Egzamin z analizy numerycznej (L)

8 lutego 2021 r.

Pierwszy termin

Pracuj samodzielnie!!!

Część 1: godz. 9.30–10.15, **jedno zadanie**.

Deklaracja wyboru: godz. 9.30–9.45 $\Rightarrow$ SKOS.

1. $\boxed{\text{13 punktów}}$ Podaj definicję krzywej Béziera P stopnia n o punktach kontrolnych $W_k \in \mathbb{E}^2$ $(0 \le k \le n)$. Uzasadnij, że dla każdego $t \in [0,1]$, $P(t)$ jest punktem na płaszczyźnie.

2. $\boxed{\text{13 punktów}}$ Dana jest *postać Béziera* wielomianu $p \in \Pi_n$, tj.

$$p(t) := \sum_{k=0}^{n} a_k B_k^n(t),$$

gdzie B_k^n oznacza k-ty wielomian Bernsteina stopnia $n \in \mathbb{N}$ $(0 \le k \le n)$. Uzasadnij, że

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k^{(1)} B_k^{n+1}(t) \qquad \text{dla} \qquad a_k^{(1)} := \frac{n-k+1}{n+1} a_k + \frac{k}{n+1} a_{k-1} \quad (0 \le k \le n+1),$$

gdzie przyjęto $a_{-1} = a_{n+1} := 0$. Jakie zastosowanie może mieć ta zależność?

3. $\boxed{\text{13 punktów}}$ Podaj definicję ciągu wielomianów ortogonalnych względem dyskretnego iloczynu skalarnego $(\cdot,\cdot)_N$. Jak efektywnie wyznaczać takie wielomiany? Jakie jest ich zastosowanie w aproksymacji średniokwadratowej na zbiorze dyskretnym?

4. $\boxed{\text{13 punktów}}$ Znajdź wielomiany P_0, P_1, P_2 ortogonalne względem iloczynu skalarnego

$$(f,g) := f(-3)g(-3) + f(-2)g(-2) + f(0)g(0) + f(2)g(2) + f(3)g(3).$$

Wykorzystując otrzymane wielomiany, wyznacz wielomian $w_2^* \in \Pi_2$ najlepiej dopasowany w sensie aproksymacji średniokwadratowej do danych

x_k	-3	-2	0	2	3
y_k	4	1	2	1	4

.

Powodzenia!

Paweł Woźny

Pamiętaj, że

1. rozwiązanie **musi być spisane na szablonie** udostępnionym w SKOSie;
2. **plik PDF** z rozwiązaniem musi mieć **orientację pionową**, **być czytelny** oraz zawierać **następujące dane**: imię i nazwisko, numer części i numer zadania;
3. sprawdzane mogą być **jedynie zadeklarowane zadania** spełniające **podane warunki** oraz **przesłane w ustalonym czasie** (patrz wyżej i SKOS).