普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4－1

几何证明选讲

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

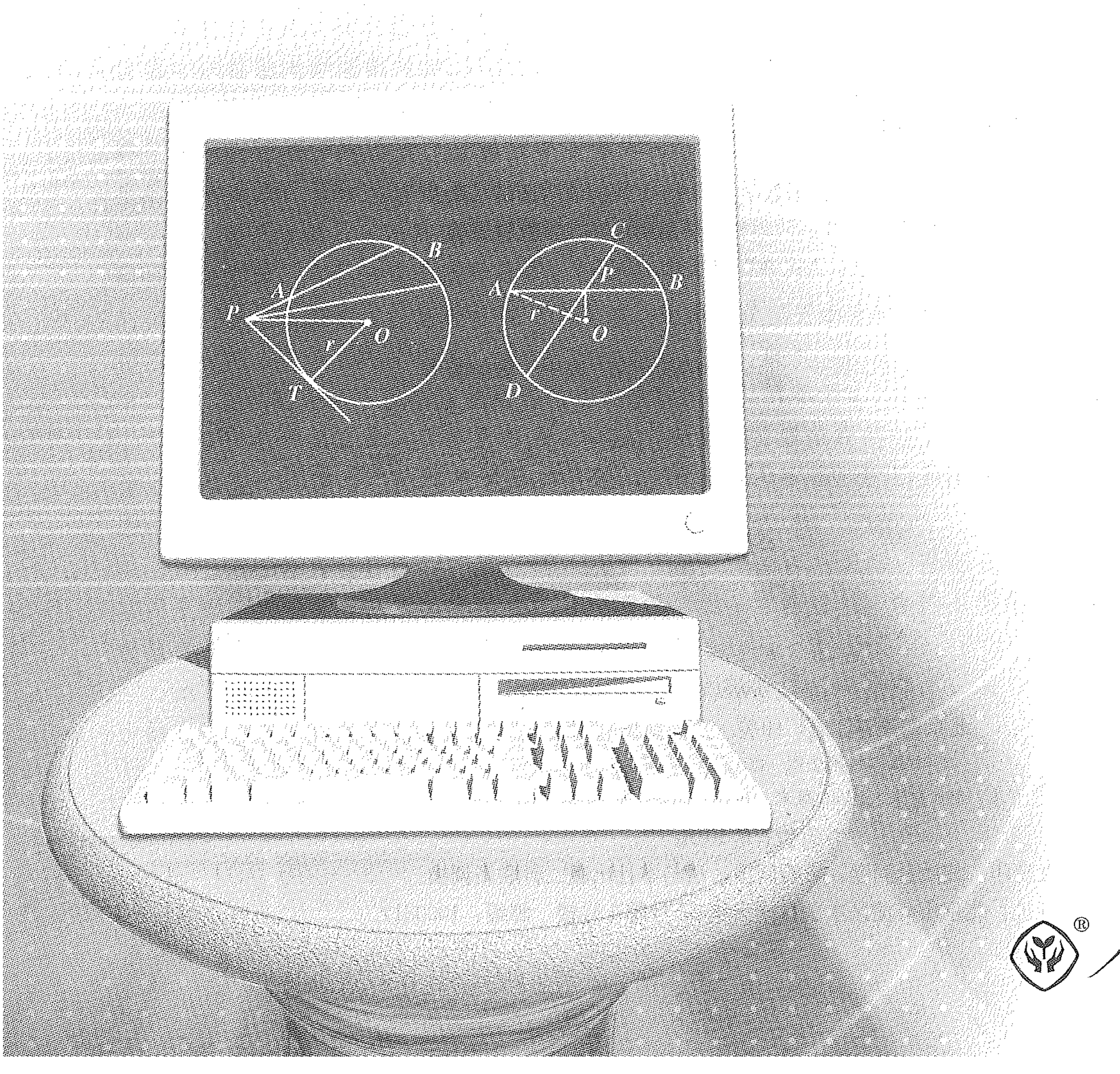
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-1　几何证明选讲

教师教学用书

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明　韩际清

编　　者　　田明泉　孙　宁　袁　竞　王　强
责任编辑　　龙正武
版式设计　　王　喆
封面设计　　李宏庆

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4—1几何证明选讲（B版）教师教学用书/人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材试验研究组编著．—2版．—北京：人民教育出版社，2015.7
ISBN 978-7-107-19071-1

Ⅰ.①普…　Ⅱ.①人…②课…　Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ.①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第031307号

人民教育出版社　出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
2007年6月第2版　2015年7月第10次印刷
开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：3　字数：60千字
定价：7.60元
如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版二科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2004年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书·数学选修4-1　几何证明选讲（B版）》的使用编写的教师用书．本书由山东省教学研究室与人民教育出版社课程教材研究所中学数学教材研究组共同组织编写．

本套教师教学用书编写的原则是：

1．努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想．帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图．

2．明确各章的教学要求及要达到的教学目标．帮助教师完成“课标”中规定的教学任务．

3．对相关内容进行分析、并提出一些教法建议，帮助教师克服教学中的一些困难．

本册教师教学用书每章包括三部分：I 概述，II 教材内容分析，III 习题参考答案．

教材的课程目标的确定，主要依据是教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准》中的系列4的相关内容的教学要求．

在概述中，明确本章的教学要求，说明内容编排的结构和课时分配．

在内容分析中，首先指出各章、节知识的结构，然后对各章、节的内容进行分析并提出一些教学建议，供老师参考．

每章给出了练习与习题的参考答案．

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面再对选修4-1作如下说明，以帮助老师理解教材．

一、该书教学的主要目的是，加强学生逻辑推理能力的训练．在初中几何教学中，主要是通过观察、探索发现图形的性质，逻辑推理能力的训练较弱．到高中，有必要加强学生的推理训练，以提高学生的数学素质，让学生理解数学的本质．

二、该书主要是采取寓理于算与综合推理相结合的办法学习相似形与圆的主要性质．在培养学生的逻辑推理能力时，常常偏重于演绎推理，对通过计算进行推理往往不重视．应当指出，计算推理是至精至简的推理，学生掌握通过计算进行推理的方法，比演绎推理更加重要．不一定到学解析几何时，才进行代数推理的训练．事实上通过方程、锐角三角函数的计算，就可以对学生进行计算推理的训练．所以在本册书中，当学完相似形后，我们用锐角三角函数进行推理以培养学生计算推理的能力．

三、该书的第二章，主要是通过综合推理来学习圆锥曲线的性质．这种安排的主要目的是，加强学生空间概念的形成与空间想象能力的培养．本章还通过平行投影、透视和对称等图形变换的性质来学习圆锥曲线．教师在教学中一定要重视图形变换思想的应用．

四、该书作为选修教材，建议高一入学可选修第一章．这样，可把初中学习数学的方法与高中数学学习更好地结合起来．第二章可在学习完圆锥曲线一章后选修．这样可使学生更深刻地理解圆锥曲线的性质并提高学生的数学文化素养．

本册书的编写结构，在我国还是首次，有些内容的编排没有经验，又由于时间紧，书中必然存在不少缺点，欢迎广大教师和教学研究人员指正．

中学数学教材实验研究组
2005年8月

目录

第一章

相似三角形定理与圆幂定理

Ⅰ 概　　述

一、教学要求

1. 复习相似三角形的定义与性质，了解平行截割定理，证明直角三角形的射影定理.
2. 证明圆周角定理，圆的切线的判定定理及性质定理.
3. 证明相交弦定理，圆内接四边形的性质定理与判定定理、切割线定理.

