Έστω P(n) η πρόταση «Ένα σύνολο n αλόγων έχουν το ίδιο χρώμα»

P(1) προφανώς ισχύει.

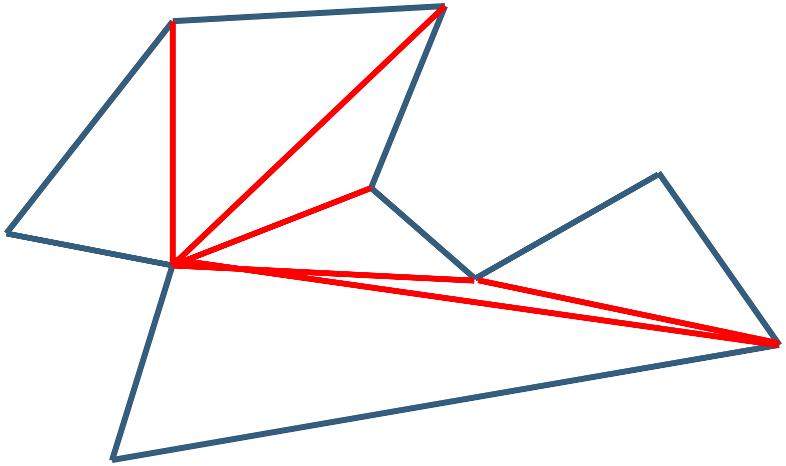
Έστω P(k). Θεωρήστε οποιοδήποτε αριθμημένο σύνολο k+1 αλόγων. Τα πρώτα k άλογα έχουν το ίδιο χρώμα όπως και τα τελευταία k άλογα έχουν το ίδιο χρώμα. Επειδή αυτά τα δύο σύνολα επικαλύπτονται σημαίνει ότι και τα δύο σύνολα έχουν το ίδιο χρώμα και άρα η P(k+1) είναι αληθής.

Άσκηση σε Ισχυρή Επαγωγή

Ποια χρηματικά ποσά μπορούν να σχηματιστούν με κέρματα αξίας 2 ευρώ και χαρτονομίσματα αξίας 5 ευρώ;

Ισχυρή Επαγωγή και Υπολογιστική Γεωμετρία

Απλό Πολύγωνο

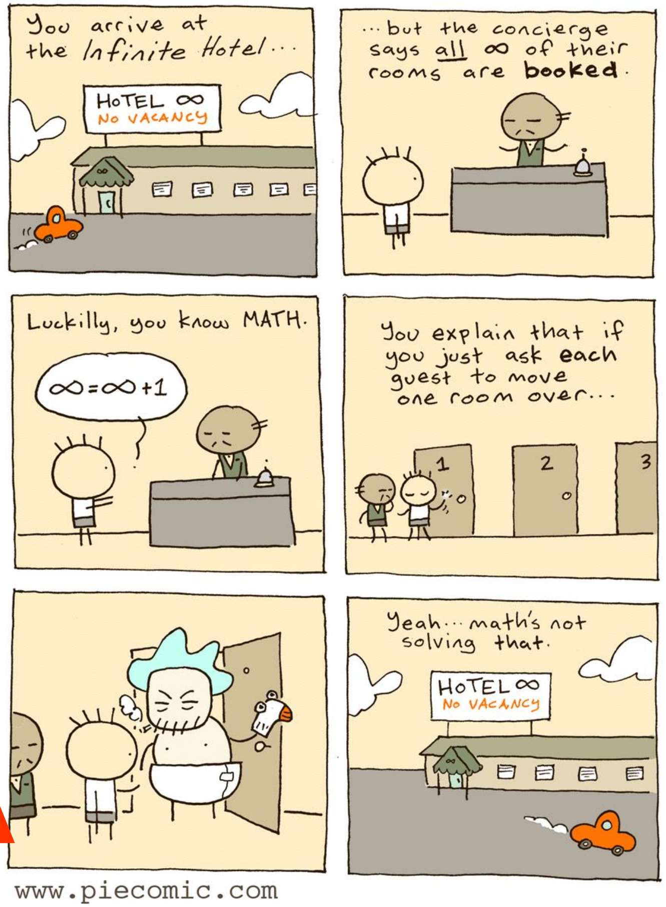


Τριγωνοποίηση

<u>Θεώρημα:</u> *Ένα απλό πολύγωνο με* n *πλευρές, όπου* $n \geq 3$ *ακέραιος, μπορεί να τριγωνοποιηθεί σε* $n-2$ *τρίγωνα.*

<u>Λήμμα:</u> *Κάθε απλό πολύγωνο με τουλάχιστον 4 πλευρές, έχει μία εσωτερική διαγώνιο.*

(χωρίς απόδειξη)



ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Σύνολα

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

- Ιστορία 150 χρόνων
- Καθιέρωση από τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor (1845-1918)
  - ***Σύνολο*** *(set): Συλλογή διακεκριμένων πραγμάτων για τα οποία έχουμε μια αντίληψη ότι αποτελούν, εξαιτίας μιας κοινής ιδιότητάς τους, μια ολότητα*
  - *ή μια πολλαπλότητα που μπορούμε να την αντιληφθούμε ως ενότητα*
  - Τα αντικείμενα ονομάζονται **στοιχεία** (elements) του συνόλου

Ο Μπαρμπέρης της Σεβίλλης

- Ο κ. Τσίχλας είναι ο μόνος μπαρμπέρης (άνδρας) στην Σεβίλλη. Ξυρίζει *όλους τους* άνδρες και *μόνο αυτούς* που δεν ξυρίζονται μόνοι τους.

- Αν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται δεν μπορεί να ξυρίζει τον εαυτό του!
- Αν δεν ξυρίζεται μόνος του τότε...
  - Από την υπόθεση που γίνεται πρέπει να ξυρίζει τον εαυτό του!!

Το Παραδοξο Του Russell

Αυτό το παράδοξο στην κανονική του συνολοθεωρητική μορφή γράφεται ως εξής:

Έστω X το σύνολο όλων των συνόλων που δεν περιέχουν τον εαυτό τους: $\{X: A, A$ είναι ένα σύνολο και $A \notin A\}$

- Είναι το X στο X? Με άλλα λόγια, το X περιέχεται στον εαυτό του;
- Αν το $X \notin X$, τότε το X είναι σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \in X$. Άτοπο.
- Αν $X \in X$ τότε είναι ένα σύνολο που δεν περιέχει τον εαυτό του και άρα $X \notin X$. Άτοπο.

Σύνολο και λογική

- Θεμελιώδης ιδιότητα με ρίζες στην Αριστοτέλεια λογική:
  - Για ένα στοιχείο *x* και ένα σύνολο *A* μία από τις δύο προτάσεις μπορεί να είναι αληθής:
  - το *x* ανήκει στο *A* (συμβολικά $x \in A$)
  - το *x* δεν ανήκει στο *A* (συμβολικά $x \notin A$)

Υπάρχουν βέβαια και τα ***θολά σύνολα*** (fuzzy sets)

ΣΥΝΟΛΑ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...\} = \{n : n \text{ είναι φυσικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{Z} = \{\cdots, \text{-}3,\text{-}2,\text{-}1,0,1,2,3,\cdots\} = \{n : n \text{ είναι ακέραιος}\}$$

$$\mathbf{Q} = \{a/b : a, b \in \mathbf{Z} \text{ και } b \neq 0\}$$

$$\mathbf{R} = \{x : x \text{ είναι πραγματικός αριθμός}\}$$

$$\mathbf{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbf{R},\ i = \sqrt{-1}\}$$

Παραδειγματα

- Εναλλακτική παράσταση του B=\{1,2\}

$$B = \{x: x^2 - 3x + 2 = 0, x \in \Re\} = \{n: n \in \mathbf{N}, n < 3\}$$

- Το κενό σύνολο

$$\emptyset = \{x: x \neq x, x \in \mathbb{N}\}$$

Υποσυνολο

Έστω δύο σύνολα $S \neq \emptyset$ και A.

Το A ονομάζεται υποσύνολο (subset) του S αν κάθε στοιχείο του A είναι και στοιχείο του S.

$$\mathrm{A} \subseteq \mathrm{S} \leftrightarrow (a \in A) \rightarrow (a \in S)$$

$$\forall x((x \in A) \longrightarrow (x \in S))$$

Ισοτητα Συνολων

Δύο σύνολα A και B λέγονται ίσα αν περιέχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία.

Εναλλακτικός ορισμός: τα σύνολα είναι ίσα αν το A είναι υποσύνολο του B και το B είναι υποσύνολο του A.

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \leftrightarrow (\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A})$$

ΔΙΑΤΑΞΗ ΣΥΝΟΛΩΝ

Αν $A \subseteq B$ και $A \neq B$ δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα στοιχείο του B που δεν ανήκει στο A, τότε το A είναι ***γνήσιο υποσύνολο*** (proper subset) του B και συμβολίζουμε

$$A \subset B$$

Ισχύει $\emptyset \subseteq S$ και $S \subseteq S$ για κάθε σύνολο S

Παραδειγμα

Ας θεωρήσουμε τα σύνολα $\emptyset$, $\{\emptyset\}$ και $\{\{\emptyset\}\}$.

Το πρώτο είναι ένα σύνολο με 0 στοιχεία

Το δεύτερο και το τρίτο είναι σύνολα με 1 στοιχείο το καθένα.

1. $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
2. $\emptyset \subseteq \{\{\emptyset\}\}$
3. $\emptyset \in \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \notin \{\{\emptyset\}\}$
5. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
6. $\{\emptyset\} \nsubseteq \{\{\emptyset\}\}$

Πράξεις Συνόλων - Ένωση

Η ***ένωση*** (union) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cup B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία και των δύο συνόλων A και B.

$$A \cup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$$

Πράξεις Συνόλων - Τομή

Η ***τομή*** (intersection) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με

$$A \cap B$$

και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στα δύο σύνολα A και B.

$$A \cap B = \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$$

Δύο σύνολα A και B λέγονται ***ξένα*** όταν η τομή τους είναι το $\emptyset$.

Βασικες Ιδιοτητες

Μεταθετική:

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

Προσεταιριστική:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

Επιμεριστική:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Δυναμοσυνολο

Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα υποσύνολα ενός συνόλου S, ονομάζεται ***δυναμοσύνολο*** (power set) του S και συμβολίζεται με $P(S)$:

$$P(S) = \{A : A \subseteq S\}$$

Πληθαριθμος Δυναμοσυνολου

Μπορεί να αποδειχτεί ότι αν το σύνολο S έχει $n \in N$ στοιχεία, τότε το δυναμοσύνολό του θα έχει 2^n στοιχεία. Πώς;

Κάθε στοιχείο του συνόλου S είτε θα συμμετέχει σε ένα υποσύνολο είτε όχι. Άρα δύο επιλογές για όλα τα n στοιχεία και άρα 2^n υποσύνολα.

Ο πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι το πλήθος των στοιχείων του A και αναπαρίσταται από $|A|$.

Κλειστες Πραξεις Συνολων

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής στο δυναμοσύνολο $P(S)$ είναι κλειστές

$$\big(A \in P(S)\big) \land \big(B \in P(S)\big) \to \big((A \cup B) \in P(S)\big)$$

$$\Big(\big(A \in P(S)\big) \land \big(B \in P(S)\big)\Big) \to \big((A \cap B) \in P(S)\big)$$

Παραδειγμα

$S = \{a, b, c\}$

$P(S) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\} = S\}$

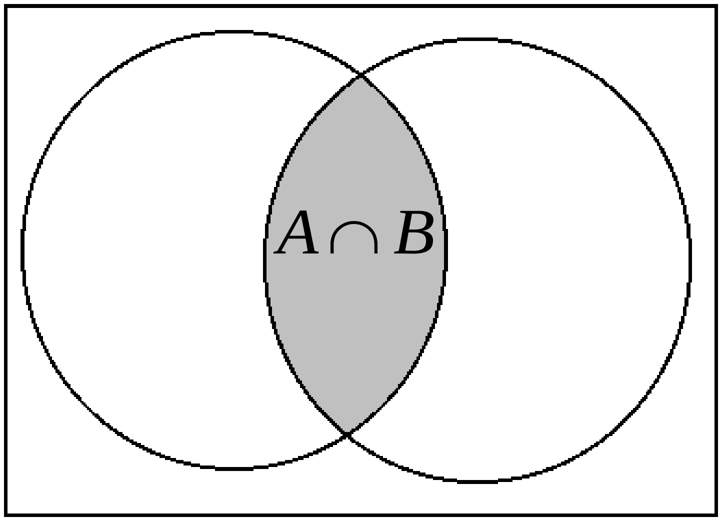
$\cup$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\varnothing$	$\varnothing$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	S	S
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b\}$	S	$\{b,c\}$	S
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{c\}$	S	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	S
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	S	$\{a,b\}$	S	S	S
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	$\{a,c\}$	S	S
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	S	S	$\{b,c\}$	S
S	S	S	S	S	S	S	S	S

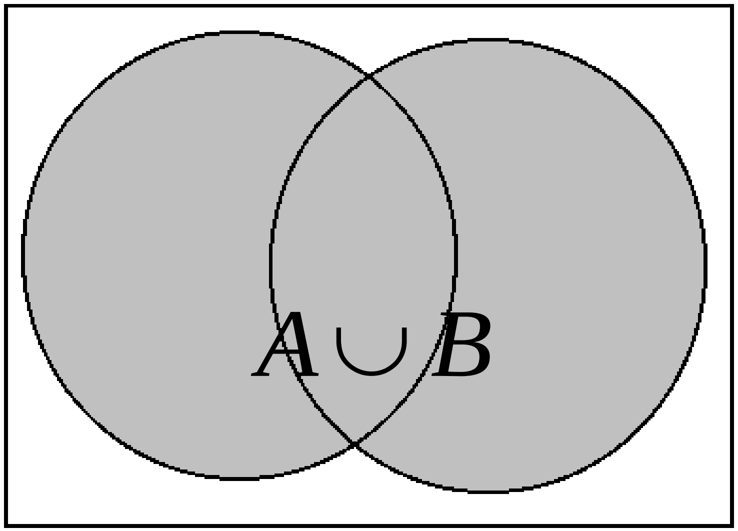
Πράξεις Συνόλων - Διαφορά

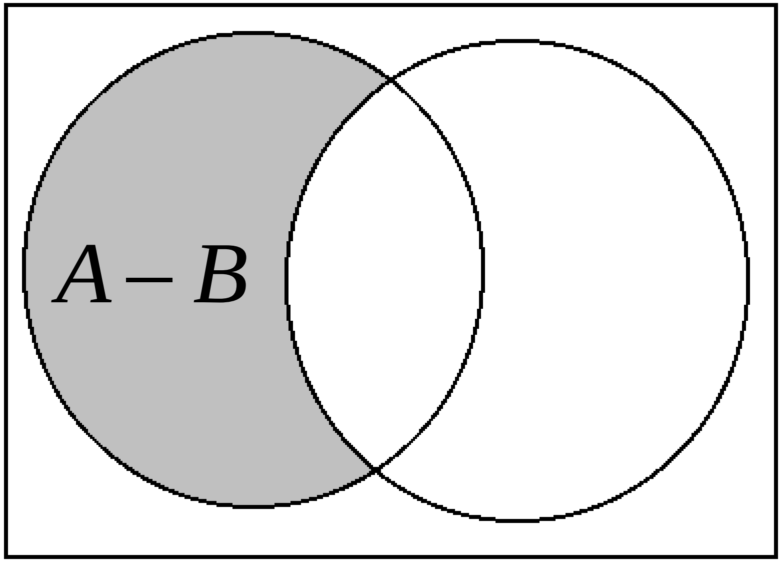
- Η ***διαφορά*** (difference) δύο συνόλων A και B συμβολίζεται με $A - B$ ή $A \backslash B$ και είναι το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B:

$$A - B = \{x: (x \in A) \wedge (x \notin B)\}$$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ VENN
(VENN DIAGRAMS)







Πράξεις Συνόλων – Συμπλήρωμα

Αν $A \cap B = \emptyset$ ισχύει $A - B = A$.

Αν $B \subseteq U$, τότε το σύνολο $U - B$ συμβολίζεται με $\bar{B}$ και ονομάζεται ***συμπληρωματικό*** (complement) του B ως προς το U (Το U συνήθως το ονομάζουμε ***σύμπαν***).

Ιδιότητες:

$B \cup \bar{B} = U$

$B \cap \bar{B} = \emptyset$

$\bar{\bar{B}} = B$

$\bar{\emptyset} = U$

$\bar{U} = \emptyset$

Νόμοι De Morgan
(De Morgan's laws)

$$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

$$\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Καποιες Επιπλεον Ιδιοτητες

$$A \cap U = A \qquad A \cup \varnothing = A$$

$$A \cup \overline{A} = U \qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$$

$$A \cup U = U \qquad A \cap \varnothing = \varnothing$$

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$

$$\overline{U} = \varnothing \qquad \overline{\varnothing} = U$$

$$A - B = A \cap \overline{B}$$

Γενικευση της Ενωσης και τομης

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{a : \exists k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{a : \forall k \in \{1,2,\ldots n\},\ a \in A_k\}$$

Διαμεριση Συνολου

Το σύνολο $D = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ όπου:

$$A_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n \; \kappa\alpha\iota \; A_i \subseteq S$$

αποτελεί ***n-διαμέριση*** (partition) του συνόλου S εάν:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$$

$$\forall i \forall j \left((i \neq j) \rightarrow \left(A_i \cap A_j = \emptyset \right) \right)$$

Πιο απλά: $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$

Παραδειγμα (1)

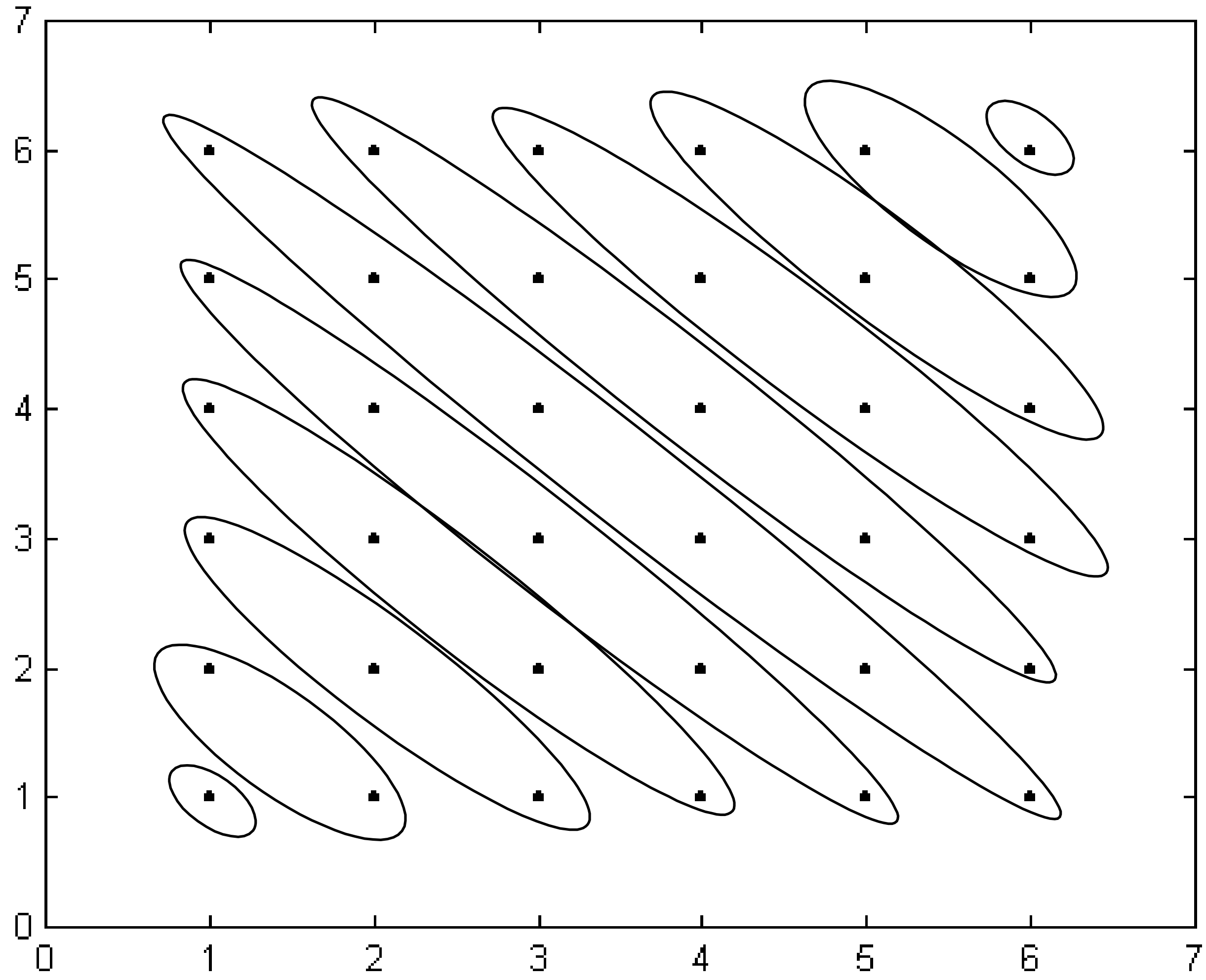
- ***A* = το σύνολο των δυνατών ενδείξεων που μπορεί να προκύψουν από τη ρίψη δύο <u>διαφορετικών</u> ζαριών**
- **Να κατασκευαστεί διαμέριση του *A* σε υποσύνολα όπου το άθροισμα των ενδείξεων των δύο <u>διαφορετικών</u> ζαριών να είναι το ίδιο**
- A = {(1,1), (1,2), (2,1), …, (6,6)}

Παραδειγμα (2)

- Δυνατά αθροίσματα: 2, 3, 4, …, 12
- Κατασκευή 11-διαμέρισης

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{(1,1)\},\\
&A_2 = \{(1,2),(2,1)\}\\
&A_3 = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}\\
&A_4 = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}\\
&A_5 = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}\\
&A_6 = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}\\
&A_7 = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}\\
&A_8 = \{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}\\
&A_9 = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}\\
&A_{10} = \{(5,6),(6,5)\}\\
&A_{11} = \{(6,6)\}
\end{aligned}
$$

Παραδειγμα (3)



ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ
(ORDERED PAIR)

- Ζεύγος στοιχείων που είναι τοποθετημένα με συγκεκριμένη σειρά

$$(a,b)$$

$$\big((a,b) = (a',b')\big) \leftrightarrow \big((a = a') \land (b = b')\big)$$

Καρτεσιανο Γινομενο (Cartesian product)

- *Το σύνολο το οποίο αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη* (a, b) όπου $a \in A$ και $b \in B$

$$A \times B = \{(a, b) \colon a \in A,\ b \in B\}$$

Παραδειγμα

$$B = \{a, b, c\}$$

$$\Gamma = \{1, 2\}$$

$$B \times \Gamma = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$$

$$\Gamma \times B = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$$

Καρτεσιανο Γινομενο Πολλων Συνολων

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i,\ i = 1,\ldots,n\}$$

$$A^n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in \mathrm{A},\ i = 1,\ldots,n\}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Αν $B = \{0,1\}$ τότε

$$\mathrm{B}^n = \{(b_1, b_2, \ldots, b_n) : b_i = 0,1\}$$

- n-άδες της μορφής (0, 1, 1, 0, 0,..., 1)

Ασκήσεις

1. Να αποδειχτεί ότι $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) - (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$

2. Να δειχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

Ο Αποστολος Και οι Κανναβαλοι

- Οι καννίβαλοι έπιασαν ένα απόστολο της εκκλησίας και θέλουν να τον φάνε. Πριν τον φάνε όμως για να σπάσουν πλάκα του λένε να πει μία πρόταση και αν αυτή είναι ΑΛΗΘΗΣ τότε θα τον βράσουν αλλιώς αν είναι ΨΕΥΔΗΣ θα τον ψήσουν. Τι πρέπει να πει ο απόστολος μήπως και την γλυτώσει;

- Θα με ψήσετε!!!!!

1. Δυναμοσύνολα (Παράδειγμα 1.6.12)

Δίνεται το σύνολο $P(S\colon A) = \{X \in P(S)\colon A \subseteq X\}$, όπου $A \subseteq S$ και P(S) το δυναμοσύνολο του S. Αν

A={a,b}   S={a,b,c,d,e}   B={a,f}

Δηλαδή στο P(S:A) ανήκουν όλα τα υποσύνολα του S τα οποί α περιέχουν το A.

A) Να βρεθούν τα στοιχεία του P(S:A).

$|\mathrm{S}|=5 \Rightarrow |\mathrm{P(S)}\ |=2^5 = 32$ όλα τα υποσύνολα του S.

Βρίσκουμε τα υποσύνολα του S που περιέχουν το A.

Με 2 στοιχεία: {a,b} (1 σύνολο)

Με 3 στοιχεία: {a,b,*} (3 σύνολα, όπου *=c,d,e)

Με 4 στοιχεία: {a,b,*,*} (3 σύνολα, όπου *,*=(c,d),(c,e)(d,e))

Με 5 στοιχεία: {a,b,*,*,*} (1 σύνολο, όπου *,*,*=c,d,e)

Άρα:

$$|\mathrm{P(S{:}A)}|=1+3+3+1=8$$

P(S:A)={{a,b},{a,b,c},{a,b,d},{a,b,e},{a,b,c,d},{a,b,c,e},{a,b,d,e},{a,b,c,d,e}}

B) Να βρεθεί το P(A:B).

Αναζητούμε όλα τα υποσύνολα του A που «περιέχουν» το B.

P(A)={Ø,{a},{b},{a,b}}

Επειδή το B={a,f} δεν υπάρχουν τέτοια υποσύνολα του A.

Άρα P(A:B)= Ø.

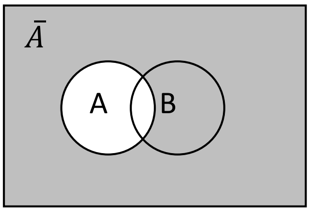
Γ) Να δειχτεί οτι για κάθε C ισχύει P(C: Ø)=P(C).

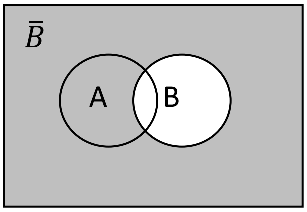
Επειδή το Ø είναι υποσύνολο κάθε συνόλου ισχύει P(C: Ø)=P(C).

