# DISTRIBUSI KONTINU

- Uniform
- Normal
- Gamma & Eksponensial

MA 2181 Analsis Data
Utriweni Mukhaiyar

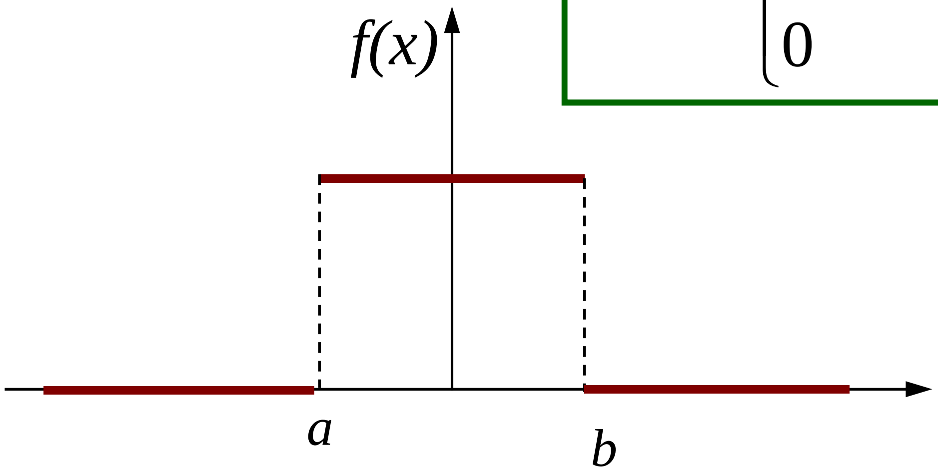
Oktober 2011

# Distribusi Uniform



- Distribusi kontinu yang paling sederhana
- Notasi: $X \sim U\,(a,b)$
- f.k.p:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , \quad a < x < b \\ 0 & , \quad x \text{ lainnya} \end{cases}$$




Rataan : $E[X] = \dfrac{b+a}{2}$

Variansi : $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Karl Friedrich Gauss
1777-1855

# ribusi Normal (Gauss)



- Penting dipelajari
  - Banyak digunakan
  - Aproksimasi Binomial
  - Teorema limit pusat
- Notasi: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- f.k.p:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad , -\infty < x < \infty$$

