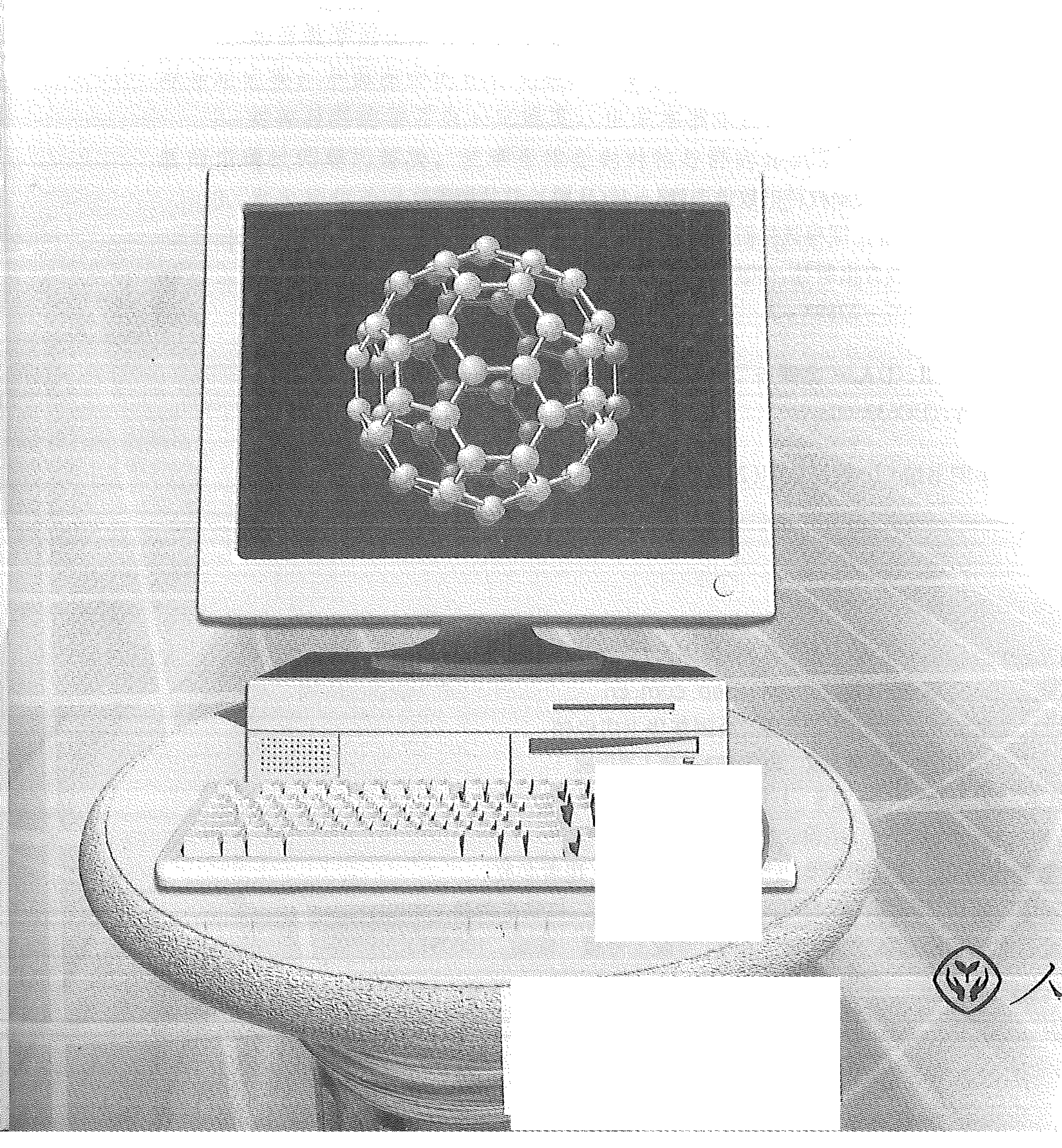
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3-4　对称与群

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　杨　静
责任编辑　　龙正武
版式设计　　王　喆
封面设计　　李宏庆

图书在版编目(CIP)数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修3—4（B版）教师教学用书／人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著．—北京：人民教育出版社，2010.6（2015.3重印）
ISBN 978-7-107-22895-7

Ⅰ.①普…　Ⅱ.①人…②课…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第036369号

人民教育出版社　出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销
2010年6月第1版　2015年3月第1次印刷
开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：2.5　字数：50千字
定价：5.10元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版二科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

说　　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2006年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书　数学选修3-4　对称与群（B版）》的使用编写的教师教学用书.

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想. 帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求及要达到的教学目标. 帮助教师完成"课标"中规定的教学任务.

3. 对相关内容进行分析，并提出一些教法建议，帮助教师克服教学中的一些困难.

本册教师教学用书每章包括三部分：概述、内容分析、习题参考答案或提示.

教材的课程目标的确定，主要依据是教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准》中系列3的相关内容的教学要求.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面再对选修3-4作如下说明，以帮助老师理解教材.

1. 本书教学的主要任务是提供对称与群的一般概念与方法. 书中主要介绍了：平面图形的对称性与等距变换；平面图形的对称变换群；置换群与抽象群；群论的应用.

2. 对称与群的学习有一定难度，但是本书中所选问题都比较贴近生活实际，易于让学生产生兴趣. 教师应通过问题的解决，使学生体会到对称与群的知识是有用的，进而激发学生学习这些知识的热情.

3. 本专题作为选修教材，文理科学生都可以选用，如果配合《矩阵与变换》学习，效果更好.

对称与群作为中学数学教材编写，在我国还是首次，有些内容的编排选择没有经验，又由于时间紧，书中必然存在不少缺点，欢迎广大教师和教学研究人员指正.

中学数学教材实验研究组
2010年8月

目录

第一章

平面图形的对称性与等距变换

Ⅰ 概　　述

一、教学要求

1. 掌握平面的轴反射变换、中心反射变换、旋转变换、平移变换的概念.

2. 掌握平面图形的轴反射变换、中心反射变换、旋转变换、平移变换的定义，以及平面图形对称性变换的一般定义；对给定的平面图形能够观察出它的对称性变换.

3. 掌握变换的合成的概念，会求两个变换的合成；理解变换合成满足结合律，不满足交换律；理解恒等变换和可逆变换的意义.

4. 了解平面的等距变换的概念、简单性质及分类.

二、内容编排

本章分为两部分.

第一部分重点讨论对称与变换. “对称变换”是一个精确的数学概念. 对称变换不但可以用来解释人们直观中的几何对称现象，而且可以量化不同的对称之间的区别. 因此，学习“对称”首先应该从几何直观入手，通过对各种不同的几何图形的观察获得“对称”的感性认识，然后进一步把“对称”的直观概念上升到“对称变换”的数学概念. 考虑到中学生的认知能力，教材从学生熟悉的轴对称和中心对称入手，通过具体分析轴对称图形与轴反射变换的关系以及中心对称图形与中心反射变换的关系，引出变换与对称性的密切关系. 其次，通过引入旋转变换和平移变换的概念，给出旋转对称性和平移对称性的数学描述. 从而引导学生对图形的对称性有一个直观而全新的认识.