2. Διαγράμματα Venn (Παράδειγμα 1.6.14 – δεν περιέχει Venn)

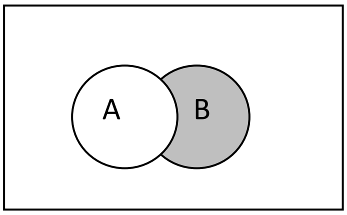
Α) Να δειχτεί ότι $\bar{A}$-$\bar{B}$=B-A

$$\bar{A}\text{-}\bar{B}=\{x:x\in\bar{A}, x \notin \bar{B}\} = \{x: x \notin A, x \in B\} = B - A$$





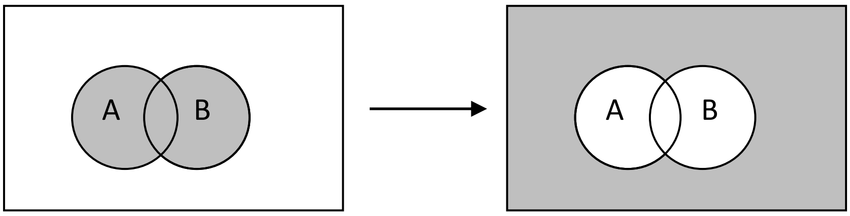
$\bar{A}$-$\bar{B}$ =



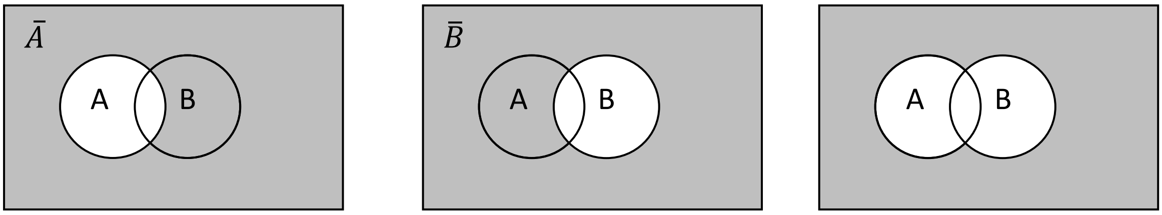
$= B - A$

Β) Να δειχτεί ότι $\overline{A \cup B}$=$\bar{A}$∩$\bar{B}$

$$\overline{A \cup B}=\{x:x \notin A \cup B\} = \{x: x \notin A \ \kappa\alpha\iota\ x \notin B\} = \{x: x \in \bar{A} \ \kappa\alpha\iota\ x \in \bar{B}\} = \bar{A} \cap \bar{B}$$



$A \cup B$ $\overline{A \cup B}$



$\bar{A} \cap \bar{B}$

3. Να αποδειχτεί ότι $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$ (1.7.21)

$$(A \cup B) - (A \cap B) = \{x: x \in A \cup B, x \notin A \cap B\}$$

$$= \{x: x \in A \text{ ή } x \in B, x \in \overline{A \cap B}\}$$

$$= \{x : x \in A \text{ ή } x \in B, x \in \bar{A} \text{ ή } x \in \bar{B}\}$$

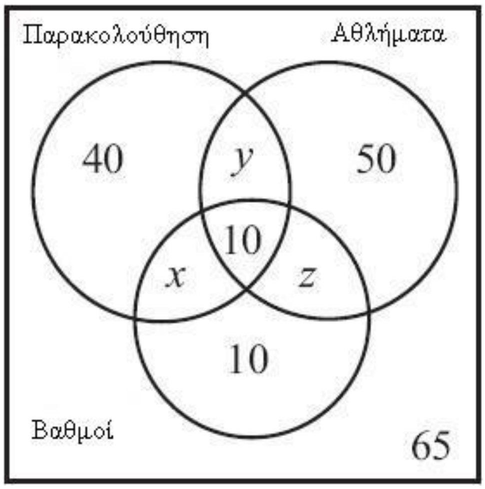
(επιμερισμός) $$= \{x : (x \in A \; και \; x \notin B) \text{ ή } (x \in B \; και \; x \notin A\}$$

$$= \{x : x \in (A - B) \text{ ή } x \in (B - A)\}$$

$$= (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{A})$$

(και με διάγραμμα Venn)

4. Οι μαθητές του 1ου Δημοτικού Θεσσαλονίκης λαμβάνουν κάποια διπλώματα στο τέλος της χρονιάς στην τελετή λήξης της σχολικής χρονιάς. Αυτό το χρόνο 120 μαθητές πήραν δίπλωμα παρακολούθησης μαθημάτων (δεν έκαναν ούτε μία απουσία), 180 μαθητές δίπλωμα συμμετοχής στους σχολικούς αθλητικούς αγώνες και 80 δίπλωμα αριστείας. Από αυτούς, οι 40 μαθητές που πήραν δίπλωμα παρακολούθησης δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα, οι 50 μαθητές που πήραν το δίπλωμα συμμετοχής στους αθλητικούς αγώνες δεν πήραν κανέναν άλλο δίπλωμα κια οι 10 μαθητές που πήραν δίπλωμα αριστείας δεν πήραν κανένα άλλο δίπλωμα. Επιπλέον, 10 μαθητές παίρνουν και τα τρία διπλώματα ενώ 65 μαθητές δεν παίρνουν κανένα δίπλωμα. Σχεδιάστε ένα Venn διάγραμμα και βρείτε πόσοι μαθητές είχε το σχολείο αυτή τη χρονιά. (Wiley άσκηση 3.1.30)



Οι εξής εξισώσεις μπορούν να γραφούν:
$x + y + 10 + 40 = 120$
$x + z + 10 + 10 = 80$
$y + z + 10 + 50 = 180$.

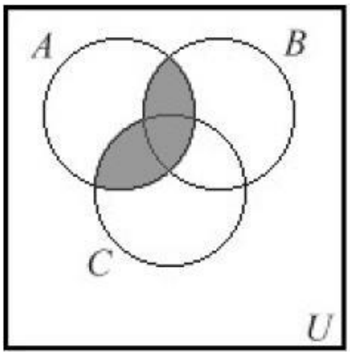
Η λύση σε αυτό το σύστημα είναι $x = 5$, $y = 65$ και $z = 55$. Επομένως το συνολικό πλήθος παιδιών της σχολικής χρονιάς είναι

$$65 + 40 + 50 + 10 + 10 + 5 + 65 + 55 = 300$$

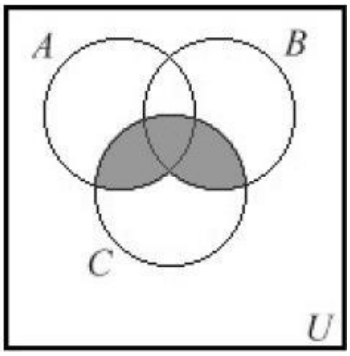
<u>5. Είναι σωστές οι παρακάτω δύο προτάσεις; Για αυτές που δεν είναι δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει (χρησιμοποιείστε είτε Venn είτε αναλυτικά). (Wiley άσκηση 3.1.17)</u>

$$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$$

$$(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) - \mathrm{A} = (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

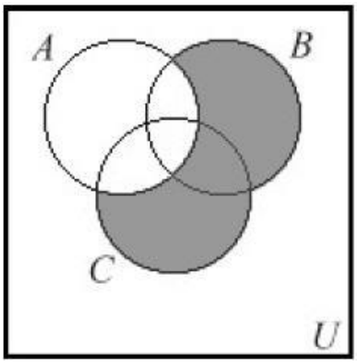


$\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$

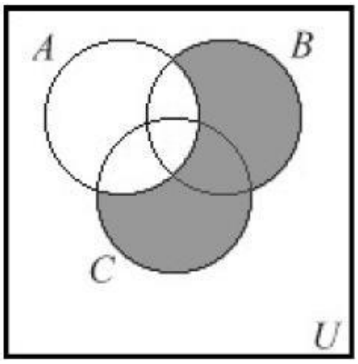


$(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup \mathrm{C}$

Αντιπαράδειγμα: *A* = {1,2,3} *B* ={1,3,4} *C* = {1,2,4}



$(\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) - \mathrm{A}$



$(\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$

Αληθές.

$$\{x: x \in (B \cup C) \; και \; x \notin A\}$$

$$= \{x: x \in B \text{ ή } x \in C, x \in \bar{A}\}$$

(επιμερισμός) $$= \{x: (x \in B \; και \; x \in \bar{A}) \text{ ή } (x \in \bar{A} \; και \; x \in C\}$$

$$= (\mathrm{B} \cap \overline{\mathrm{A}}) \cup (\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{A}})$$

$$= (\mathrm{B} - \mathrm{A}) \cup (\mathrm{C} - \mathrm{A})$$

6. Για κάθε μία από τις παρακάτω απαιτήσεις δώστε μία διαμέριση του συνόλου {1,2,3,4,5,6} (Wiley άσκηση 3.2.8)

1. Κάθε υποσύνολο έχει ίδιο μέγεθος. {{1,3},{2,4},{5,6}}
2. Κανένα υποσύνολο δεν έχει ίδιο μέγεθος με άλλο. {{2},{3,6},{4,1,5}}
3. Υπάρχουν όσο το δυνατόν περισσότερα υποσύνολα. {{1},{2},{3},{4},{5},{6}}
4. Υπάρχουν όσο το δυνατό λιγότερα υποσύνολα. {{1,2,3,4,5,6}}

7. Δείξτε ότι: αν $A \cap B = A$ τότε $\bar{A} \cup B = U$, όπου τα A και B είναι υποσύνολα του σύμπαντος U. (Wiley άσκηση 3.4.18)

$$\bar{A} \cup B = (\overline{A \cap B}) \cup B = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cup B = \bar{A} \cup (\bar{B} \cup B) = \bar{A} \cup U = U$$

8.Αναπαραστήστε τα παρακάτω σύνολα. (Wiley 3.1 Ex 4)

Το σύνολο των ακεραίων που είναι πολλαπλάσια του 3.

Λύση: $\{3k: k \in \mathbb{Z}\}$

Το σύνολο των τέλειων τετραγώνων.

Λύση: $\{\mu^2: \mu \in \mathbb{Z}\}$

Το σύνολο των φυσικών αριθμών που τελειώνουν με 1.

Λύση: $\{10k + 1: k \in \mathbb{N}\}$

Το σύνολο $\mathbb{Q}$.

Λύση: $\{\frac{\alpha}{\beta}: \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$

9. Στο παρακάτω πρόβλημα να βρείτε από την τριάδα συνόλων ποιο δεν είναι ίσο με τα υπόλοιπα. (Wiley 3.1.9)

$$A = \{a + b: a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{a - b: a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\}$$

$$C = \mathbb{N}$$

Αυτό που είναι διαφορετικό είναι το B, αφού υπάρχει στοιχείο του που δεν ανήκει στο N. Για παράδειγμα, αν α=3 και b=5, τότε $3 - 5 = -2 \notin \mathbb{N}$

10. Καρτεσιανό Γινόμενο – Πλήθος (1.7.23)

Δίνεται $A=\{\alpha,\beta,\gamma\}$ $B=\{\alpha,\delta\}$, όπου $|A|=3$ και $|B|=2$. Στα παρακάτω σύνολα να βρεθεί ο αριθμός των στοιχείων.

a) $|P(A)|=2^3=8$

b) $|P(B)|=2^2=4$

c) $|A \cup B|$. Τα A και B έχουν ένα κοινό στοιχείο (το α). Αν αθροίσουμε το πλήθος των στοιχείων τους το α θα το μετρήσουμε δύο φορές. Άρα πρέπει να το αφαιρέσουμε μία φορά και γενικά πρέπει να αφαιρέσουμε μία φορά οτι,δήποτε βρίσκεται στην τομή των δύο συνόλων. Άρα:
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 3 + 2 - 1 = 4$$
Πράγματι, $|A \cup B| = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

d) $|(A \times \{\gamma\}) \cup (B \times \{\alpha\})|$
$$A \times \{\gamma\} = \{(\alpha,\gamma),(\beta,\gamma),(\gamma,\gamma)\} \rightarrow |A \times \{\gamma\}| = 3 \cdot 1 = 3$$
$$B \times \{\alpha\} = \{(\alpha,\alpha),(\delta,\alpha)\} \rightarrow |B \times \{\alpha\}| = 2 \cdot 1 = 2$$
$|(A \times \{\gamma\}) \cup (B \times \{\alpha\})| = 3 + 2 = 5$ αφού τα σύνολα που ενώνονται δεν έχουν κοινό στοιχείο.

e) $A \times B = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\beta,\alpha),(\beta,\delta),(\gamma,\alpha),(\gamma,\delta)\}$
$$|A \times B| = 3 \cdot 2 = 6$$

f) $A^2 = A \times A = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\beta),(\alpha,\gamma),(\beta,\alpha),(\beta,\beta),(\beta,\gamma),(\gamma,\alpha),(\gamma,\beta),(\gamma,\gamma)\}$
$$|A^2| = |A| \cdot |A| = 3^2 = 9$$

g) $B^2 = B \times B = \{(\alpha,\alpha),(\alpha,\delta),(\delta,\alpha),(\delta,\delta)\}$
$$|B^2| = |B| \cdot |B| = 2^2 = 4$$

11. Καρτεσιανό Γινόμενο – Στοιχεία (1.7.24)

Να περιγραφούν τα στοιχεία των B^2, B^4 αν $B=\{0,1\}$.

$$B^2 = B \times B = \{(b_1, b_2): b_1, b_2 \in \{0,1\}\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

Το B^2 έχει συνολικά 4 στοιχεία (2^2)

$$B^4 = B \times B \times B \times B = \{(b_1, b_2, b_3, b_4): b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0,1\}\}$$

Το σύνολο θα έχει $|B^4|=2^4=16$ στοιχεία. Απαρίθμηση των τετράδων.

Όλοι οι δυαδικοί αριθμοί από το 0 έως το 15 (μπορείς να το κάνεις και σε μορφή δέντρου)

12. Καρτεσιανό Γινόμενο – Απόδειξη (1.7.25)

Να δειχτεί ότι $(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$

$$(A \cap B) \times (\Gamma \cap \Delta) = \{(x, y): x \in A \cap B \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in \Gamma \cap \Delta\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, x \in B) \kappa\alpha\iota \;\, (y \in \Gamma \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in \Delta)\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in \Gamma) \kappa\alpha\iota \;\, (x \in B \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in \Delta)\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in A \times \Gamma \;\, \kappa\alpha\iota \;\, (x, y) \in B \times \Delta\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)\}$$

$$= (A \times \Gamma) \cap (B \times \Delta)$$

13. Καρτεσιανό Γινόμενο – Απόδειξη (1.7.25)

Να δειχτεί ότι $A \times (B \cup \Gamma) = (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$

$$A \times (B \cup \Gamma) = \{(x, y): x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in B \cup \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, (y \in B \text{ ή } y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in B) \text{ή } (x \in A \;\, \kappa\alpha\iota \;\, y \in \Gamma)\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in A \times B \text{ ή } (x, y) \in A \times \Gamma\}$$

$$= \{(x, y): (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times \Gamma)\}$$

$$= (A \times B) \cup (A \times \Gamma)$$

Άλυτες Ασκήσεις

1. Είναι σωστές οι παρακάτω προτάσεις; Για αυτές που δεν είναι δώστε ένα παράδειγμα στο οποίο να φαίνεται ότι δεν ισχύει (χρησιμοποιείστε είτε Venn είτε αναλυτικά). (Wiley 3.1.17)
    a. $\mathrm{A} - (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = (\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} - \mathrm{C})$
    b. $(\mathrm{A} - \mathrm{B}) \cup (\mathrm{B} - \mathrm{C}) \subseteq (\mathrm{A} - \mathrm{C})$
    c. $(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) - \mathrm{A} = \mathrm{B} \cap (\mathrm{C} - \mathrm{A})$
    d. Αν $A \subseteq \mathrm{B}$, τότε $A - B = B - A$

2. Ποιες από τις παρακάτω διαμερίσεις του συνόλου Α={1,2,3,4,5,6,7,8} δεν είναι διαμέριση και γιατί; (Wiley 3.2.16)
    a. Σ={1,2,{3,4,5},{6,7,8}}
    b. Τ={{1,5},{6,7,2},{4,3,5},{8}}
    c. Υ={{1,8},{4,3,5},{7,2}}
    d. Φ={{4,2,3},{5,1,8},{6,7}}

3. Αποδείξτε ότι αν $(A \cup B) \subseteq B$ τότε $A \subseteq (A \cap B)$. (Wiley 3.3 Prop 2)

4. Δείξτε ότι αν $A \subseteq \mathrm{B}$ τότε $P(A) \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{B})$ (Wiley 3.3.21)

5. Δείξτε ότι αν $A \cap \mathrm{B} = \mathrm{A}$ τότε $A \cup \mathrm{B} = \mathrm{B}$ (Wiley 3.3.18)

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΧΕΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Πέτρα-Ψαλίδι-Χαρτί

Κερδίζει	ΠΕΤΡΑ	ΨΑΛΙΔΙ	ΧΑΡΤΙ
ΠΕΤΡΑ	Ψ	Α	Ψ
ΨΑΛΙΔΙ	Ψ	Ψ	Α
ΧΑΡΤΙ	Α	Ψ	Ψ

Η σχέση *Κερδίζει* αναπαρίσταται από το σύνολο {(Π,Ψ),(Ψ,Χ),(Χ,Π)}. (Εκεί που γίνεται αληθής δηλαδή)

Σχέση (Relation)

Σχέση (relation) R από το σύνολο S στο σύνολο T:

Ένα υποσύνολο του $S \times T$

$$R \subseteq S \times T \, , \; (s,t) \in R \, ,$$

το στοιχείο s ***σχετίζεται με το*** στοιχείο t

$$sRt$$

Αν $S = T$, οπότε $R \subseteq S^2$: Σχέση στο σύνολο S

Πίνακας Σχέσης

R σχέση ανάμεσα σε δύο σύνολα

Πίνακας της σχέσης: ορθογώνιος πίνακας με στοιχεία:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \alpha\nu \quad\quad s_i R t_j,\ (s_i, t_j) \in R \\ 0 \quad \alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma \end{cases}$$

Παράδειγμα

$$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\} \quad T = \{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$$

$$R = \{(s_1, t_2), (s_2, t_1), (s_2, t_2), (s_2, t_5), (s_4, t_1), (s_4, t_4), (s_4, t_5)\} \subseteq S \times T \text{ .}$$

Πίνακας της σχέσης:

$$\begin{array}{cc|ccccc}
 & & & & T & & \\
 & R & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \\
\hline
 & s_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
S & s_2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
 & s_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & s_4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}$$

Παράδειγμα (Διάταξη < και ≤)

$$n < m \Leftrightarrow m - n \in \mathbf{N}$$

$$< \;\; = \{(n,m) : n,m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

$$\leq \;\; = \{(n,m) : n,m \in \mathbf{Z}, \;\; m - n \in \mathbf{N} \cup \{0\}\} \subseteq \mathbf{Z}^2$$

(α) $n \leq n$ *ανακλαστική*

(β) $n \leq m \, , \, m \leq n \;\Rightarrow\; n = m$ *αντισυμμετρική*

(γ) $n \leq m \, , \;\; m \leq p \Rightarrow \; n \leq p$ *μεταβατική*

Ανακλαστικότητα

R σχέση στο σύνολο S

Ανακλαστική (reflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \in R$

Ισοδύναμα: xRx.

Μη-ανακλαστική (irreflexive) σχέση:

Για κάθε $x \in S$, ισχύει $(x, x) \notin R$

Παράδειγμα

$$S = \{a, b, c\}$$

- Ανακλαστική αλλά όχι μη-ανακλαστική:

$$\mathrm{R}_1 = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c)\}$$

- Ούτε ανακλαστική ούτε μη-ανακλαστική:

$$R_2 = \{(a, a), (b, c), (c, c)\}$$

- Μη-ανακλαστική:

$$R_3 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$$

Συμμετρικότητα

R σχέση στο σύνολο S.

Σχέση ***συμμετρική*** (symmetric):

Η παρουσία του (x, y) στο R συνεπάγεται και την παρουσία του (y, x) στο R, για κάθε $x, y \in \mathrm{R}$.

$$(x, y) \in \mathrm{R} \Rightarrow (y, x) \in R \text{ ή } xRy \Rightarrow yRx$$

Αντισυμμετρικότητα

Σχέση R ***αντισυμμετρική* (antisymmetric)**:

Η ταυτόχρονη παρουσία των (x,y) και (y,x) στο R, συνεπάγεται την ισότητα των x και y για κάθε $x, y \in R$.

$$(x,y) \in R \text{ και } (y,x) \in R \Rightarrow x = y$$

ή $\quad xRy$ και $yRx \Rightarrow x = y$

Παραδείγματα

$S=\{a,b,c\}$

Σχέσεις:

- $R4=\{(a,a),(b,c),(c,b)\}$: συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική
- $R5=\{(b,a),(a,c),(c,b)\}$: αντισυμμετρική
  όχι συμμετρική
- $R6=\{(a,a),(c,c)\}$: συμμετρική
  αντισυμμετρική
- $R7=\{(a,b),(a,c),(c,a)\}$: όχι συμμετρική
  όχι αντισυμμετρική

Μεταβατικότητα

R σχέση στο σύνολο S

Σχέση ***μεταβατική*** (transitive):

Η ταυτόχρονη παρουσία των (x, y) και (y, z) στο R συνεπάγεται την παρουσία του (x, z) στο R για κάθε $x, y, z \in R$.

$$(x, y) \in R \text{ και } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$$

$$xRy \text{ και } yRz \Rightarrow xRz$$

Παράδειγμα – 1

$$S = \{a, b, c\}$$

$$R_8 = \{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c)\}$$

- Μεταβατική σχέση
- Από το μητρώο της σχέσης

$$r_{ij} = r_{jk} = 1 \Rightarrow r_{ik} = 1$$

Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	1	1	0	1

Παράδειγμα – 2

$$S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

R	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	0	1	1
x_2	0	1	0	1
x_3	1	0	1	0
x_4	1	1	0	1

- Ανακλαστική
  - ΝΑΙ
- Συμμετρική
  - ΝΑΙ
- Μεταβατική
  - ΟΧΙ

$r_{24} = 1, r_{41} = 1$

$r_{21} = 0$

Παραδείγματα

Ανακλαστική
Συμμετρική
αΝτισυμμετρική
Μεταβατική

$R_1 = \{(a,b) \mid a \le b\}$ **Α Ν Μ**

$R_2 = \{(a,b) \mid a > b\}$ **Ν Μ**

$R_3 = \{(a,b) \mid a = b \text{ ή } a = -b\}$ **Α Σ Μ**

$R_4 = \{(a,b) \mid a = b\}$ **Α Σ Ν Μ**

$R_5 = \{(a,b) \mid a = b + 1\}$ **Ν**

$R_6 = \{(a,b) \mid a + b \le 3\}$ **Σ**

Σύνθεση Σχέσεων

Έστω R σχέση από A σε B και έστω S σχέση από B σε C. Η ***σύνθεση*** των R και S ($S \circ R$), αποτελείται από όλα τα διατεταγμένα ζεύγη (a,c), $a \in A$, $c \in$ C, για τα οποία υπάρχει b έτσι ώστε $(a,b) \in R$ και $(b,c) \in S$.

Παράδειγμα: A={1,2,3}, B={1,2,3,4} και C={0,1,2}

R={(1,1),(1,4),(2,3),(3,1),(3,4)}

S={(1,0),(2,0),(3,1),(3,2),(4,1)}

$S \circ R$ ={(1,0),(1,1),(2,1),(2,2),(3,0),(3,1)}

Συνάρτηση

Η σχέση $f \subseteq S \times T$ ονομάζεται ***συνάρτηση*** (function):

- Για κάθε στοιχείο $s \in S$ υπάρχει ένα και μόνο στοιχείο $t \in T$ έτσι ώστε $(s,t) \in f$

Στα διατεταγμένα ζεύγη μιας συνάρτησης <u>το κάθε</u> στοιχείο του συνόλου S εμφανίζεται <u>ακριβώς μία μόνο φορά</u>

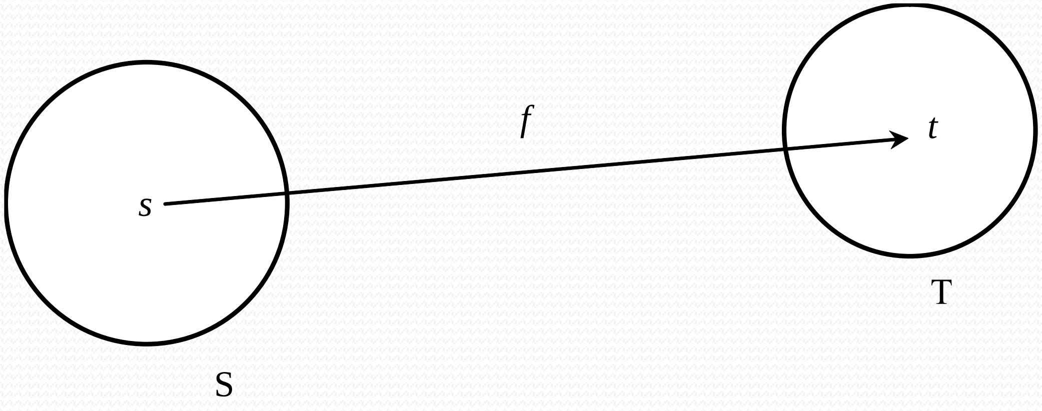
Συμβολισμός

$$f : S \to T, \quad f(s) = t$$

t ***εικόνα*** (image) του στοιχείου s κάτω από τη συνάρτηση *f*.

S ***πεδίο ορισμού*** (domain)

T ***πεδίο τιμών*** (range)

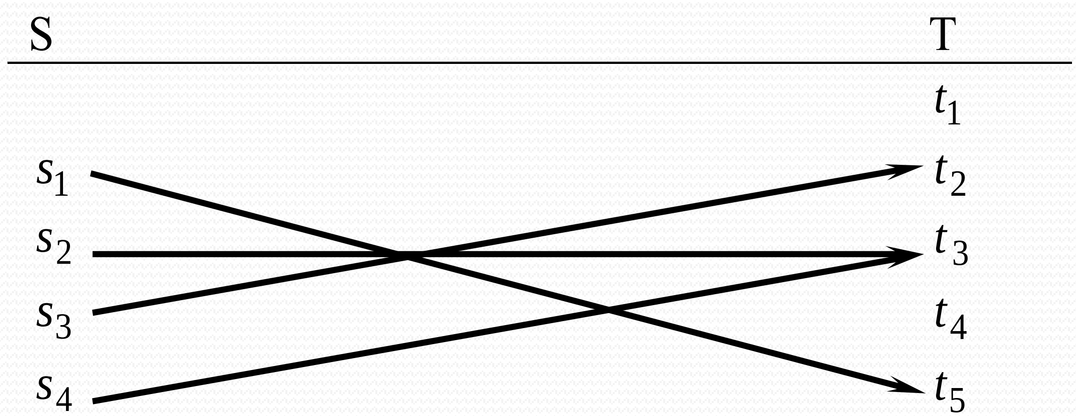


Παράδειγμα

$$S=\{s_1,s_2,s_3,s_4\}$$

$$T=\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}$$

$$f=\{(s_1,t_5),(s_2,t_3),(s_3,t_2),(s_4,t_3)\}\subseteq S\times T$$



Ορισμοί

Συνάρτηση ***επί*** (onto):

- Για κάθε $t \in T$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $s \in S$ έτσι ώστε $f(s) = t$

Συνάρτηση ***ένα προς ένα*** (one to one):

- $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
- δύο οποιαδήποτε στοιχεία του πεδίου ορισμού δεν έχουν την ίδια εικόνα

Αν το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών είναι πεπερασμένα σύνολα με τον ίδιο ακριβώς αριθμό στοιχείων, οι έννοιες "επί" και "ένα προς ένα" ταυτίζονται

Ταυτοτική Συνάρτηση

I_A ***ταυτοτική συνάρτηση*** στο σύνολο A:

$$\mathrm{I}_{\mathrm{A}}(a) = a$$

για κάθε

$$a \in A$$

Η συνάρτηση αυτή είναι ένα προς ένα και επί

Αντίστροφη Σχέση

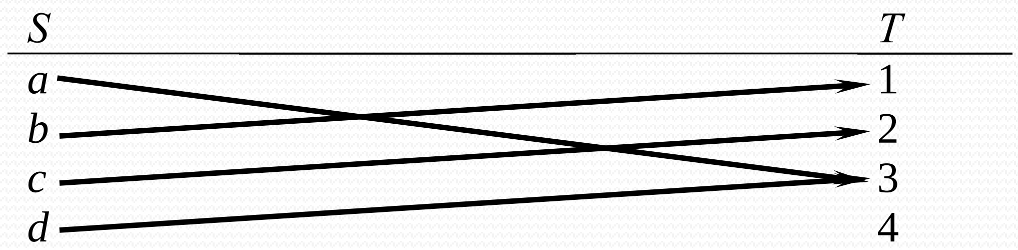
R σχέση από το σύνολο S στο σύνολο T

Αντίστροφη (inverse) σχέση:

$$R^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in R\}$$

Αν R συμμετρική τότε R^{-1}=?

Η R και R^{-1} είναι συναρτήσεις;



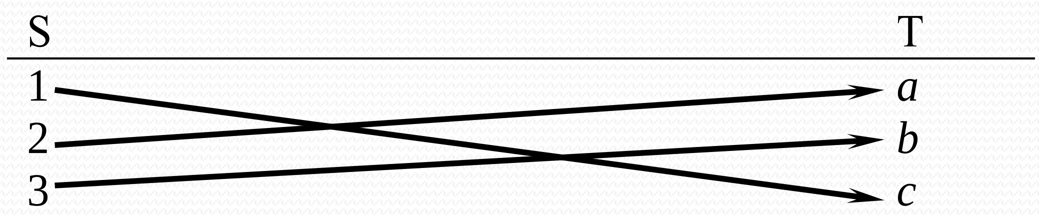
$R = \{(a, 3), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$

$$R^{-1} = \{(3,a),(1,b),(2,c),(3,d)\}$$

Παρόλο που η R είναι συνάρτηση, η R^{-1} δεν είναι συνάρτηση
(το στοιχείο 4 του συνόλου T δεν εμφανίζεται σε κανένα ζεύγος αλλά και το στοιχείο 3 εμφανίζεται σε δύο ζεύγη)

Η *R* και *R*$^{-1}$ είναι συναρτήσεις;

Σχέση *R*



$$R = \{(1, c), (2, a), (3, b)\}$$

$$R^{-1} = \{(c,1), (a,2), (b,3)\}.$$

Και οι δύο είναι συναρτήσεις.