二、内容编排

本专题的内容是以义务教育阶段的知识为基础展开的，在本专题中，主要是通过推理证明进一步发展学生的逻辑推理能力，使学生在把握图形、几何直观、逻辑推理等方面都有所提高，特别强调能够把思维的过程比较清晰、严格地表述出来.

本章内容分为两部分，第一部分是相似三角形，以长度与面积的理论为基础，由三角形和梯形的面积公式证明相似三角形判定定理，并证明相似三角形的一些性质，进而探索直角三角形相似与锐角三角函数之间的内在联系，从中体会这些图形之间的逻辑关系. 第二部分内容是圆幂定理，应用相似三角形的性质研究与圆有关的角和成比例的线段.

三、课时分配

本章教学时间约需 12 课时，具体分配如下（仅供参考）.

1.1　相似三角形

1.1.1　相似三角形判定定理　　1 课时

1.1.2　相似三角形的性质　　1 课时

1.1.3　平行截割定理　1 课时
1.1.4　锐角三角函数与射影定理　1 课时
1.2　圆周角与弦切角
1.2.1　圆的切线　1 课时
1.2.2　圆周角定理　1 课时
1.2.3　弦切角定理　1 课时
1.3　圆幂定理与圆内接四边形
1.3.1　圆幂定理　2 课时
1.3.2　圆内接四边形的性质与判定　2 课时
本章小结复习　1 课时

Ⅱ　内容分析

本章导引

导引指出了古希腊几何学家和我国数学家在几何学方面作出的贡献.

导引介绍了我国古代数学家研究几何的方法——寓理于算和综合推理的方法.

1.1　相似三角形

1.1.1　相似三角形的判定定理

1. 通过复习给出相似三角形的定义及其三个判定定理.

2. 利用面积计算对判定定理 1 给出证明，然后通过构造全等三角形，对判定定理 2、3 给出证明.

下面对判定定理 3 给出证明.

已知：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

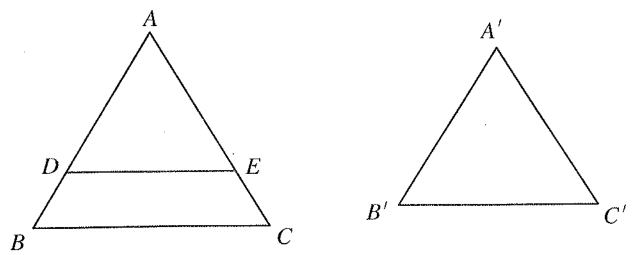


图 1-1

证明：如果 $AB=A'B'$，$AC=A'C'$，则$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，
定理显然成立.
不妨设 $AB>A'B'$，在 AB 上取 $AD=A'B'$，
过 D 作 $DE/\!/BC$ 交 AC 于点 E，则
$\angle ADE=\angle B$，$\angle AED=\angle C$，
由相似三角形判定定理 1，知$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，
所以 $\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{BC}{DE}=\dfrac{AC}{AE}$，
又 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，且 $AD=A'B'$，
所以 $\dfrac{AC}{AE}=\dfrac{AC}{A'C'}$，所以 $AE=A'C'$，
从而 $\triangle ADE\cong\triangle A'B'C'$，
所以 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.
3. 例 2、例 3 是相似三角形判定定理的应用.

1.1.2 相似三角形的性质

1. 性质定理 1 说明两个相似三角形的对应线段的比都等于相似比；性质定理 2 指出相似三角形的面积之比等于相似比的平方.
2. 老师可引导学生完成对两个性质定理的证明.
3. 通过对例 1 的证明，让学生再一次体会面积法证明几何问题的魅力.

1.1.3 平行截割定理

1. 通过作辅助线，利用相似三角形证明平行截割定理，这与原义务教育教材的处理方法是不同的. 义务教育教材关于平行线分线段成比例定理是用举例的方法引入的，没有给出证明，因为证明涉及到无理数理论、极限思想等，学生尚不能接受. 原教材依此结论为依据进而证明了相似三角形的判定定理及性质定理，在这一点上与本教材的处理方法是不同的.

2. 推论：平行于三角形一边的直线截其他两边（或两边的延长线），所得的对应线段成比例. 下面给出这个推论的证明.

已知：$\triangle ABC$ 中，D，E 分别在 AB，AC 上，且 $DE/\!/BC$.
求证：$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.
证明：过 A 作直线 $l/\!/BC$，
则 $l/\!/BC/\!/DE$.
由平行截割定理有$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$.

这个推论的逆命题也成立，即在$\triangle ABC$ 中，D，E 分别在 AB，AC 上，且$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，则 $DE/\!/BC$.
证明：过 D 作 $DE'/\!/BC$ 交 AC 于 E'，

由推论知$\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE'}{E'C}$，

又 $\dfrac{AD}{DB}=\dfrac{AE}{EC}$，所以 $\dfrac{AE}{EC}=\dfrac{AE'}{E'C}$.

所以 $\dfrac{AE+EC}{EC}=\dfrac{AE'+E'C}{E'C}$，即$\dfrac{AC}{EC}=\dfrac{AC}{E'C}$.

所以 $CE=CE'$，

所以 E 与E'重合.

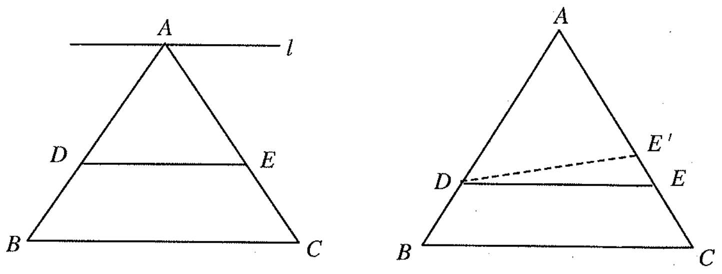


图 1-2

3. 例 1 是三角形内角平分线的性质. 外角平分线也具有类似的性质.

已知：$\triangle ABC$ 中，AT 是$\angle ABC$ 的外角平分线，与 BC 的延长线交于 T.

求证：$\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{AB}{AC}$.

证明：作 $CD/\!/AB$ 交AT 于D，

所以 $\angle ADC=\angle DAE$，

又 $\angle CAD=\angle DAE$，所以 $\angle CAD=\angle ADC$，

所以 $AC=CD$.

因为 $CD/\!/AB$，所以 $\triangle CDT\backsim\triangle ABT$，

所以 $\dfrac{AB}{CD}=\dfrac{BT}{TC}$，

所以 $\dfrac{BT}{TC}=\dfrac{AB}{AC}$.