第二部分，首先通过分析三种变换（轴反射变换、旋转变换、平移变换）的共同特点，给出等距变换的概念和基本性质，其次给出变换合成（乘法）运算的概念和性质. “变换”就其数学定义来说是比

较形式化的，变换是一个集合到自身的一一映射．学生对于“映射”的概念并不陌生，因为高中阶段函数的概念是建立在映射的基础上的．但是，高中阶段学生所真正接触到的映射大多是数集到数集之间的映射，“对称变换”讨论的是几何空间上的映射，或者是某些更为特殊的集合上的映射．“变换的合成”是一个更为抽象的概念，也是本模块的一个中心概念．变换的合成实际上就是映射的合成．

三、课时分配建议

1.1　变换与对称	
1.1.1　轴反射变换与轴对称图形	0.5 课时
1.1.2　中心反射变换与中心对称图形	0.5 课时
1.1.3　旋转变换与旋转对称图形	0.5 课时
1.1.4　平移变换与平移对称图形	0.5 课时
1.2　等距变换与刚体运动	
1.2.1　等距变换及其性质	0.5 课时
1.2.2　等距变换的合成运算及性质	1 课时
1.2.3　平面刚体运动	0.5 课时

Ⅱ　内容分析

1.1　变换与对称

1.1.1　轴反射变换与轴对称图形

1. 首先通过丰富的对称图形，让学生感受日常生活和现实世界中存在着大量对称现象．

2. 给出变换的定义：一个集合 S 到它自身的一一映射 φ，叫做变换，记为

$$\varphi:\ S\leftrightarrow S.$$

注意，如果不专门指出的话，本模块所讨论的变换指的是平面上的点变换．

3. 给出轴反射变换的定义：设 L 是平面上一条给定的直线，把平面 α 上任意一点 P 映射为关于直线 L 的对称点 P' 的点变换，称为平面 α 关于直线 L 的轴反射变换，直线 L 称为反射轴．

这个定义比较抽象，需要借助图形帮助学生来理解．可以同时给出命题：反射轴垂直平分连接每一对对应点 P，P' 的线段，让学生知道如何具体实施轴反射变换．

不动点的定义：如果在一个变换下，一个点被映射到自身，那么这个点称为该映射的不动点．

注意，反射轴上的所有点都是轴反射变换的不动点．

进一步引导学生观察图形发现，在轴反射变换下，一个图形的象与该图形全等．从而得出：轴反射变换是全等变换．这为后面讲解全等变换做准备．

4. 给出轴对称图形的定义，同时回顾初中学习的轴对称图形的直观定义：如果一个平面图形沿一条直线折叠后，直线两旁的部分能够互相重合，那么这个图形叫做轴对称图形，这条直线叫做对称轴.

说明初中的定义有两点局限：

(1) “折叠”最大的不好之处是会引起被折叠图形的变形，不利于推广；

(2) 初中时候对折叠的理解是，对图形本身的折叠，而不是对图形所在整个平面的折叠.

此时需要引导学生确立两个观念：

(1) 在反射变换的过程中，整个平面都在“动”，图形跟着“动”；

(2) 在平面反射变换下，变换后的“整个”图形与原图形重合.

5. 了解轴反射变换的一些性质.

6. 这部分内容及随后的三小节内容，都是要通过分析图形的不同对称性，寻求刻画不同图形对称性的思想，让学生逐步形成图形对称变换的概念. 这需要在讲完第一节后予以总结.

1.1.2 中心反射变换与中心对称图形

与“轴反射变换与轴对称图形”部分类似，这里是要建立点反射变换与中心对称图形的关系.

1. 给出中心反射变换的定义：设 O 是平面 α 上一个给定的点，把平面 α 上任意一点 P 映射为关于点 O 的对称点 P' 的点变换，称为平面 α 关于 O 的中心反射变换，点 O 称为反射中心.

教师可以借助图形，同时给出命题：反射中心平分任意两个对应点之间的连线，从而让学生知道如何具体实施中心反射变换.

注意，反射中心是中心反射变换唯一的不动点.

进一步引导学生观察图形发现，在中心反射变换下，一个图形的象与该图形全等. 从而得出：中心反射变换是全等变换.

2. 回顾初中学习的中心对称图形的定义：在平面内，把一个图形绕定点旋转 180°，如果旋转前后的图形互相重合，那么这个图形叫做中心对称图形，这个点叫做它的对称中心.

通过一个中心对称图形的例子来说明，中心反射变换与绕该中心旋转 180°的变换相同. 继而给出中心对称图形的定义.

3. 了解中心反射变换的一些性质.

4. 引导学生思考平面图形的轴对称和中心对称概念的共性，即这两种对称性都是在平面的某些运动下，运动前后的图形可以重合. 这可为平移对称性的引入做好铺垫.

1.1.3 旋转变换与旋转对称图形

这部分内容是中心反射变换的一个推广.

1. 中心对称图形是绕对称中心旋转 180°后，得到的图形与自身重合. 我们接下来考虑绕某一点旋转某个角度后，也与自身重合的图形.

即给出旋转变换的定义：在平面 α 上，把每一点 P 绕一个固定点 O 旋转一个定角 θ，变成另外一个点 P'，这样的变换称为平面 α 的一个旋转变换，定点 O 称为旋转中心，定角 θ 称为旋转角.

2. 中心反射变换是旋转角为 180°的一个旋转变换. 即中心反射变换是旋转变换的一个特殊情况.

3. 决定一个旋转变换的三要素：旋转中心、旋转方向、旋转角.

4. 约定：如不特别声明，这里所说的旋转都是按逆时针方向旋转.

5. 由于在几何变换中，我们只关心点的变换结果，不关心变换过程，所以对于同一个旋转中心，旋转角分别为θ与$\theta+360^\circ$所决定的变换是相同的.

6. 保持平面上每个点都不动的变换称为恒等变换. 比如，旋转角为0°的旋转变换是恒等变换.

应当让学生注意到，恒等变换是任何平面图形的一个对称变换. 使学生认识恒等变换在变换概念中的特殊性，由此认识它的重要意义.

7. 旋转对称图形的定义. 注意：如果图形具有旋转角为θ的旋转对称性，那么它也具有旋转角为2θ，3θ，…的旋转对称性.

8. 通过一个具体图形的旋转变换，引导学生发现一个一般结论：任何一个旋转变换可以归结为连续两个轴反射变换的结果，其中两个反射轴的交点是旋转中心，且若旋转角为θ的话，那么两个反射轴的夹角为$\frac{\theta}{2}$.

9. 了解旋转变换的性质.

1.1.4 平移变换与平移对称图形

1. 通过图形演示，引入平移变换的定义：在平面π上给定一个向量$\overrightarrow{AA'}$，把每一点P按照给定向量$\overrightarrow{AA'}$的方向移动到另外一个点P'，并且使得向量$\overrightarrow{PP'}$与$\overrightarrow{AA'}$长度相同，由此所产生的变换称为沿着向量$\overrightarrow{AA'}$的一个平移变换，$\overrightarrow{AA'}$称为平移向量，即将平面的每一个点都沿某个方向移动一个给定距离.

2. 决定一个平移变换的两要素：移动距离、移动方向. 因此选择用平移向量表示平移变换.

3. 平移变换是全等变换.

4. 平移距离为0的平移变换是恒等变换.

5. 平移对称图形的定义建议举例说明.

6. 了解平移变换的一些性质.

1.2 等距变换与刚体运动

1.2.1 等距变换及其性质

这部分主要是从几何上描述和刻画等距变换.

1. 在前面，我们实际上给出了三种不同的变换：轴反射变换、旋转变换（中心反射变换是旋转变换的一个特例）、平移变换. 它们都是全等变换，它们都保持平面上任意两点之间的距离不变. 保持平面的任意两点间距离不变的平面变换叫“等距变换”. 等距变换也叫全等变换.

2. 总结前面的知识，可以得到等距变换的定理1：平面上的轴反射变换、旋转变换和平移变换都是等距变换.