Σχέση Ισοδυναμίας

Θεωρούμε μία σχέση R στο σύνολο S. Η R είναι ***σχέση ισοδυναμίας*** (equivalence relation) (~) αν ισχύουν οι ιδιότητες:

(α) $a \sim a$ (ανακλαστική)

(β) $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ (συμμετρική)

(γ) $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$ (μεταβατική)

για κάθε $a, b, c \in S$

Παράδειγμα – 1

- Σχέση ~ στο Z ($n \in Z$, $n>1$):

$$a \sim b \iff a - b = kn, \ k \in Z$$

ή ισοδύναμα

$$a \sim b \iff a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ n)$$

- Δηλαδή: ο ακέραιος a σχετίζεται με τον ακέραιο b αν και μόνο αν η διαφορά τους είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του n ή αλλιώς αν το b είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a δια n

Παράδειγμα – 1 (Συνέχεια)

- Σχέση ισοδυναμίας:
  - $a \sim a$ αφού $a - a = 0 \cdot n$ (ανακλαστική)
  - $a \sim b \Rightarrow a - b = \pi n \Rightarrow b - a = (-\pi)n \Rightarrow b \sim a$ (συμμετρική)
  - $a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a - b = pn$ και $b - c = qn$

    $\Rightarrow a - c = (a\text{-}b) + (b\text{-}c) = (p + q)n$

    $\Rightarrow a \sim c$ (μεταβατική)

Κλάση Ισοδυναμίας

- Σχέση ισοδυναμίας ~ σε σύνολο S
- Για κάθε $a \in S$, ***κλάση ισοδυναμίας*** (equivalence class) του a:
  - Το υποσύνολο των στοιχείων του S με τα οποία το a σχετίζεται (είναι ισοδύναμα του a)
- Συμβολισμός: $[a] = \{x: a \sim x\}$
- Ισχύει:

$$\boxed{[a] = [b] \Leftrightarrow a \sim b}$$

Θεώρημα

Αν ~ είναι μία σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο S, τότε το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας που ορίζονται στο S αποτελεί διαμέριση του S.

Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- $n = 2$: Η διαφορά διαιρείται με το 2
- Είτε και οι δύο ακέραιοι είναι άρτιοι είτε και οι δύο είναι περιττοί
- Δύο κλάσεις ισοδυναμίας (διαμέριση **Z**):
  - [0] = {..., -4, -2, 0, 2, 4,...}
  - [1] = {..., -5, -3, -1, 1, 3, 5,...}
- Ισχύει [2] = [0], [3] = [1], [5] = [1],….
- κλάση [0]: όλοι οι άρτιοι αριθμοί,
- κλάση [1]: όλοι οι περιττοί αριθμοί

Παράδειγμα

$$a \equiv b \bmod n$$

- Για n = 4, έχουμε 4 κλάσεις ισοδυναμίας:

$$[0] = \{\, 0,\ 0 \pm 1 \times 4,\ 0 \pm 2 \times 4,\ 0 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots.\}$$

$$[1] = \ \{1,\ 1 \pm 1 \times 4,\ 1 \pm 2 \times 4,\ 1 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots.\}$$

$$[2] = \ \{2,\ 2 \pm 1 \times 4,\ 2 \pm 2 \times 4,\ 2 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -10,\ -6,\ -2,\ 2,\ 6,\ 10,\ 14, \ldots\}$$

$$[3] = \ \{3,\ \ 3 \pm 1 \times 4,\ 3 \pm 2 \times 4,\ 3 \pm 3 \times 4, \ldots\} = \{\ldots,\ -9,\ -5,\ -1,\ 3,\ 7,\ 11,\ 15, \ldots\}$$

Θέμα 4ο: (1,5 Μονάδες) (29/8/2022)

Για σημεία (x,y) και (u,v) στο επίπεδο, η σχέση R έτσι ώστε (x,y) R (u,v) σημαίνει ότι $x^2 + y^2 = u^2 + v^2$. Αποδείξτε ότι η σχέση R είναι μία σχέση ισοδυναμίας. Να συζητήσετε πως αυτή η σχέση ισοδυναμίας διαμερίζει τα σημεία του επιπέδου στο (x,y)-επίπεδο.

Θέμα 8ο: (1,5 Μονάδες) (15/9/2017)

Έστω ότι A είναι το σύνολο των φοιτητών της Πολυτεχνικής Σχολής. Έστω η σχέση R που ορίζεται στο A ως εξής: Για κάθε x και y στο A

$$x\ R\ y \Leftrightarrow \text{ο } x \text{ είναι στο ίδιο τμήμα με τον } y$$

Να δείξετε ότι η σχέση R είναι σχέση ισοδυναμίας. Ποιες είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας (δώστε την ιδιότητα που έχουν μιας και δεν μπορείτε να τις αναφέρετε).

Μία Ακόμα Άσκηση

Έστω ότι R_1 και R_2 είναι δύο σχέσεις ισοδυναμίας στο σύνολο S. Καθορίστε αν κάθε ένας από τους παρακάτω συνδυασμούς των R_1 και R_2 είναι σχέση ισοδυναμίας.

α) $R_1 \cup R_2$ και

β) $R_1 \cap R_2$ (αν είναι απαιτείται απόδειξη ενώ αν δεν είναι ένα αντιπαράδειγμα είναι αρκετό)

γ) $\overline{R_1}$ (το συμπλήρωμα του R_1 ως προς το S^2)

Και Άλλο Θέμα…

Να δείξετε ότι η παρακάτω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας και να περιγράψετε τις κλάσεις ισοδυναμίας. Ορίζουμε τη σχέση P στο σύνολο $R \times R$ (το R είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών) ως εξής: για κάθε (w,x), $(y,z) \in R \times R$:

$$(w,x)\ P\ (y,z) \text{ σημαίνει ότι } w = y$$

1. Σχέσεις (1.7.26)

Δίνεται A={1,2,...,10}. Έστω η σχέση R: «ο α διαιρεί τον β», $(\alpha, \beta \in A)$.

1. Να γραφεί η σχέση σαν σύνολο διατεταγμένων ζευγαριών
$$R = \{(\alpha, \beta): \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$
$$= \{(1,1), (1,2), \ldots, (1,10), (2,2), (2,4), \ldots, (2,10), (3,3), (3,6), (3,9), (4,4), (4,8), (5,5), (5,10), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

2. Να γίνει ο πίνακας της σχέσης.

R	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
3	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0
4	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

   |R|=27.

3. Να περιγραφεί η R^{-1} και να γραφεί ως σύνολο διατεταγμένων ζευγών.
   R^{-1}: «ο β διαιρείται από τον α» ή «ο β είναι πολλαπλάσιο του α»
$$R^{-1} = \{(\beta, \alpha): \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N, \alpha, \beta \in A\} \subseteq A^2$$
$$= \{(1,1), (2,1), \ldots, (10,1), (2,2), (4,2), \ldots, (10,2), (3,3), (6,3), (9,3), (4,4), (8,4), (5,5), (10,5), (6,6), (7,7), (8,8), (9,9), (10,10)\}$$

4. Να εξεταστούν οι R και R^{-1} ως προς τις ιδιότητες.
   Ανακλαστική: Είναι γιατί $(a, a) \in R$ και $(a, a) \in R^{-1}$, $\forall \alpha \in R$
   Μη-ανακλαστική: Δεν είναι και οι δύο.
   Συμμετρική: Δεν είναι και οι δύο.
   Αντισυμμετρική: Είναι και οι δύο. Αν $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \alpha) \in R$, τότε $\beta = \kappa\alpha$ και $\alpha = \lambda\beta$ από όπου προκύπτει ότι $\alpha = \kappa\lambda\alpha$ και άρα $\kappa = \lambda = 1$, οπότε και $\beta = \alpha$. Ομοίως για R^{-1}.
   Μεταβατική: $\left.\begin{matrix} (\alpha, \beta) \in R \Rightarrow \beta = \kappa\alpha, \kappa \in N \\ (\beta, \gamma) \in R \Rightarrow \gamma = \lambda\beta, \lambda \in N \end{matrix}\right\} \Rightarrow \gamma = \kappa\lambda\alpha \Rightarrow \gamma = \mu\alpha, \mu \in N \Rightarrow (\alpha, \gamma) \in R$
   Ομοίως για R^{-1}.

5. Να εξεταστεί αν οι R και R^{-1} είναι σχέσεις ισοδυναμίας.
   Εφόσον και οι δύο δεν είναι συμμετρικές δεν είναι και σχέσεις ισοδυναμίας.

6. Να εξεταστεί αν R και R^{-1} είναι συναρτήσεις.

Και οι δύο δεν είναι συναρτήσεις.

2. Σχέσεις (1.7.28)

Δίνεται το σύνολο B={0,1}.

1. Να βρεθούν όλες οι σχέσεις που είναι δυνατό να οριστούν στο B.
   Οποιαδήποτε σχέση θα είναι υποσύνολο του $B \times B = B^2$.

$$B^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\} \qquad |B^2| = |B|^2 = 4$$

Το B^2 έχει συνολικά $P(B^2) = 2^4 = 16$ δυνατά υποσύνολα που καθορίζουν και το πλήθος των σχέσεων. Οι πίνακες των σχέσεων είναι οι εξής:

R	0	1
0	1	0
1	0	0

R	0	1
0	0	1
1	0	0

R	0	1
0	0	0
1	1	0

R	0	1
0	0	0
1	0	1

R	0	1
0	1	1
1	0	0

R	0	1
0	0	1
1	0	1

R	0	1
0	0	0
1	1	1

R	0	1
0	1	0
1	1	0

R	0	1
0	1	0
1	0	1

R	0	1
0	0	1
1	1	0

R	0	1
0	1	1
1	0	1

R	0	1
0	1	1
1	1	0

R	0	1
0	0	1
1	1	1

R	0	1
0	1	0
1	1	1

R	0	1
0	1	1
1	1	1

$= B^2$

R	0	1
0	0	0
1	0	0

$= \emptyset$

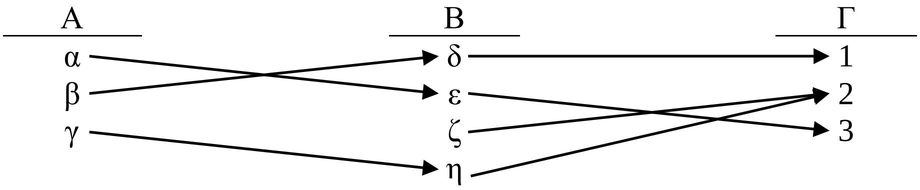
2. Ποιες είναι οι συναρτήσεις;
   Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες θα πρέπει κάθε γραμμή να έχει ακριβώς ένα «1».
   Αυτές αναπαρίστανται από τους κοκκινισμένους πίνακες.
   {(0,1),(1,1)},{(0,0),(1,0)},{(0,0),(1,1)},{(0,1),(1,0)}

3. Σύνθεση Συναρτήσεων

Α={α,β,γ} Β={δ,ε,ζ,η} Γ={1,2,3}

$f: A \to B$

$g: B \to \Gamma$



1. Να ορισθεί η σύνθεση $(gof): A \to \Gamma$

$$(gof)(\alpha) = g\big(f(\alpha)\big) = g(\varepsilon) = 3$$
$$(gof)(\beta) = g\big(f(\beta)\big) = g(\delta) = 1$$
$$(gof)(\gamma) = g\big(f(\gamma)\big) = g(\eta) = 2$$

Με πίνακες:

f	δ	ε	ζ	η
α	0	1	0	0
β	1	0	0	0
γ	0	0	0	1

g	*1*	*2*	*3*
δ	1	0	0
ε	0	0	1
ζ	0	1	0
η	0	1	0

gof	1	2	3
α	0	0	1
β	1	0	0
γ	0	1	0

4. Συνάρτηση

Η συνάρτηση $g: Q \to Q$, όπου $g(x) = 5x - 1$ είναι επί.

Έστω $y \in Q$. Έστω ότι $x = \frac{y+1}{5}$. Αφού $y \in Q$ συνεπάγεται ότι και $x \in Q$. Άρα:

$$g(x) = g\left(\frac{y+1}{5}\right) = 5\left(\frac{y+1}{5}\right) - 1 = (y+1) - 1 = y$$

Επομένως, κάθε y του πεδίου τιμών είναι έξοδος του g και άρα η g είναι επί.

5. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω A={0,1,2,3,4,5,6} και $R = \{(x, y) \in A \times A: x - y\ διαιρείται\ από\ το\ 3\}$.

a. Αποδείξτε ότι η R είναι ανακλαστική.
Έστω $\alpha \in A$. Αφού $\alpha - \alpha = 0$ και το 0 διαιρείται από το 3, συνεπάγεται ότι $(\alpha, \alpha) \in R$.

b. Αποδείξτε ότι η R είναι συμμετρική.
Έστω $\alpha \in A$ και $\beta \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$, για κάποιον ακέραιο κ. Επομένως, $\beta - \alpha = 3(-\kappa)$ και άρα και το $\beta - \alpha$ διαιρείται από το 3. Άρα $(\beta, \alpha) \in R$.

c. Αποδείξτε ότι η R είναι μεταβατική.
Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in A$ έτσι ώστε $(\alpha, \beta) \in R$ και $(\beta, \gamma) \in R$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha - \beta = 3\kappa$ και $\beta - \gamma = 3\lambda$ για κάποιους ακέραιος *κ,λ*. Άρα:
$$\alpha - \gamma = (\alpha - \beta) + (\beta - \gamma) = 3\kappa + 3\lambda = 3(\kappa + \lambda)$$
Άρα το $\alpha - \gamma$ διαιρείται από το 3 και άρα το $(\alpha, \gamma) \in R$.

d. Ποιά είναι η διαμέριση του *A* βάση της σχέσης ισοδυναμίας *R*:
{{0,3,6},{1,4},{2,5}}

6. Κλάσεις Ισοδυναμίας (Wiley 4.5-10)

Έστω R μία σχέση στο A=N×N έτσι ώστε (x,y)R(p,q) αν και μόνο αν x+q=y+p. Να δείξετε ότι η R είναι σχέση ισοδυναμίας.

Η συγκεκριμένη σχέση είναι:
α)ανακλαστική: αφού $(x, y)R(x, y)$ σημαίνει ότι $x + y = y + x$ που ισχύει.
β)συμμετρική: αφού $(x, y)R(p, q)$ σημαίνει ότι $x + q = y + p$ που μπορεί να γραφεί σαν $y + p = x + q$ που σημαίνει $(p, q)R(x, y)$. Άρα $(x, y)R(p, q)$ δίνει $(p, q)R(x, y)$ και άρα η R είναι συμμετρική.
γ)μεταβατική: Έστω $(x, y)R(p, q)$ και $(p, q)R(a, b)$ το οποίο σημαίνει ότι $x + q = y + p$ και $p + b = q + a$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε $(x + q) + (p + b) = (y + p) + (q + a)$ από όπου προκύπτει ότι $(x + b) + (p + q) = (y + a) + (p + q)$ και αφαιρώντας το $(p + q)$ και από τα δύο μέλη παίρνουμε $x + b = y + a$ οπότε $(x, y)R(a, b)$
Άρα η *R* είναι σχέση ισοδυναμίας.

7. Συναρτήσεις

Έστω μία συνάρτηση *f*:*A*→*A* (η *f* είναι υποσύνολο του *A*×*A*). Να δείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f_1 και f_2 που είναι υποσύνολα του *A*×*A* αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ τότε $f_1 = f_2$ ***αν και μόνο αν*** η *f* είναι ένα-προς-ένα.

<u>Λύση:</u>

Έστω ότι *f* δεν είναι ένα-προς-ένα. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν *α≠β∈A* έτσι ώστε *f(α)=f(β)*. Ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_1: A \to A$, $f_1(x) = a$, για κάθε *x∈A* και $f_2: A \to A$, $f_2(x) = \beta$, για κάθε *x∈A*. Αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ τότε:

$$f \circ f_1(x) = f\big(f_1(x)\big) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f\big(f_2(x)\big) = f(\beta)$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι $f(a) = f(\beta)$ και γενικά $f \circ f_1 = f \circ f_2$ αλλά $\alpha \neq \beta$ και άρα $f_1 \neq f_2$.

Τώρα αποδεικνύουμε ότι αν $f \circ f_1 = f \circ f_2$ και $f_1 \neq f_2$ η f δεν είναι ένα-προς-ένα. Ας υποθέσουμε ότι οι f_1 και f_2 ορίζονται όπως και πριν. Έστω $x \in A$ έτσι ώστε $f_1(x) \neq f_2(x)$. Τότε:

$$f \circ f_1(x) = f\big(f_1(x)\big) = f(a)$$

$$f \circ f_2(x) = f\big(f_2(x)\big) = f(\beta)$$

και $f(a) = f(\beta)$ ενώ $\alpha = f_1(x) \neq f_2(x) = \beta$ και επομένως η f δεν είναι ένα-προς-ένα.

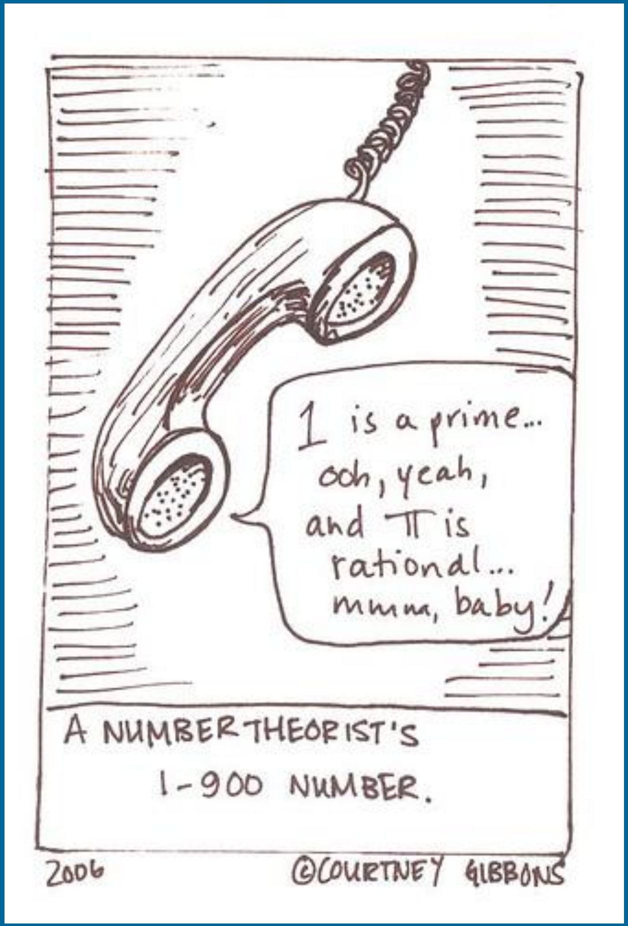
Άλυτες Ασκήσεις

1. (Wiley 4.1-10) Αποφασίστε ποιες από τις παρακάτω σχέσεις είναι συναρτήσεις και γιατί.
   a. Η σχέση R={(1,5),(2,3),(3,3),(4,2),(5,1)} στο $A \times A$, όπου A={1,2,3,4,5}.
   b. Για A={1,2,3,4,5}, η σχέση R={(1,5),(2,3),(3,3),(1,2),(4,1)} στο $A \times A$.
   c. Η σχέση R στο $Q \times Z$, όπου $(r, z) \in R$ δηλώνει αν μπορεί ο ρητός αριθμός r να γραφεί σαν κλάσμα με αριθμητή z.

2. (Wiley 4.2-10) Έστω ότι **B** είναι το σύνολο των δυαδικών ακολουθιών μήκους 5. Ορίζουμε την συνάρτηση $f: B \to \{0,1,2,3,4,5\}$, όπου *f(s)* είναι το πλήθος των 1 στην δυαδική ακολουθία s. Ορίζουμε την συνάρτηση $g: \{0,1,2,3,4,5\} \to B$, όπου *g(n)* είναι η δυαδική ακολουθία που αποτελείται από n 1 ακολουθούμενα από 5-*n* 0.
   a. Υπολογίστε τα *f*(11011), *f*(01101) και *f*(11000). Είναι η *f* αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
   b. Υπολογίστε τα g(0), g(2) και g(4). Είναι η g αντιστρέψιμη; Αν όχι γιατί;
   c. Υπολογίστε τα $(fog)(2), (fog)(0), (gof)(11010)$ και $(gof)(11100)$.
   d. Είναι οι *f* και g αντίστροφες η μία της άλλης;

3. (Wiley 4.3 Prop. 2) Αν η $f: A \to B$ είναι ένα-προς-ένα και η $g: B \to C$ είναι ένα-προς-ένα τότε και η σύνθετη συνάρτηση $gof: A \to C$ είναι ένα προς ένα.

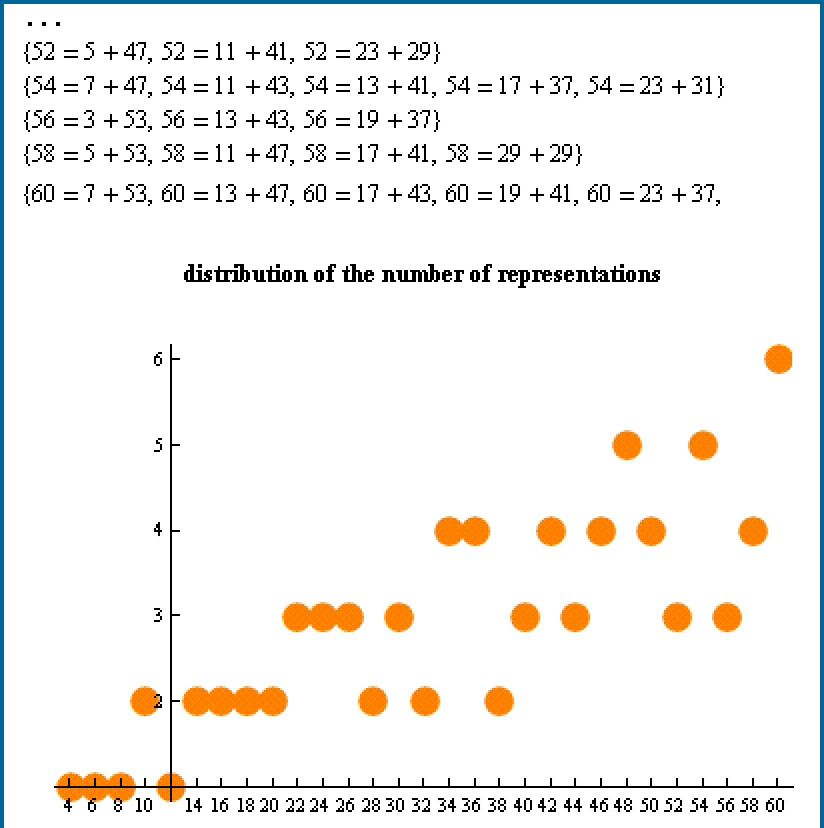
4. (Wiley 4.3-5) Έστω ότι S={a,b,c} και η συνάρτηση $c: P(S) \to P(S)$ όπου $c(A) = S - A$.
   a. Είναι η c ένα-προς-ένα;
   b. Είναι η c επί;
   c. Είναι η c αντιστρέψιμη και αν ναι ποια είναι η c^{-1}; Αν όχι γιατί;



ΒΑΣΙΚΆ ΣΤΟΙΧΕΊΑ ΘΕΩΡΊΑΣ ΑΡΙΘΜΏΝ

Θεωρία Αριθμών

- Κλάδος μαθηματικών που ασχολείται με τους ακέραιους και τις ιδιότητές τους.
- Πολλά και εξαιρετικά δύσκολα προβλήματα – Εικασία του Goldbach



Κάποιες Εφαρμογές που θα Δούμε

- Συναρτήσεις Κατακερματισμού (Hashing Functions)
- Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί
- Ψηφίο Ελέγχου

Η Διαίρεση

Ένας ακέραιος *a* διαιρεί τον *b* όταν υπάρχει *c* έτσι ώστε $b=ac$.

$a \longrightarrow$ παράγοντας του b

$b \longrightarrow$ πολλαπλάσιο του a

$$a \mid b \equiv \exists c(ac=b)$$

$$a \nmid b \equiv \forall c(ac \neq b)$$

Ιδιότητες

1. Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (b+c)$
2. Αν $a \mid b$ τότε $a \mid bc$ για όλους τους ακεραίους c
3. Αν $a \mid b$ και $b \mid c$ τότε $a \mid c$

Πόρισμα:

Αν $a \mid b$ και $a \mid c$ τότε $a \mid (mb+nc)$ όπου m και n ακέραιοι.

Βασικοί Ορισμοί

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης:

ΜΚΔ(x,y) = μέγιστο $k \geq 1$: $k \mid x$ και $k \mid y$

Ελάχιστο Κοινό Πολλαπλάσιο:

ΕΚΠ(x,y) = ελάχιστο $k \geq 1$: $x \mid k$ και $y \mid k$

Πρώτοι Αριθμοί

Ένας θετικός ακέραιος p λέγεται *πρώτος* αν οι μόνοι θετικοί του παράγοντες είναι το 1 και το p. Αν ένας θετικός ακέραιος δεν είναι πρώτος λέγεται *σύνθετος*.

Θεμελιώδες θεώρημα αριθμητικής:

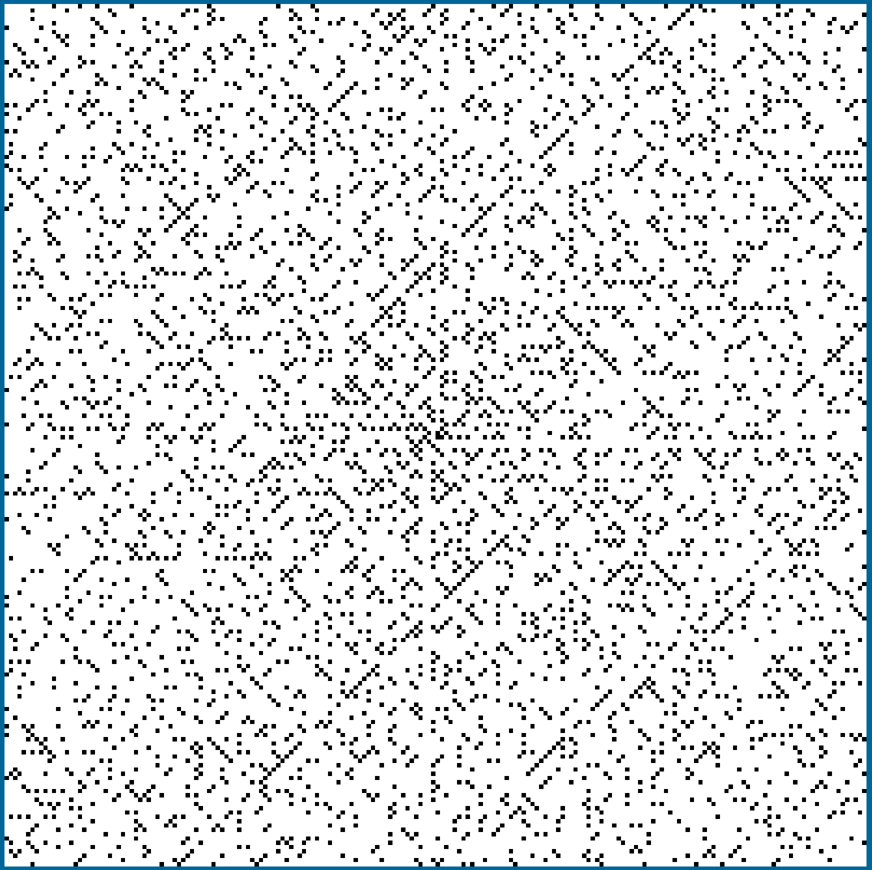
Κάθε θετικός ακέραιος μπορεί να γραφεί με μοναδικό τρόπο σαν πρώτος αριθμός ή σαν γινόμενο πρώτων αριθμών όπου οι πρώτοι παράγοντες γράφονται σε σειρά μη ελαττούμενου μεγέθους.

Θεωρήματα

1. Αν ο n είναι σύνθετος ακέραιος, τότε ο n έχει διαιρέτη πρώτο αριθμό μικρότερο από ή ίσο με $n^{1/2}$. (Απόδειξη)
    1. Να δειχτεί ότι ο 101 είναι πρώτος.
2. Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί. (Απόδειξη)

Πρώτοι Αριθμοί – ???

- Ο λόγος του πλήθους των πρώτων αριθμών, που δεν είναι μεγαλύτεροι από x και του $x/\ln x$ πλησιάζει το 1, καθώς το x αυξάνει χωρίς φράγμα. (Χωρίς απόδειξη :-))



Βαθμιδωτή Αριθμητική

(a mod n) είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του a από το n.

$$a \bmod n = r$$

$$\Leftrightarrow$$

$$a = dn + r \text{ για κάποιον ακέραιο } d$$

Απόδειξη

Αν a,b και n είναι ακέραιοι αριθμοί τότε ο a είναι ισοδύναμος του b *modulo* n αν ο <u>***n διαιρεί το a-b***</u>.

$$a \equiv b \pmod{n}$$

$31 \equiv 81 \pmod{2}$

$31 \equiv_2 81$

Επίσης:

$31 \equiv 80 \pmod{7}$

$31 \equiv_7 80$

$$a \equiv b \pmod{n} \leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$$

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

Ορισμός: Μία συνάρτηση κατακερματισμού h αναθέτει μία θέση μνήμης $h(k)$ στην εγγραφή που έχει το k ως κλειδί.