rataan

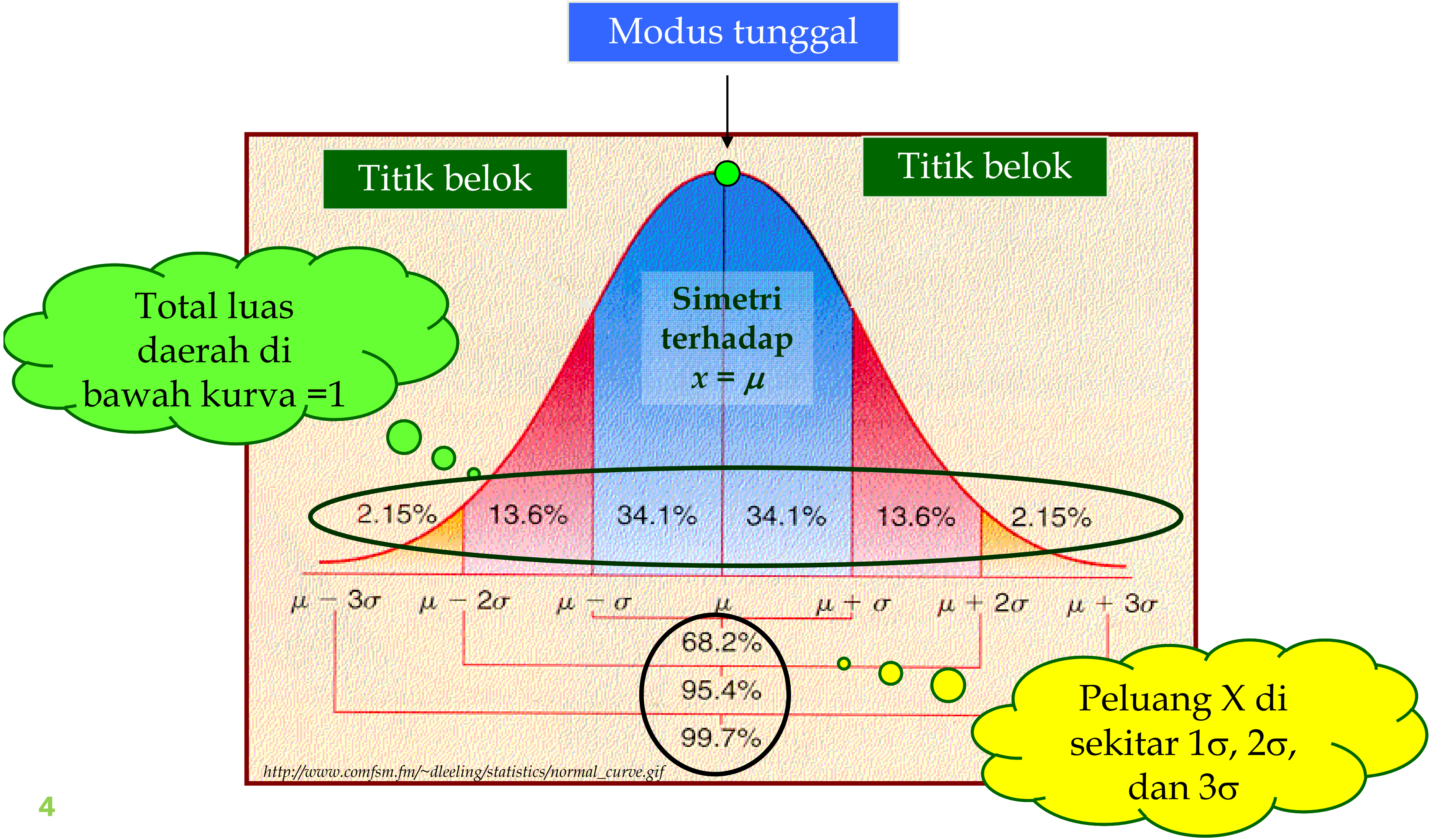
Simpangan baku /standar deviasi

π = 3.14159…

e = 2.71828…

- N(0,1) disebut **normal standar** (baku)

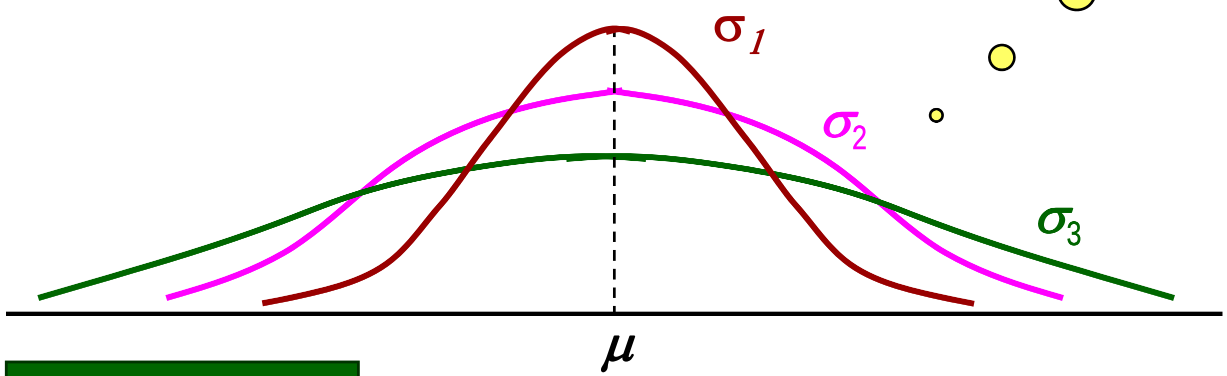
# Kurva Normal



# Pengaruh μ dan σ

Kurva normal dengan μ yang sama

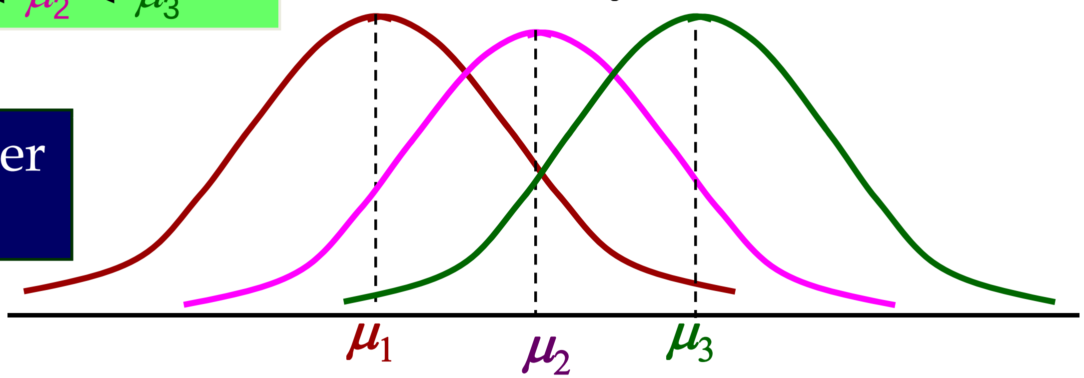
$\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$