注：平面上只有这三种等距变换. 因为任何一个等距变换都可以分解成平移、旋转和反射变换的合成. 从这个角度看，平移、旋转和反射是三个基本的等距变换.

3. 定理2给出了等距变换的四条性质，应强调等距变换保持平面图形的形状和大小不变. 特别地，它把直线变成直线，把线段变成等长的线段，把角变成大小相等的角.

这个定理说明，平面上不共线的三个点的象唯一决定了等距变换．这句话有两层意思：

（1）引导学生理解，所谓决定一个平面变换就是给出了平面的每个点的象．对于平面等距变换，只要给出不共线的三个点的象，其他所有点的象也就随之确定了．

（2）也就是说，如果存在平面上不共线的三个点，它们在两个等距变换下的象分别相同，则这两个等距变换必相同，即平面上每个点在这两个等距变换下的象都相同．

4．注意，对于教材中的平面等距变换概念应紧扣“直观”和“了解”这个教学要求，不要拔高．重点是让学生学会观察简单平面图形有哪些对称变换．

1.2.2　等距变换的合成运算及性质

1．首先通过直观比较，引导学生发现接连实施图形的两个对称变换，可以得到该图形的一个新的对称变换，由此建立等距变换合成运算的定义．变换σ，τ的合成$\tau\cdot\sigma$，简记为$\tau\sigma$，可以把这种运算看成一种“乘法”运算．按照习惯读作“τ乘以σ”，但是是先实施变换σ，再进行变换τ．在这本教材里，用变换σ对点P做变换，其象记为$\sigma(P)$，再用变换τ对点$\sigma(P)$做变换，得到象$\tau(\sigma(P))$，记为$\tau\cdot\sigma(P)$．

2．详细讨论等距变换的合成的性质，注意要结合具体例子来说明．

（1）封闭性．如果σ，τ是平面上的两个等距变换，那么它们的合成$\tau\cdot\sigma$也是一个等距变换．

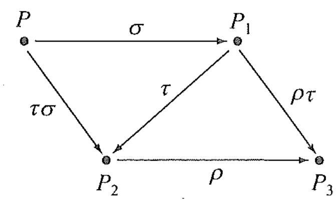
由旋转变换的例子，引出等距变换的方幂运算及性质

$$\sigma^m\sigma^n=\sigma^{m+n}，(\sigma^m)^n=\sigma^{mn}，$$

其中m，n为任意正整数．

（2）结合律．建议先复习数字乘法的结合律，讲清结合律的含义．接着验证任意三个平面变换ρ，τ，σ满足$\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$．书上给出了传统的验证方法，这个方法很简洁，不过对中学生来说可能过于形式化、符号化．所以也可采用图示的直观方法来验证．

如右图所示，设ρ，τ，σ是平面的任意变换，P是平面的任一点，σ把点P映到点P_1，τ把点P_1映到点P_2，ρ把点P_2映到点P_3．



先作乘法$\tau\sigma$，有$\tau\sigma$：$P\to P_2$，然后用ρ乘$\tau\sigma$，有

$$\rho(\tau\sigma)：P\xrightarrow{\tau\sigma}P_2\xrightarrow{\rho}P_3，$$

即$(\rho(\tau\sigma))(P)=P_3$．

若先作变换σ，有σ：$P\to P_1$，然后用$\rho\tau$乘σ，有

$$(\rho\tau)\sigma：P\xrightarrow{\sigma}P_1\xrightarrow{\rho\tau}P_3，$$

即$((\rho\tau)\sigma)(P)=P_3$．

可以看出，平面的任意一点在变换$\rho(\tau\sigma)$和$(\rho\tau)\sigma$下的象都一样，也就是$\rho(\tau\sigma)$和$(\rho\tau)\sigma$变换平面的效果一样，所以$\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$．

（3）单位元就是平面上的恒等变换．

（4）逆元．要掌握公式$\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=e$．

3．在讨论完等距变换的性质后，可给出群的定义．

这是为第三章给出一般抽象群的定义做准备和铺垫．

提醒学生注意：这里的运算对象是等距变换，不是数．

4. 等距变换的合成运算不满足交换律.

建议先复习数字乘法的交换律，再引出教材里的例子，得出变换的乘法不满足交换律的结论. 最后应归纳一下，“不满足交换律”是指，至少可以找出两个变换，它们做乘法不能交换，但是不排除有的变换做乘法可以交换.

5. 根据等距变换的不动点情况，可以判断等距变换具体是哪种变换类型. 这就是定理1，它说明等距变换只有三种类型：旋转、轴反射、平移.

6. 理解滑移定义.

1.2.3 平面刚体运动

1. 讲解刚体运动定义. 应指出，严格地讲，在力学中，平面刚体运动是指平面的实际运动，也就是说，它是平面在自身内连续移动的结果，如平面的旋转和平移.

2. 平面上的旋转变换、平移变换及它们的合成变换都是刚体运动.

3. 让学生思考：为什么轴反射不是刚体运动?

因为它不能通过平面在自身内连续移动来实现. 尽管平面关于一条直线的反射变换可让平面绕这条直线在三维空间旋转 180° 来实现，但是，这已经不是在平面自身内的连续移动了.

Ⅲ 习题参考答案或提示

练习（第 12 页）

1. $\{1, 2, 3\}$，$\{1, 3, 2\}$，$\{2, 3, 1\}$，$\{2, 1, 3\}$，$\{3, 1, 2\}$，$\{3, 2, 1\}$.

2. $\frac{360^\circ}{7}$，$\frac{360^\circ}{9}=40^\circ$，$\frac{360^\circ}{12}=30^\circ$.

练习（第 18 页）

1. 在平面上，把一个斜三角形实施轴反射变换后，得到的三角形不能通过刚体运动与原三角形重合. 而滑移变换包括轴反射变换，所以不是刚体运动.

2. 比如：关于两条相交直线的反射变换，合成一个旋转变换.

思考与交流（第 20 页）

1. 设等距变换 σ 只有唯一的不动点 O，以 O 为圆心建立直角坐标系.

首先可以证明 σ 把 x 轴变换成一条通过原点的直线 l（设其倾斜角为 θ），再利用定理2的（3）证明 σ 实际上是把 x 轴旋转成了直线 l.

然后即可证明 σ 是一个旋转变换.

2. 以旋转变换的不动点建立直角坐标系，写出旋转变换和平移变换的代数表达式，然后建立方程组，解方程组即可.

3. 关于两条相交直线的反射变换合成一个旋转变换的证明如下：

假设 l_1，l_2 是两条相交直线，交点为 O，从 l_1 到 l_2 方向旋转的角度为 θ.

在 l_1 和 l_2 上分别取点 A，B，作一个三角形 OAB（图 1）．对平面先做关于直线 l_1 的轴反射变换 σ_1（图 2），再做关于直线 l_2 的轴反射变换 σ_2，三角形 OAB 变成三角形 $OA'B'$（图 3）.

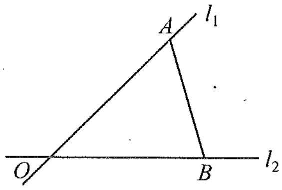


图 1

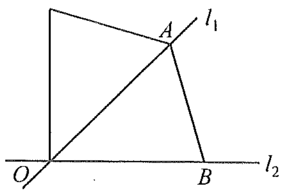


图 2

比较三角形 OAB 和三角形 $OA'B'$ 位置的变换可知，先后接连实施两个变换 σ_1 和 σ_2 的合成变换 $\sigma_2\sigma_1$，恰好是三角形 OAB 绕点 O 依从 l_1 到 l_2 的方向旋转 2θ 得到的．即命题成立.

4. 略.