- Μία κοινή συνάρτηση είναι η $h(k) = k \textbf{ mod } m$, όπου m είναι το πλήθος των θέσεων μνήμης.

Παράδειγμα: Έστω $h(k) = k \textbf{ mod } 111$. Αυτή η συνάρτηση αναθέτει τις εγγραφές των πελατών με ΑΦΜ ως κλειδιά, σε θέσεις μνήμης με τον εξής τρόπο:

h(064212848) = 064212848 **mod** 111 = 14

h(037149212) = 037149212 **mod** 111 = 65

h(107405723) = 107405723 **mod** 111 = 14, αλλά αφού η θέση 14 είναι ήδη πιασμένη, η εγγραφή θα ανατεθεί στην επόμενη διαθέσιμη θέση μνήμης, δηλαδή την 15.

Συναρτήσεις Κατακερματισμού

- Οι συναρτήσεις κατακερματισμού δεν είναι 1-προς-1, αφού ο τομέας αναφοράς των κλειδιών είναι μεγαλύτερος από το πλήθος των θέσεων μνήμης. Όταν περισσότερα από ένα κλειδιά ανατίθενται στην ίδια θέση μνήμης τότε έχουμε σύγκρουση. Στο προηγούμενο παράδειγμα λύσαμε τη σύγκρουση αναθέτοντας το κλειδί στην πρώτη διαθέσιμη θέση.
- Για την επίλυση μίας σύγκρουσης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μία *συνάρτηση γραμμικής ανίχνευσης*: $h(k,i) = (h(k) + i) \textbf{ mod } m$, όπου το i παίρνει τιμές από το 0 μέχρι το $m - 1$.
- Υπάρχουν και άλλες μέθοδοι για επίλυση συγκρούσεων αλλά περισσότερα στο μάθημα «Δομές Δεδομένων»

Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης

α, b είναι σχετικά πρώτοι αν gcd(α,b)=1

Αν οι a και b είναι θετικοί ακέραιοι, τότε υπάρχουν ακέραιοι s και t έτσι ώστε ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b $\gcd(a,b)=sa+tb$.

Αποτελέσματα:

1. Αν $\gcd(a,b)=1$ και $a \mid bc$, τότε $a \mid c$
2. Αν ο p είναι πρώτος και $p \mid a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$, όπου κάθε a_i είναι ακέραιος, τότε $p \mid a_i$ για κάποιο i. (με επαγωγή)
3. Αν $ac \equiv bc \pmod{m}$ και $\gcd(c,m)=1$ τότε $a \equiv b \pmod{m}$

Ο Αλγόριθμος του Ευκλείδη

- Δοθέντων θετικών ακεραίων a και b, να βρούμε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη
- Ιδέα:
  - Αν ο x είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των a και b, τότε το x διαιρεί το $r = a - kb$, για οποιοδήποτε k.
  - Μειώνει το πρόβλημα στην εύρεση του μεγαλύτερου x που διαιρεί τα r και b
  - Επανάληψη

Παράδειγμα (1)

- $a = 15$, $b = 12$

a	b	q	r	
15	12	1	3	$q = 15/12 = 1$
				$r = 15 – 1\times12$
12	3	4	0	$q = 12/3 = 4$
				$r = 12 – 4\times3$

- Άρα $\mu\kappa\delta(15, 12) = 3$
  - Το b για το οποίο το r είναι 0

Πίσω στο mod…

Κλάσεις Ισοδυναμίας mod 3

[0] = { …, -6, -3, 0, 3, 6, ..}
[1] = { …, -5, -2, 1, 4, 7, ..}
[2] = { …, -4, -1, 2, 5, 8, ..}

[-6] = { …, -6, -3, 0, 3, 6, ..} = [0]
[7] = { …, -5, -2, 1, 4, 7, ..} = [1]
[-1] = { …, -4, -1, 2, 5, 8, ..} = [2]

Αναπαράσταση Συστήματος mod 3

Πεπερασμένο σύνολο *S* = {0, 1, 2}

+ και * ορίζονται στο *S*:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

*	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Σημειογραφεία

$$Z_n = \{[0], [1], [2], \ldots, [n\text{-}1]\}$$

Πράξεις $+_n$ και $*_n$:

$a +_n b = (a + b \bmod n)$
$a *_n b = (a * b \bmod n)$

Ιδιότητες Πράξεων

[“Κλειστότητα”]

$$x, y \in Z_n \Rightarrow x +_n y \in Z_n$$

[“Προσεταιριστική”]

$$x, y, z \in Z_n \Rightarrow (x +_n y) +_n z = x +_n (y +_n z)$$

[“Αντιμεταθετική”]

$$x, y \in Z_n \Rightarrow x +_n y = y +_n x$$

Παρόμοιες Ιδιότητες και για $*_n$

Γιατί μας ενδιαφέρει;

Επειδή μπορούμε να αντικαταστήσουμε οποιοδήποτε μέλος της κλάσης με άλλο μέλος της όταν κάνουμε πρόσθεση ή πολλαπλασιασμό mod *n* και το αποτέλεσμα δεν θα αλλάξει

Για να υπολογίσουμε: 249 * 504 mod 251

αρκεί -2 * 2 = -4 = 247

Μας ενδιαφέρει επίσης επειδή οι Υπολογιστές κάνουν αριθμητική mod *n*, όπου *n* είναι 2^{32} ή 2^{64}.

Ιδιότητες

$$a \equiv b \pmod{m} \leftrightarrow \exists k(a=b+km)$$

Έστω ότι ο m είναι θετικός ακέραιος. Αν

$$a \equiv b \pmod{m}$$

και

$$c \equiv d \pmod{m},$$

τότε

$$a+c \equiv b+d \pmod{m} \text{ και } ac \equiv bd \pmod{m}$$

Ιδιότητες (2)

Αν ($x \equiv_n y$) και ($k \mid n$), τότε : $x \equiv_k y$

Παράδειγμα: $10 \equiv_6 16 \Rightarrow 10 \equiv_3 16$

Απόδειξη:

$x \equiv_n y$ αν και μόνο αν $x = in + y$ για κάποιο ακέραιο i

Έστω $n=jk$ Τότε:

$$x = ijk + y$$

$x = (ij)k + y$ και άρα $x \equiv_k y$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

- Οι *ψευδοτυχαίοι αριθμοί* δεν είναι πραγματικά τυχαίοι αφού παράγονται με συστηματικές μεθόδους.
- Η *γραμμική αναλογική μέθοδος* χρησιμοποιείται συχνά για την παραγωγή τέτοιων αριθμών.
- Απαιτούνται 4 ακέραιοι: ο συντελεστής m, ο πολλαπλασιαστής a, η αύξηση c, και ο σπόρος x_0, όπου $2 \le a < m, 0 \le c < m, 0 \le x_0 < m$.
- Παράγουμε μία ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών $\{x_n\}, 0 \le x_n < m$ χρησιμοποιώντας αναδρομικά την εξής συνάρτηση:

$$\boxed{x_{n+1} = (ax_n + c) \bmod m}$$

Ψευδοτυχαίοι Αριθμοί

Παράδειγμα: Βρείτε την ακολουθία ψευδοτυχαίων αριθμών που παράγεται από τη γραμμική αναλογική μέθοδο όπου $m = 9$, $a = 7$, $c = 4$, και $x_0 = 3$.

Λύση: Υπολογίζουμε διαδοχικά την $x_{n+1} = (7x_n + 4)\ mod\ 9, x_0 = 3$.

$x_1 = 7x_0 + 4$ **mod** $9 = 7·3 + 4$ **mod** $9 = 25$ **mod** $9 = 7$,
$x_2 = 7x_1 + 4$ **mod** $9 = 7·7 + 4$ **mod** $9 = 53$ **mod** $9 = 8$,
$x_3 = 7x_2 + 4$ **mod** $9 = 7·8 + 4$ **mod** $9 = 60$ **mod** $9 = 6$,
$x_4 = 7x_3 + 4$ **mod** $9 = 7·6 + 4$ **mod** $9 = 46$ **mod** $9 = 1$,
$x_5 = 7x_4 + 4$ **mod** $9 = 7·1 + 4$ **mod** $9 = 11$ **mod** $9 = 2$,
$x_6 = 7x_5 + 4$ **mod** $9 = 7·2 + 4$ **mod** $9 = 18$ **mod** $9 = 0$,
$x_7 = 7x_6 + 4$ **mod** $9 = 7·0 + 4$ **mod** $9 = 4$ **mod** $9 = 4$,
$x_8 = 7x_7 + 4$ **mod** $9 = 7·4 + 4$ **mod** $9 = 32$ **mod** $9 = 5$,
$x_9 = 7x_8 + 4$ **mod** $9 = 7·5 + 4$ **mod** $9 = 39$ **mod** $9 = 3$.

Η παραγόμενη ακολουθία είναι η 3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,7,8,6,1,2,0,4,5,3,…
Η ακολουθία επαναλαμβάνεται μετά από 9 όρους.

Συνήθως, οι γλώσσες προγραμματισμού χρησιμοποιούν τη γραμμική αναλογική μέθοδο με $c = 0$. Μία τέτοια γεννήτρια ψευδοτυχαίων αριθμών που έχει $m=2^{31} - 1$ και $a = 7^5 = 16{,}807$, παράγει μία ακολουθία με $2^{31} - 2$ αριθμούς πριν επαναληφθεί.

Ψηφίο Ελέγχουν: UPCs

Μία κοινή μέθοδος για ανίχνευση λαθών σε ακολουθίες ψηφίων είναι η πρόσθεση ενός επιπλέον ψηφίου στο τέλος, το οποίο υπολογίζεται από μία συνάρτηση. Αν το τελικό ψηφίο είναι λάθος, τότε η ακολουθία δεν είναι σωστή.

Παράδειγμα: Τα εμπορικά προϊόντα αναγνωρίζονται από τους *Universal Product Codes* (*UPC*s). Συνήθως αυτοί έχουν 12 δεκαδικά ψηφία με το τελευταίο να είναι ψηφίο ελέγχου που καθορίζεται ως εξής:

$$3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 3x_5 + x_6 + 3x_7 + x_8 + 3x_9 + x_{10} + 3x_{11} + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$$

a. Έστω ότι τα πρώτα 11 ψηφία του UPC είναι 79357343104. Ποιο είναι το ψηφίο ελέγχου;

b. Είναι ο 041331021641 ένα έγκυρο UPC?

Λύση:

a. $3\cdot7 + 9 + 3\cdot3 + 5 + 3\cdot7 + 3 + 3\cdot4 + 3 + 3\cdot1 + 0 + 3\cdot4 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
   $21 + 9 + 9 + 5 + 21 + 3 + 12 + 3 + 3 + 0 + 12 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
   $98 + x_{12} \equiv 0 \pmod{10}$
   $x_{12} \equiv 2 \pmod{10}$ Άρα το ψηφίο ελέγχουν είναι το 2.

b. $3\cdot0 + 4 + 3\cdot1 + 3 + 3\cdot3 + 1 + 3\cdot0 + 2 + 3\cdot1 + 6 + 3\cdot4 + 1 \equiv 0 \pmod{10}$
   $0 + 4 + 3 + 3 + 9 + 1 + 0 + 2 + 3 + 6 + 12 + 1 = 44 \equiv 4 \not\equiv 0 \pmod{10}$
   Άρα ο 041331021641 δεν είναι έγκυρο UPC.

Ψηφίο Ελέγχου: ISBNs

Τα βιβλία αναγνωρίζονται από έναν δεκαψήφιο αριθμό: *International Standard Book Number* (ISBN-10). Τα πρώτα 9 ψηφία καθορίζονται από τη γλώσσα, τον εκδότη και το βιβλίο. Το δέκατο ψηφίο είναι ψηφίο ελέγχουν που καθορίζεται ως εξής:

$$x_{10} = \sum_{i=1}^{9} ix_i \ (mod\ 11)$$

Η εγκυρότητα ενός ISBN-10 αριθμού μπορεί να ελεγχθεί:

$$\sum_{i=1}^{10} ix_i \equiv 0\ (mod\ 11)$$

a) Έστω ότι τα πρώτα 9ψηφία ενός ISBN-10 είναι 007288008. Ποιο είναι το ψηφίο ελέγχου;

b) Είναι το 084930149X ένας έγκυρος κωδικός ISBN10;

Το X ανήκει στο {0,1,…,10}.

Λύση:

a. $X_{10} \equiv 1\cdot0 + 2\cdot0 + 3\cdot7 + 4\cdot2 + 5\cdot8 + 6\cdot8 + 7\cdot0 + 8\cdot0 + 9\cdot8$ (mod 11).

$X_{10} \equiv 0 + 0 + 21 + 8 + 40 + 48 + 0 + 0 + 72$ (mod 11).

$X_{10} \equiv 189 \equiv 2$ (mod 11). Άρα, $X_{10} = 2$.

b. $1\cdot0 + 2\cdot8 + 3\cdot4 + 4\cdot9 + 5\cdot3 + 6\cdot0 + 7\cdot1 + 8\cdot4 + 9\cdot9 + 10\cdot10 =$

$0 + 16 + 12 + 36 + 15 + 0 + 7 + 32 + 81 + 100 = 299 \equiv 2 \not\equiv 0$ (mod 11)

Άρα ο 084930149X δεν είναι έγκυρος ISBN-10 αριθμός.

Θέμα 6ο: (0,5 Μονάδες) (2/2/2017)

Όταν ένας $n \in Z$ διαιρεθεί με το 7 τότε το υπόλοιπο είναι 4. Ποιο είναι το υπόλοιπο αν ο $5n$ διαιρεθεί με το 7;

Θέμα 4ο: (1,5 Μονάδες) (15/9/2017)

Να αποδείξετε με αντίφαση την εξής πρόταση: Για κάθε ακέραιο a και έναν πρώτο αριθμό p, αν $p \mid a$ τότε $p \nmid (a + 1)$.

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Αθροίσματα και Γινόμενα

Ο Εισοδηματίας

- Στο τηλεπαιχνίδι «Ο Εισοδηματίας» (2008) ο Αρναούτογλου για πρώτη φορά δίνει δύο επιλογές:
  - Να πάρεις 50.000 Ευρώ κάθε χρόνο για 20 χρόνια ή
  - Να πάρεις 750.000 Ευρώ εφάπαξ.

- Τι πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν γνωρίζει ότι ο πληθωρισμός (η απώλεια αξίας των χρημάτων) είναι 3% και είναι ίσος με το επιτόκιο της τράπεζας;

Ο Εισοδηματίας

Για να μπορούμε να συγκρίνουμε τις αξίες θα υπολογίσουμε τη σημερινή αξία (με πληθωρισμό p) όλων των χρημάτων που θα πάρουμε στα επόμενα 20 χρόνια:

- Την 2η χρονιά: $\frac{50.000}{1+p}$
- …
- Την 20η χρονιά: $\frac{50.000}{(1+p)^{19}}$

- Άρα η συνολική αξία είναι: $\sum_{i=0}^{19} \frac{50.000}{(1+p)^{i}}$

Ο Εισοδηματίας (συνέχεια)

- Τι θα πρέπει να επιλέξει ο παίκτης αν του προτείνουν 50.000 ευρώ επ'άπειρον ή 2.000.000 ευρώ εφάπαξ;

  - Η συνολική αξία θα είναι:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{50.000}{(1+p)^i}$$

Υπολογισμός Αθροίσματος

- Μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα απλά κάνοντας τις πράξεις (όχι στην περίπτωση απείρου αθροίσματος). Είναι όμως ασύμφορο (όχι μόνο για τον υπολογιστή αλλά και για εμάς)…

- Ο κλειστός τύπος ενός αθροίσματος μας επιτρέπει να βρίσκουμε άμεσα (σε ένα βήμα) την τιμή του αθροίσματος για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής άθροισης. Υπολογιστικά είναι καλύτερος αυτός ο τρόπος

Άθροισμα Γεωμετρικής Σειράς

$$S(k) = x^0 + x^1 + \cdots + x^k$$

$$-xS(k) = -x^1 - x^2 - \cdots - x^{k+1}$$

Πρόσθεση κατά μέλη:

$$S(k) - xS(k) = 1 - x^{k+1} \Rightarrow S(k) = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}$$

Άθροισμα Απείρων Όρων Γεωμετρικής Σειράς

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x^i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x}, x < 1$$

Ο Εισοδηματίας

- Αν του δίνουν 50.000 Ευρώ για 20 χρόνια ή 750.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 766.190. Άρα καλύτερα να τα πάρεις.

- Αν σου δίνουν 50.000 Ευρώ για πάντα ή 2.000.000, τότε:
  - Σε σημερινή αξία θα είναι 1.716.667. Άρα πάρε τα 2.000.000.

Βασικές Ιδιότητες Αθροισμάτων

$$\sum_{k \in K} c a_k = c \sum_{k \in K} a_k$$

Επιμεριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k \in K} (a_k + b_k) = \sum_{k \in K} a_k + \sum_{k \in K} b_k$$

Προσεταιριστική Ιδιότητα

$$\sum_{k \in K} a_k = \sum_{p(k) \in K} a_{p(k)}$$

Μεταθετική Ιδιότητα

Παράδειγμα

Να βρεθεί το άθροισμα: $S_n = \sum_{0 \le k \le n} (a + bk)$

Μεταθετική Ιδιότητα: $S_n = \sum_{0 \le n-k \le n} (a + bn - bk)$

Πρόσθεση των δύο αθροισμάτων (προσεταιριστική): $2S_n = \sum_{0 \le k \le n} (2a + bn)$

Επιμεριστική Ιδιότητα: $S_n = \frac{1}{2}(2a + bn)(n + 1)$

Εξίσωση Αθροίσματος

Ο στόχος είναι να φτάσουμε σε μία μορφή:

$$S_n = f(S_n)$$

Οπότε λύνουμε ως προς S_n και βρίσκουμε τον κλειστό τύπο

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le k \le n} a_{k+1}$$

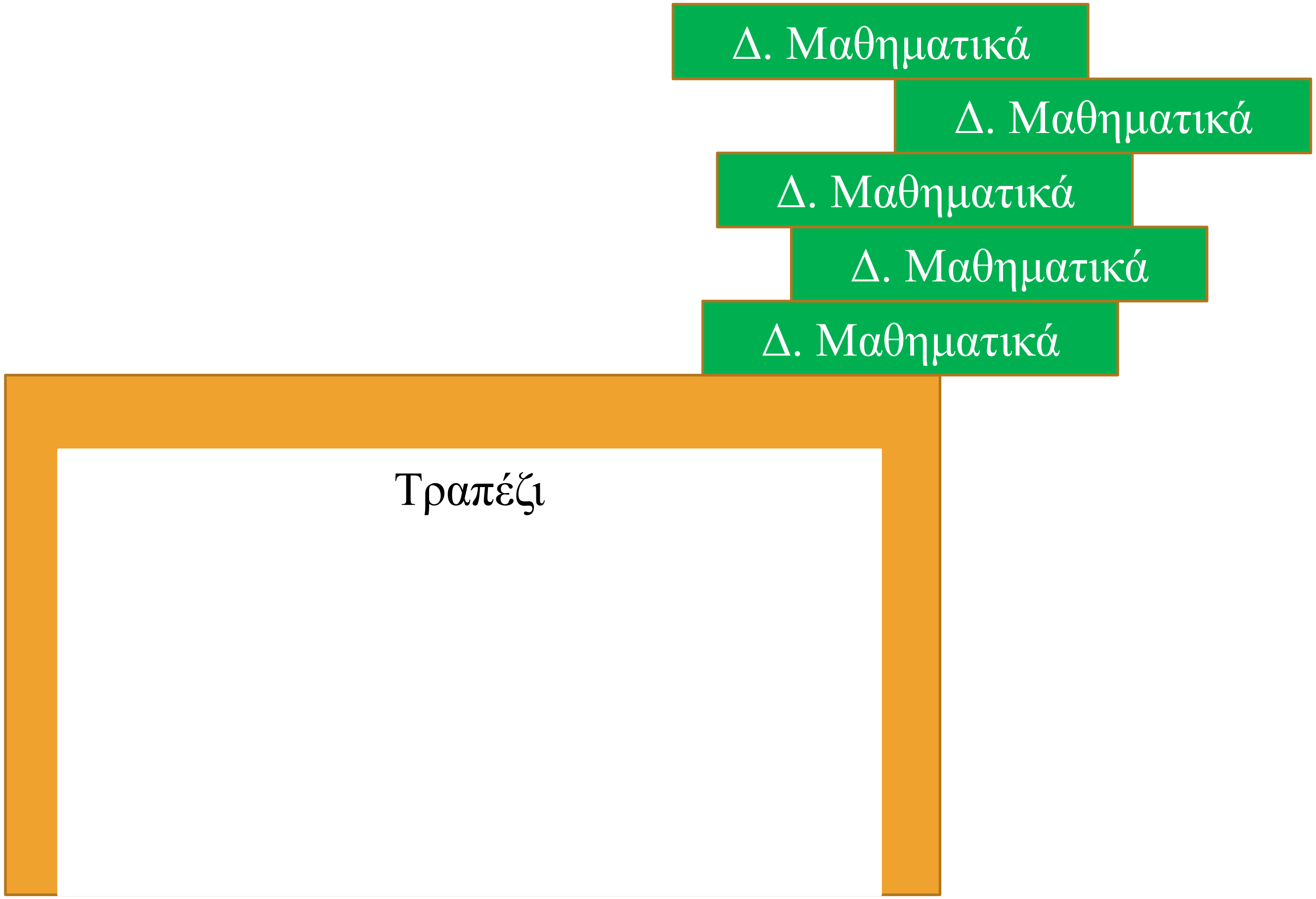
Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{0 \le k \le n} ax^k$$

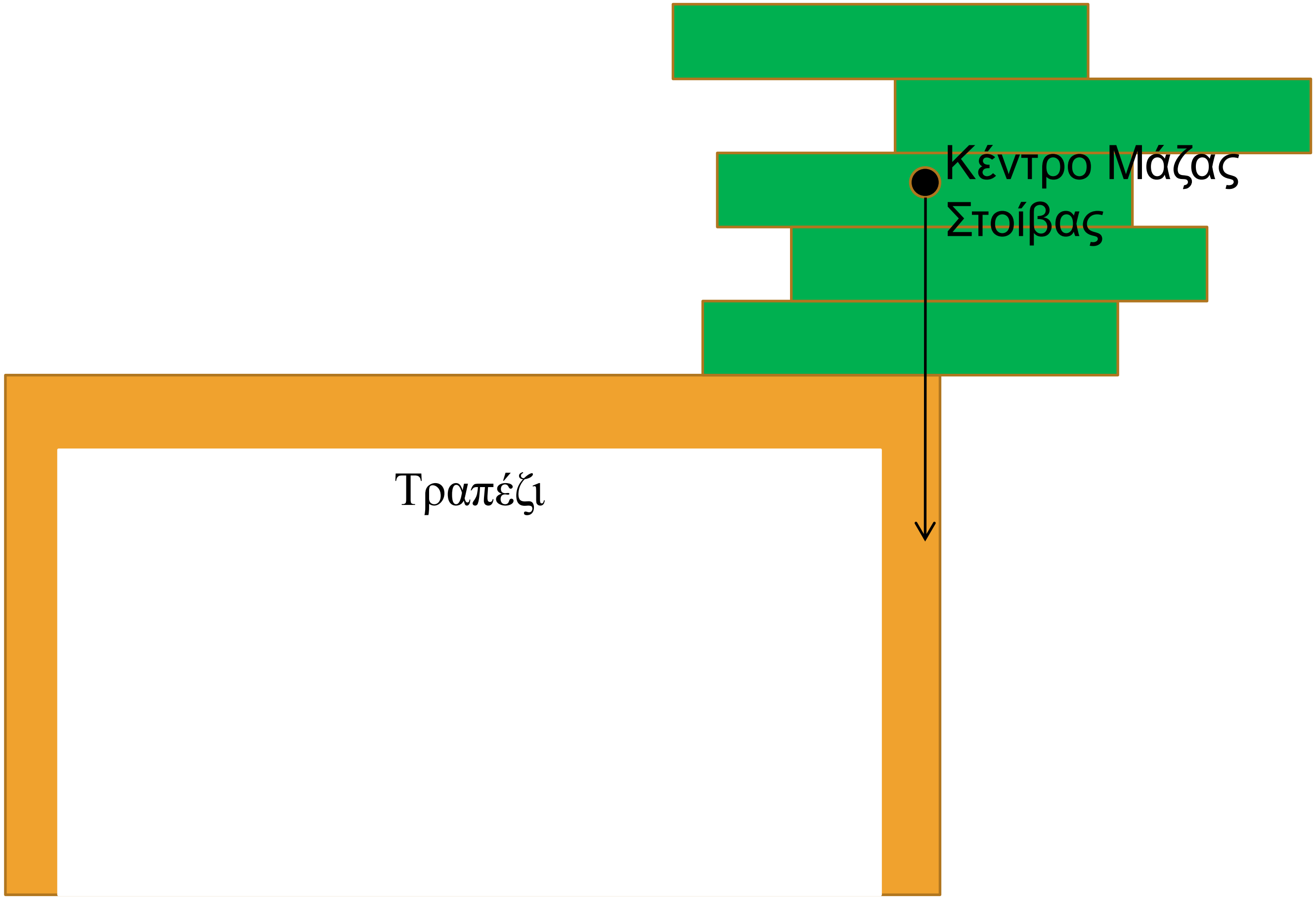
$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + xS_n$$

$$S_n = \frac{a - ax^{n+1}}{1 - x}$$

Στοίβαγμα Βιβλίων

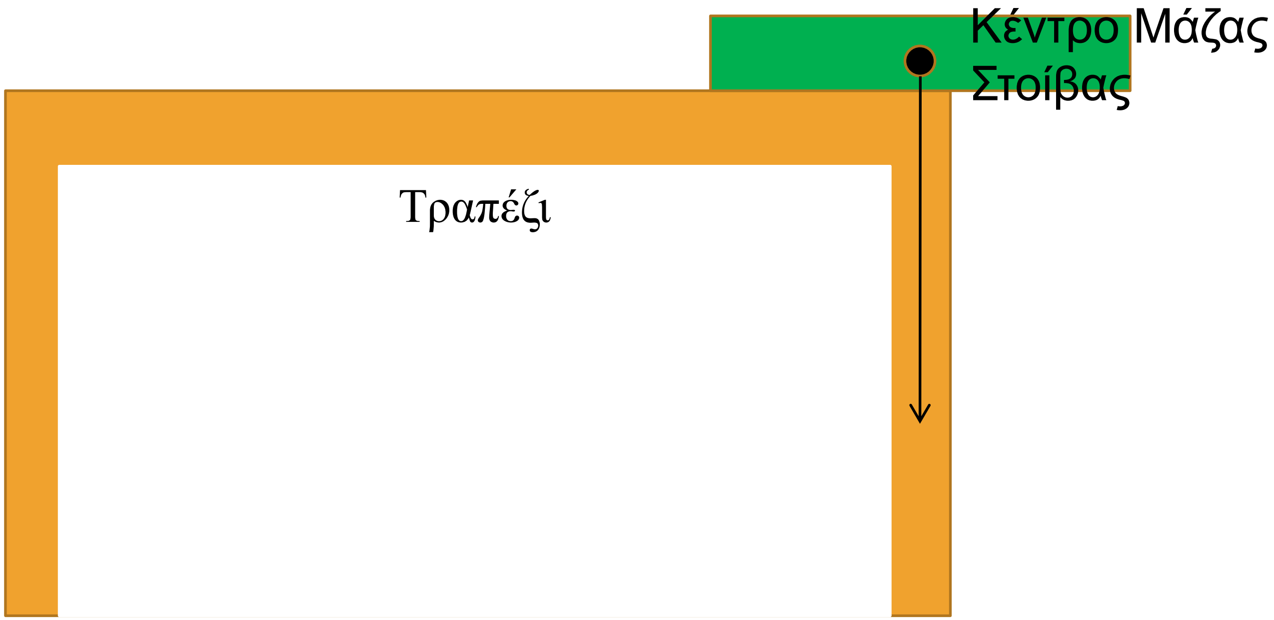


Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας



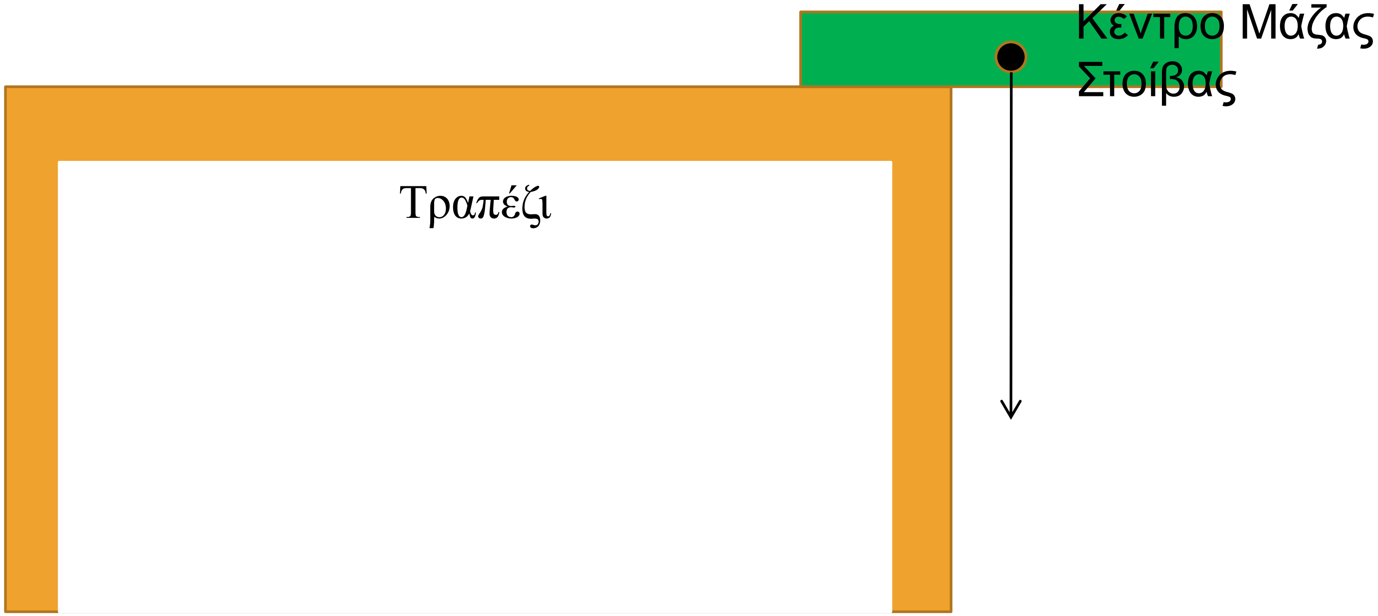
Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εντός του τραπεζιού δεν πέφτει.