σ parameter skala

Kurva normal dengan σ yang sama

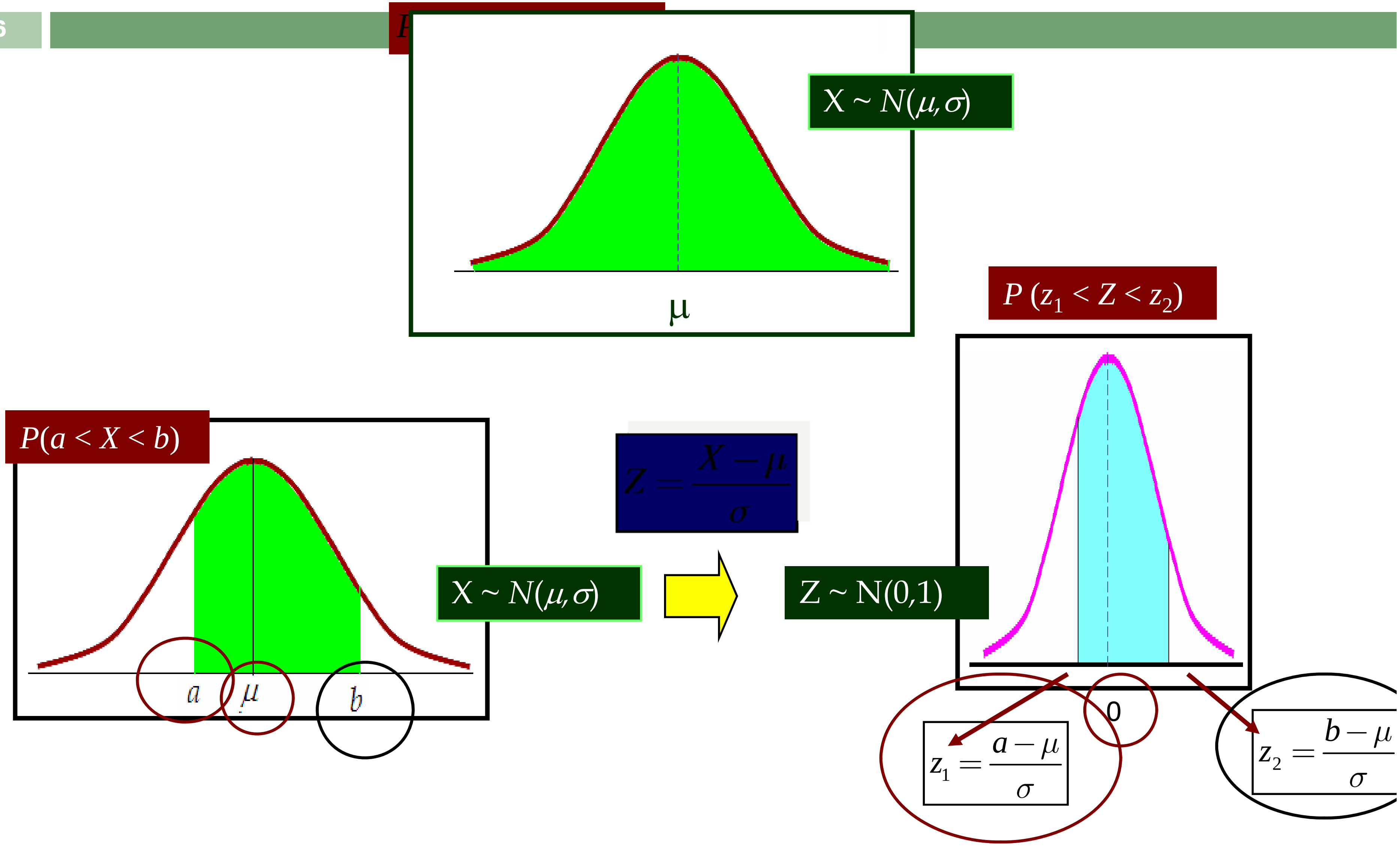
$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$




$\mu$ parameter lokasi

# Luas di bawah kurva Normal





# Menghitung Peluang Normal



Sulit !!!
Harus dihitung
secara numerik

1. Cara langsung

$$\boxed{P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}$$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

2. Dengan tabel normal standar $P(Z \leq z)$

| x | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | ... | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | ... | 0,5239 |
| : | | | | | | | |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | ... | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | **0,8925** | ... | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | ... | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | ... | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | ... | 0,9441 |
| : | | | | | | | |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | ... | 0,9998 |