5. 等距变换与刚体运动的区别是：

等距变换保持任意两点之间的距离不变，而刚体运动则把平面上任意的几何图形变成与自己能够完全重合的几何图形.

轴变换是等距变换，但它就不是刚体运动．比如一个三条边都不相等的三角形，经轴变换后得到的图形，虽然与原三角形全等，但无法重合.

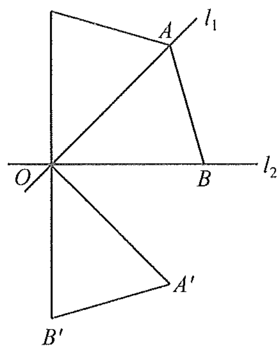


图 3

巩固与提高（第 20 页）

1. 因为

$$\sigma_1：P(1，0)\to P_1(2，1)，\sigma_2：P_1(2，1)\to P_2(3，0)，$$

所以

$$\sigma_2\sigma_1：P(1，0)\to P_2(3，0).$$

又因为

$$\sigma_2：P(1，0)\to P_3(2，-1)，\sigma_1：P_3(2，-1)\to P_4(3，0)，$$

所以

$$\sigma_1\sigma_2：P(1，0)\to P_4(3，0).$$

2. 设 $(x，y)$ 为平面上任意一个点，且 $\sigma_1(x，y)=(x'，y')$，则

$$\begin{cases}\dfrac{y-y'}{x-x'}=\dfrac{1}{2}\\ 2\,\dfrac{x+x'}{2}+\dfrac{y+y'}{2}=0\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-3x-4y}{5} \\ y'=\dfrac{-4x+3y}{5} \end{cases}$$

设 $\sigma_2(x', y')=(x'', y'')$，则

$$\begin{cases} \dfrac{y'-y''}{x'-x''}=\dfrac{1}{2} \\ 2\dfrac{x'+x''}{2}+\dfrac{y'+y''}{2}=2 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x''=\dfrac{-3x'-4y'+8}{5} \\ y''=\dfrac{-4x'+3y'+4}{5} \end{cases}$$

在上式中代入（x'，y'）的表达式，有

$$\begin{cases} x''=x+\dfrac{8}{5} \\ y''=y+\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

因此

$$\sigma_2(\sigma_1(x, y))=\left(x+\frac{8}{5}, y+\frac{4}{5}\right),$$

所以 $\sigma_1\sigma_2$ 是一个平移变换.

同理可证 $\sigma_2\sigma_1$ 也是平移变换.

3. 由题意可知

$$\sigma: P(x, y)\to P'(x+2, y), \tau: P(x, y)\to P'(x, -y),$$

所以

$$\sigma\tau: P(x, y)\to P'(x+2, -y), \tau\sigma: P(x, y)\to P'(x+2, -y).$$

4. 因为

$$\sigma: P(x, y)\to P'(x+1, y+2),$$
$$\tau: P(x, y)\to P'(x\cos\theta-y\sin\theta, x\sin\theta+y\cos\theta),$$

所以

$$\sigma\tau: P(x, y)\to P'(x\cos\theta-y\sin\theta+1, x\sin\theta+y\cos\theta+2),$$
$$\tau\sigma: P(x, y)\to P'((x+1)\cos\theta-(y+2)\sin\theta, (x+1)\sin\theta+(y+2)\cos\theta).$$

第二章

平面图形的对称变换群

Ⅰ 概　　述

一、教学要求

1. 熟练掌握一个平面图形的全体对称变换的集合对于变换的乘法运算，满足封闭性、结合律，有单位元，有逆元.

2. 理解求正 n 边形的对称群的方法，能熟练地写出这些对称群的元素，并计算元素的逆以及两个元素的乘积，列出乘法表.

二、内容编排

本章分为两部分. 第一部分讨论平面图形的对称变换. 通过一个简单的例子，引出对称变换的定义之后，分别讨论四种图形的对称变换：三条边互不相等的三角形，只有两条边相等的三角形，正三角形和正方形. 使得学生对图形的对称变换有清晰而深刻的理解. 为后面讨论对称变换群做准备.

由于图形可以千变万化，我们不可能对每一个图形，都求出它的对称变换. 但是由于许多图形的对称性都是相同的，因此可以研究图形全体的对称变换的整体性质和结构. 这就是我们要研究的平面图形的对称变换群，即本章的第二部分. 群的概念很抽象，为了让学生更好的理解，所以我们重点讨论了正三角形的对称变换群. 同时借助这个例子，引申出置换的符号. 由此，对正方形和正多边形的对称变换群的讨论就容易一些.

在学习了群的定义之后，了解一些群的表达法是必要的. 为了表示一个已知的群，最简单的方法是利用“乘法表”. 假定群 G 含 n 个元素 a_1，a_2，a_3，…，a_n，乘法表是一个由群 G 的元素组成的 $n\times n$ 的一个矩阵，矩阵的（i，j）位置上的元素是 a_ia_j.

三、课时分配建议

2.1 平面图形的对称变换	
2.1.1 三条边互不相等的三角形	0.5 课时
2.1.2 只有两条边相等的三角形	0.5 课时
2.1.3 正三角形	0.5 课时
2.1.4 正方形 $ABCD$	0.5 课时
2.2 平面图形的对称变换群	
2.2.1 平面图形的对称变换群	0.5 课时
2.2.2 正三角形的对称变换群	0.5 课时
2.2.3 正方形的对称变换群	0.5 课时
2.2.4 正多边形的对称变换群	0.5 课时

Ⅱ 内容分析

2.1 平面图形的对称变换

在具体讨论之前，首先给出对称变换、对称图形的定义．即，如果一个平面上的图形 F 在一个等距变换 σ 作用下的象仍与原图形重合，则称 σ 为 F 的一个对称变换．一个图形 F 若具有非恒等的对称变换，则称 F 为对称图形．

归纳一下，一个图形 F 的对称变换 σ 必须是等距变换，且保持 F 不变．

注：这里所谓的保持图形不变，并非指图形上每一点都不变，而是变换前后，两图形仍能完全重合．

如果要想了解一个图形 F 的全部对称性，就需要知道它的全部对称变换，这里用 $S(F)$ 表示图形 F 的全部对称变换所组成的集合．$S(F)$ 完全刻画了图形 F 的对称性．下面四小节就分别讨论了三角形和正方形的对称变换．

2.1.1 三条边互不相等的三角形

画一个三条边互不相等的三角形，利用反证法证明了这种三角形的对称变换只能是恒等变换．

2.1.2 只有两条边相等的三角形

画一个等腰三角形，证明这个三角形的对称变换只有两种：恒等变换，关于底边的垂直平分线的轴反射对称变换．

2.1.3 正三角形

1. 画一个正三角形，指出对称变换一定保持正三角形的中心不变，因此对称变换要么是绕中心的旋转变换，要么是关于通过中心的直线的反射变换.

2. 旋转变换有 3 个：分别为绕中心旋转 $0°$，$120°$，$240°$的旋转变换.

3. 反射变换有 3 个：分别为关于三条底边的垂直平分线的轴反射变换.

2.1.4 正方形 $ABCD$

1. 画一个正方形，指出对称变换一定保持正方形的中心不变，因此对称变换要么是绕中心的旋转变换，要么是关于通过中心的直线的反射变换.

2. 旋转变换有 4 个：分别为绕中心旋转 $0°$，$90°$，$180°$，$270°$的旋转变换.

3. 反射变换有 4 个：分别为关于两条对角线的轴反射变换，及关于两对对边中点连线的轴反射变换.

4. 可以归纳出，正 n 边形的全部对称变换共有 $2n$ 个，其中 n 个旋转变换，n 个反射变换.