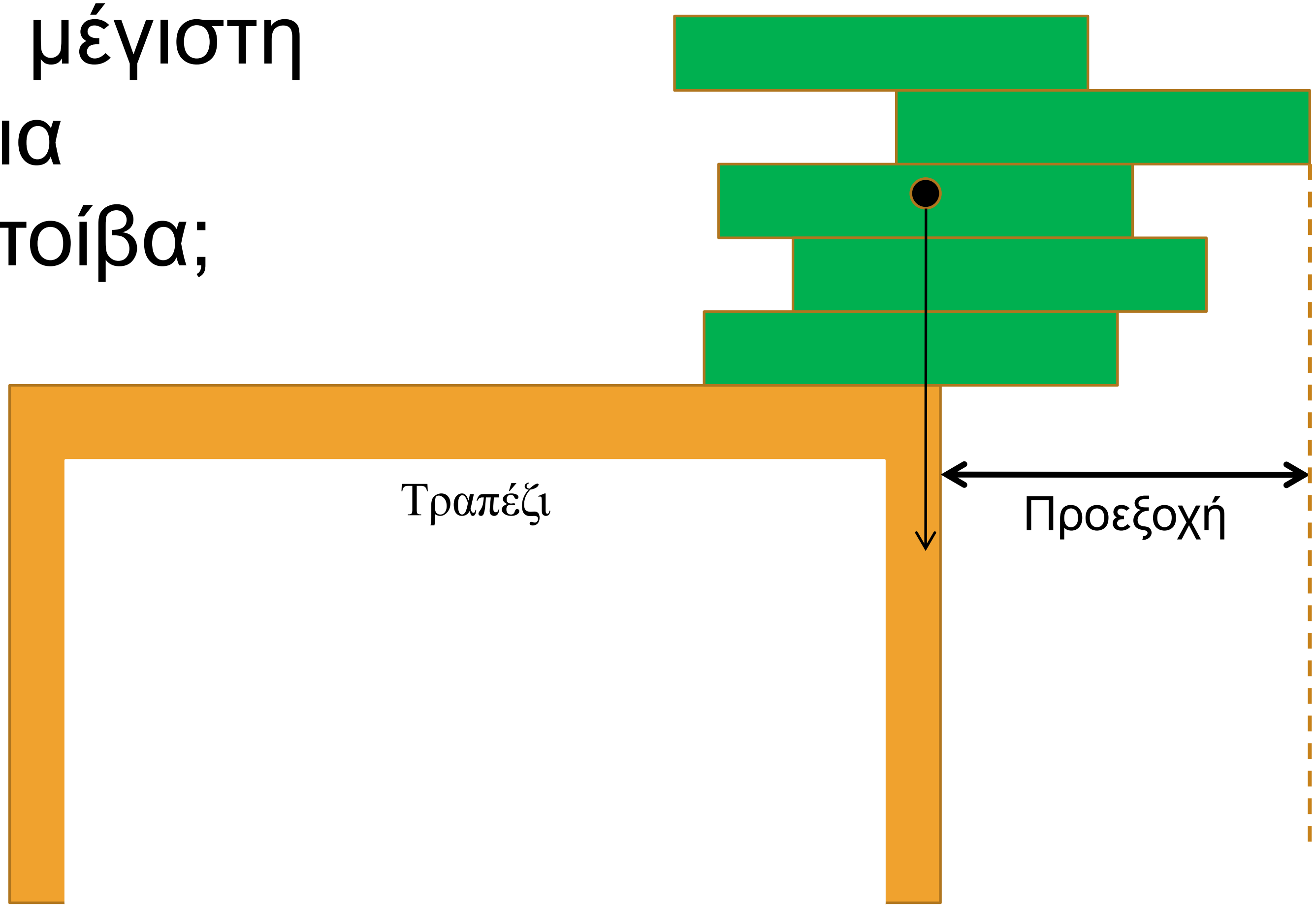
Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

Αν το κέντρο μάζας είναι εκτός του τραπεζιού τότε θα πέσει.



Στοίβαγμα Βιβλίων – Προεξοχή

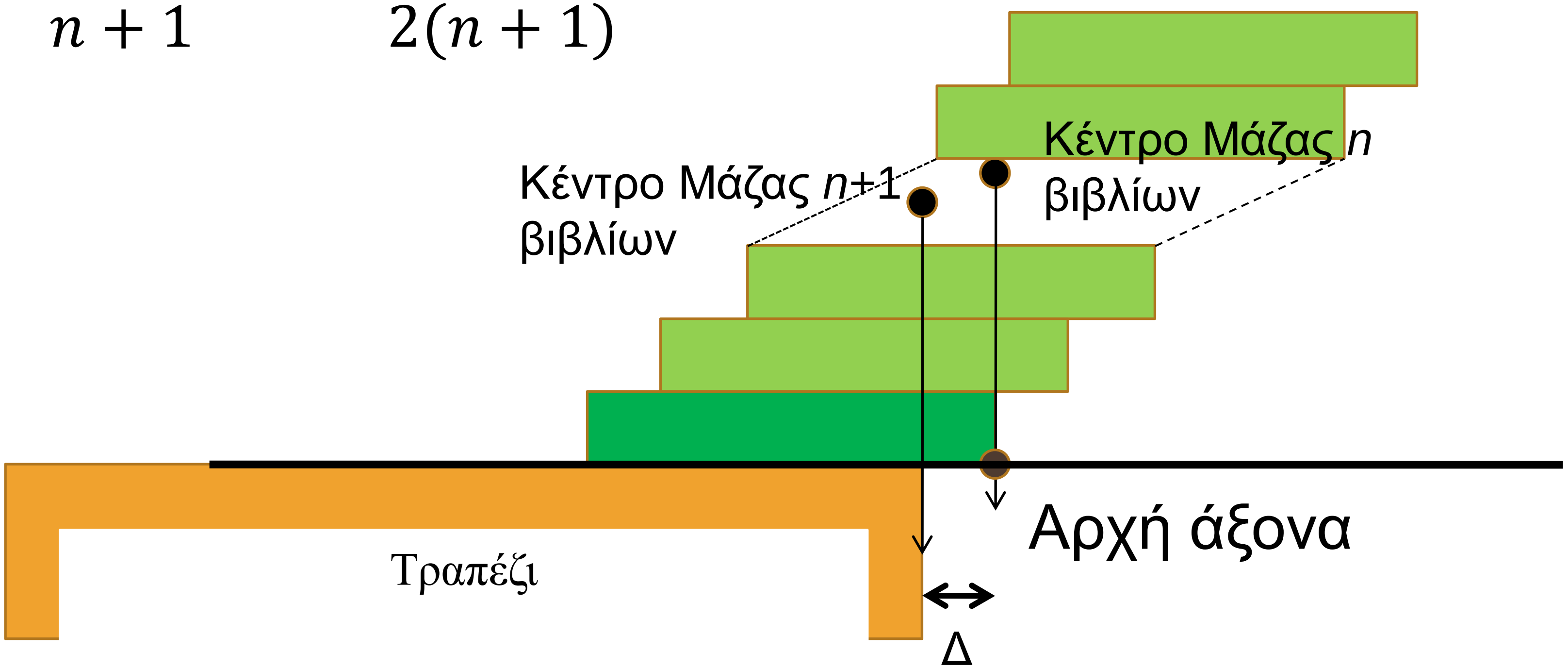
Ποια είναι η μέγιστη προεξοχή για ευσταθής στοίβα;



Στοίβαγμα Βιβλίων – Κέντρο Μάζας

- *Δ* = μεταβολή προεξοχής με την πρόσθεση ενός βιβλίου στα *n* βιβλία
- Συντεταγμένη κέντρου μάζας (*n*+1)-οστού βιβλίου είναι 1/2.

$$\Delta = \frac{0 \cdot n + 1/2 \cdot 1}{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$$



Αναδρομή

Έστω B_n = προεξοχή n βιβλίων.

$$B_1 = \frac{1}{2}$$

$$B_{n+1} = B_n + \frac{1}{2(n+1)}$$

$$B_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)$$

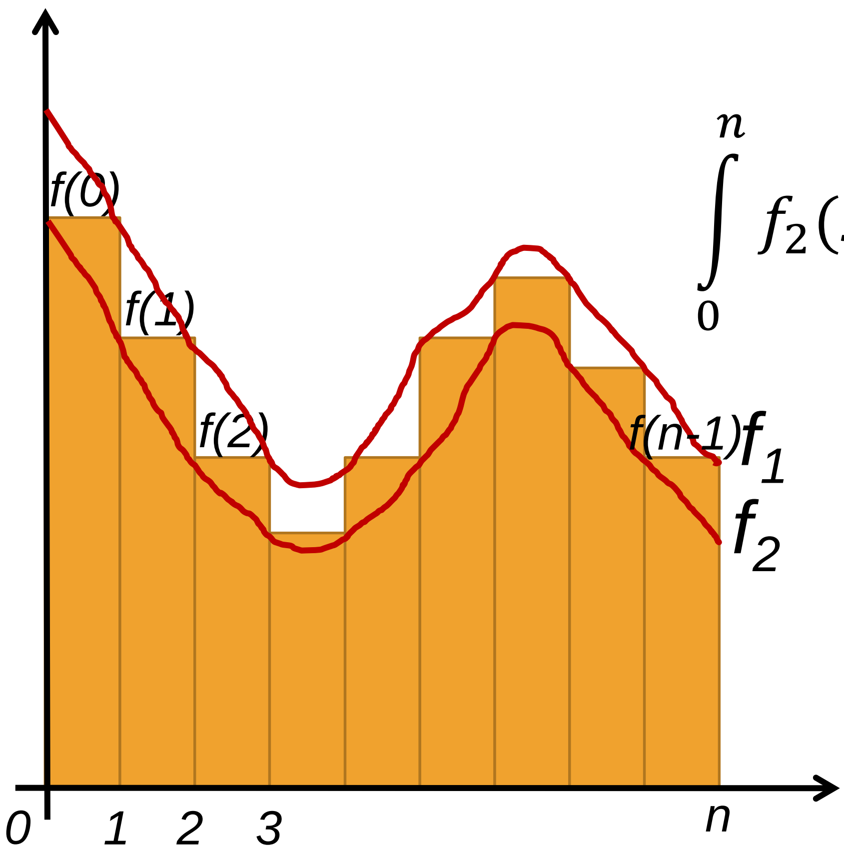
Αρμονικοί Αριθμοί

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

- H_n είναι ο n-οστός αρμονικός αριθμός

- Κλειστός τύπος;;;;;;

Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης



$$S_n = \sum_{0 \leq k < n} f(k)$$

$$\int_0^n f_2(x)dx \leq \sum_{0 \leq k < n} f(k) \leq \int_0^n f_1(x)dx$$

Η Μέθοδος Ολοκλήρωσης

- Για αύξουσες συναρτήσεις:

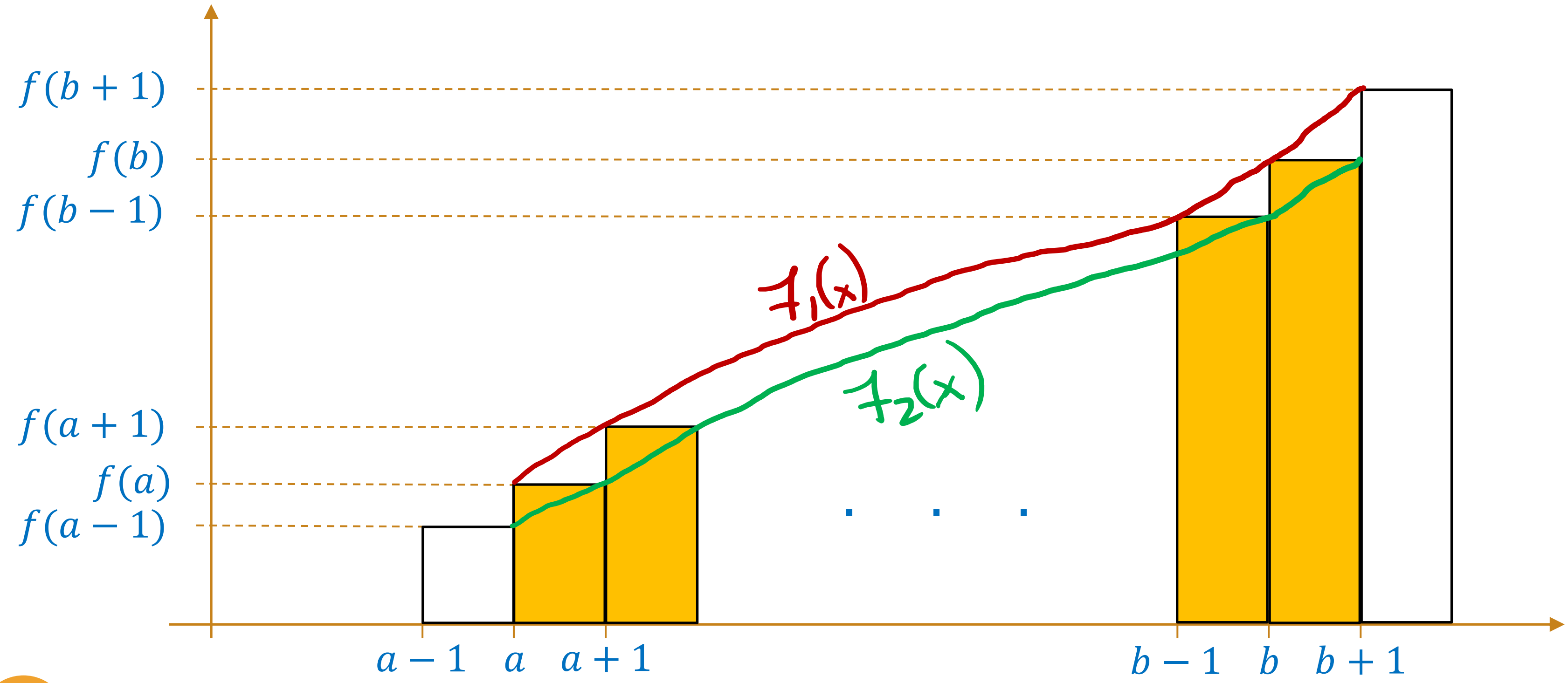
$$\int_{x=a-1}^{b} f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx$$

- Για φθίνουσες συναρτήσεις:

$$\int_{x=a}^{b+1} f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a-1}^{b} f(x)dx$$

Μέθοδος Ολοκλήρωσης: Αύξουσες Συναρτήσεις

$$\int_{x=a-1}^{b} f(x)dx \leq \sum_{a \leq k \leq b} f(k) \leq \int_{x=a}^{b+1} f(x)dx$$



Πίσω στην Στοίβα Βιβλίων

$$\int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq 1 + \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln(n)$$

Για *n* βιβλία η προεξοχή θα είναι τουλάχιστον ln(*n*+1)/2 μήκη βιβλίων συνολικά και (1+ln*n*)/2 το πολύ.

Για προεξοχή ίση με μήκος 10 βιβλίων χρειαζόμαστε τουλάχιστον 22026 βιβλία.

Πρόβλεψη και Απόδειξη με Επαγωγή

- Μαντεύουμε τον κλειστό τύπο
  - Μας δίνει κάποιος τον κλειστό τύπο
  - Τον μαντεύουμε από άλλα παρόμοια αθροίσματα που έχουμε δει
  - Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο ολοκλήρωσης για να μαντέψουμε

- Αποδεικνύουμε με επαγωγή τον κλειστό τύπο

Παράδειγμα

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} i^2$$

1. Προσεγγίζουμε με τη μέθοδο ολοκλήρωσης

$$\frac{n^3}{3} \leq S_n \leq \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{1}{3}$$

2. Θεωρούμε ότι η λύση είναι της μορφής $an^3+ bn^2+ cn+d$. Βάζοντας τιμές παίρνουμε ένα σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους.

3. Αποδεικνύουμε με επαγωγή το αποτέλεσμα (αφού υπάρχει περίπτωση η πρόβλεψη να είναι λάθος). $a=1/3$, $b=1/2$, $c=1/6$, $d=0$.

Τηλεσκοπικές Σειρές

- Αθροίσματα στα οποία οι διαδοχικοί όροι που αθροίζονται αλληλοαναιρούνται:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=$$

$$=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_{n+1}-a_n)=$$

$$=-a_1+(a_2-a_2)+(a_3-a_3)+\cdots+(a_n-a_n)+a_{n+1}=$$

$$=a_{n+1}-a_1$$

Γινόμενα

- Τα γινόμενα τα χειριζόμαστε όπως τα αθροίσματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων.

- Έστω: $P_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$

- Τότε: $S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(a_i)$

Παράδειγμα

$$P_n = \prod_{i=1}^{n} i = n!$$

$$S_n = \ln(P_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$$

- Από τη μέθοδο ολοκλήρωσης:

$$\frac{n^n}{e^{n-1}} \le n! \le \frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

Ο τύπος του Stirling: $n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

Θέμα 14ο: (1 Μονάδα) (2/2/2017)

Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των επιφανειών όλων των απείρων ορθογωνίων με πλευρές $\frac{1}{k}$ και $\frac{1}{k+1}$, όπου $k \geq 1$ είναι ίσο με 1.

Θέμα 13ο: (0,5 Μονάδες) (16/9/2016)

Να υπολογίσετε τον κλειστό τύπο για το γινόμενο $P_n = \prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i$.

Σεπτέμβρης 23 – 1,2 μονάδες (Μεσαία δυσκολία)

Να βρείτε τον κλειστό τύπο του αθροίσματος:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{+\infty} j^{2/3} \left(1 - \frac{1}{2j^{1/3}}\right)^{i}$$

1. Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα $S_n = \sum_{i=0}^{n} i2^i$ με την τεχνική της εξίσωσης αθροίσματος.

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{i=0}^{n} a_{i+1} \Rightarrow$$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 0 + \sum_{i=0}^{n} (i+1)2^{i+1} \Rightarrow$$

Θέλουμε να εκφράσουμε το άθροισμα σαν συνάρτηση του S_n.

$$\sum_{i=0}^{n} (i+1)2^{i+1} = \sum_{i=0}^{n} i2^{i+1} + \sum_{i=0}^{n} 2^{i+1} =$$

$$2\sum_{i=0}^{n} i2^i + 2\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2S_n + 2^{n+2} - 2$$

Επομένως έχουμε:

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2^{n+2} - 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n+1)2^{n+1} - 2^{n+2} + 2 \Rightarrow$$

$$S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

2. Άθροισμα

Ξεκινάμε με δύο μεγάλα ποτήρια, όπου το πρώτο περιέχει 500 ml νερού και το δεύτερο 500ml κρασιού. Χύνουμε το 1/3 της ποσότητας του πρώτου ποτηριού στο δεύτερο και έπειτα αφού το ανακατώσουμε καλά ρίχνουμε μία ποσότητα υγρού από το δεύτερο ποτήρι στο πρώτο ώστε και τα δύο ποτήρια να έχουν 500ml υγρού. Αυτή την διαδικασία την επαναλαμβάνουμε *n* φορές.

Α) Έστω ότι το πρώτο ποτήρι έχει w ml κρασί.

Β) Δώστε έναν κλειστό τύπο όσον αφορά την ποσότητα κρασιού στο πρώτο ποτήρι έπειτα από *n* επαναλήψεις.

Γ) Ποια είναι η ποσότητα του κρασιού σε κάθε ποτήρι καθώς το *n* τείνει στο άπειρο;

Α) Έστω ότι στην αρχή ενός γύρου το πρώτο ποτήρι περιέχει $0 \leq w \leq 1$ (500w ml) κρασί και $1-w$ νερό. Αντίστοιχα στο δεύτερο ποτήρι.

Όταν χύνουμε 1/3 από το πρώτο ποτήρι στο δεύτερο, τότε το πρώτο ποτήρι περιέχει 2/3 υγρό και $2/3w$ κρασί ενώ το δεύτερο ποτήρι περιέχει $4/3w$ υγρό και $1-(2/3)w$ κρασί. Χύνοντας από το δεύτερο στο πρώτο ποτήρι μεταφέρουμε το (1/3)(4/3) του κρασιού από το δεύτερο στο πρώτο. Επομένως, μετά το τέλος του γύρου και τα δύο ποτήρια περιέχουν 500ml υγρού ενώ το πρώτο ποτήρι περιέχει κρασί

$$\frac{2}{3}w + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{2}{3}w\right) = \frac{1}{4} + \frac{w}{2}$$

Έπειτα από ακόμα έναν γύρο το πρώτο ποτήρι περιέχει:

$$\frac{2}{4} + \frac{\left(\frac{1}{4} + \frac{w}{2}\right)}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{w}{2^2}$$

Έπειτα από *n* γύρους:

$$\frac{w}{2^n} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \frac{w}{2^n} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{i} = \frac{w}{2^n} + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Αφού w=0 αρχικά το κρασί στο πρώτο ποτήρι, έπειτα από *n* γύρους είναι

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Β)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2}$$

3. Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{k=1}^{n}\left((2k-1)+2\sum_{j=1}^{k-1}(2j-1)\right)=$

$$=\sum_{k=1}^{n}\left((2k-1)+2(k-1)^2\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-2k+1)$$

$$=2\sum_{k=1}^{n}k^2-2\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=2\frac{n\left(n+\frac{1}{2}\right)(n+1)}{3}-2\frac{n(n+1)}{2}+n=\frac{2n^3+n}{3}$$

4. Διπλό Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{k=1}^{n}H_k=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}=\sum_{1\le i\le k\le n}\frac{1}{i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=i}^{n}1=\sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i+1)}{i}=n\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}$$

$$=nH_n-n+H_n=(n+1)H_n-n$$

5. Διπλό Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}3^{i+j}$

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}3^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}3^i\sum_{j=0}^{m}3^j=\left(\sum_{i=0}^{n}3^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m}3^j\right)=\frac{3^{n+1}-1}{2}\frac{3^{m+1}-1}{2}$$

6. Άθροισμα

Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=n+1}^{2n} i^2$

$$\sum_{i=n+1}^{2n} i^2 = \sum_{i=0}^{2n} i^2 - \sum_{i=0}^{n} i^2 = \cdots =$$

7. Άθροισμα

Μία κατσαρίδα είναι στην άκρη ενός ελαστικού χαλιού με μήκος 1 μέτρο. Η κατσαρίδα θέλει να διασχίσει το χαλί και το κάνει με ταχύτητα 1 εκατοστό ανά δευτερόλεπτο. Όμως στο τέλος κάθε δευτερολέπτου ένα μικρό παιδάκι επιμηκύνει το χαλί τραβώντας το και από τις δύο άκρες κατά 1 μέτρο. Έστω ότι αυτή η επιμήκυνση είναι στιγμιαία και το χαλί επιμηκύνεται ομοιόμορφα. Στα πρώτα δευτερόλεπτα συμβαίνουν τα εξής:

- Η κατσαρίδα διανύει 1 εκατοστό και έχει να διανύσει ακόμα 99 εκατοστά.
- Το παιδί επιμηκύνει το χαλί κατά 1 μέτρο, άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 2 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 198 εκατοστά.
- Η κατσαρίδα διανύει άλλο ένα εκατοστό και άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 3 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 197 εκατοστά.
- Το παιδί επιμηκύνει το χαλί κατά 1 μέτρο (3 μέτρα συνολικά), άρα πίσω από τη κατσαρίδα υπάρχουν 3*3/2=4,5 εκατοστά χαλιού και μπροστά της 295,5 εκατοστά.
- κοκ

Η δουλειά μας θα είναι να βρούμε τι θα γίνει με την κατσαρίδα. Θα μπορέσει να διασχίσει το χαλί ή όχι;

1. Κατά τη διάρκεια του δευτερολέπτου *i* τι κλάσμα του χαλιού διανύει η κατσαρίδα;
2. Κατά τη διάρκεια των πρώτων *n* δευτερολέπτων τι κλάσμα του χαλιού έχει διανύσει η κατσαρίδα;
3. Πόσο περίπου χρόνο χρειάζεται η κατσαρίδα για να διανύσει το χαλί (αν το διανύσει)

1. Κατά τη διάρκεια του i-οστού δευτερολέπτου το μήκος του χαλιού είναι $100i$ εκατοστά και η κατσαρίδα διανύει 1 εκατοστό. Άρα το κλάσμα του χαλιού που διανύει η κατσαρίδα είναι $1/100i$.
2. Η κατσαρίδα διανύει το 1/100 του χαλιού το πρώτο δευτερόλεπτο, το 1/200 το δεύτερο δευτερόλεπτο κοκ. Άρα για τα *n* πρώτα δευτερόλεπτα, το κλάσμα του χαλιού που έχει διανύσει η κατσαρίδα είναι:
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{100k} = \frac{H_n}{100}$$
3. Η κατσαρίδα φτάνει στην άκρη του χαλιού όταν το κλάσμα είναι ίσο με 1. Αυτό συμβαίνει όταν το *n* είναι αρκετά μεγάλο ώστε $\frac{H_n}{100} \geq 1$. Αφού $H_n \approx ln n$ παίρνουμε:

$$\frac{lnn}{100} \geq 1 \Rightarrow lnn \geq 100 \Rightarrow n \geq e^{100} \approx 10^{43}$$

8. Άθροισμα

Να υπολογίσετε (έστω και προσεγγιστικά) το άθροισμα: $S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$. Τι γίνεται όταν το n τείνει στο άπειρο;

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Η f είναι φθίνουσα και άρα:

$$\int_{x=1}^{n+1} \frac{1}{x^2} \leq S \leq 1 + \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x^2}$$

$$1 - \frac{1}{n+1} \leq S \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Θα μπορούσαμε να παίρναμε μία ακόμα καλύτερη προσέγγιση αν υπολογίζαμε κάποιους όρους του αθροίσματος και ολοκληρώναμε το υπόλοιπο.

$$s = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} = \frac{49}{36}$$

$$\int_{x=4}^{n+1} \frac{1}{x^2} \leq S - s \leq \int_{x=3}^{n} \frac{1}{x^2} \Rightarrow$$

$$\frac{58}{36} - \frac{1}{n+1} \leq S \leq \frac{61}{36} - \frac{1}{n}$$

Άρα για n τείνει στο άπειρο παίρνουμε:

$$\frac{58}{36} \leq \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots \leq \frac{61}{36}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι αρκετά καλή αφού τα δύο φράγματα διαφέρουν κατά 1/12. Η ακριβής τιμή του παραπάνω αθροίσματος είναι $\frac{\pi^2}{6}$, αλλά η απόδειξη είναι αρκετά πολύπλοκη.