N(0,1)

# Arti Tabel Normal

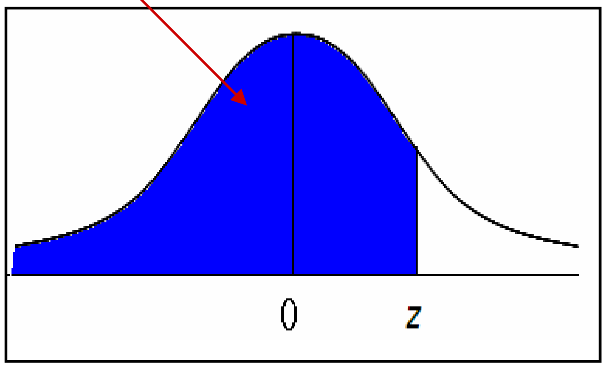


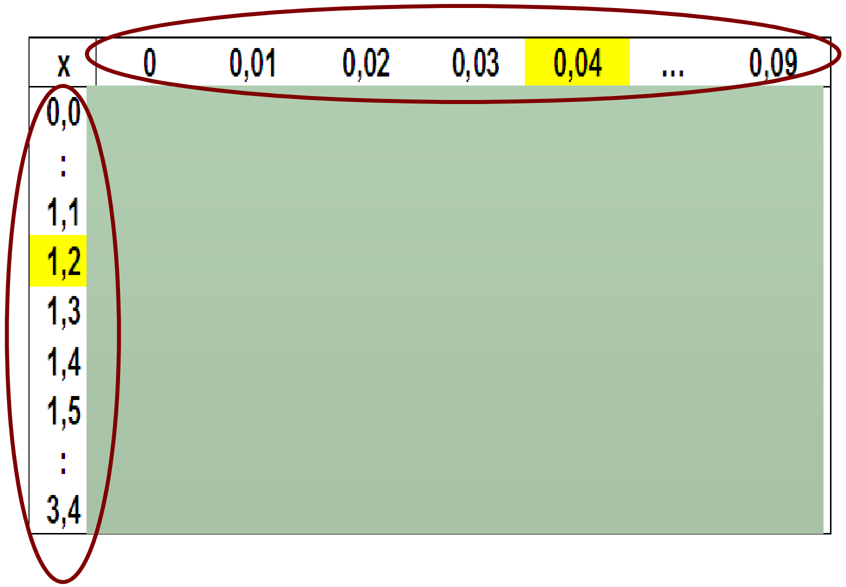
- Misal $Z \sim N(0,1)$ dan $z \in \boldsymbol{R}$, $-3,4 \leq z \leq 3,4$

$$P(Z \leq z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}$$

$P(Z \leq z)$ **DITABELKAN**
untuk $-3.4 \leq z \leq 3.4$

$P(Z \leq z)$

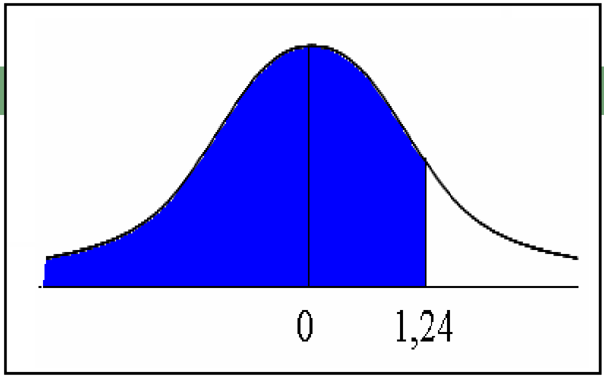


# Membaca Tabel Normal



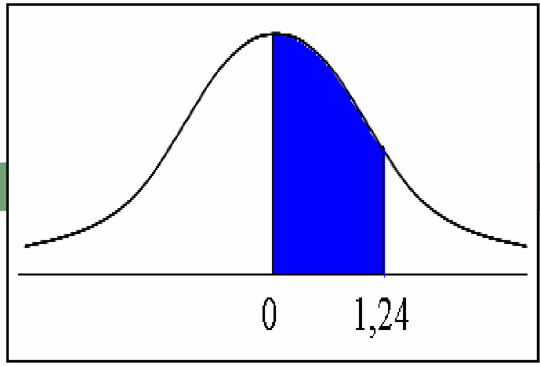
$P(Z \leq 1{,}24)$




| x | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | … | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | … | 0,5239 |
| : | | | | | | | |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | … | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | **0,8925** | … | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | … | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | … | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | … | 0,9441 |
| : | | | | | | | |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | … | 0,9998 |