5. 图 2-8 的例子说明，这种无限延伸的图形的对称变换有：无穷多个沿着水平轴平移 na 的平移变换（n 为任意正整数），及关于水平对称轴的反射变换.

2.2 平面图形的对称变换群

一个图形的对称性由它的全部对称变换来体现. 本节的主要任务就是要考察一个给定图形 F 的全体对称变换的集合 $S(F)$，看它关于等距变换的乘法运算的性质和结构.

2.2.1 平面图形的对称变换群

1. 对于图形 F 的一个对称变换，记作 $\sigma(F)=F$. 把图形 F 看成 F 上所有的点组成的集合的话，那么定义 $\sigma(F)=\{\sigma(P)\mid P\in F\}$.

2. 图形 F 的全体对称变换的集合是 $S(F)=\{\sigma\mid\sigma\in E(2), \sigma(F)=F\}$，其中 $E(2)$ 表示平面上全体等距变换组成的集合.

3. 回忆平面上全体等距变换组成的集合 $E(2)$ 的合成运算及性质.

4. 之后讨论图形 F 的全体对称变换集合 $S(F)$ 关于等距变换的合成运算的性质：

(1) $S(F)$ 关于等距变换的乘法运算满足封闭性，即若 σ，$\tau\in S(F)$，则 $\tau\sigma\in S(F)$.

(2) 在 $S(F)$ 中等距变换乘法满足结合律，即 σ，τ，$\rho\in S(F)$，则 $\rho(\tau\sigma)=(\rho\tau)\sigma$.

(3) 恒等变换 $\varepsilon\in S(F)$，而且对于 $S(F)$ 中任意变换 σ，有 $\sigma\varepsilon=\varepsilon\sigma=\sigma$.

(4) 若 $\sigma\in S(F)$，则存在 $\sigma^{-1}\in S(F)$，使得 $\sigma\sigma^{-1}=\sigma^{-1}\sigma=\varepsilon$.

5. 把 $S(F)$ 及其乘法运算记作 $(S(F), \circ)$，称为平面图形 F 的对称变换群.

6. 下面三小节就是具体讨论正三角形、正方形、正多边形的对称变换群.

2.2.2 正三角形的对称变换群

1. 在 2.1.3 节我们借助图形用语言描述了正三角形的全体对称变换，为了便于计算，下面将引入简洁的符号表示对称变换.

正三角形 ABC 的任意对称变换，一定是把顶点变成顶点. 因为如果顶点经过变换后的象不是顶点的话，变换后的图形肯定就不会与原三角形重合，也就不是对称变换了. 因此，我们用符号

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$$

来表示对称变换

$$A \to B,\ B \to C,\ C \to A.$$

即把三角形的每个顶点的象写在它的正下方，这样的符号叫作 A，B，C 的一个置换.

2. 注意：一个对称变换可以有不同形式的置换. 也就是说，在一个置换中，第一行中的字母排列顺序可以任意排列，只要确保上下关系不被打乱即可. 即每个点和它的象的对应关系保持不变.

3. 正三角形 ABC 的全部对称变换用置换表示为

$$\rho_0=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & B & C \end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{pmatrix},$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}.$$

这 6 个置换组成的集合 $D_3=\{\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2,\ \tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3\}$，是正三角形 ABC 的对称变换群.

4. 通过具体的对称变换，用新符号演示对称变换的乘积，使学生掌握这一运算.

5. 给出正三角形的全体对称变换的乘法运算结果，即 D_3 的乘法表. 启发学生观察乘法表，不难发现以下事实：

（1）对称变换的乘法不满足交换律；

（2）$\rho_1^3=\tau_1^2=\varepsilon$；

（3）$\rho_1\rho_2=\rho_2\rho_1=\varepsilon$，所以 $\rho_2=\rho_1^2=\rho_1^{-1}$；

（4）$\tau_1\rho_1\tau_1=\rho_1^{-1}$，$\tau_1\rho_1=\tau_2$，$\tau_1\rho_1^2=\tau_1\rho_2=\tau_3$.

从上面的观察可以看到，对称变换群 D_3 虽然含有 6 个元素，但实际上 6 个元素都能表示为 ρ_1 的方幂与 τ_1 的方幂的乘积. 由于这一原因，对称变换群 D_3 也能表示为更简单的形式

$$D_3=\langle \rho_1,\ \tau_1 \mid \rho_1^3=\tau_1^2=\varepsilon,\ \tau_1\rho_1\tau_1=\rho_1^{-1}\rangle.$$

2.2.3 正方形的对称变换群

1. 通过图形演示，给出置换符号下正方形 $ABCD$ 的全部对称变换

$$\rho_0=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix},$$

$$\rho_2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix},\ \rho_3=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix},$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & C & B \end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & A & D \end{pmatrix},$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ D & C & B & A\end{pmatrix},\ \tau_4=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\end{pmatrix}.$$

2. 计算正方形 $ABCD$ 的对称变换的乘积.

△2.2.4 正多边形的对称变换群

1. 讨论了正三角形、正方形的对称变换群后，可以进行推广，推广到正 n 边形的对称变换群 D_n，它有 n 个旋转对称变换，n 个轴反射对称变换.

2. D_n 也称作二面体群，记作（D_n，$\circ$）.

3. 关于这种一般情况的置换表示形式，我们在第三章再讨论.

Ⅲ 习题参考答案或提示

练习（第 25 页）

1. 对称图形有：两边无限延伸的树叶图形，螃蟹，八角星.

2. 第一个图形：分别绕中心旋转 0°，90°，180°，270°的 4 个旋转变换；

第二个图形：分别绕中心旋转 0°，72°，144°，216°，288°的 5 个旋转变换；

第三个图形：分别绕中心旋转 0°，60°，120°，180°，240°，300°的 6 个旋转变换.

3. (1) 平移变换，关于水平对称轴的反射变换；

(2) 平移变换，关于水平对称轴的反射变换，关于垂直水平轴的那条虚线的反射变换.

4. 绕正五边形的中心旋转 0°，72°，144°，216°，288°的 5 个旋转变换，即为所求.

练习（第 32 页）

1. (1) 把图形的 4 个顶点按逆时针方向依次取为 A，B，C，D，则图形的对称变换群包含的元素为

$$\rho_0=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & B & C & D\end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & C & D & A\end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ C & D & A & B\end{pmatrix},$$

$$\rho_3=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ D & A & B & C\end{pmatrix},\ \tau_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & D & C & B\end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ C & B & A & D\end{pmatrix},$$

$$\tau_3=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & A & D & C\end{pmatrix},\ \tau_4=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ D & C & B & A\end{pmatrix}.$$

(2) 把图形的 4 个顶点按逆时针方向依次取为 A，B，C，D，则图形的对称变换群包含的元素为

$$\rho_0=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ A & B & C & D\end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ B & C & D & A\end{pmatrix},$$

$$\rho_2=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ C & D & A & B\end{pmatrix},\ \rho_3=\begin{pmatrix}A & B & C & D\\ D & A & B & C\end{pmatrix}.$$

（3）把图形的 8 个顶点按逆时针方向依次取为 A，B，C，D，E，F，G，H，则图形的对称变换群包含的元素为

$$\rho_0=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\A&B&C&D&E&F&G&H\end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\B&C&D&E&F&G&H&A\end{pmatrix},$$

$$\rho_2=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\C&D&E&F&G&H&A&B\end{pmatrix},\ \rho_3=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\D&E&F&G&H&A&B&C\end{pmatrix},$$

$$\rho_4=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\E&F&G&H&A&B&C&D\end{pmatrix},\ \rho_5=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\F&G&H&A&B&C&D&E\end{pmatrix},$$

$$\rho_6=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\G&H&A&B&C&D&E&F\end{pmatrix},\ \rho_7=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E&F&G&H\\H&A&B&C&D&E&F&G\end{pmatrix}.$$