9. Άθροισμα

Η συνάρτηση Ζήτα *ζ(k)* του Riemann ορίζεται ως εξής: $\zeta(k) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^k}$. Να δείξετε ότι

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)=1$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}(\zeta(k)-1)=\sum_{k=2}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^k}-1\right)$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^k}$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{j^k}$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{j^k}$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j^2}\frac{1}{1-1/j}$$

$$=\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j(j-1)}=\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=2}^{n}\left(\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

10. Γινόμενο

Να δείξετε ότι $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}$

Το συγκεκριμένο γινόμενο γίνεται ως εξής:

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)=\frac{1}{n}$$

αφού οι όροι ακυρώνονται μεταξύ τους.

11. Ασυμπτωτικές Εκτιμήσεις

Να δειχτεί ότι αν $f_1=O(g_1)$ και $f_2=O(g_2)$ τότε $f_1+f_2=O(g_1+g_2)$

Έστω ότι $f_1(x)\leq c_1g_1(x)$ και $f_2(x)\leq c_2g_2(x)$. Τότε:

$$f_1(x) + f_2(x) \leq c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) \leq c\big(g_1(x) + g_2(x)\big)$$

όπου $c = \max\{c_1, c_1\}$.

12. Ασυμπτωτικές Εκτιμήσεις

Να δείξετε αν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$2^n = O\left(2^{\frac{n}{2}}\right)$, δεν ισχύει. Απόδειξη δια της ατόπου επαγωγής.

$n^k = O(c^n)$, ισχύει αφού έχουμε πολυωνυμική αύξηση αριστερά και εκθετική δεξιά.

$log^k n = O(n^\varepsilon)$, ισχύει αφού έχουμε πολυλογαριθμική αύξηση αριστερά και πολυωνυμική δεξιά.

$logn! = O(logn^n)$, από τον τύπο του Stirling προκύπτει:

$$logn! = log\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \pm c_n = logn + n(logn - 1) \pm d_n = O(nlogn) = O(logn^n)$$

Άλυτες Ασκήσεις

1. Ένα φορτηγό θέλει να διασχίσει μία έρημο. Δυστυχώς δεν υπάρχει βενζινάδικο στην έρημο και αν γεμίσει το ρεζερβουάρ δεν φτάνει να την διασχίσει. Αν θεωρήσουμε ότι στην άκρη της ερήμου υπάρχει βενζινάδικο όπου το φορτηγό μπορεί να γεμίζει όσες φορές θέλει και ότι το φορτηγό μπορεί να αποθηκεύει βενζίνη μέσα στην έρημο, να κάνετε τα εξής:
    a. Να βρείτε μία διαδικασία με την οποία το φορτηγό ενδεχομένως να μπορεί να περάσει την έρημο.
    b. Να αποδείξετε ότι μπορεί να περάσει οποιαδήποτε έρημο ανεξαρτήτως μήκους.

2. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{i=0}^{n} \frac{9^i - 7^i}{11^i}$

3. Να υπολογιστεί το άθροισμα: $\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{\infty} \left(j^{5/3}\left(1 - \frac{1}{2j^{1/3}}\right)^i\right)$

4. (Concrete 2.37) Μπορούν όλα τα ορθογώνια με πλευρές 1/κ και 1/(κ+1) – για κ τείνει στο άπειρο – να χωρέσουν σε ένα τετράγωνο με μήκος πλευράς 1. (υπόδειξη: αποδείξτε πρώτα ότι η επιφάνειά τους συνολικά τείνει στο 1). Έπειτα δείξτε ότι χωράνε.

5. (Concrete 2.35) Να αποδείξετε το θεώρημα του Goldbach σύμφωνα με το οποίο
$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \cdots = \sum_{k \in P} \frac{1}{k-1}$$
όπου P είναι το σύνολο των τέλειων δυνάμεων το οποίο ορίζεται ως εξής:
$$P = \{m^n : m \geq 2, n \geq 2, m \notin P\}$$

6. Να βρείτε κλειστό τύπο για τα παρακάτω αθροίσματα-γινόμενα:
   a. $\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{j+2}\right)^i$
   b. $\prod_{i=1}^{n} 2 \cdot 4^i$

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ Ι: Βασικές Αρχές

Αρίθμηση

- ***Αρίθμηση*** (counting): διαδικασία εύρεσης του αριθμού των στοιχείων ενός πεπερασμένου συνόλου
- Μικρά σε πλήθος σύνολα: καταμέτρηση στοιχείων ένα προς ένα
- Στην καθημερινή πρακτική: καταμέτρηση αδύνατη (π.χ. τυχερά παιχνίδια, σκάκι, προγραμματισμός ενεργειών, κλπ)

Παραδείγματα στην πληροφορική

- Η πολυπλοκότητα και η αποδοτικότητα των αλγορίθμων εκτιμάται από τον αριθμό συγκεκριμένων διαδικασιών που εκτελούνται
- Ο σχεδιασμός κυκλωμάτων απαιτεί αρίθμηση των δυνατών περιπτώσεων δεδομένων – αποτελεσμάτων
- Η διαχείριση των δεδομένων εξαρτάται άμεσα από την αρίθμηση τους

Άλλα Παραδείγματα

- Θεωρία Γραφημάτων – Πλήθος ζευγαριών
- Πόσες διαφορετικές θέσεις υπάρχουν στον κύβο του Rubik?
- Πόσα διαφορετικά παιχνίδια σκάκι μπορούν να γίνουν?
- Υπολογισμός πιθανοτήτων για γεγονότα

Μαθηματικές τεχνικές

- ***Συνδυαστική ανάλυση*** (combinatorics):

  Μαθηματική περιοχή που ασχολείται με τη

  διάταξη, την επιλογή και τις πράξεις

  στοιχείων ***πεπερασμένων συνόλων***

Για να πάρετε μία ιδέα…

2048013538550296444 8038	3171004832173501394113017	5763257331083479647409398	8247331000042995311646021
4894459918669156762409 92	3208234421597368647019265	5800949123548989122628663	8496243997123475922766310
1082662032430379651370981	3437254656355157864869113	6042900801199280218026001	8518399140676002660747477
1178480894769706178994993	3574883393058653923711365	6116171789137737896701405	8543691283470191452333763
1253127351683239693851327	3644909946040480189969149	6144868973001582369723512	8675309258374137092461352
1301505129234077811069011	3790044132737084094417246	6247314593851169234746152	8694321112363996867296665
1311567111143866433882194	3870332127437971355322815	6814428944266874963488274	8772321203608477245851154
1470029452721203587686214	4080505804577801451363100	6870852945543886849147881	8791422161722582546341091
1578271047286257499433886	4167283461025702348124920	6914955508120950093732397	9062628024592126283973285
1638243921852176243192354	4235996831123777788211249	6949632451365987152423541	9137845566925526349897794
1763580219131985963102365	4670939445749439042111220	7128211143613619828415650	9153762966803189291934419
1826227795601842231029694	4815379351865384279613427	7173920083651862307925394	9270880194077636406984249
1843971862675102037201420	4837052948212922604442190	7215654874211755676220587	9324301480722103490379204
2396951193722134526177237	5106389423855018550671530	7256932847164391040233050	9436090832146695147140581
2781394568268599801096354	5142368192004769218069910	7332822657075235431620317	9475308159734538249013238
2796605196713610405408019	5181234096130144084041856	7426441829541573444964139	9492376623917486974923202
2931016394761975263190347	5198267398125617994391348	7632198126531809327186321	9511972558779880288252979
2933458058294405155197296	5317592940316231219758372	7712154432211912882310511	9602413424619187112552264
3075514410490975920315348	5384358126771794128356947	7858918664240262356610010	9631217114906129219461111
3111474985252793452860017	5439211712248901995423441	7898156786763212963178679	9908189853102753335981319
3145621587936120118438701	5610379826092838192760458	8147591017037573337848616	9913237476341764299813987
3148901255628881103198549	5632317555465228677676044	8149436716871371161932035	
3157693105325111284321993	5692168374637019617423712	8176063831682536571306791	

- Μπορείτε να βρείτε δύο υποσύνολα των συγκεκριμένων 90 αριθμών με 25 ψηφία έτσι ώστε το άθροισμα των στοιχείων τους να είναι ίσο;
  - Αν υπάρχει μπορούμε να το επαληθεύσουμε αλλά δεν μπορούμε να το βρούμε …
  - **50 Ευρώ σε όποιον το καταφέρει μέχρι τις εξετάσεις…**

Ένα Κόλπο με Τράπουλα

Ένας μάγος με τον βοηθό του κάνουν το εξής κόλπο στο κοινό:

- Ο βοηθός δίνει μία τράπουλα (52 φύλλα) σε κάποιον από το κοινό για να επιλέξει με τυχαίο τρόπο 5 φύλλα.
- Ο βοηθός έπειτα θα δείξει τα 4 από τα 5 φύλλα και ο μάγος θα βρει το 5^{ο}.

- Είναι μαγεία η αριθμητική; Τι κάνει ο βοηθός;

Βασικές αρχές συνδυαστικής

- ***Πεπερασμένο*** (finite) σύνολο S: αν υπάρχει αριθμός $n \in \mathbf{N}$ τέτοιος ώστε να είναι δυνατός ο ορισμός συνάρτησης f ένα προς ένα και επί από το σύνολο $\{1,2,\ldots,n\}$ στο σύνολο S
- ***Πληθικός αριθμός*** (cardinality) του S: Ο αριθμός n
- Συμβολισμός:

$$|S| = n$$

- "το S είναι ένα ***n-σύνολο***"

Η Αρχή της Αντιστοιχίας

- Αν δύο πεπερασμένα σύνολα μπορούν να αντιστοιχηθούν με μία συνάρτηση 1-1 και επί τότε τα σύνολα έχουν ίδιο μέγεθος.

Μία από τις πιο σημαντικές μαθηματικές ιδέες όλων των εποχών!

Αντιστοίχηση άγνωστου προβλήματος αρίθμησης σε γνωστό και μέτρηση

Παράδειγμα

A = επιλογή 12 ντόνατς από 5 είδη
B = ακολουθίες 16 bits με τέσσερις 1

00	1	1	00000	1	000	1	00	
2	0		5		3		2	
Σοκ.	Φρ.		Βερ.		Μήλο		Πορτ.	

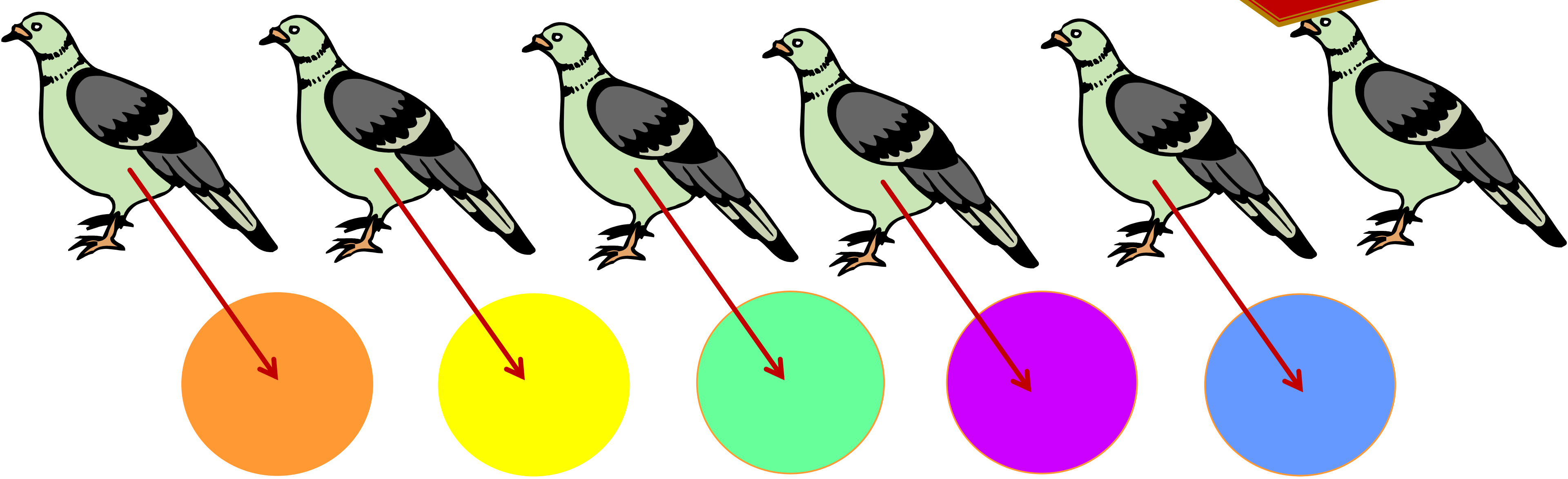
Με τέσσερις 1 χωρίζουμε τα 0 μεταξύ τους. Άρα B.

Η Αρχή των Περιστερώνων

- Αν βάλετε 6 περιστέρια σε 5 περιστερώνες τότε τουλάχιστον ένας περιστερώνας θα περιέχει παραπάνω από 1 περιστέρι

Γουάου – Τι είπες ρε φίλε!!!!

Ή απλά θα ζήσει ελεύθερο!!!



Πρόβλημα 1

- 15 τουρίστες προσπαθούν να ανέβουν τα Μετέωρα. Ο μεγαλύτερος είναι 33 και ο νεότερος είναι 20. Να δείξετε ότι 2 τουρίστες τουλάχιστον έχουν ίδια ηλικία.

Πρόβλημα 2

-1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	1	1	1	-1

- Ο μάγος είπε στην Αλίκη ότι θα την βοηθήσει να πάει σπίτι αν μπορούσε να φτιάξει ένα μαγικό 6x6 τετράγωνο με κελιά με τιμές “+1” ή “-1”, έτσι ώστε όλες οι κάθετες, οριζόντιες και διαγώνιες να έχουν διαφορετικό άθροισμα.

- Αποδείξτε ότι ο μάγος δεν θα βοηθήσει την Αλίκη αφού δεν υπάρχει τέτοιο τετράγωνο.

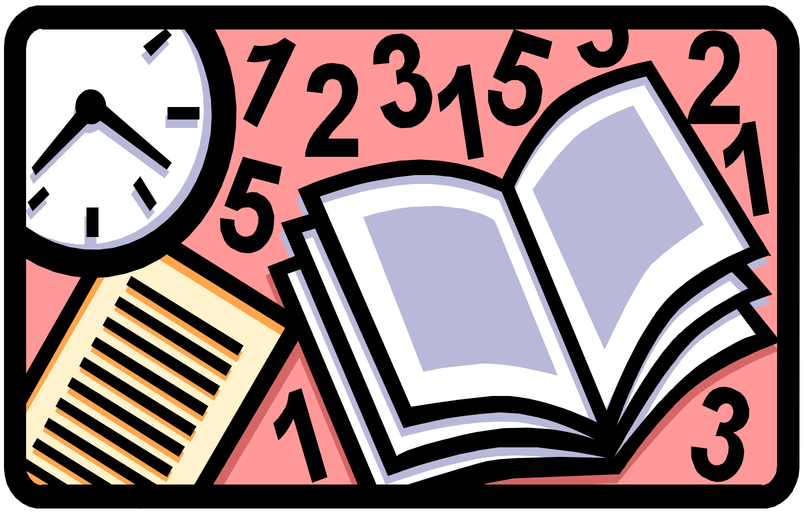
Πρόβλημα 3

- Υπάρχουν 380 φοιτητές στη σχολή μαγείας.
- Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο φοιτητές που έχουν ίδια γενέθλια.

Πρόβλημα 4

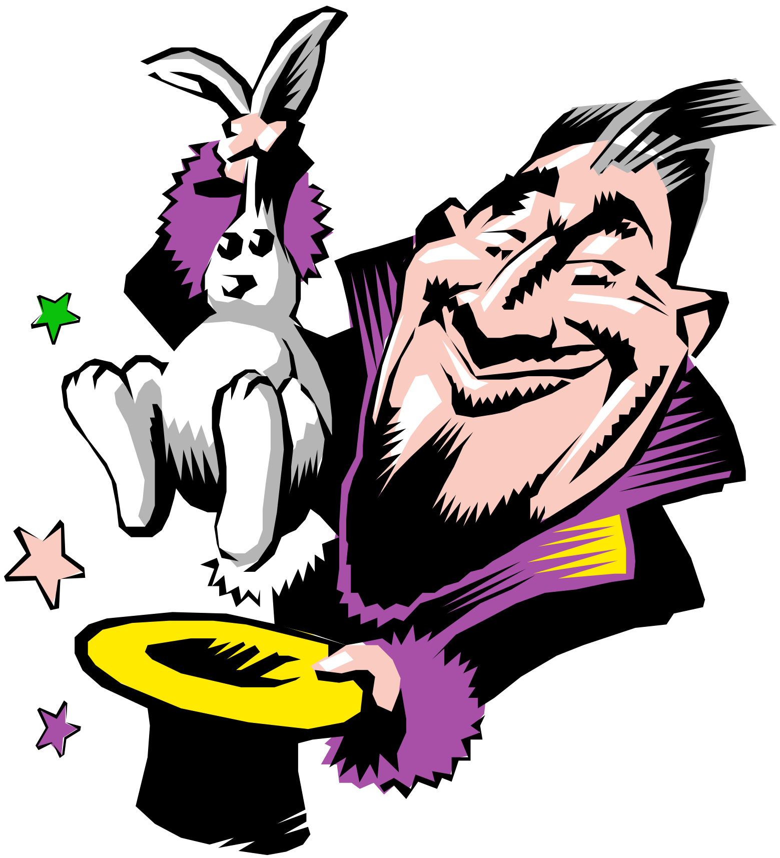
- 65 φοιτητές έγραψαν τρία διαγωνίσματα. Οι πιθανοί βαθμοί είναι: A, B, C και D.
- Αποδείξτε ότι υπάρχουν τουλάχιστον δύο φοιτητές που έγραψαν ίδιους βαθμούς και στα τρία διαγωνίσματα.

Πρόβλημα 6



- Ένας μαθητής επιλέγει 52 φυσικούς αριθμούς. Αποδείξτε ότι μπορούμε να επιλέξουμε δύο αριθμούς από αυτή τη λίστα έτσι ώστε είτε το άθροισμά τους ή η διαφορά τους να διαιρείται από το 100.

Πρόβλημα 7



- Ο Γιάννης έχει 30 κάλτσες σε ένα κουτί: 10 άσπρες, 10 κόκκινες και 10 μαύρες. Πόσες κάλτσες πρέπει να τραβήξει τουλάχιστον χωρίς να κοιτάζει ώστε:

1) Δύο κάλτσες να έχουν το ίδιο χρώμα
2) Να τραβήξει δύο μαύρες κάλτσες
3) Δύο διαφορετικές κάλτσες

Γενικευμένη Αρχή Περιστερώνων

- Αν N αντικείμενα τοποθετηθούν σε k κουτιά, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα κουτί που περιέχει τουλάχιστον $\lceil N/k \rceil$ αντικείμενα
- Παράδειγμα:
  - Μεταξύ 100 ανθρώπων υπάρχουν τουλάχιστον $\lceil 100/12 \rceil = 9$ που γεννήθηκαν τον ίδιο μήνα.
  - Ποιός είναι ο ελάχιστος αριθμός φοιτητών σε μία τάξη έτσι ώστε να είμαστε σίγουροι ότι τουλάχιστον 6 θα πάρουν τον ίδιο βαθμό (5 επιλογές βαθμού:A,B,C,D,F)
    - Μικρότερος ακέραιος N ώστε $\lceil N/5 \rceil = 6$, $5*5+1 = 26$

Αρχή του Γινομένου

Αρχή του γινομένου (rule of product): Αν S και T είναι σύνολα τέτοια ώστε:

$$|S| = m, \quad |T| = n,$$

τότε ισχύει:

$$|S \times T| = m \cdot n$$

Γενίκευση

Γενίκευση: Αν $|B_i| = m_i,\ i = 1,2,\dots,k$

τότε

$$|B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_k| = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$$

$$= \prod_{i=1}^{k} m_i$$

Αν $B_1 = \cdots = B_k = B$, τότε $\left|B^k\right| = |B|^k$

Παράδειγμα

Πόσοι αριθμοί μεταξύ 100 και 1000 έχουν τρία διαφορετικά περιττά ψηφία (π.χ. 153 ναι, 133 όχι).

Για το πρώτο ψηφίο έχουμε 5 επιλογές από {1,3,5,7,9}. Για το δεύτερο έχουμε 4 επιλογές από το σύνολο {1,3,5,7,9} με αφαίρεση της 1ης επιλογής. Αντίστοιχα για το τρίτο ψηφίο έχουμε 3. Άρα: $5\times4\times3=60$ αριθμοί

Αρχή του Αθροίσματος

Αρχή του αθροίσματος (rule of sum):

Αν S και T είναι σύνολα τέτοια ώστε:

$$|S| = m, \qquad |T| = n, \qquad \text{και} \qquad S \cap T = \varnothing,$$

τότε ισχύει:

$$|S \cup T| = m + n$$

Γενίκευση

Γενίκευση:

Αν τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_k$ αποτελούν διαμέριση του συνόλου M και $|A_i| = m_i$, $i = 1,2,\ldots,k$, τότε ισχύει

$$|M| = \sum_{i=1}^{k} m_i \,.$$

Παράδειγμα

Με πόσους τρόπους μπορεί κάποιος να κερδίσει όταν ρίχνει με τρία διαφορετικά μεταξύ τους ζάρια και κερδίζει αν φέρει διπλές ή τριπλές;

Αποτελέσματα ρίψης: {1,2,3,4,5,6}.
Δυνατές περιπτώσεις: XXY, XYX, YXX, XXX

$6\times5+ 6\times5+ 6\times5+6=96$ περιπτώσεις να κερδίσεις

Εγκλεισμός – Αποκλεισμός

Αρχή εγκλεισμού και αποκλεισμού (principle of inclusion and exclusion):

Για δύο οποιαδήποτε πεπερασμένα σύνολα S και T ισχύει:

$$|S \cup T| = |S| + |T| - |S \cap T|$$

Γενίκευση

Γενίκευση για n σύνολα $S_1, S_2, \dots, S_n$:

$$\left|S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|S_i\right| - \sum_{1\le i<j\le n}\left|S_i \cap S_j\right| + \cdots +$$

$$+(-1)^{k+1}\sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_k\le n}\left|S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \cdots \cap S_{i_k}\right| + \cdots +$$

$$+(-1)^{n+1}\left|S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n\right|$$

Παράδειγμα

Να βρείτε το πλήθος των χαρτιών μίας τράπουλας που είναι είτε σπαθιά ή άσσοι.

A = σπαθιά, |A| = 13
B = άσσοι, |B| = 4
$|A \cap B| = 1$

Άρα: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 13 + 4 - 1 = 16$

Θεμελιώδης Αρχή Απαρίθμησης

Θεμελιώδης αρχή της αρίθμησης:

Αν ένα γεγονός μπορεί να συμβεί σε k ανεξάρτητα στάδια έτσι ώστε το i στάδιο να μπορεί να συμβεί με m_i τρόπους $(i = 1,\dots,k)$ τότε ο συνολικός αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να συμβεί το γεγονός είναι

$$\prod_{i=1}^{k} m_i = m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_k$$

Παράδειγμα

- Κατασκευή κωδικών για καταχώριση προϊόντων
- Περιορισμοί για κάθε κωδικό:
  - Αρχίζει με 3 λατινικούς χαρακτήρες (A-Z)
  - Ακολουθούν 4 δεκαδικά ψηφία (0 – 9)
  - Το πρώτο ψηφίο δεν πρέπει να είναι μηδέν
- Πόσους κωδικούς μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Παράδειγμα - Λύση

- Διαδικασία σε $k = 7$ ανεξάρτητα στάδια
- 1ο, 2ο 3ο στάδιο: Επιλογή πρώτου, δεύτερου και τρίτου χαρακτήρα από 26 διαθέσιμους ($m_1 = m_2 = m_3 = 26$)
- 4ο στάδιο: Επιλογή πρώτου ψηφίου: $m_4 = 9$ (δεν επιτρέπεται το 0)
- 6ο, 7ο, 8ο στάδιο: $m_5 = m_6 = m_7 = 10$
- Τελικά: η κωδικοποίηση μπορεί να γίνει με

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 158{,}184{,}000 \text{ τρόπους.}$$

Αρχή Διαίρεσης

Υπάρχουν n/d τρόποι για μία συνδυαστική εργασία αν μπορεί να γίνει με n τρόπους και για κάθε τρόπο w, ακριβώς d από τους n τρόπους αντιστοιχούν στο w.

Αν το πεπερασμένο σύνολο A είναι η ένωση n ξένων μεταξύ τους συνόλων με d στοιχεία το καθένα, τότε $n = |A|/d$.

Αρχή Διαίρεσης

1. Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε έξι παιδιά που πιάνονται με τα χέρια σε έναν κύκλο;

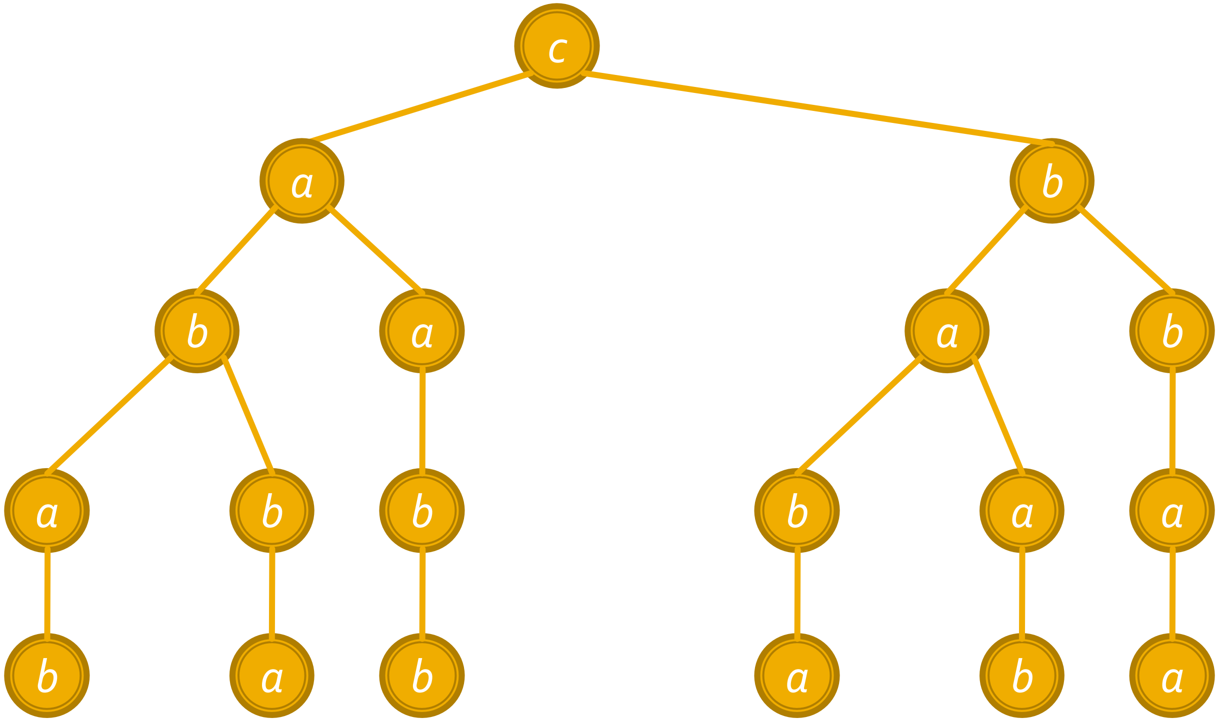
   1. Αριθμός μεταθέσεων σε ευθεία $6! = 720$

   2. Κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την περιστροφή κύκλου 6

Αρχή Διαίρεσης

Ανάπτυξη σε Δέντρο

- Έστω $S=\{a,b,c\}$. Να βρεθούν το πλήθος των μεταθέσεων με επανάληψη όπου το a επαναλαμβάνεται 2 φορές, το b 2 φορές και το c 1.



cabab *cabba* *caabb* *cbaba* *cbaab* *cbbaa*

Ασκήσεις

1. Στρίβουμε ένα νόμισμα 10 φορές. Σε πόσες από τις 2^{10} περιπτώσεις:
    1. Ξεκινάμε με 3 κορώνες στη σειρά 2^7
    2. Τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά 2^7
    3. Ξεκινάμε με 3 κορώνες και τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά 2^4
    4. Ξεκινάμε με 3 κορώνες ή (or) τελειώνουμε με 3 γράμματα στη σειρά $2^7 + 2^7 - 2^4 = 240$

(2 Μονάδες)

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Εγκλεισμού-Αποκλεισμού, υπολογίστε πόσοι ακέραιοι μεταξύ του 1 και του 110 είναι σχετικά πρώτοι με το 110.