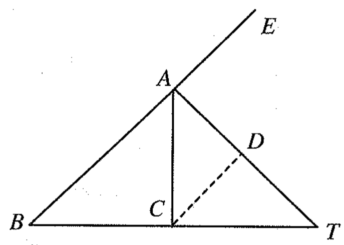


图 1-3

1.1.4 锐角三角函数与射影定理

1. 通过比例线段，揭示锐角三角比不过是相似直角三角形的另一种表达形式.

2. 通过三角比找出直角三角形中的比例关系——射影定理.

1.2 圆周角与弦切角

1.2.1 圆的切线

1. 对于直线与圆的三种位置关系，从运动的观点，让学生体会由量变到质变的过程.

通过直线与圆公共点的个数，定义直线与圆相离、相交、相切三种位置关系.

2. 通过观察归纳出

$$直线与圆相离 \Leftrightarrow d>r;$$
$$直线与圆相切 \Leftrightarrow d=r;$$
$$直线与圆相交 \Leftrightarrow d<r.$$

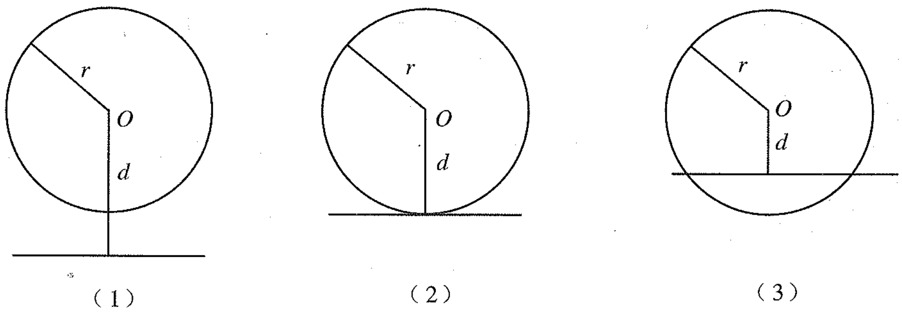


图 1-4

3. 圆的切线的判定定理与性质定理

圆的切线的判定定理，教材中是由圆的切线的定义直接证明的，切线的性质定理用反证法证明. 要求学生会用反证法证明这条定理. 这两个定理表明“过半径外端且垂直于半径”是圆切线的充要条件.

教学中还可向学生作如下分析：

由于过已知点只有一条直线与已知直线垂直，所以经过圆心垂直于切线的直线一定经过切点，反之过切点垂直于切线的直线也一定经过圆心.

对例 1 过圆外一点作圆的切线，应当引起足够的重视，它是性质定理的直接应用.

圆的切线的判定定理和性质定理有两个推论.

推论 1：从圆外一个已知点所引的两条切线长相等.

推论 2：连接圆外的一个已知点和圆心的直线，平分从这点向圆所作的两条切线所夹的角.

已知：P 是圆 O 外一点，PA，PB 是圆的切线，A，B 是切点.

求证：$PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

证明：连接 OA，OB，则 $OA\perp PB$，$OB\perp PB$（性质定理）.

在$\triangle POA$ 与$\triangle POB$ 中，

因为　$OA=OB$，$OP=OP$，

所以　$\mathrm{Rt}\triangle POA\cong \mathrm{Rt}\triangle POB$，

所以　$PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$.

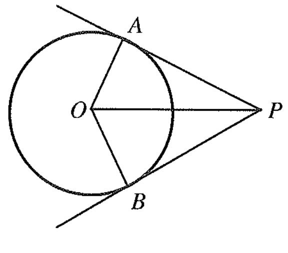


图 1-5

1.2.2 圆周角定理

由于在初中学习了圆心角的概念及其度量，教材在引入圆周角的概念之后，让学生探索对着同一条弧上的圆周角与圆心角的大小关系，进而引出圆周角定理：圆周角的度数等于它所对弧的度数的一半.

圆周角定理的证明采取了完全归纳法.

圆周角定理有三个推论.

推论 1：直径所对的圆周角都是直角.

推论 2：同弧或等弧所对的圆周角相等.

推论 3：等于直角的圆周角所对的弧是圆的直径.

可在课上让学生自己证明.

1.2.3 弦切角定理

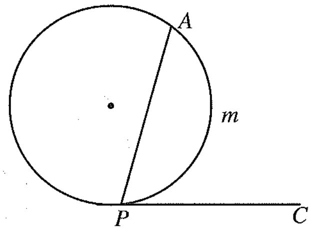


图 1-6

教材是通过探索圆周角，让顶点不动，一边绕顶点转动，而引出弦切角的定义. 这样引出的好处是，学生很容易归纳出弦切角定理. 并深刻理解弦切角和圆周角之间的关系. 教学时建议明确给出弦切角的定义.

弦切角的定义：角的顶点在圆上，一边与圆相交，另一边与圆相切于顶点，这样的角叫做弦切角.

图中：弧 AmP，叫做弦切角$\angle APC$ 夹的弧.

弦切角定理：弦切角的度数等于所夹的弧的度数的一半.

弦切角定理的证明，仍然采取完全归纳法进行证明，显然，弦切角等于它所夹弧所对的圆周角.

1.3 圆幂定理与圆内接四边形

本节内容是研究与圆有关的比例线段，以及圆内接四边形的有关性质.

1.3.1 圆幂定理

利用圆周角定理和弦切角定理以及相似三角形，可得：

相交弦定理：圆内的两条相交弦，被交点分成的两条线段长的积相等.

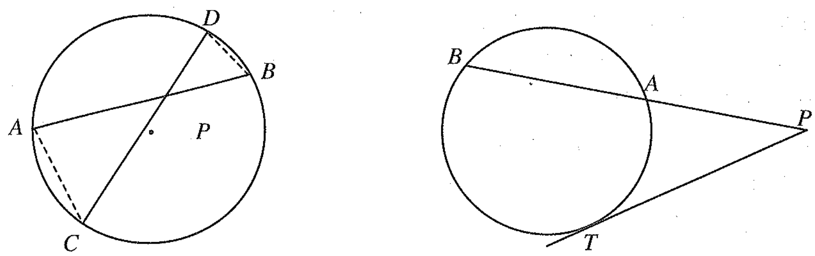


图 1-7

切割线定理：从圆外一点引圆的切线和割线，切线长是这点到割线与圆交点的两条线段长的比例中项.

推论：从圆外一点引圆的两条割线，这一点到每条割线与圆的交点的两条线段长的积相等.

这两个定理和推论，建议引导学生自己发现并证明.