2. D_4 的乘法表如下：

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_0	τ_4	τ_3	τ_1	τ_2
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_0	ρ_1	τ_2	τ_1	τ_4	τ_3
ρ_3	ρ_3	ρ_0	ρ_1	ρ_2	τ_3	τ_4	τ_2	τ_1
τ_1	τ_1	τ_3	τ_2	τ_4	ρ_0	ρ_2	ρ_1	ρ_3
τ_2	τ_2	τ_4	τ_1	τ_3	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
τ_3	τ_3	τ_2	τ_4	τ_1	ρ_3	ρ_1	ρ_0	ρ_2
τ_4	τ_4	τ_1	τ_3	τ_2	ρ_1	ρ_3	ρ_2	ρ_0

思考与交流（第 33 页）

1. 正五边形的全体对称变换的置换形式为

$$\rho_0=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&B&C&D&E\end{pmatrix},\ \rho_1=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&C&D&E&A\end{pmatrix},\ \rho_2=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&D&E&A&B\end{pmatrix},$$

$$\rho_3=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&E&A&B&C\end{pmatrix},\ \rho_4=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&A&B&C&D\end{pmatrix},$$

$$\tau_1=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\A&E&D&C&B\end{pmatrix},\ \tau_2=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\C&B&A&E&D\end{pmatrix},\ \tau_3=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\E&D&C&B&A\end{pmatrix},$$

$$\tau_4=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\B&A&E&D&C\end{pmatrix},\ \tau_5=\begin{pmatrix}A&B&C&D&E\\D&C&B&A&E\end{pmatrix}$$

D_5 的乘法表为：

	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
ρ_0	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5
ρ_1	ρ_1	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_0	τ_4	τ_5	τ_1	τ_2	τ_3
ρ_2	ρ_2	ρ_3	ρ_4	ρ_0	ρ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_1
ρ_3	ρ_3	ρ_4	ρ_0	ρ_1	ρ_2	τ_5	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
ρ_4	ρ_4	ρ_0	ρ_1	ρ_2	ρ_3	τ_3	τ_4	τ_5	τ_1	τ_2
τ_1	τ_1	τ_3	τ_5	τ_2	τ_4	ρ_0	ρ_3	ρ_1	ρ_4	ρ_2
τ_2	τ_2	τ_4	τ_1	τ_3	τ_5	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1	ρ_4
τ_3	τ_3	τ_5	τ_2	τ_4	τ_1	ρ_4	ρ_2	ρ_0	ρ_3	ρ_1
τ_4	τ_4	τ_1	τ_3	τ_5	τ_2	ρ_1	ρ_4	ρ_2	ρ_0	ρ_3
τ_5	τ_5	τ_2	τ_4	τ_1	τ_3	ρ_3	ρ_1	ρ_4	ρ_2	ρ_0

特点：每个元素都能表示为 ρ_1 的方幂与 τ_1 的方幂的乘积.

2. 旋转×旋转＝旋转，旋转×反射＝反射.

反射×反射＝旋转，反射×旋转＝反射.

3. 是.

4. 略.

巩固与提高（第 34 页）

1. (1) $D=\{\varepsilon\}$；

(2) $D=\{$恒等变换，绕圆的中心旋转 180°的旋转变换$\}$；

(3) $D=\{$恒等变换，绕正三角形的中心分别旋转 120°，240°的旋转变换$\}$；

(4) $D=\{$恒等变换，绕图的中心分别旋转 90°，180°，270°的旋转变换$\}$；

(5) $D=\{$恒等变换，绕图的中心分别旋转$\dfrac{360^\circ}{7}$的 k 倍的旋转变换，其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. 第一个图形的对称变换群的元素是：恒等变换，平移变换；

第二个图形的对称变换群的元素是：恒等变换，平移变换，关于水平中线的轴反射变换.

第三章

置换群与抽象群

Ⅰ 概　　述

一、教学要求

1. 理解置换的概念，掌握置换的表示方法，熟练使用顶点的置换表示正 n 边形的对称变换.

2. 熟练掌握置换的乘法运算，会求置换的逆.

3. 理解置换群，能熟练使用置换群的形式表示正 n 边形的对称群.

4. 理解多项式的对称群、对称多项式的概念. 对于较小的 n，能用穷举法求出给定 n 元多项式的对称群，并能判断对称多项式.

二、内容编排

对称变换群完全刻画了图形的对称性，不过，对称性并不只是图形所特有的性质，在数学中还有其他类型的对称性. 在这一章，我们来研究：

(1) n 次对称置换群；

(2) 多项式的对称变换群；

(3) 抽象群的定义及性质.

本章介绍了置换，但是并不一般地研究置换，重点研究如何用正多边形的顶点的置换表示它的对称群. 因此，无论一个置换本身还是置换的乘法以及求逆的运算，都应理解它们反映的几何背景. 本章还介绍了多项式的对称性，用置换的工具表示它们. 教材最后介绍了抽象群的定义，并用它来验证一些简单的群例，目的仅仅是为了加深学生对群定义内容的印象，并不要求学生有更深入的理解.

“群”是一个非常抽象、非常形式的数学概念. 因为中学生初次接触这种抽象的代数系统，所以在教学过程中切勿简单化，必须从具体的实例出发，通过实例建立变换的乘法运算的概念，了解变换乘法的运算法则. 在实例的诱导下，让学生充分地感受到“群”既是一个联系“对称变换”与代数运算系统

的桥梁，同时，“群”又是一个与普通的数的运算系统十分相似的数学系统，从而进一步获得这样的印象：通过对于群的研究，可以定量地、深入地研究一个特定对象的“对称结构”. 这也是本课程的一个最重要的教学目标.

我们希望在学过本专题后，学生知道客观世界中的对称现象可以用群这一数学概念来研究，理解一些简单几何图形的对称性是如何被刻画的，在数学的研究对象和方法上拓展一些视野.

三、课时分配建议

3.1 n 次对称群 S_n	
3.1.1 置换的概念和表示符号	1 课时
3.1.2 置换的乘法运算	1 课时
3.2 多项式的对称变换群	1 课时
3.3 抽象群的定义与性质	
3.3.1 抽象群的概念	1 课时
3.3.2 群的例子	1 课时

Ⅱ 内容分析

3.1 n 次对称群 S_n

在开始本章内容之前，先复习一下上一章学习的平面图形的对称变换，比如正三角形 ABC 的旋转变换 ρ_1（绕三角形的中心 O 旋转 120°），可以用 $\begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix}$ 来表示. 继而引出正 n 边形，由于其对称变换一定把顶点还变为顶点，所以正 n 边形的对称变换也可以用顶点的变换情况来表示.

3.1.1 置换的概念和表示符号

1. 如果不考虑正 n 边形的顶点 A，B，C，…的几何意义，而只看成集合 $T=\{A, B, C, \cdots\}$ 的元素，那么正 n 边形的每个置换都给出了集合 T 到自身的一个一一对应关系，也就是 T 的一个变换. 即给出了集合 X 的置换的定义，X 的全体置换记作 $\mathrm{Sym}(X)$.

2. 特别地，如果 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$，用记号 S_n 代替 $\mathrm{Sym}(X)$.

3. 设 σ 是集合 $T_n=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个置换，即

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix},$$

其中 i_1，i_2，…，i_n 是 1，2，…，n 的一个排列.