## Hitung $P\ (0 \leq Z \leq 1{,}24\ )$






$P(0 \leq Z \leq 1{,}24\ ) = P(Z \leq 1{,}24\ ) - P(Z \leq 0\ )$

$= 0{,}8925 - 0{,}5 = 0{,}3925$

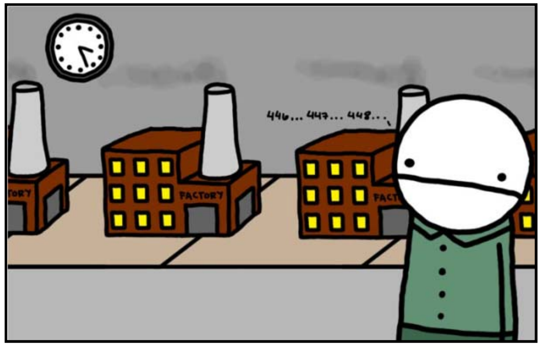
$P(Z \leq 0\ )$

$P(Z \leq 1{,}24\ )$

| x | 0 | 0,01 | 0,02 | 0,03 | 0,04 | ... | 0,09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | 0,5000 | 0,5040 | 0,5080 | 0,5120 | 0,5160 | ... | 0,5239 |
| : | | | | | | | |
| 1,1 | 0,8643 | 0,8665 | 0,8686 | 0,8708 | 0,8729 | ... | 0,8830 |
| 1,2 | 0,8849 | 0,8869 | 0,8888 | 0,8907 | 0,8925 | ... | 0,9015 |
| 1,3 | 0,9032 | 0,9049 | 0,9066 | 0,9082 | 0,9099 | ... | 0,9177 |
| 1,4 | 0,9192 | 0,9207 | 0,9222 | 0,9236 | 0,9251 | ... | 0,9319 |
| 1,5 | 0,9332 | 0,9345 | 0,9357 | 0,9370 | 0,9382 | ... | 0,9441 |
| : | | | | | | | |
| 3,4 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | 0,9997 | ... | 0,9998 |

# Contoh 1






*http://www.nataliedee.com/101906/nightshift-at-the-factory-factory.jpg*

Suatu perusahaan listrik menghasilkan bola lampu yang umurnya berdistribusi normal dengan **rataan 800 jam** dan **standar deviasi 40 jam**.

Hitunglah peluang suatu bola lampu dapat menyala **antara 778 dan 834 jam**

*http://ismailfahmi.org/wp/wp-content/uploads/2007/07/light-bulb.jpg*

# Jawab



Misal $X$ : umur bola lampu

$$X \sim N\,(800, 40^2)$$

Dengan transformasi $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ :

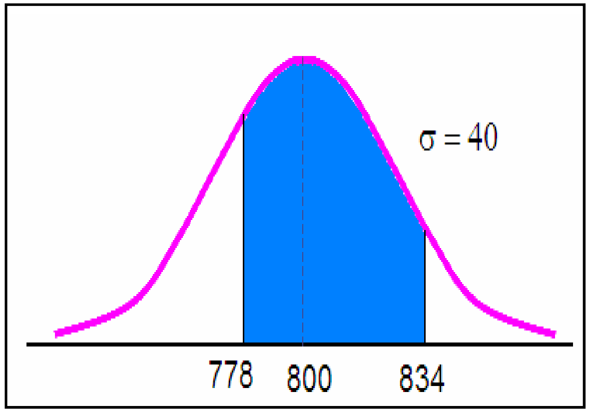
$$P(778 < X < 834) = P\left(\frac{778-800}{40} < Z < \frac{834-800}{40}\right)$$

$$= P(-0,55 < Z < 0,85)$$

$$= P(Z < 0,85) - P(Z \le -0,55)$$

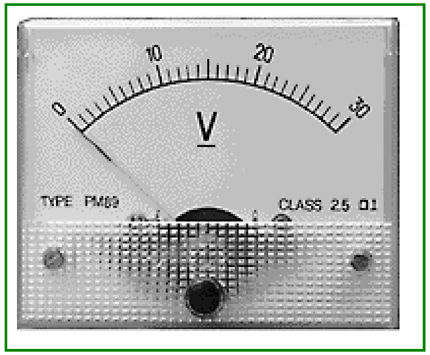
$$= 0,8023 - 0,2912$$

$$= 0,5111$$



# Contoh 2






Suatu pabrik dapat memproduksi voltmeter dengan kemampuan pengukuran tegangan, **rataan 40 volt** dan **standar deviasi 2 volt**. Misalkan tegangan tersebut berdistribusi normal.