教材通过对相交弦定理和切割线定理分析归纳出圆幂定理：

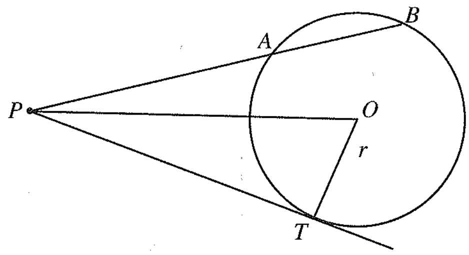
不论点 P 在圆内还是在圆外，通过点 P 的任一直线与圆交于两点 A，B，只要点 P 的位置确定，则 $PA \cdot PB$ 为定值. 设定值为 k，则：

(1) 当 P 点在圆外时，

$$k = PA \cdot PB = PT^2$$
$$= PO^2 - r^2 \text{（}r\text{ 为圆 }O\text{ 的半径，以下同）；}$$

(2) 当 P 点在圆内时，过 P 作弦 CD 垂直于 OP，则

$$k = PA \cdot PB$$
$$= PC \cdot PD = PC^2 = r^2 - OP^2.$$



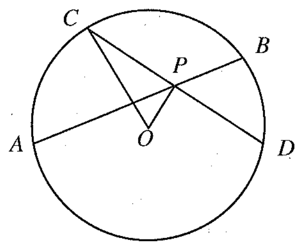


图 1-8

这里我们把 k 称为点 P 对⊙O 的幂，于是有圆幂定理.

设圆 O 的半径为 r，通过定点 P，作圆 O 的任一条割线交圆于 A，B，则：

当 P 点在圆外时，$k = PO^2 - r^2$；

当 P 点在圆内时，$k = r^2 - PO^2$；

当 P 点在圆上时，$k = 0$.

1.3.2 圆内接四边形的性质与判定

补充圆内接四边形性质的证明. 证明过程可引导学生自己探索.

1. 圆内接四边形的性质：圆的内接四边形的对角互补，并且任何一个外角都等于它的内对角.

已知：$ABCD$ 是圆内接四边形，$\angle CBE$ 是它的一个外角. 求证：

(1) $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180°$；

(2) $\angle CBE = \angle D$.

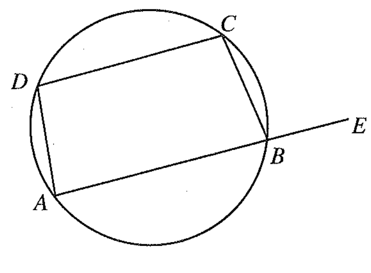


图 1-9

证明：(1) 因为 $\angle A = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD})$，

$$\angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AD}),$$

所以 $\angle A + \angle C = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AD})$

$=\frac{1}{2}\times 360°=180°.$

同理可证　$\angle B+\angle D=180°$.

(2) 因为　$\angle D+\angle ABC=180°$，$\angle ABC+\angle CBE=180°$，

所以　$\angle D=\angle CBE$.

2. 圆内接四边形的判定定理：如果一个四边形的一组对角互补，那么这个四边形内接于圆. 教材采用反证法给予了证明.

圆内接四边形的判定定理和性质定理，给出了一个判断四点共圆的充要条件.

Ⅲ　习题参考答案

1.1.1 练习（第 4 页）

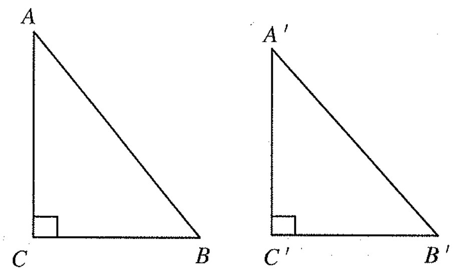
1. (1) 已知：Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，$\angle A=\angle A'$.

求证：Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle A'B'C'$.

证明：因为　$\angle C=\angle C'=90°$，$\angle A=\angle A'$，

所以　$\angle B=\angle B'$.

所以　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.



（第 1 题）

(2) 已知：Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，

$\angle C=\angle C'=90°$，$\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$.

求证：Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle A'B'C'$.

证明：由判定定理 2，得$\triangle ABC\backsim A'B'C'$.

(3) 已知：Rt$\triangle ABC$ 和 Rt$\triangle A'B'C'$ 中，$\angle C=\angle C'=90°$，$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$.

求证：Rt$\triangle ABC\backsim$Rt$\triangle A'B'C'$.

证明：因为　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}$，所以　$\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$，

所以　$\frac{AB^2}{AC^2}=\frac{A'B'^2}{A'C'^2}$，所以　$\frac{AB^2-AC^2}{AC^2}=\frac{A'B'^2-A'C'^2}{A'C'^2}$，

由勾股定理得 $\frac{BC^2}{AC^2}=\frac{B'C'^2}{A'C'^2}$，

所以　$\frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{A'C'}$，所以　$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}$，

又因　$\angle C=\angle C'=90°$，所以　$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

2. 已知：$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$中，$AB=AC$，$A'B'=A'C'$，$\angle A=\angle A'$.

求证：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

证明：因为　$AB=AC$，$A'B'=A'C'$，

所以 $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}$，因为 $\angle A=\angle A'$，

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

3. 已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$a:b:c=2:2:3$，$c'=15$ cm.

求：a'，b'.

解：因为 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

所以 $\dfrac{a}{a'}=\dfrac{b}{b'}=\dfrac{c}{c'}$，

因为 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{b}{2}=\dfrac{c}{3}$，

所以 $\dfrac{a'}{2}=\dfrac{b'}{2}=\dfrac{c'}{3}$，

因为 $c'=15$，所以 $a'=10$，$b'=10$.

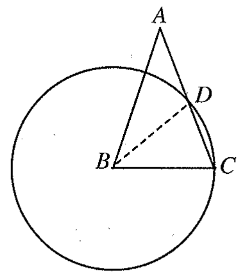
4. 证明：连 BD，显然 $BC=BD$，

在$\triangle ABC$和$\triangle BCD$中，$AB=AC$，$\angle BCD=\angle ACB$，

所以 $\angle CBD=\angle A$，

所以 $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$，

所以 $\dfrac{CD}{BC}=\dfrac{BC}{AC}$，$BC^2=AC \cdot CD$.



（第 4 题）

1.1.2 练习（第 6 页）

1. 1∶4； 1∶4； 1∶4.

2. 已知：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$D$，$D'$分别为$BC$和$B'C'$的中点.

求证：$\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

证明：因为 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，

所以 $\angle B=\angle B'$，$\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}=\dfrac{2BD}{2B'D'}=\dfrac{BD}{B'D'}$，

所以 $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$，

所以 $\dfrac{AD}{A'D'}=\dfrac{AB}{A'B'}$.

3. 解：设$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，面积分别为 S 和 S'，周长分别为 l 和 l'.

因为 $l'-l=6$，又 $\dfrac{l'}{l}=\sqrt{\dfrac{S'}{S}}=\sqrt{\dfrac{25}{9}}=\dfrac{5}{3}$，

所以 $\dfrac{l'-l}{l}=\dfrac{2}{3}$，$l=9$，

所以 $l'=15$.

所以 较大的三角形的周长为 15 cm.

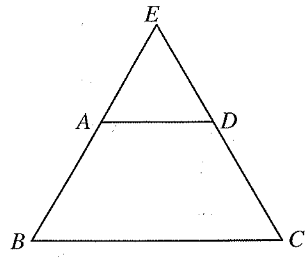
4. 解：延长 BA 与 CD 交于 E，E 到 BC 的距离为 d，

因为 $AD /\!/ BC$，所以 $\triangle ADE \backsim \triangle BCE$，

所以 $\frac{AD}{BC}=\frac{d-6}{d}$，

即 $\frac{4}{12}=\frac{d-6}{d}$，

解之得 $d=9$.