那么 T_n 上的全体 n 次置换共有 $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times2\times1=n!$ 个.

4. 正三角形 ABC 的每个对称变换，对应着它的顶点构成的集合的一个置换，它们的符号相同. 如果用 1，2，3 分别表示正三角形的三个顶点，则正三角形的 $6=3!$ 个对称变换就是集合 {1，2，3} 的 3 次置换，分别为

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}.$$

即利用正三角形的对称变换得到了集合 {1，2，3} 的所有 3 次置换.

5. 正方形 $ABCD$ 的每个对称变换，对应着它的顶点构成的集合的一个置换，它们的符号相同. 如果用 1，2，3，4 分别表示正方形的四个顶点，则正方形的 8 个对称变换就是集合 {1，2，3，4} 的 4 次置换，分别为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

但是，集合 {1，2，3，4} 的 4 次置换不只这些，一共应有 $4!=24$ 个（39 页练习题 1 的答案给出了全部的置换）.

6. 注意：并非正多边形顶点的任一个置换都是该正多边形的对称变换. 如，正方形的顶点按照逆时针方向记为 1，2，3，4，那么置换 $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$ 就不是该正方形的对称变换. 不过，若正方形的顶点按另外的次序标记，那就另当别论. 因此，要提醒学生，需要预先声明顶点的标记方式.

3.1.2 置换的乘法运算

1. 两个 n 次置换 σ，τ 的合成运算的定义：$\sigma\cdot\tau(k)=\sigma(\tau(k))$，$k=1,2,\cdots,n$. 注意，求两个置换的乘积时，仍是从右到左的运算顺序.

2. 用具体的例子演示两个置换的合成运算. 由此可以发现，任意两个 n 次置换的合成还是一个 n 次置换.

3. 让学生练习置换的合成运算.

4. 从练习中发现：

(1) 置换的合成运算不满足交换律；

(2) 置换 $\sigma=\begin{pmatrix}a_1&a_2&\cdots&a_n\\b_1&b_2&\cdots&b_n\end{pmatrix}$ 的逆置换为

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}b_1&b_2&\cdots&b_n\\a_1&a_2&\cdots&a_n\end{pmatrix}.$$

5. 归纳总结全体 n 次置换的集合 S_n 关于置换合成的性质：封闭律、结合律、有恒等元、有逆元. 注意：把（S_n，$\cdot$）称作 n 次对称群.

3.2　多项式的对称变换群

1. 对称现象不仅存在于几何图形中，也存在于多项式中. 多项式的对称性称为代数对称性.

2. 通过例子，观察在变元的某些置换下多项式保持“不变”的性质入手，使学生对多项式对称性有直观的印象. 然后引导学生抽象出多项式的对称变换的概念.

3. 注意：

(1) 任何多项式都有对称变换，因为恒等置换一定是该多项式的对称变换；

(2) 并非每个多项式都有对称性.

4. 通过分析多项式的特点，求解这个多项式的全体对称变换.

5. 对多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的置换，就相当于对这些变量的下标进行置换. 这样就可以把多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换看成集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 的置换.

6. 多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体对称变换，用 $S(F)$ 表示.

7. 如果多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在全体 n 次置换的集合 S_n 中的一个置换 σ 作用下不变，我们也说置换 σ 是多项式 F 的对称变换. 易知 $S(F)\subseteq S_n$.

8. $S(F)$ 称为多项式 $F=F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的对称变换群.

9. 若一个多项式的变量较多，可以先取出多项式 n 个变量的所有置换的集合，即 S_n，再看哪些 n 元置换保持该多项式不变，从而找到多项式的对称变换群.

3.3　抽象群的定义与性质

3.3.1　抽象群的概念

1. 回顾以前学到的平面图形的对称群和多项式的对称群，引导学生归纳它们的共同性质：

(1) 一个非空集合：平面图形的对称群是平面图形的对称变换集合，多项式的对称群是多项式的对称变换集合；

(2) 定义了某种合成运算，即给了集合的任意两个对象，依一定的法则，都能在该集合中找到第三个对象作为它们的运算结果；

(3) 合成运算满足下列四条性质：(Ⅰ) 封闭性；(Ⅱ) 结合律；(Ⅲ) 有单位元；(Ⅳ) 每个元素都有逆元.

2. 举几个例子，说明具有这样性质的带有某种运算的集合很多，可以从中抽象出一个重要概念：群.

3. 在介绍群的概念之前，先定义二元运算. 结合以前学到的变换群，指明它们各自的二元运算是什么. 按照二元运算的概念，群定义中的“封闭性”与“在 G 上有一个二元运算”实际重复了相同的意思. 重复是为了强调这层意思，在初学者验证群的例子时，这个重复很有帮助.

注意：除法不是整数集合 $\mathbf{Z}$ 的二元运算. 因为若 a，$b\in\mathbf{Z}$，而 a 不能被 b 整除，也就是运算结果不属于 $\mathbf{Z}$，这时就不满足二元运算的定义了.

4. 给出群的定义. 对群定义中的“有单位元 e”和“有逆元”，讲解时应结合例题解释. 注意“G

对运算·构成一个群”这句话，例如，我们不能笼统地说“整数集合是一个群”，因为对于通常的数字加法，整数集合构成群，但是，对于通常的数字乘法，整数集合就不构成群.

5. 注意：

（1）虽然人们把群的二元运算叫做“乘法”运算，但是它与数的乘法运算可以毫无关系，且运算符号“∘”常常被省略；

（2）如果遇到的二元运算是过去熟悉的某种运算，如加法运算，那么仍选用传统的符号“＋”.

3.3.2 群的例子

1. 详细讲解本节给出的三个群的例子：

（1）非零有理数集合关于普通乘法运算构成的群；

（2）整数集合关于普通加法构成的群；

（3）集合 $Z_3=\{0, 1, 2\}$ 关于模 3 加法运算构成的群.

2. 在验证“全体有理数集合 **Q** 对于加法构成一个群”的时候，学生容易感到困惑，因为抽象群定义中“乘法”的称呼记法，与现在考虑的数字加法的称呼记法有差别.

教师可以这样讲解：把群定义的“$a\cdot b$”翻译成现在的情况就是 $a+b$，然后检验是否存在单位元时，就变成了对 **Q** 中任意数 a，是否存在一个数 e 使得 $e+a=a+e=e$. 显然，**Q** 中的 0 满足要求，即 0 为单位元. 验证逆元的存在也类似.

Ⅲ 习题参考答案或提示

练习（第 39 页）

1. $T_4=\{1, 2, 3, 4\}$ 的全部 24 个置换为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&2&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&1&4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&4&2&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&3&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&1&3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix}.$$

2. 正五边形的 5 个旋转对称变换所对应的 5 个置换为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&4&5&1&2\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&5&1&2&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&1&2&3&4\end{pmatrix}.$$

3. (1) $\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&1&2\end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$；(4) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$.

练习（第 41 页）

1. 变换后的多项式为 $x_2^2-x_3^2+x_1^2$，与原多项式不等，所以置换 $\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$ 不是多项式 $x_1^2-x_2^2+x_3^2$ 的对称变换.

2. $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$.

3. (1) $\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$；

(2) $\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$.

4. 如 $x_1+x_2+x_3+x_4$.

练习（第 44 页）

1. 比如：

(1) 全体正实数 $\mathbf{R}^+$ 对于实数的乘法运算构成一个群（$\mathbf{R}^+$，$\cdot$）；

(2) n 个复数的集合 $U_n=\{\varepsilon_k=e^{k\frac{2\pi i}{n}}\mid k=0,1,2,\cdots,n-1\}$，对于复数的乘法构成一个群.