Dari 1000 voltmeter yang diproduksi, berapa voltmeter yang tegangannya **melebihi 43 volt**?

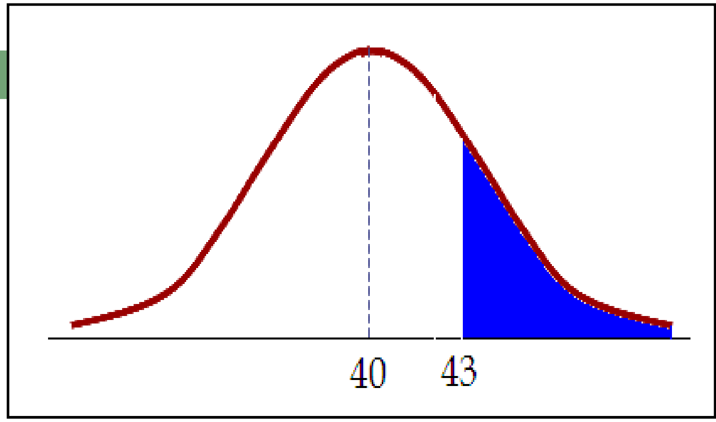
# Jawab



Misal $X$ : tegangan voltmeter

$$X \sim N\,(40, 4)$$

Dengan transformasi $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$




$$\begin{aligned} P(X > 43) &= P\left( Z > \frac{X - 43}{2} \right) \\ &= P(Z > 1,5) \\ &= 1 - P(Z \leq 1,5) \\ &= 1 - 0,9332 \\ &= 0,0668 \end{aligned}$$

Banyaknya voltmeter yang tegangannya lebih dari 43 volt adalah

1000 unit x 0,0668

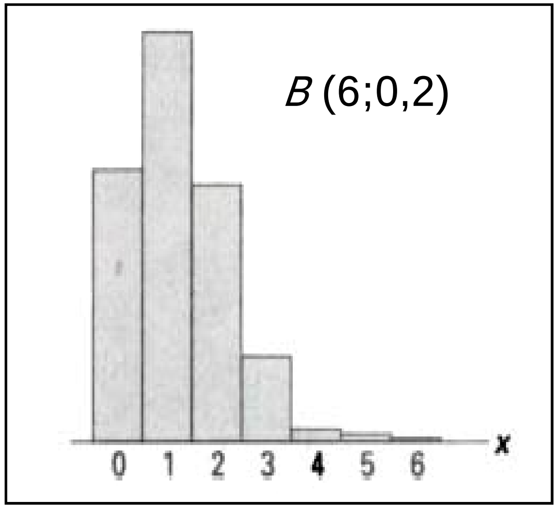
≈ **66 unit**

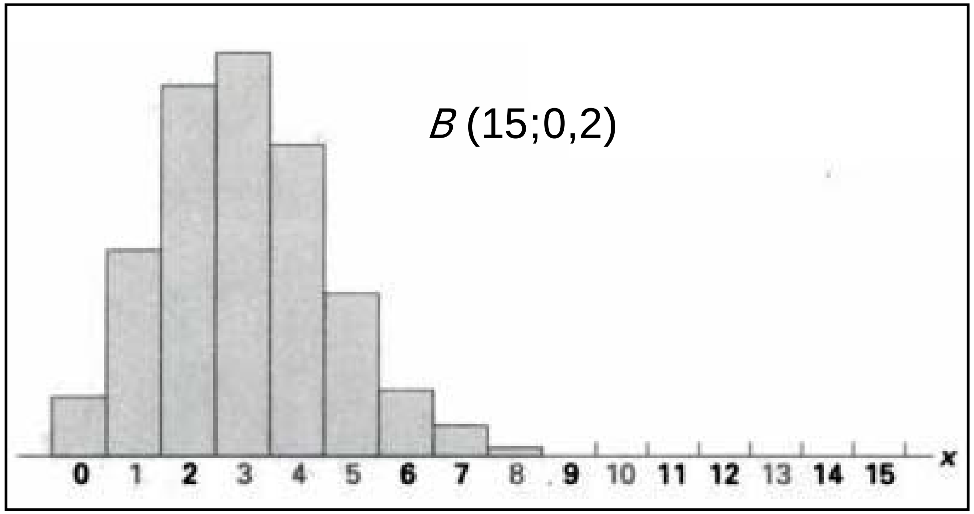
# Aproksimasi Binomial dengan Normal



Jika $n \to \infty$ maka $B(n,p) \to N(\mu,\sigma^2)$

dimana $\mu = np$ dan $\sigma^2 = np(1-p)$




*Semakin besar n, binomial semakin dekat ke normal*

# Contoh 3



*http://www.bratachem.com/abate/images/demam.jpg*

Misal **peluang** seorang pasien sembuh dari suatu penyakit demam berdarah adalah **0,4**.