（第 4 题）

5. 解：因为 $AD /\!/ BC$，所以 $\triangle AOD \backsim \triangle COB$，

所以 $\frac{AO}{OC}=\frac{DO}{OB}$，

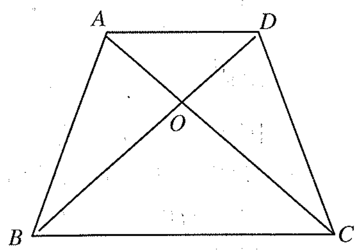
因为 $AO=2$，$AC=8$，

所以 $\frac{DO}{OB}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{3}$，

又 $S_{\triangle BCD}=6$，$\frac{S_{\triangle OCD}}{S_{\triangle BCD}}=\frac{1}{4}$，

所以 $S_{\triangle OCD}=\frac{3}{2}$， 又 $\frac{S_{\triangle AOD}}{S_{\triangle OCD}}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{3}$，

所以 $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}$.



（第 5 题）

1.1.3 练习（第 8 页）

1. 解：因为 $DE /\!/ BC$，所以 $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$，

所以 $AE=\frac{AD \cdot AC}{AB}=\frac{7.5\times16}{12}=10$.

2. 解：设 $BD=x$，则

$\frac{x-5}{5}=\frac{2.8}{7}$.

解此方程，得 $x=7$.

即 $BD=7$.

3. 解：因为 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}$，

所以 $DE=\frac{AB \cdot EF}{BC}=\frac{ac}{b}$.

4. 解：过 D 作 $DE /\!/ CN$ 交 AB 于 E，

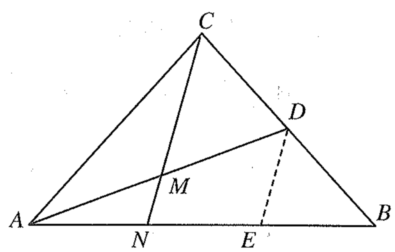
因为 D 是 BC 的中点，

所以 $BE=EN$.

又 M 是 AD 的中点，且 $MN /\!/ DE$，

所以 $AN=NE$，所以 $AN=NE=EB$，

所以 $AN=\frac{1}{3}AB=8(\text{cm})$.



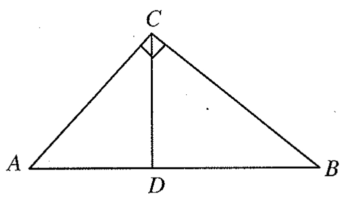
（第 4 题）

5. 证明：因为 $Rt\triangle ABC \backsim Rt\triangle EDC$，所以 $\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{CD}$.

6. 证明：因为 $l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，所以 $\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}=\frac{m}{n}$，

所以 $\frac{DE}{DF}=\frac{m}{m+n}$.

1.1.4 练习（第 10 页）



（第 1 题）

1. 解：(1) 因为 $AD=4$，$CD=6$，

又 $CD^2=AD\cdot BD$，

所以 $BD=\frac{CD^2}{AD}=\frac{36}{4}=9(\text{cm})$，

所以 $BC=\sqrt{BD\times BA}=\sqrt{9\times 13}=3\sqrt{13}(\text{cm})$.

另解：$BD=CD\cdot\cot B=CD\cdot\tan A=6\times\frac{6}{4}=9$.

(2) 因为 $AC=9$，$AB=15$，

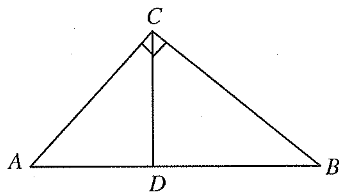
所以 $BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=12$，

所以 $CD=\frac{AC\times BC}{AB}=\frac{9\times 12}{15}=\frac{36}{5}(\text{cm})$.

又 $BC^2=BD\cdot BA$，所以 $BD=\frac{BC^2}{AB}=\frac{144}{15}=\frac{48}{5}(\text{cm})$.

另解：$BD=BC\cdot\cos B=BC\cdot\frac{BC}{AB}$

$=\frac{BC^2}{AB}=\frac{144}{15}=\frac{48}{5}(\text{cm})$.



（第 2 题）

2. 证明：(1) 由射影定理得

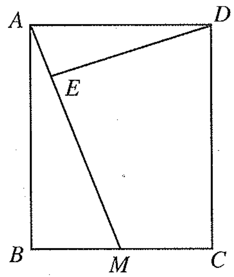
$AC^2=AD\cdot AB$，$CB^2=BD\cdot BA$，

所以 $\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AD\cdot AB}{BD\cdot AB}=\frac{AD}{BD}$.

(2) 因为 $\triangle ACD\backsim\triangle CBD$，

所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{CD}$，

所以 $CA\cdot CD=CB\cdot AD$.



（第 3 题）

3. 解：在 $\triangle AMB$ 与 $\triangle ADE$ 中，

$\angle AMB=\angle DAE$，$\angle ABM=\angle AED=90°$，

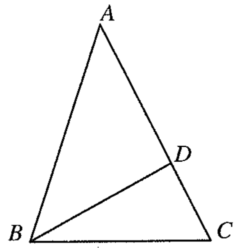
所以 $\triangle ABM\backsim\triangle DEA$.

所以 $\frac{AB}{DE}=\frac{AM}{AD}$. 因为 $AB=a$，$BC=b$，

所以 $DE=\frac{AB\cdot AD}{AM}$

$$=\frac{a\cdot b}{\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}}=\frac{2ab}{\sqrt{4a^2+b^2}}.$$

习题 1-1（第 11 页）



（第 1 题）

1. 证明：因为 $\angle A=36°$，$AB=AC$，

所以 $\angle ABC=\angle ACB=\frac{1}{2}(180°-36°)=72°$，

因为 BD 为$\angle ABC$ 的平分线，

所以 $\angle DBC=\frac{1}{2}\angle ABC=\frac{1}{2}\times 72°=36°$，

所以 $\angle BDC=180°-72°-36°=72°$，

所以 $BC=BD$.

因此 $\angle A=\angle DBC$，

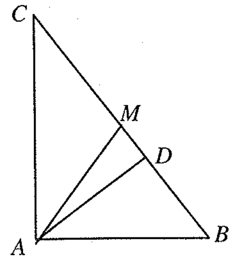
又因为 $\angle ACB=\angle BCD$，

所以 $\triangle ACB\backsim\triangle BCD$，

所以 $\frac{AC}{BC}=\frac{BC}{CD}$，

因此 $BC^2=AC\cdot CD$，

又 $BC=BD$，因此 $BD^2=AC\cdot CD$.



（第 2 题）

2. 证明：因为 $AC^2=CD\cdot BC$，$AB^2=BD\cdot BC$，

所以 $AC^2-AB^2=(CD-BD)\cdot BC$

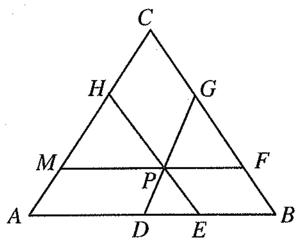
$=(CM+MD-BM+MD)\cdot BC$

$=2DM\cdot BC$.