2. 设 e 及 e' 都是群 G 的单位元，由单位元的定义有

$$e'=ee' \text{ 及 } e=ee',$$

所以 $e=e'$，即单位元唯一.

设 b 及 b' 都是 a 的逆元，由逆元的定义有

$$ba=e \text{ 及 } ab'=e,$$

又由群满足结合律，有

$$b'=(ba)b'=b(ab')=b,$$

即 a 的逆元唯一.

3. 模 4 加法的运算表为：

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

(1) 封闭性：对于任意 a，$b\in Z_4$，有 $a\oplus b\in Z_4$；

(2) 结合律：对于任意 a，b，$c\in Z_4$，有$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$；

(3) 单位元：$0\in Z_4$ 是单位元；

(4) 逆元：由上面的运算表，在每行每列都有单位元 0 出现，因此每个元素都有逆元.

综上可知，Z_4 关于模 4 加法运算$\oplus$构成一个群.

思考与交流（第 45 页）

1. 设 G 只有 n 个元素，a 是群 G 的任意一个元素.

那么显然 a，a^2，a^3，…，a^{n+1}都是 G 的元素，这 $n+1$ 个元素 a，a^2，a^3，…，a^{n+1} 中必有两个是相等的，不妨设 $a^s=a^t$（$s<t$），则

$$a^{t-s}=a^{s-s}=e.$$

因此 a 有周期，从而可知 G 的每个元素都有周期.

2. 不难证明图形的旋转变换群只有有限个元素，由第 1 题可知，每一个元素一定有周期.

正六边形的 6 个旋转变换的旋转角分别为

$$0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3},\ \pi,\ \frac{4\pi}{3},\ \frac{5\pi}{3},$$

所以它们的周期分别是

$$1,\ 6,\ 3,\ 2,\ 3,\ 6.$$

巩固与提高（第 46 页）

1. 根据这个多项式的特点，它的任何对称变换群由下列置换组成：

$$\sigma_0=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \sigma_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},$$

$$\sigma_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}.$$

乘法表为：

	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_0	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
σ_1	σ_1	σ_0	σ_3	σ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_0	σ_1
σ_3	σ_3	σ_2	σ_1	σ_0

2. 由条件可得乘法表为：

$\times$	1	-1	$-\mathrm{i}$	i
1	1	-1	$-\mathrm{i}$	i
-1	-1	1	i	$-\mathrm{i}$
$-\mathrm{i}$	$-\mathrm{i}$	i	-1	1
i	i	$-\mathrm{i}$	1	-1

(1) 封闭性：对于任意 a，$b\in U_4$，有 $ab\in U_4$；

(2) 结合律：对于任意 a，b，$c\in U_4$，有 $(ab)c=a(bc)$；

(3) 单位元：$1\in U_4$ 是单位元；

(4) 逆元：由上面的运算表，在每行每列都有单位元 1 出现，因此每个元素都有逆元.

所以，U_4 关于数的乘法运算构成一个群.

3. 由已知条件可得乘法表为：

$\cdot$	0	1
0	0	1
1	1	0

(1) 封闭性：对于任意 a，$b\in G$，有 $ab\in G$；

(2) 结合律：对于任意 a，b，$c\in G$，有 $(ab)c=a(bc)$；

(3) 单位元：$0\in G$ 是单位元；

(4) 逆元：由上面的运算表，在每行每列都有单位元 0 出现，因此每个元素都有逆元.

所以，G 关于这个运算构成一个群.

4. (1) 对于任意 p，$q\in Q(\sqrt{2})$，假设 $p=a_1+b_1\sqrt{2}$，$q=a_2+b_2\sqrt{2}$，则有

$$pq=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}),$$

即满足封闭性；

（2）结合律：对于任意 a，b，$c\in Q(\sqrt{2})$，有 $(ab)c=a(bc)$；

（3）单位元：$1\in Q(\sqrt{2})$ 是单位元；

（4）逆元：对于任意的 $p=a+b\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2})$，存在

$$p^{-1}=\frac{1}{a^2-2b^2}(a-b\sqrt{2})\in Q(\sqrt{2}),$$

使得 $pp^{-1}=p^{-1}p=1$.

所以，$Q(\sqrt{2})$ 关于数的乘法运算构成一个群.

第四章 群论的神奇应用

I 概 述

一、教学要求

1. 了解带饰的 7 种对称类型.
2. 简单了解群论的几个典型应用.

二、内容编排

本章介绍了群论的几个典型应用，可以让学生通过课下阅读的方式对群的广泛应用有个了解，并讨论一些问题，如：求正四面体的对称群，求一些化学分子的对称群.

三、课时分配建议

4.1 群与装饰艺术	
4.1.1 带饰对称性	1 课时
4.1.2 面饰对称性	0.5 课时
4.2 群与晶体结构对称性	0.5 课时
4.3 分子对称性群	1 课时
4.4 群与代数方程根式可解性	1 课时

Ⅱ 内容分析

4.1 群与装饰艺术

4.1.1 带饰对称性

1. 这里我们讨论具有对称性的带饰，它的特点是：图案中有一条直线，使得在带饰图案与自身重合的任何等距变换下，这条直线也与自身重合. 这条直线叫做带轴.

2. 由于带饰图案纷繁多样，所以我们并不真正关心图案的样式，而是关心所有可能的对称性. 数学家用群论的知识证明，带饰图案的对称类型只有以下 7 种. 结合书上的图形来讲解. 之后可让学生用字母 b 或 d 或 p 等来进行相应的 7 种对称变换，以加深理解.

4.1.2 面饰对称性

1. 面饰的图案花样可以有无数多个，但是面饰的对称群的个数只有 17 种. 其中面饰的可能的旋转对称只有 5 种，即 0°，60°，90°，120°，180°的旋转.

2. 建议对这部分感兴趣的同学阅读相关书籍.

4.2 群与晶体结构对称性

1. 与平面图形的等距变换类似，空间图形也有等距变换：不改变空间中任意两点之间距离的几何变换.

2. 空间最基本的等距变换只有三种：旋转变换、镜面反射变换、平移变换. 空间中任何一个等距变换都可以通过这三种等距变换来实现.

3. 举例使学生认识到群的知识在晶体物质对称性结构的研究中起了非常重要的作用.

4.3 分子对称性群

通过讨论水分子、氨分子的对称性，让学生尝试写出氨分子的对称群所包含的元素，分别为

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&3&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&2&4\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}.$$

4.4 群与代数方程根式可解性

通过阅读教材，使学生大致了解求方程根式解的历史及伽罗瓦理论的基本思想.

Ⅲ 习题参考答案或提示

思考与交流（第 58 页）

1. 只有正三边形、正四边形和正六边形. 理由如下：

假设正 n 边形可以覆盖住整个平面，由于正 n 边形的一个内角为 $180°-\frac{360°}{n}$，则应该存在整数 m，使得

$$m\left(180°-\frac{360°}{n}\right)=360°,$$

即 $m=2+\frac{4}{n-2}$. 由此可得 n 只能为 3，4，6.

2. 设在一个顶点处有正 m 边形 x 个，正 n 边形 y 个，且 $m\neq n$，则

$$x\left(180°-\frac{360°}{m}\right)+y\left(180°-\frac{360°}{n}\right)=360°,$$

即

$$(x+y-2)mn-2(nx+my)=0.$$

显然 $m\geqslant 3$，$n\geqslant 3$，$m\neq n$ 且 $x\geqslant 1$，$y\geqslant 1$，由此可得上述方程的正整数解共有 6 组，故用两种正多边形的镶嵌有 6 种情形.

3. 略.