4. Rozpiszmy $a^n - 1$ jako $(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a^0)$

jeżeli $a \neq 2$ wtedy $a-1 \neq 1$, i nasza liczba będzie miała dzielnik inny niż 1 i samą siebie

2.7 Pokażemy indukcyjnie

Podstawa dla $n=1$

$f_1 = 1 \quad f_2 = 1$ tak więc oczywiście $nwd(1,1) = 1$

Załóżmy więc że $nwd(f_n, f_{n+1}) = 1$ i pokażemy że $nwd(f_{n+1}, f_{n+2}) = 1$ wiemy że $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$

mamy więc $nwd(f_{n+1}, f_{n+2}) = nwd(f_{n+1}, f_{n+1} + f_n)$

korzystamy z własności $nwd(a+bt, b) = nwd(a,b)$

tak więc

$nwd(f_{n+1}, f_{n+1}+f_n) = nwd(f_{n+1}, f_n)$ a z założenia wiemy że to 1

2.2.

mamy układ

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod 5 & (1) \\ x \equiv 3 \pmod 7 & (2) \\ x \equiv 4 \pmod{13} & (3) \end{cases}$$

ponieważ 5, 7, 13 są względnie pierwsze to wiemy że układ ma rozwiązanie (dodatkowo conajmniej 1 mniejsze lub równe $NWW(5,7,13)$)

Będziemy szukali kolejnych wielokrotności

z (1) wiemy że $x = 5k + 2$ gdzie $k \in \mathbb{Z}$ szukamy więc x_k które spełnią również (2)

$x_0 = 2 \quad x_1 = 7 \quad x_2 = 12 \quad \boxed{x_3 = 17}$

wiemy stąd że $x \equiv 17 \pmod{35}$ szukamy

$x_l = 17 + 35l$ które spełnią (3) i mamy $\underline{x_0 = 17}$

bo $17 \pmod{13} = 4$ tak więc nasze rozwiązanie to $17 + k\cdot 455$