3. 证明：因为 $\triangle ACD\backsim\triangle DAE$，

所以 $\frac{AC}{AD}=\frac{AD}{DE}$，

所以 $AD^2=AC\cdot DE$.



（第 4 题）

4. 解：因为 $\triangle MPH\backsim\triangle DEP\backsim\triangle PFG$，

所以 $S_{\triangle MPH}:S_{\triangle DEP}:S_{\triangle PFG}$

$=MP^2:DE^2:PF^2$

$=AD^2:DE^2:EB^2$

$=a^2:b^2:c^2$.

5. 证明：在 Rt$\triangle PME$ 和 Rt$\triangle MDE$ 中，

因为 $ME^2=PE\cdot DE$，

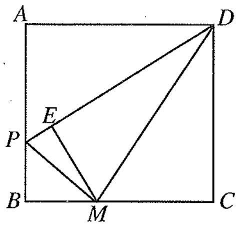
即 $\frac{ME}{DE}=\frac{PE}{ME}$，

所以 Rt$\triangle PME\backsim$Rt$\triangle MDE$.

所以 $\angle PME=\angle MDE$.

所以 $\angle PMB=\angle MDC$.

所以 $Rt\triangle PBM\backsim Rt\triangle MCD$.



（第 5 题）

6. 证明：(1) 因为 $AB=2AC$，$AD\cdot BC=AC\cdot AB=2AC^2$， ①

由勾股定理 $BC^2=AB^2+AC^2=5AC^2$， ②

由①② $5AD=2BC$.

(2) 因为 $BC=5DC$，

又 $AC^2=CD\cdot BC=\frac{1}{5}BC^2$，

所以 $BC^2=5AC^2$.

7. 证明：因为 $EF^2=AF\cdot DF$，

$EG^2=BG\cdot CG$，

所以 $FG^2=(EF+EG)^2$

$\quad\quad=AF\cdot DF+BG\cdot CG+2EF\cdot EG$.

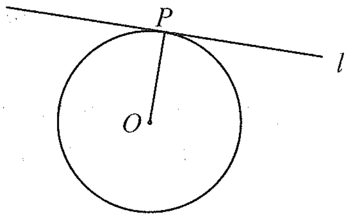
又因 $\angle ABC=45°$，

所以 $2(EF+EG)^2=(AH+BH)^2$.

化简得 $2EF\cdot EG=AH\cdot BH$.

所以 $FG^2=AF\cdot DF+BG\cdot CG+AH\cdot BH$.

练习 1.2.1（第 14 页）



（第 2 题）

1. 解：设 d 为圆心 O 到直线 l 的距离，r 为圆的半径.

$d=r\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 O 相切；

$d<r\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 O 相交；

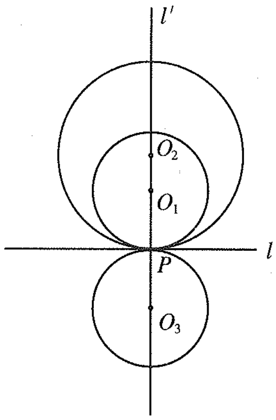
$d>r\Leftrightarrow$ 直线 l 与圆 O 相离.

2. 作法：设 P 为圆 O 上任一点，连 OP，

过 P 作直线 $l\perp OP$，则 l 为圆 O 的切线.

3. 解：过 P 作 $l'\perp l$，在 l' 上任取一点 O，以 O 为圆心，OP 为半径作圆 O_1，则圆 O_1 与 l 相切.

这样的圆可作无数多个，圆心的轨是直线 l'（不包括 P 点).



（第 3 题）

4. 已知：AB 是圆 O 的直径，直线 l_1，l_2 分别为经过 A，B 两点的切线.

求证：$l_1/\!/l_2$.

证明：因为 l_1 与 l_2 分别为过 A，B 两点的切线，且 AB 为直径.

所以 $l_1\perp AB$，$l_2\perp AB$，

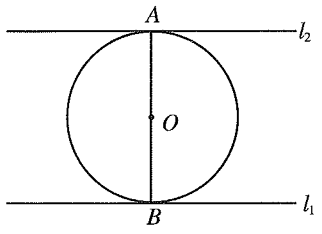
所以 $l_1/\!/l_2$.

5. 已知 P 为圆 O 外一点，PA，PB 分别为圆 O 的切线，A，B 为切点，OP 与 AB 交于 M.

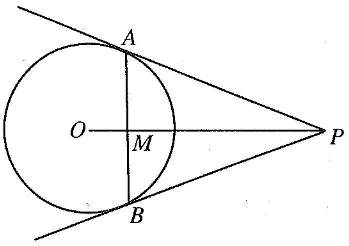
求证：$AM=MB$，且 $OP\perp AB$.

证明：由推论①②可知，

$PA=PB$，$\angle APO=\angle BPO$，
在$\triangle APB$中，PM垂直平分AB，
即$AM=MB$，$AB\perp OP$.

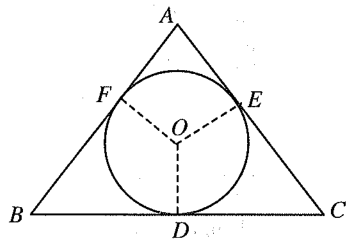


（第 4 题）



（第 5 题）

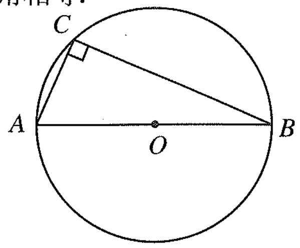
6. （略）见例 2.
7. 证明：过O作$OD\perp BC$于D，
$OE\perp AC$于E，$OF\perp AB$于F，
则$OD=OE=OF$，
以O为圆心，OD为半径作圆，
因为　$BC\perp OD$，
所以　BC是圆O的切线，
同理　AC，AB分别也是圆O的切线，
所以　圆O与$\triangle ABC$的三边相切，
所以　圆O是$\triangle ABC$的内切圆.



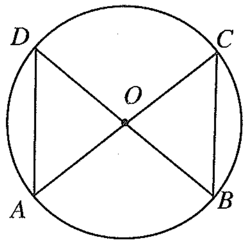
（第 7 题）

练习 1.2.2（第 17 页）

1. **推论 1**：AB是圆O的直径，C为圆O上任一点与A，B不重合，
求证：$\angle ACB=90°$.
证明：$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 180°=90°$.
推论 2：如图圆O中，求证：$\angle ADB=\angle ACB$.
证明：$\angle ADB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$，
所以　$\angle ADB=\angle ACB$，
即同弧上的圆周角相等.



推论1



推论2

（第 1 题）

推论 3：圆 O 中，A，B，C 都在圆上，且 $\angle ACB=90°$.

求证：AB 过圆心 O.

证明：取 AB 的中点 O'，因为 $\triangle ABC$ 是直角三角形且 $\angle ACB=90°$，

所以 $O'A=O'B=O'C$，

所以 O' 是圆心.

因此，AB 过圆心 O.