(1 Μονάδα)

Χρησιμοποιώντας την Αρχή του Περιστερώνα, να δείξετε ότι αν πέντε σημεία τοποθετηθούν με αυθαίρετο τρόπο σε ένα τετράγωνο (εντός ή πάνω στις πλευρές του) με πλευρά 1 τότε θα υπάρχει ένα ζευγάρι σημείων ώστε η απόσταση μεταξύ τους να είναι το πολύ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(υπόδειξη: $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι το μήκος της διαγωνίου ενός τετραγώνου με μήκος πλευράς $\frac{1}{2}$)

(1 Μονάδα)

1. (1) Μία εταιρία θέλει να δώσει κωδικούς πρόσβασης στο προσωπικό της. Κάθε κωδικός έχει μήκος ακριβώς ίσο με 10 και περιέχει καθένα από τους εξής χαρακτήρες: σ,ν,ω,π,υ,ο,γ,ρ,ε,α (αυτό σημαίνει ότι κανένας χαρακτήρας δεν επαναλαμβάνεται). Επίσης, κανένας κωδικός δεν πρέπει να περιέχει τις λέξεις: «σπερνα», «αυγο» και «περνω»

Βρείτε το πλήθος των κωδικών που μπορούν να δημιουργηθούν (αν θέλετε χρησιμοποιήστε εγκλεισμό-αποκλεισμό).

Πρόβλημα

Να δείξετε ότι ισχύει η αρχή της αντιστοιχίας μεταξύ των παρακάτω δύο προβλημάτων:

Α) Πόσοι τρόποι υπάρχουν κατανομής τριών σφαιρών – μία κόκκινη, μία πράσινη και μία μπλε – σε 10 ανθρώπους; (επιτρέπεται κάποιος να πάρει περισσότερες από μία σφαίρες)

Β) Πόσοι ακέραιοι υπάρχουν στο διάστημα [0,999];

Δώστε την απάντηση για το (Α).

Πρόβλημα

100 φοιτητές πέρασαν από το κυλικείο και αγόρασαν καφέ, πίτσα και μπουγάτσα (κάθε φοιτητής αγόρασε το πολύ ένα από κάθε προϊόν). Κάθε προϊόν κοστίζει 1 ευρώ. Η συνολική είσπραξη του κυλικείου ήταν 200 ευρώ. 75 φοιτητές χάλασαν τουλάχιστον 2 ευρώ ενώ τριάντα φοιτητές χάλασαν 3 ευρώ. Πόσοι από τους φοιτητές δεν αγόρασαν τίποτα;

1.

Σε δελτίο ΠΡΟΠΟ βάζουμε 1,2,Χ σε καθένα από τους 13 αγώνες που αναγράφονται σε αυτό. Πόσες δυνατές στήλες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Λύση:

$3^{13} = 1.594.323$ στήλες συνολικά

2.

Στον παρακάτω αλγόριθμο πόσοι πολλαπλασιασμοί εκτελούνται;

```
for i=1 to r
     for j=1 to m
          s=0
          for k=1 to n
               s=s+A[i,k]*B[k,j]
          endfor
          C[i,j]=s
     endfor
endfor
```

Λύση:

Ο εξωτερικός βρόγχος εκτελεί το σώμα του *r* φορές. Ο επόμενος κατά σειρά βρόγχος τον εκτελεί *m* φορές ενώ τέλος ο εσωτερικός βρόγχος τον εκτελεί *n* φορές. Επομένως, ο αριθμός των πολλαπλασιασμών είναι *rmn*.

3.

Ένα password σε δίκτυο αποτελείται από 4-8 χαρακτήρες που είναι κεφαλαία ή μικρά γράμματα του λατινικού αλφαβήτου. Πόσα διαφορετικά passwords είναι δυνατά;

Λύση:

Δυνατοί χαρακτήρες: 26μεγάλοι + 26 μικροί = 52.

Password με 4 χαρακτήρες: 52^4

Password με 5 χαρακτήρες: 52^5

...

Password με 8 χαρακτήρες: 52^8

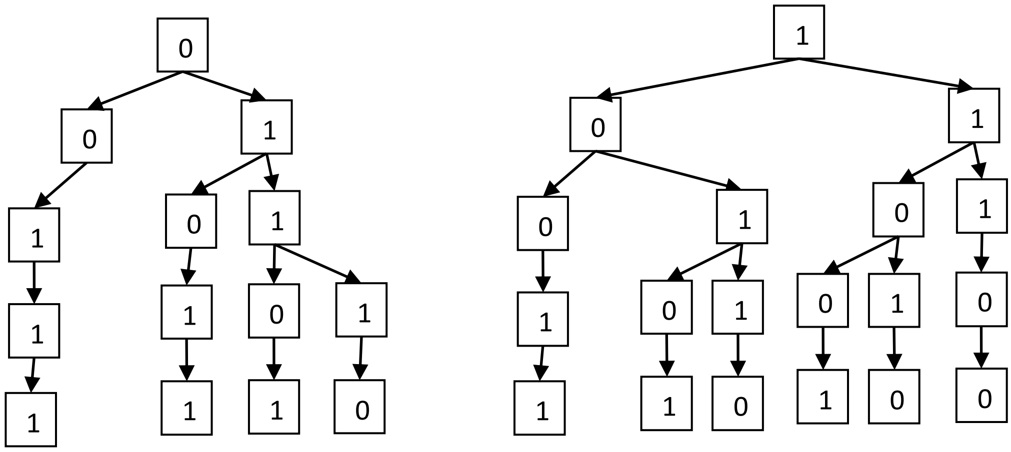
Άρα τα δυνατά passwords (από αρχή αθροίσματος) είναι $52^4 + 52^5 + 52^6 + 52^7 + 52^8 =$ $54.507.958.359.296$

4.

Να κατασκευάσετε δέντρα με όλες τις μεταθέσεις ώστε το 0 να εμφανίζεται 2 φορές, και το 1 να εμφανίζεται 3 φορές.

Λύση:

Ξεκινάμε με το 0 στη ρίζα και το ίδιο κάνουμε και για το 1.



Άρα συνολικά έχουμε 10 μεταθέσεις, όσα και τα φύλλα των δύο αυτών δένδρων. Κάθε μετάθεση είναι μία διαδρομή από τη ρίζα μέχρι το φύλλο.

5.

Να δείξετε ότι τα παρακάτω προβλήματα είναι ίδια και ποια είναι η λύση.

1. Πόσες λύσεις στους μη αρνητικούς ακέραιους αριθμούς έχει η εξίσωση a+b+c=10;
2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 έχουν ακριβώς 2 άσσους.

Λύση:

Αναπαριστούμε την τιμή του a με τόσα μηδενικά όσα και η τιμή του, και χωρίζουμε με 1 από την τιμή του b το οποίο χωρίζεται με 1 από την τιμή του c. Άρα βρέθηκε η απεικόνιση.

Παράδειγμα:

_ _ _ 1 _ _ _ _ _ _ _ 1 _

Το a θα πάρει την τιμή 3 (τόσες είναι οι θέσεις αριστερά του), το b θα πάρει την τιμή 6 (τόσες είναι οι θέσεις μεταξύ των 2 άσσων) και το c θα πάρει την τιμή 1 (τόσες είναι οι θέσεις για μηδενικά στα δεξιά του). Πράγματι, 3+6+1=10.

Για το πλήθος σκεφτόμαστε ως εξής: Έχουμε 12 θέσεις για τον πρώτο άσσο και 11 θέσεις για τον δεύτερο άσσο. Άρα συνολικά έχουμε 12*11=132 διαφορετικούς τρόπους τοποθέτησης των 2 άσσων σε 12 θέσεις. Όμως, οι δύο άσσοι είναι ίδιοι αλλά παραπάνω έχουμε μετρήσει τις τοποθετήσεις σαν να ήταν διαφορετικοί. Αυτό σημαίνει ότι αν 2 οι παραπάνω συνδυασμοί που μετρήσαμε θα είναι ίδιοι. Άρα από κανόνα διαίρεσης προκύπτει τελικά ότι έχουμε 66 τρόπους τοποθέτησης 2 άσσων σε 12 θέσεις και άρα τόσες είναι και οι μη αρνητικές ακέραιες λύσεις της εξίσωσης.

6.

Από 62 προγραμματιστές, 35 γνωρίζουν C και 41 γνωρίζουν Java. Αν 16 δεν ξέρουν και τις δύο γλώσσες πόσοι γνωρίζουν και τις δύο.

Λύση:

Έστω A αυτοί που ξέρουν C και B αυτοί που ξέρουν Java. Επίσης έχουμε ότι $\overline{|A \cup B|} = 16 \Rightarrow$ $|A \cup B| = 62 - 16 = 46$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \Rightarrow$$

$$|A \cap B| = 35 + 41 - 46 = 30$$

Άρα και τις δύο γλώσσες τις γνωρίζουν 30 προγραμματιστές.

7.

Πόσα ακολουθίες χαρακτήρων από 8 γράμματα υπάρχουν όταν:

1. Δεν περιέχουν φωνήεντα αλλά τα σύμφωνα μπορούν να επαναλαμβάνονται.
2. Δεν περιέχουν φωνήεντα αλλά τα σύμφωνα δεν μπορούν να επαναλαμβάνονται.
3. Ξεκινάνε με φωνήεν και όλα τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
4. Ξεκινάνε με φωνήεν χωρίς όμως επαναλήψεις γραμμάτων.
5. Περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν και τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
6. Περιέχουν ακριβώς ένα φωνήεν και τα γράμματα (άρα τα υπόλοιπα σύμφωνα) μπορούν να επαναληφθούν.
7. Ξεκινάνε με το γράμμα Θ και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν αν τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.
8. Ξεκινάνε και τελειώνουν με το γράμμα Θ και περιέχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν αν τα γράμματα μπορούν να επαναληφθούν.

Λύση:

1. 8 θέσεις που γεμίζουν με τα 17 σύμφωνα. Από κανόνα γινομένου είναι $17 \times 17 \times \cdots \times 17 = 17^8$
2. Για την πρώτη θέση έχουμε 17 σύμφωνα, για τη δεύτερη 16 – δεν χρησιμοποιώ αυτό της πρώτης – για την Τρίτη θέση 15 κοκ. Άρα το πλήθος των ακολουθιών είναι $17 \times 16 \times 15 \times \cdots \times 10$
3. Για την πρώτη θέση έχουμε 7 περιπτώσεις ενώ για τις υπόλοιπες έχουμε 24^7. Άρα το συνολικό πλήθος είναι 7×24^7.
4. Συνδυάζοντας το σκεπτικό από τα ερωτήματα 2 και 3 έχουμε ότι το πλήθος είναι: $7 \times 23 \times 22 \times \cdots \times 17$
5. Το συνολικό πλήθος ακολουθιών που μπορούμε να φτιάξουμε είναι 24^8. Από αυτά θα αφαιρέσουμε όλες τις ακολουθίες που δεν περιέχουν κανένα φωνήεν και θα βρούμε το πλήθος των ακολουθιών που έχουν τουλάχιστον ένα φωνήεν (συμπληρωματικό πρόβλημα). Χωρίς κανένα φωνήεν το πλήθος των ακολουθιών είναι 17^8. Άρα το πλήθος των ακολουθιών με ένα τουλάχιστον φωνήεν είναι $24^8 - 17^8$.
6. Έχουμε 8 περιπτώσεις για το που θα πάει το μοναδικό φωνήεν. Για κάθε μία τέτοια θέση έχουμε 7 διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το φωνήεν που θα χρησιμοποιήσουμε. Τέλος, μπορώ να τοποθετήσω τα υπόλοιπα σύμφωνα με 17^7 τρόπους. Άρα, από κανόνα γινομένου έχουμε ότι το συνολικό πλήθος τέτοιων ακολουθιών είναι $8 \times 7 \times 17^7$.
7. Την πρώτη θέση δεν την μετράμε αφού με ένα τρόπο τοποθετείται το Θ σε αυτή. Εφαρμόζοντας τώρα την ίδια προσέγγιση με το ερώτημα 5 αλλά για 7 θέσεις έχουμε ότι το συνολικό πλήθος τέτοιων ακολουθιών είναι $24^7 - 17^7$.
8. Το ίδιο με το 7 μόνο που τώρα θα χρησιμοποιήσουμε 6 μόνο θέσεις. Άρα, η απάντηση είναι $24^6 - 17^6$.

8.

Πόσες διαγώνιους έχει ένα κυρτό πολύγωνο με n πλευρές; (ένα πολύγωνο είναι κυρτό όταν για οποιοδήποτε ζεύγος σημείων στο εσωτερικό του ή πάνω στο σύνορό του το ευθύγραμμο τμήμα που ατ συνδέει κείται πλήρως εντός του πολυγώνου ή πάνω στο σύνορό του. Διαγώνιος είναι το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ δύο μη-γειτονικών κορυφών).
<u>Λύση:</u>

Υπάρχουν $n - 3$ διαγώνιες από κάθε κορυφή μιας και δεν μπορεί να φέρει διαγώνιο προς τον εαυτό του ή προς κάποια από τις δύο γειτονικές του κορυφές. Άρα το πλήθος των διαγώνιων είναι $n(n-3)$ αφού έχουμε n κορυφές. Όμως μετράμε κάθε διαγώνιο 2 φορές, μία από την μία της κορυφή και μία από την άλλη. Άρα το συνολικό πλήθος διαγώνιων είναι $\frac{n(n-3)}{2}$.

9.

Πόσες συναρτήσεις 1-προς-1 f υπάρχουν από ένα σύνολο με 5 στοιχεία προς ένα άλλο σύνολο με το εξής πλήθος στοιχείων:
1. 4
2. 5
3. 6
4. 7

<u>Λύση:</u>
Έστω ότι το πεδίο τιμών έχει γενικά πληθάριθμο k.Τότε, για το πρώτο στοιχείο του πεδίου ορισμού έχουμε k επιλογές. Για το δεύτερο έχουμε $k - 1$ επιλογές, αφού η συνάρτηση πρέπει να είναι 1-προς-1 και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εικόνα του δεύτερου στοιχείου η εικόνα του πρώτου. Με τον

ίδιο τρόπο προκύπτει ότι το πλήθος συναρτήσεων είναι $k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)$. Αυτό γράφεται ως $\frac{k!}{(k-5)!}$ Άρα για κάθε περίπτωση έχουμε:

1. Με 0 τρόπους. Είναι λογικό γιατί έχουμε 5 στοιχεία που απεικονίζουμε σε 4 και άρα αναπόφευκτα η συνάρτηση δεν είναι 1-προς-1.
2. Με $\frac{5!}{0!} = 120$
3. Με $\frac{6!}{1!} = 720$
4. Με $\frac{7!}{2!} = 2520$

10.

Να δείξετε ότι μεταξύ οποιωνδήποτε 5 ακεραίων θα υπάρχουν 2 αριθμοί που θα έχουν το ίδιο υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 4.

Λύση:

Η διαίρεση με το 4 αφήνει 4 διαφορετικά υπόλοιπα: 0,1,2,3. Οι περιστερώνες είναι τα υπόλοιπα ενώ τα περιστέρια είναι οι 5 αριθμοί. Από την αρχή των περιστερώνων θα υπάρχει ένα ζεύγος αριθμών που έχουν το ίδιο υπόλοιπο.

11.

Στον 17^{ο} αιώνα το Παρίσι είχε περισσότερους από 800.000 κατοίκους. Εκείνη την εποχή πίστευαν ότι κανένας δεν είχε παραπάνω από 200.000 τρίχες στο κεφάλι του. Υποθέτοντας ότι αυτοί οι αριθμοί είναι σωστοί και ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν τουλάχιστον μία τρίχα στο κεφάλι τους να δείξετε (όπως το έκανε ο Γάλλος συγγραφέας Pierre Nicole) ότι υπάρχουν δύο Παριζιάνοι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι. Έπειτα αποδείξτε ότι με βάση τις υποθέσεις υπάρχουν τουλάχιστον 5 Παριζιάνοι με το ίδιο πλήθος τριχών στο κεφάλι.

Λύση:

Οι τρίχες είναι οι περιστερώνες και ο πληθυσμός είναι τα περιστέρια. Αφού υπάρχουν περισσότερα περιστέρια από περιστερώνες σημαίνει ότι θα υπάρχει ένας περιστερώνας με 2 περιστέρια, δηλαδή θα υπάρχουν δύο Παριζιάνοι με ίδιο πλήθος τριχών. Επίσης, χρησιμοποιώντας τη γενικευμένη αρχή των περιστερώνων και αφού έχουμε αυστηρά περισσότερους από 800000 κατοίκους σημαίνει ότι θα υπάρχουν τουλάχιστον $\left\lceil\frac{800001}{200000}\right\rceil = 5$ κάτοικοι με ίδιο πλήθος τριχών στην κεφαλή.

ΔΙΑΚΡΙΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΙΙ: Δείγματα – Συνδυασμοί – Μεταθέσεις

r-δείγματα

S σύνολο και $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ μία διατεταγμένη r-άδα στοιχείων του S όχι αναγκαστικά διαφορετικών μεταξύ τους:

$$(a_1, a_2, \dots, a_r) \in S^r$$

$(a_1, a_2, \dots, a_r)$: r-δείγμα (r-sample) του S

Πλήθος r-δειγμάτων ενός n-συνόλου: $|S^r| = |S|^r = n^r$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία με επανάθεση (sampling with replacement): Από αρχικό πληθυσμό n αντικειμένων εξάγουμε δείγμα r αντικειμένων

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε και το τοποθετούμε πάλι πίσω στον πληθυσμό
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν n^r τρόποι να πάρουμε τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

Πόσες συμβολοσειρές (strings) υπάρχουν μήκους n σε ένα αλφάβητο $\Sigma = \{0,1, \ldots, k-1\}$;

Είναι ένα n-δείγμα από ένα k-σύνολο.

Άρα k^n.

Τι μπορούμε να μετρήσουμε με n bits;

r-μεταθέσεις

S: n-σύνολο

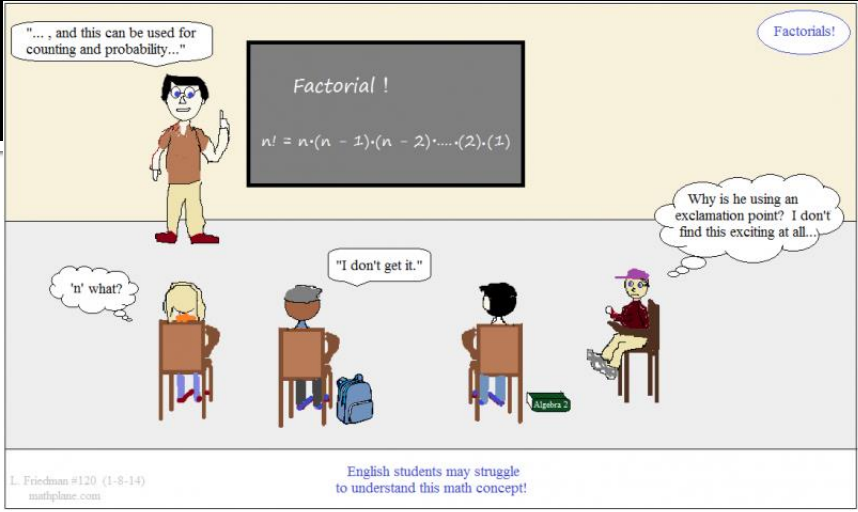
$(a_1, a_2, \dots, a_r)$: r-δείγμα του S έτσι ώστε όλα να είναι διαφορετικά μεταξύ τους ($r \leq n$):

Τότε έχουμε μία r-μετάθεση (r-permutation)

Πλήθος r-μεταθέσεων ενός n-συνόλου:

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-r+1)$$

n-μεταθέσεις



Αν $r = n$ τότε: μετάθεση n στοιχείων

Πλήθος μεταθέσεων n στοιχείων:

$n!$: n-παραγοντικό (n-factorial)

$$P(n, n) = n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1 = \prod_{1 \le i \le n} i$$

Εφαρμογή στη δειγματοληψία

Δειγματοληψία χωρίς επανάθεση (sampling without replacement): Από αρχικό πληθυσμό n αντικειμένων εξάγουμε δείγμα r αντικειμένων:

- Παίρνουμε ένα-ένα αντικείμενο, το καταγράφουμε χωρίς όμως να το τοποθετούμε πάλι πίσω.
- Λαμβάνουμε υπόψη τη σειρά των αντικειμένων που καταγράφουμε

Υπάρχουν $P(n,r)$ τρόποι να πάρουμε ένα τέτοιο δείγμα.

Παράδειγμα

Αν $S = \{a,b,c,d\}$, $n = |S| = 4$, τότε τα 3-δείγματα που μπορούν να σχηματιστούν είναι (γράφουμε για απλότητα $a_1 a_2 a_3$ αντί για (a_1, a_2, a_3)):

aaa	aca	baa	bca	caa	cca	daa	dca
aab	acb	bab	bcb	cab	ccb	dab	dcb
aac	acc	bac	bcc	cac	ccc	dac	dcc
aad	acd	bad	bcd	cad	ccd	dad	dcd
aba	ada	bba	bda	cba	cda	dba	dda
abb	adb	bbb	bdb	cbb	cdb	dbb	ddb
abc	adc	bbc	bdc	cbc	cdc	dbc	ddc
abd	add	bbd	bdd	cbd	cdd	dbd	ddd

$$4^3 = 64$$

Παράδειγμα (συν.)

$$P(4,3) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

- 3-μεταθέσεις:

$$\begin{array}{cccc} abc & bac & cab & dab \\ abd & bad & cad & dac \\ acb & bca & cba & dba \\ acd & bcd & cbd & dbc \\ adb & bda & cda & dca \\ adc & bdc & cdb & dcb \end{array}$$

r-συνδυασμοί

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$: r-επιλογή όπου το κάθε στοιχείο έχει πολλαπλότητα 1

Η συλλογή (υποσύνολο του S) ονομάζεται r-συνδυασμός (r-combination) των n στοιχείων.

Πλήθος r-συνδυασμός από ένα n-σύνολο S:

$$C(n,r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

Διωνυμικοί συντελεστές

Αριθμοί της μορφής $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$0! = 1, \quad \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{0}{r} = 0, \quad \binom{0}{0} = 1$$

Συνδυαστικές Αποδείξεις

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

Είναι μία απόδειξη που χρησιμοποιεί προτάσεις απαρίθμησης για να αποδείξει ότι και οι δύο πλευρές της ισότητας απαριθμούν το ίδιο πρόβλημα με διαφορετικούς τρόπους.

Ιδιότητες διωνυμικών συντελεστών

$$\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1}$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n$$

$$\binom{n}{r} = \frac{n}{r}\binom{n-1}{r-1}$$

Πολυωνυμικοί συντελεστές (multinomial coefficients)

Μεταθέσεις με Επανάληψη

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\ldots r_k!},\ r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n,\ \text{συντελεστής στο } \alpha_1^{r_1}\alpha_2^{r_2}\cdots\alpha_k^{r_k}$$

Μεταθέσεις με Ίδια Αντικείμενα

Πόσα διαφορετικά αλφαριθμητικά μπορούν να φτιαχτούν από αναδιάταξη των γραμμάτων της λέξης ΚΑΚΑΚΙΑ.

Λύση: Υπάρχουν 7 διαφορετικές θέσεις για 3 Κ, 3 Α και 1 Ι.

- Τα 3 Κ μπορούν να τοποθετηθούν με $C(7,3)$ διαφορετικούς τρόπους.
- Τα 3 Α μπορούν να τοποθετηθούν με $C(4,3)$ τρόπους.
- Το Ι μπορεί να τοποθετηθεί με $C(1,1)$ τρόπους.

Από τον κανόνα του γινομένου το πλήθος είναι:

$$\binom{7}{3}\binom{4}{3}\binom{1}{1} = 35 \cdot 4 \cdot 1 = 140$$

r-επιλογές

S: n-σύνολο

$\{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$: μη-διατεταγμένη συλλογή από r στοιχεία του S όχι αναγκαστικά διαφορετικά μεταξύ τους.

Η συλλογή ονομάζεται r-επιλογή (r-selection) του S.

Το πλήθος των εμφανίσεων ενός στοιχείου στη συλλογή είναι η πολλαπλότητά του.

Πλήθος r-επιλογών του S:

$$C(n+r-1, r) = \binom{n+r-1}{r}$$

Παράδειγμα

- Πόσα διαφορετικά αποτελέσματα παίρνουμε αν ρίξουμε 6 ίδια ζάρια;
- n=6, r=6: $\binom{6+6-1}{6} = 462$
- Η παρακάτω εξίσωση πόσες λύσεις έχει; (μη αρνητικοί αριθμοί);

$$i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 + i_6 = 6$$

Παράδειγμα

$$S = \{a, b, c, d\} \qquad n = |S| = 4$$

3-επιλογές που μπορούν να σχηματιστούν:

(γράφουμε για απλότητα $a_1 a_2 a_3$ αντί για $\{a_1, a_2, a_3\}$):

aaa	bbb	ccc	ddd
aab	aac	aad	
bba	bbc	bbd	
cca	ccb	ccd	
dda	ddb	ddc	
abc	abd	acd	bcd

$$\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

Παράδειγμα (συν.)

Από τις παραπάνω επιλογές αυτές μόνο οι:

$$abc \quad abd \quad acd \quad bcd$$

αποτελούν 3-συνδυασμούς αφού τα στοιχεία τους είναι διαφορετικά και το πλήθος τους είναι

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4.$$

Με Λίγα Λόγια… (σχετικά με θεμελιώδη προβλήματα αρίθμησης)

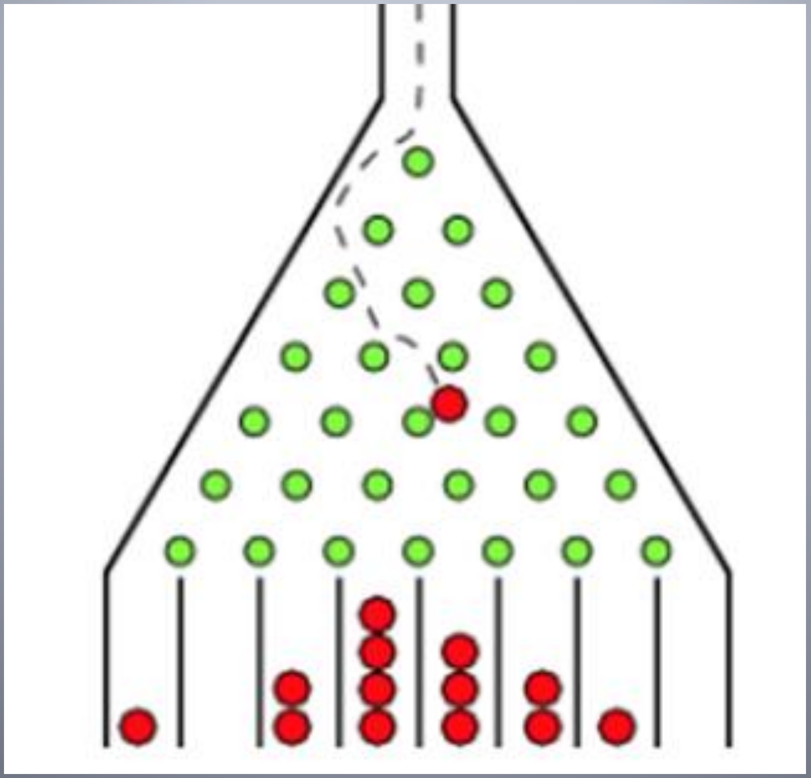
Επανατοποθέτηση;

Μετράει η σειρά;

	NAI	**OXI**
NAI	*r*-δείγμα	*r*-μετάθεση
OXI	*r*-επιλογή	*r*-συνδυασμός

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

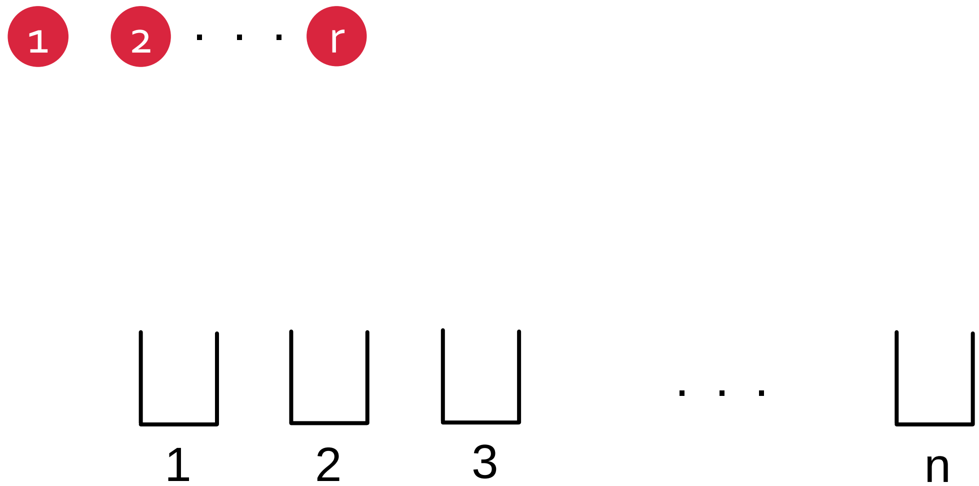
Άλλο πρόβλημα μέτρησης…



Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

- Πολλά προβλήματα αρίθμησης λύνονται με αντιστοίχηση στο πρόβλημα τοποθέτησης αντικειμένων σε κουτιά.
  - Τα αντικείμενα μπορεί να είναι διαφορετικά ή ίδια.
  - Τα κουτιά μπορεί να έχουν ετικέτες (διαφορετικά) ή να μην έχουν (ίδια).
  - Μπορεί να μας ενδιαφέρει η σειρά των σφαιρών μέσα σε κάθε κουτί ή όχι.

