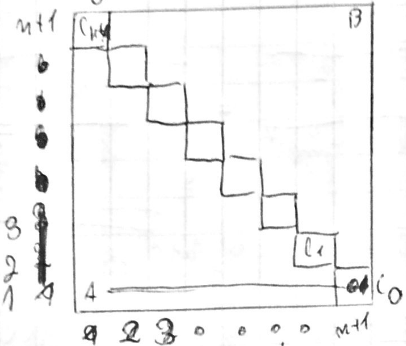
2.7 Pokażemy że liczba dróg na szachownicy $(n+1)\times(n+1)$ z lewego dolnego rogu do prawego górnego rogu wynosi $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$

mamy szachownicę o dowolnym boku $n+1$



Rozważmy drogi z punktu A do punktów $C_0 \dots C_{n+1}$ oraz $C_0 \dots C_{n+1}$ innymi słowy dzielimy drogę z A do B na dwie równe części do przebycia których potrzebujemy $n+k$ kroków w ten sposób otrzymujemy dwie drogi gdzie ilość sposobów przebycia drugiej będzie zależała od pierwszej tak więc dla $k=0$ (nie idziemy w górę) mamy $\binom{n}{0}$ możliwości czyli 1 dla drogi z C_0 do B mamy $\binom{n+k}{k}$ możliwości (nie idziemy w prawo) i jest znów 1 możemy to zapisać jako $\binom{n}{0}^2$ ponieważ $n=k$

n - liczba kroków w prawo

k - w górę

dla następnych k otrzymamy

$$\binom{n-1+1}{1}\binom{1+k-1}{1} = \binom{n}{1}\binom{k}{1} = \binom{n}{1}^2$$

tak więc ilość wszystkich dróg wyliczonych takim sposobem jest równa

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$$

Zwinięcie sumy $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$ wiemy że $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$ wtedy

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$$

Aby to udowodnić wystarczy policzyć gdzie $r=s=n$ a $k=0$ liczbę ścieżek jako

$$\binom{n+n}{n}$$

lub skorzystać z wzoru

$$\sum_{k=-m}^{n}\binom{r}{m+k}\binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$$