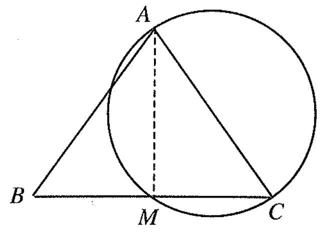
2. $\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AC 为直径的圆交 BC 于 M.

求证：$BM=MC$.

证明：连 AM，因为 AC 是圆的直径，所以 $\angle AMC=90°$，

即 $AM\perp BC$，又 $AB=AC$，

所以 $BM=MC$.



（第 2 题）

3. 证明：$AD=DB$，$AB=2CD$，

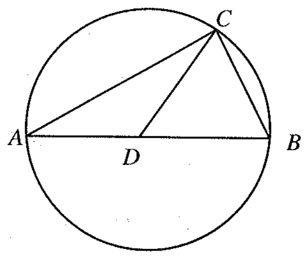
所以 $AD=DB=CD$，

又 $\angle B=60°$，

所以 $\angle A=30°$，$\angle ACB=90°$，

所以 AB 是 $\triangle ABC$ 外接圆的直径 $2r$，

所以 $r=\frac{1}{2}AB=BC$.



（第 3 题）

练习 1.2.3（第 19 页）

1. 解：$\angle BCP=50°$，所以 $\angle BAC=50°$，

又 $\angle ABC=100°$，

所以 $\angle ACB=30°$，

所以 $\angle AOB=2\angle ACB=60°$.

2. 解：因为 $\angle CAB=53°$，

所以 $\angle BCN=\angle CAB=53°$，

又 AB 为圆 O 的直径，

所以 $\angle ACB=90°$，

所以 $\angle ACM=90°-53°=37°$.

3. 证明：因为 AB 是圆 O 的直径，

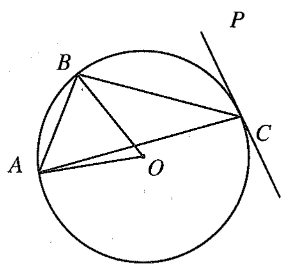
所以 $\angle APB=90°$，

又 MN 是过 P 点的切线，

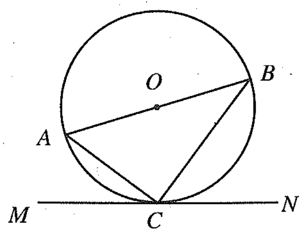
所以 $\angle APD=\angle ABP$，

所以 $\triangle ADP\backsim\triangle APB$，

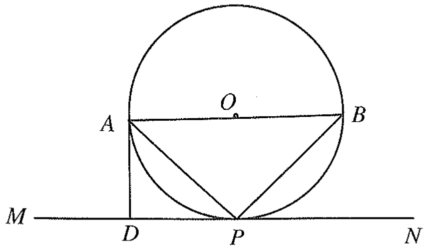
所以 $\frac{AD}{AP}=\frac{AP}{AB}$，所以 $AP^2=AD\cdot AB$.



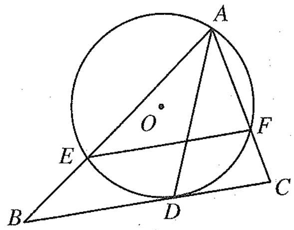
（第 1 题）



（第 2 题）



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 证明：因为 AD 平分$\angle BAC$，

所以 $\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{AB}{AC}$，　　①

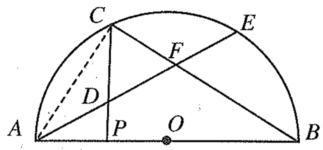
又因为$\begin{cases}BD^2=BE\cdot BA\\CD^2=CF\cdot CA\end{cases}$

所以 $\dfrac{BD^2}{CD^2}=\dfrac{BE\cdot BA}{CF\cdot CA}$，　　②

由①② $\dfrac{AB}{AC}=\dfrac{BE}{CF}$，

即 $\dfrac{AB}{BE}=\dfrac{AC}{CF}$，所以 $EF/\!/BC$.

习题 1-2（第 20 页）



（第 1 题）

1. 证明：因为 AB 是圆 O 的直径，

所以 $\angle ACB=90°$，又 $CP\perp AB$，

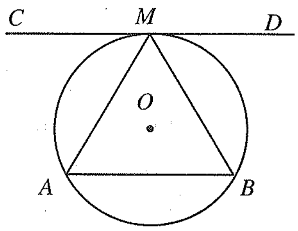
所以 $\angle ACD=\angle ABC$，

因为 C 为$\overset{\frown}{AE}$的中点，

所以 $\angle CAD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CE}=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\angle ABC=\angle ACD$，

即 $\angle CAD=\angle ACD$，

所以 $AD=CD$.



（第 2 题）

2. 证明：(1) 因为 $AB/\!/CD$，则$\angle A=\angle CMA$，

又 CD 是圆 O 的切线，所以 $\angle CMA=\angle B$，

所以 $\angle A=\angle B$，所以 $AM=BM$.

(2) 若 $AM=BM$，则

$\angle A=\angle B$，

又 CD 是圆 O 的切线，所以 $\angle CMA=\angle B$，

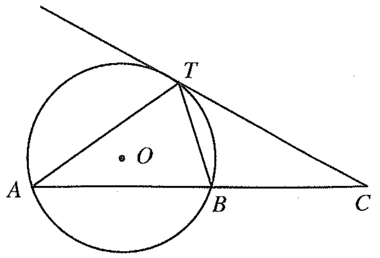
从而$\angle A=\angle CMA$，

所以 $CD/\!/AB$.

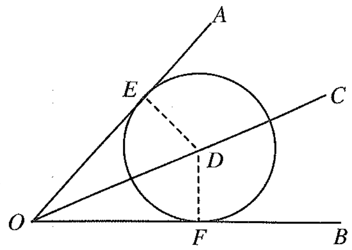
3. 证明：因为 CT 是圆 O 的切线，

所以 $\angle A=\angle BTC$，

又因　$\angle C=\angle C$，
所以　$\angle ATC=\angle TBC$.

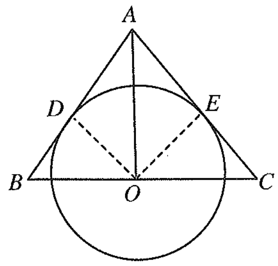


（第 3 题）

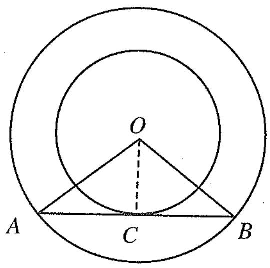


（第 4 题）

4. 证明：因为　OC 平分$\angle AOB$，且圆 D 与 OA 切于 E，
   则 $DE\perp OA$，
   作 $DF\perp OB$ 于 F，则 $DF=DE$，
   所以　DF 也是圆 D 的半径，
   所以　圆 D 与 OB 相切.
5. 证明：因为　$AB=AC$，$BO=OC$，
   所以　AO 平分$\angle BAC$，连 OD，则 $AB\perp OD$.
   过 O 作 $OE\perp AC$，
   因为　OA 平分$\angle BAC$，所以　$OE=OD$，
   所以　OE 为圆 O 的半径，
   所以　AC 是圆 O 的切线.
   即圆 O 与 AC 切于 E 点.