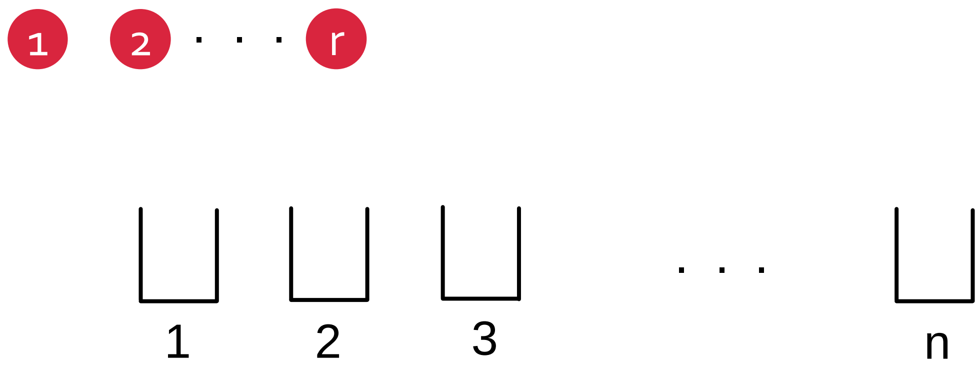
Διαφορετικά Αντικείμενα – Διαφορετικά Κουτιά – <u>*Δεν μετράει*</u> η σειρά μέσα σε κουτί



n τρόποι για την μπάλα 1, n τρόποι για τη μπάλα 2, ...

Από κανόνα γινομένου: n^r.

Διαφορετικά Αντικείμενα – Διαφορετικά Κουτιά – *Μετράει* η σειρά μέσα σε κουτί



n τρόποι για την μπάλα 1, *n+1* τρόποι για τη μπάλα 2, ..., *n+r-1* τρόποι για τη μπάλα *r*

Από κανόνα γινομένου: $\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!}$

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Διαφορετικά αντικείμενα σε διαφορετικά κουτιά με περιορισμό σε κάθε κουτί (δεν παίζει ρόλο η σειρά στο κουτί).

- Υπάρχουν $n!/(n_1!n_2! \cdots n_k!)$ τρόποι κατανομής n διαφορετικών αντικειμένων σε k διαφορετικά κουτιά με n_i το καθένα.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν $52!/(5!5!5!5!32!)$ τρόποι μοιράσματος 5 φύλλων σε 4 παίκτες.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Ίδια Αντικείμενα σε διαφορετικά κουτιά.

- Υπάρχουν $C(n + r - 1, r)$ τρόποι κατανομής r ίδιων αντικειμένων σε n διαφορετικά κουτιά.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν $C(8 + 10 - 1, 10) = C(17,10) = 19{,}448$ τρόποι τοποθέτησης 10 ίδιων αντικειμένων σε 8 διαφορετικά κουτιά.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Διαφορετικά αντικείμενα και ίδια κουτιά.

- Δεν υπάρχει απλός κλειστός τύπος.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν 14 τρόποι να κατανεμηθούν 4 υπάλληλοι σε 3 ίδια γραφεία όπου κάθε γραφείο μπορεί να περιέχει αυθαίρετο πλήθος υπαλλήλων.

Κατανομή Αντικειμένων σε Κουτιά

Ίδια αντικείμενα και ίδια κουτιά.

- Δεν υπάρχει απλός κλειστός τύπος.
- Παράδειγμα: Υπάρχουν 9 τρόποι να βάλουμε 6 αντίγραφα του ίδιου βιβλίου σε 4 ίδια κουτιά.
- Αυτό είναι ίσο με το να υπολογίσουμε το $p_k(n)$, που είναι οι τρόποι το n *να γραφεί ως άθροισμα* το πολύ k θετικών ακεραίων σε αύξουσα σειρά.

Ασκήσεις

Προσοχή – Πολλά Λάθη

- Από 5 χαρτιά από μία τράπουλα με 52 χαρτιά πόσα είναι εκείνα που έχουν τουλάχιστον 3 άσους;

1. 4 τρόποι επιλογής 3 από 4 άσους
2. 48*49/2=1176 τρόποι επιλογής των άλλων δύο καρτών

Άρα 4*1176=4704 τρόποι.

Δεύτερος Τρόπος Υπολογισμού

- Πόσες πεντάδες έχουν 3 ακριβώς άσους:
  - 4 τρόποι επιλογής άσου
  - 1128 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

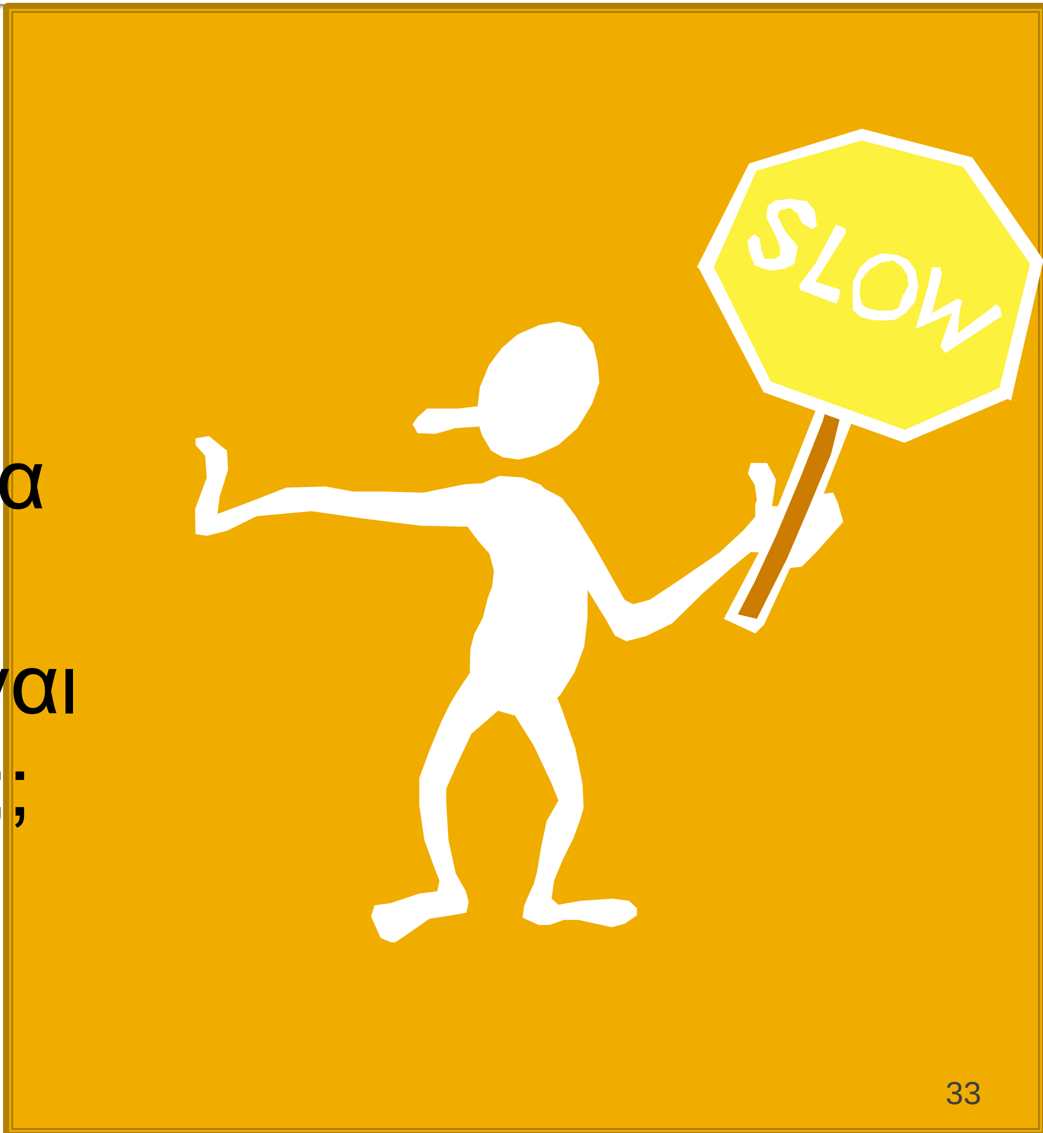
- Πόσες πεντάδες έχουν 4 ακριβώς άσους:
  - 1 τρόπος επιλογής άσου
  - 48 τρόποι επιλογής άλλων χαρτιών

Άρα 48+4*1128=4560

Λάθος

$4704 \neq 4560$

Τουλάχιστον ένα από τα δύο επιχειρήματα είναι λάθος. Ποιο;;;;;;



Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Επί της αρχής:

1. Ο θεατής μπορεί να επιλέξει οποιονδήποτε r-συνδυασμό με $C(n,r)=\binom{52}{r}$ τρόπους
2. Ο βοηθός παρουσιάζει μία (r-1)-μετάθεση r-1 καρτών $P(n,r-1)=\dfrac{52!}{(52-r+1)!}$

Αρκεί C(n,r)≤P(n,r-1)

Το Κόλπο με την Τράπουλα...

Για r=5 $\quad C(52,5)=\binom{52}{5}=2{,}598{,}860<P(52,4)=\frac{52!}{48!}=6{,}497{,}400$

Για r=4 $\quad C(52,4)=\binom{52}{4}=270{,}725>P(52,3)=\frac{52!}{49!}=132{,}600$

και άρα από την αρχή του περιστερώνα δεν μπορούμε να διακρίνουμε ποιο ακριβώς φύλλο θα είναι

Το Κόλπο με την Τράπουλα…

Ο βοηθός μπορεί να επικοινωνήσει με δύο τρόπους:

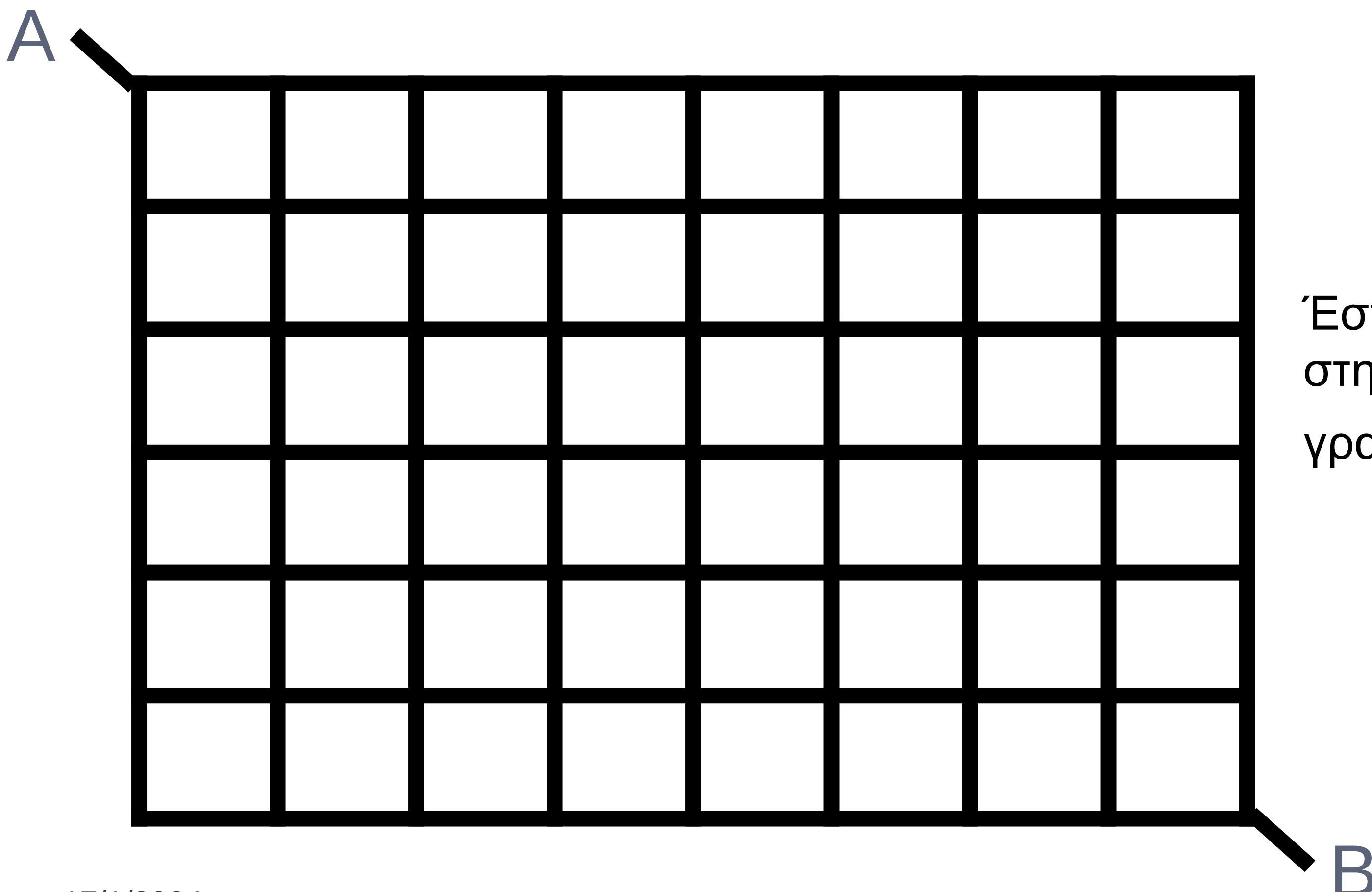
1. Να δώσει τις 4 κάρτες με οποιαδήποτε σειρά (4!=24), για να καθορίσουμε ποιο από τα υπόλοιπα 48 χαρτιά είναι η πέμπτη κάρτα.
2. Ο βοηθός καθορίζει ποια από τα 5 χαρτιά θα εμφανίσει

Το Κόλπο με την Τράπουλα...

1. Δύο φύλλα τουλάχιστον θα είναι ίδιου τύπου. Το κρυφό θα είναι ένα από τα δύο και το πρώτο κατά σειρά καθορίζει τον τύπο του κρυφού χαρτιού.
2. Επίσης, αν τα βάλω σε κύκλο τα 13 χαρτιά ίδιου τύπου, επιλέγω πάντα εκείνο να εμφανίσω που θα πρέπει να μετακινηθώ προς τα δεξιά ≤ 6 κινήσεις για να το βρω.
3. Τα υπόλοιπα τρία χαρτιά μου καθορίζουν πόσο θα πρέπει να μετακινηθώ από το πρώτο ($3!=6$ μεταθέσεις) .

Ελάχιστα Μονοπάτια

Πόσα ελάχιστα μονοπάτια υπάρχουν από το Α στο Β;



Έστω m πλήθος στηλών και n πλήθος γραμμών. Τότε: $\binom{m+n}{n}$

Ασκήσεις

1. Πόσες δυαδικές ακολουθίες υπάρχουν με 5 άσους και 3 μηδενικά;

2. Διάλεξε 5 από 8 για να βάλεις άσους και τα υπόλοιπα 3 για 0. Άρα:

   $C(8,5)$

Ασκήσεις

1. Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:
   1. Πόσες μη αρνητικές λύσεις υπάρχουν για την εξής εξίσωση: $a+b+c=10$
   2. Πόσες δυαδικές ακολουθίες μήκους 12 υπάρχουν που έχουν ακριβώς 2 άσους και 10 μηδενικά;

(2 Μονάδες)

Δώστε απάντηση στις παρακάτω ερωτήσεις με συνοπτική αιτιολόγηση:

1. Αν υπάρχουν 6 διαφορετικές γεύσεις παγωτού και 3 διαφορετικοί τύποι σιροπιού, με πόσους τρόπους μπορούμε να φτιάξουμε μία μπάλα παγωτό (μίας γεύσης) με ένα τύπο σιροπιού; 6×3
2. Αν έχετε δείπνο με 5 επιλογές για πρώτο πιάτο, 5 επιλογές για κυρίως πιάτο και 5 επιλογές για επιδόρπιο, πόσα διαφορετικού τύπου δείπνα μπορείτε να έχετε; 5^3
3. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 4 ατόμων από ένα δωμάτιο 10 ατόμων όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά; $\binom{10}{4}$
4. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 4 ατόμων από ένα δωμάτιο 10 ατόμων όταν ο πρώτος θα είναι ο αρχηγός, ο δεύτερος ο υπαρχηγός, ο τρίτος η μασκότ και ο τέταρτος ο μάνατζερ; $P(10,4)$
5. Πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 5 ατόμων από ένα δωμάτιο 13 ατόμων όταν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά αλλά καθορίζουμε στο τέλος εμείς ποιος από τους 5 θα είναι ο αρχηγός; $5\binom{13}{5}$
6. Το πλήθος των ομάδων με 8 κορίτσια και 2 αγόρια από 17 συνολικά κορίτσια και 10 αγόρια. $\binom{17}{8}\binom{10}{2}$
7. Το πλήθος των ομάδων με 3 ή 4 άτομα από ένα δωμάτιο με 17 άτομα συνολικά. $\binom{17}{4} + \binom{17}{3}$
8. Αν x είναι το πλήθος των τρόπων επιλογής 10 νικητών από 17 συνολικά άτομα, πόσοι είναι οι τρόποι επιλογής 7 χαμένων από 17 συνολικά άτομα (βρείτε πόσο είναι το x και εκφράστε την απάντηση σε σχέση με το x); $\binom{17}{7}$

$$\binom{15+4-1}{15} = \binom{18}{15}$$

9. Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε 15 μολύβια από 4 διαφορετικές εταιρίες;

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 5 + 5 - 8 = 2$$

10. Έστω ότι $|A| = 5$, $|B| = 5$ και $|A \cup B| = 8$, τότε πόσο είναι το $|A \cap B|$;

Άσκηση

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κατανείμουμε 5 μπάλες σε 7 κάδους, αν κάθε κάδος πρέπει να περιέχει το πολύ μία μπάλα και αν:

- Οι μπάλες και οι κάδοι έχουν ετικέτα 2520
- Οι μπάλες έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι όχι. 1
- Οι μπάλες δεν έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι έχουν 21
- Οι μπάλες και οι κάδοι δεν έχουν ετικέτα 1

Λύση

Λύση:

- (α) η σειρά των μπαλών είναι σημαντική ενώ δεν έχουμε επανάληψη αφού αναγκαστικά κάθε κάδος έχει το πολύ μία μπάλα. Άρα, έχουμε μία 5-μετάθεση από σύνολο μεγέθους 7. P(7,5)=2520
- (β) Αφού οι κάδοι είναι ίδιοι υπάρχει μόνο ένας τρόπος να τις τοποθετήσουμε στους 7 κάδους με δεδομένο ότι κάθε κάδος έχει το πολύ μία μπάλα. Άρα 1.
- (γ) Οι τρόποι με τους οποίους θα επιλέξουμε από τους 7 κάδους τους 5 χωρίς να μας ενδιαφέρει η σειρά αφού οι μπάλες είναι όλες ίδιες. Άρα: C(7,5) = 21
- (δ) Αντίστοιχα με το (β) μόνος ένας τρόπος για να συμβεί.

Άσκηση

Πόσοι τρόποι υπάρχουν για να κατανείμουμε 5 μπάλες σε 3 κάδους, αν κάθε κάδος πρέπει να περιέχει τουλάχιστον μία μπάλα και αν:

- Οι μπάλες και οι κάδοι έχουν ετικέτα 150
- Οι μπάλες έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι όχι. 25
- Οι μπάλες δεν έχουν ετικέτα αλλά οι κάδοι έχουν 6
- Οι μπάλες και οι κάδοι δεν έχουν ετικέτα 2

Λύση

Χωρίζω στις εξής περιπτώσεις: 1-1-3 και 1-2-2

- (α) Οι τρόποι να γίνει το 1-1-3 είναι να επιλέξουμε με 3 τρόπους τον μεγάλο κάδο και να τον γεμίσουμε με 5 ανά 3 με 3 σφαίρες και έπειτα με 2 τρόπους να βάλουμε τις άλλες δύο. Άρα: 3*C(5, 3) *2=60
- Οι τρόποι για το 1-2-2 είναι να επιλέξουμε με 3 τρόπους τον μοναδικό μικρό κάδο, και με 5 τρόπους να τον γεμίσουμε και έπειτα με C(4,2) τρόπους να γεμίσουμε έναν ακόμα κάδο (δεν είναι επί δύο για την επιλογή κάδου που μου απομένει στο τέλος μιας και ό,τι μένει μπαίνει στον τελευταίο κάδο και άρα υπάρχει συμμετρία) και έναν τρόπο να γεμίσουμε τον τελευταίο. Άρα: 3*5*C(4,2)=3*5*6=90.
- Από κανόνα αθροίσματος έχουμε 150.
- (β) Για το 1-1-3 έχουμε C(5,3)=10 τρόπους να επιλέξουμε τις 3 σφαίρες για τον μεγάλο κάδο και υπάρχει ένας τρόπος να κατανεμηθούν οι άλλες δύο σε δύο ίδιους κάδους. Για το 1-2-2 έχουμε 5 τρόπους να επιλέξουμε τη μπάλα που πάει μόνη της επί C(4,2) για τις δύο που θα πάνε μαζί επί 1 για τις άλλες δύο αλλά διαιρούμε με το 3! μιας και οι κάδοι είναι όλοι ίδιοι. αλλά το διαιρούμε με το 2 μιας και οι κάδοι είναι ίδιοι και άρα έχουμε: 5*C(4,2)/2=5*2*3/2=15. Άρα 10+15=25
- (γ) Για το 1-1-3 έχουμε 3 τρόπους, ανάλογα με το που θα πέσουν οι 3 μπάλες. Για το 1-2-2 έχουμε πάλι τρεις τρόπους ανάλογα με το που θα διαλέξουμε τον κάδο με τη μία σφαίρα C(3,1)=3. Άρα 3+3=6.
- (δ) Για το 1-1-3 ένας τρόπος. Το ίδιο για το 1-2-2. Άρα 2 τρόποι.

(2 Μονάδες)

1. (1) Δώστε μία συνδυαστική απόδειξη ότι $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$ για όλους τους θετικούς ακεραίους n.

2. (1) Εστω S=$\{0,1,\ldots,9\}^{90}$ το σύνολο όλων των ακολουθιών μήκους 90 αποτελούμενο από τα ψηφία $\{0,1,2,\ldots,9\}$. Δύο ακολουθίες s_1 και s_2 λέγεται ότι έχουν την ίδια κατανομή ψηφίων αν και μόνο αν η s_1 έχει το ίδιο πλήθος εμφανίσεων για το ψηφίο j με την s_2 για κάθε $j \in \{0,1,2,\ldots,9\}$.
(0.5) Δώστε μία αντιστοιχία μεταξύ του προβλήματος μέτρησης όλων των ακολουθιών μήκους 90 διαφορετικής κατανομής ψηφίων και όλων των τρόπων με τους οποίους μπορούμε να τοποθετήσουμε στη σειρά τα ψηφία 0 και 1.
(0.5) Πόσες διαφορετικές ως προς την κατανομή ψηφίων ακολουθίες μπορούμε να κατασκευάσουμε;

Άσκηση

Έχουμε 7 α, 8 β, 5 γ και 4 δ. Πόσες συμβολοσειρές μπορούμε να φτιάξουμε αν δεν πρέπει να εμφανίζεται το «γα» σε καμία από αυτές;

$$\frac{19!}{7!\,8!\,4!}\binom{13+5-1}{5}$$

Άσκηση

Με πόσους τρόπους μπορούμε να τοποθετήσουμε 4 ίδια πορτοκάλια και 6 διαφορετικά μήλα σε 5 διαφορετικά κουτιά. Σε ποιο ποσοστό αυτών των τρόπων τοποθετούνται ακριβώς 2 φρούτα σε κάθε κουτί;

Συνολικά: $\binom{5+4-1}{5-1}5^6$

Με περιορισμό σε 2: $\binom{5}{2}\frac{6!}{2!2!2!}+\binom{5}{2}\binom{3}{1}\frac{6!}{2!2!1!1!}+\binom{5}{4}\frac{6!}{2!1!1!1!1!}$

Λύση

- Τα 4 ίδια πορτοκάλια μπορούμε να τα τοποθετήσουμε στα 5 διαφορετικά κουτιά με C(5+4-1,5-1)=70 τρόπους.
- Τα 6 διαφορετικά μήλα στα 5 διαφορετικά κουτιά με 5^6=15625 τρόπους
- Άρα συνολικά με 70*15625=1.093.750

Για να έχουμε ακριβώς 2 φρούτα σε κάθε κουτί θα πάρουμε περιπτώσεις ως προς τα πορτοκάλια (κανόνας αθροίσματος)

- α) Πορτοκάλια: 2+2, υπάρχουν C(5,2)=10 τρόποι να γίνει αυτό. Τα 6 μήλα χωρίζονται σε διμελής ομάδες (2+2+2) για κάθε ένα από τα υπόλοιπα τρία κουτιά: 6!/2!2!2!=90 τρόπους. Άρα συνολικά 10*90=900 τρόπους.
- β) Πορτοκάλια: 2+1+1: C(5,1) τρόποι για τη δυάδα και C(4,2) τρόποι για τη δυάδα κουτιών. Άρα συνολικά 30 τρόποι. Τα μήλα: 2+2+1+1 κατανέμονται με 6!/2!2!1!1!=180 τρόπους. Άρα 30*180=5400 τρόπους συνολικά.
- γ) Πορτοκάλια: 1+1+1+1: C(5,4)=5 τρόπους. Μήλα: 2+1+1+1+1 με 6!/2!1!1!1!1!=360 τρόπους. Άρα συνολικά 1800 τρόποι.

- Άρα ως ποσοστό είναι 0,74%

Άσκηση

Σε ένα μαγαζί τα αντικείμενα Α, Β και Γ κοστίζουν 5 ευρώ και το αντικείμενο Δ κοστίζει 20 ευρώ. Αν θέλω να ξοδέψω συνολικά 100 ευρώ, πόσες διαφορετικές αγορές μπορώ να κάνω;

$$\sum_{\Delta=0}^{5} \binom{3+20-4\Delta-1}{3-1}$$

Λύση

- Αφού το μικρότερο ποσό είναι 5 ευρώ και το 20 είναι πολλαπλάσιό του, θεωρώ το 5ευρω ως μονάδα και άρα το παραπάνω πρόβλημα μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως το πλήθος των μη αρνητικών λύσεων για την εξίσωση Α+Β+Γ+4Δ=20.
- Αφού το Δ έχει το συντελεστή 4 θα πρέπει να διαμερίσουμε το χώρο ως προς την επιλογή των Δ – ο ένας τρόπος θα ήταν με κανόνα αθροίσματος αλλά εμείς εδώ απλά θα παραμετροποιήσουμε. Επομένως η εξίσωση γίνεται Α+Β+Γ=20-4Δ για κάθε επιλογή του Δ.

- Άρα έχουμε να τοποθετήσουμε 20-4i ίδια αντικείμενα σε 3 διαφορετικά κουτιά. Αυτό μπορεί να γίνει με C(3+20-4i-1,3-1) τρόπους. Άρα, θέλουμε να υπολογίσουμε αυτό το άθροισμα από Δ=0 μέχρι 5.

Καλές γιορτές