Bila diketahui ada **100 pasien** demam berdarah, berapa peluangnya bahwa yang sembuh

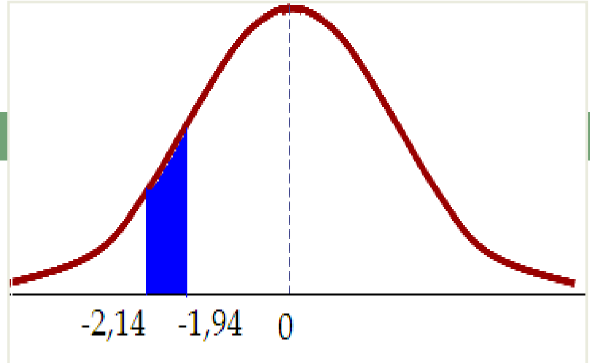
a. **tepat 30** orang

b. **kurang dari 30** orang

# Jawab

Misal $X$ : banyaknya pasien yang sembuh

$X \sim B(n,p)$ , $n$ = 100 ; $p$ = 0,4




Rataan: $\mu = np$ = 100 x 0,4 = 40

St.Dev: $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{40 \times 0,6} = 4,899$

a. Peluang bahwa banyaknya pasien yang sembuh tepat 30 orang adalah:

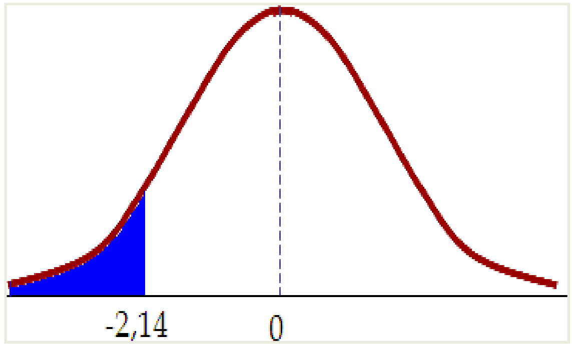
$$\begin{aligned} P(X=30) &\approx P(29,5 < X < 30,5) \\ &= P\left(\frac{29,5-40}{4,899} < Z < \frac{30,5-40}{4,899}\right) \\ &= P(-2,14 < Z < -1,94) \\ &= P(Z < -1,94) - P(Z < -2,14) \\ &= 0,0262 - 0,0162 \\ &= 0,01 \end{aligned}$$

# Jawaban lanjutan



b. Peluang bahwa banyaknya pasien yang sembuh akan kurang dari 30 adalah:

$$
\begin{aligned}
P(X < 30) &\approx P\left(Z < \frac{29,5-40}{4,899}\right) \\
&= P(Z < -2,14) \\
&= 0,0162
\end{aligned}
$$

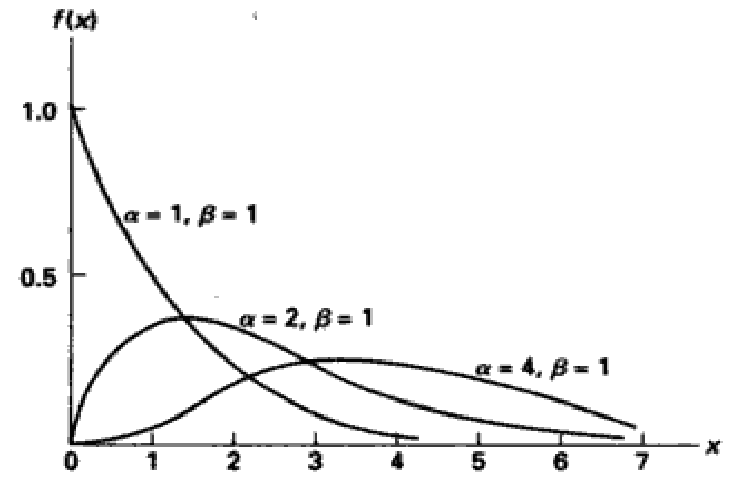


# Distribusi Gamma

- Notasi $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$
- f.k.p

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} & , 0 < x < \infty \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

$$\alpha > 0 \text{ dan } \beta > 0$$



Distribusi Gamma

- $\Gamma(\alpha)$ disebut fungsi gamma

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$$

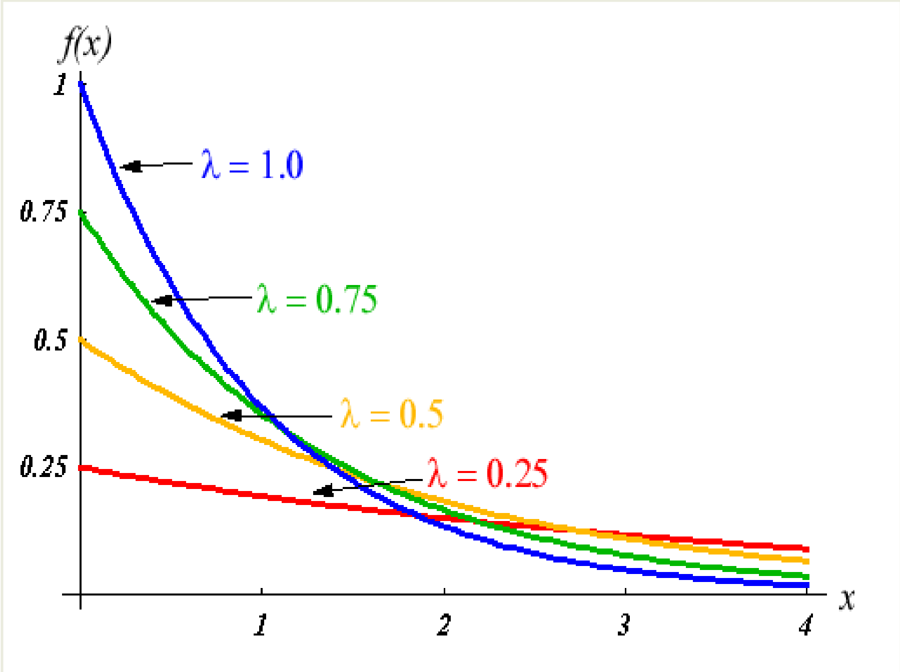
dimana $\Gamma(1) = 1$ dan $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$, jika $\alpha > 1$

- $E[X] = \alpha\beta$ dan $Var(X) = \alpha\beta^2$
- Digunakan untuk memodelkan waktu tunggu
- Keluarga Gamma($\alpha,\beta$): distribusi eksponensial, khi kuadrat, Weibull, dan Erlang

# Distribusi Eksponensial

- Keluarga distribusi gamma (1, 1/λ)
- Notasi: $X \sim \text{Exp}(\lambda)$
- f.k.p

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & , 0 < x < \infty \\ 0 & , x \text{ lainnya} \end{cases}$$

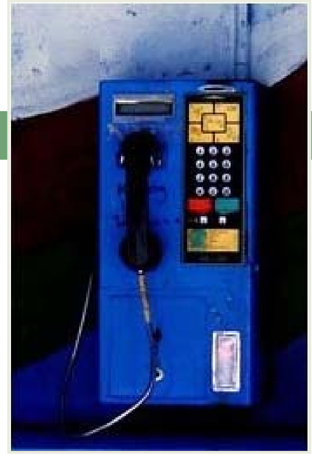



  - $E[X] = 1/\lambda$
  - $\text{Var}(X) = 1/\lambda^2$
  - Digunakan untuk memodelkan waktu antar kedatangan

# Contoh 4



Misalkan lama pembicaraan telepon dapat dimodelkan oleh distribusi eksponensial, dengan rataan 10 menit/orang.



*http://www.beritajakarta.com/images/foto/antri-pasar-murah-a.jpg&imgrefurl=http://pdpjaktim.blogspot.com/2007/09/*

Bila seseorang tiba-tiba mendahului anda di suatu telepon umum, carilah peluangnya bahwa anda harus menunggu:

a. lebih dari 10 menit

b. antara 10 sampai 20 menit

# Jawab



Misalkan X : lama pembicaraan telepon
Dik. X ~ exp(1/10) sehingga

$$f(x) = \frac{1}{10} e^{-x/10}$$

Tapi lama pembicaraan setara dengan waktu menunggu .

Jadi,

a.
$$P(X > 10) = 1 - P(X \le 10)$$
$$= 1 - \int_0^{10} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 1 - 0,368 = 0,632$$

b.
$$P(10 < X < 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{10} e^{-x/10} dx = 0,233$$

# Referensi




- Walpole, Ronald E. dan Myers, Raymond H., *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Edisi 4, Bandung: Penerbit ITB, 1995.
- Walpole, Ronald E., et.al, 2007, *Statistitic for Scientist and Engineering*, 8th Ed., New Jersey: Prentice Hall.
- Pasaribu, U.S., 2007, *Catatan Kuliah Biostatistika*.