（第 5 题）

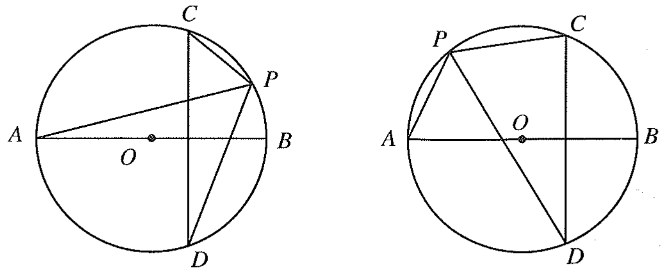


（第 6 题）

6. 证明：连 OA，OB，OC，则
   $OA=OB$，$OC\perp AB$，
   所以　$AC=BC$，
   即 C 是 AB 的中点.
7. 证明：(1) 当点 P 在劣弧 CD 上运动时，
   因为　$CD\perp AB$ 且 AB 为直径，
   所以　$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$，

所以　$\angle APC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle APD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$，

所以　$\angle APC=\angle APD$.



（第 7 题）

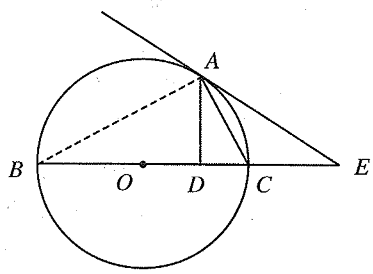
（2）当 P 在优弧 CD 上运动时，

$\angle APD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，

$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{BC})$，

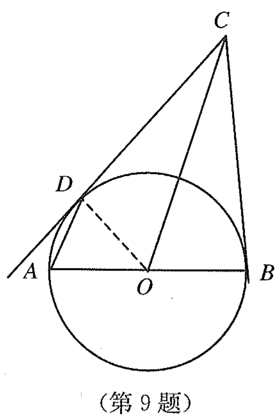
所以　$\angle APD+\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BD})=\pi$，

即$\angle APD$与$\angle APC$互补.



（第 8 题）

8. 证明：连 AB. 因为　BC 为直径，
所以　$\angle BAC=90°$.
又 $AD\perp BC$，所以　$\angle DAC=\angle B$.
又 AE 是圆 O 的切线，所以　$\angle CAE=\angle B$.
从而 $\angle DAC=\angle CAE$，
即 AC 平分$\angle DAE$.



（第 9 题）

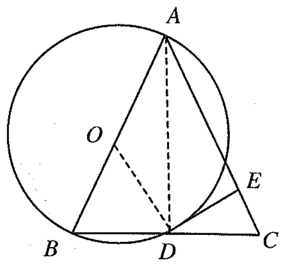
9. 证明：连 OD，因为　$AD/\!/OC$，
所以　$\angle DAO=\angle COB$　　$\angle ADO=\angle COD$，
又 $OA=OD$，所以　$\angle OAD=\angle ODA$，
从而$\angle COD=\angle COB$，
又 $OD=OB$，$OC=OC$，
所以　$\triangle COD\cong\triangle COB$.
所以　$\angle ODC=\angle OBC=90°$，
所以　CD 是圆 O 的切线.

10. 证明：连接 OD，AD，
因为　AB 为圆 O 的直径，
所以　$AD\perp BC$.
又 $AB=AC$，
所以　D 是 BC 的中点，OD 是$\triangle ABC$ 的中位线.

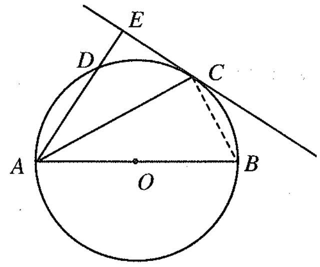
所以　$OD /\!/ AC$，又 $DE \perp AC$，

所以　$DE \perp OD$，

所以　DE 是圆 O 的切线.



（第 10 题）



（第 11 题）

11. 证明：连接 BC，因为　AB 为直径，

所以　$\angle ACB = 90^\circ$，

又 CE 是圆 O 的切线，

所以　$\angle ACE = \angle B$，

所以　$\mathrm{Rt}\triangle ACE \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC$，

所以　$\angle CAE = \angle BAC$，即 AC 平分 $\angle DAB$.

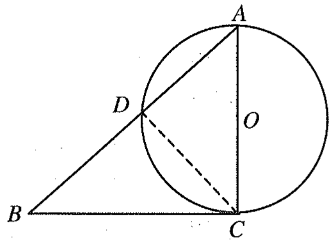
练习 1.3.1（第 24 页）

1. D.

2. 解：连接 CD，因为　AC 为圆 O 的直径，

所以　$CD \perp AB$，由射影定理 $BC^2 = BD \cdot BA$，

所以　$BD = \dfrac{BC^2}{BA} = \dfrac{16}{5}$.



（第 2 题）

3. 解：由题设：$EF \perp AB$，所以　$EC = CF$，

$OA = 6$，$AC = 2$，所以　$OC = 4$，$BC = 10$，由相交弦定理，

$AC \cdot CB = EC \cdot CF$，所以　$EC^2 = AC \cdot CB = 2 \times 10 = 20$，

所以　$EC = 2\sqrt{5}$.

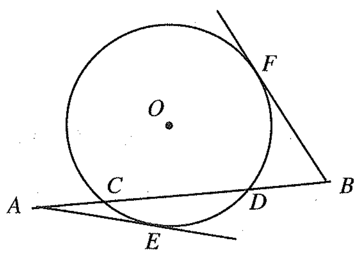
4. 解：$EF = 3$，$r = 5$，所以　$AE = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$，

$ED \cdot EC = EA \cdot EB = 21$，又 $CE : ED = 3 : 4$，

所以　设 $CE = 3k$，$ED = 4k$；

所以　$12k^2 = 21$，所以　$k^2 = \dfrac{7}{4}$，$k = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$，

$CD = CE + ED = 7k = \dfrac{7\sqrt{7}}{2}$.



（第 5 题）

5. 证明：因为　AE，BF 是圆 O 的切线，

所以　$AE^2 = AC \cdot AD$，$BF^2 = BD \cdot BC$，

因为　$AC=BD$，

所以　$AC+CD=BD+CD$，

即 $AD=BC$，

所以　$AE^2=BF^2$，所以　$AE=BF$.

练习 1.3.2.1（第 26 页）

1. 解：因为　$\angle A+\angle C=180°$，

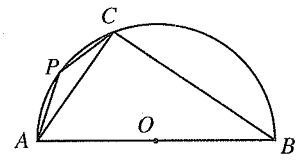
　设$\angle A=3x$，$\angle B=4x$，$\angle C=6x$，

　所以　$3x+6x=180°$，

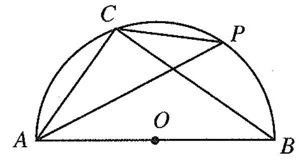
　所以　$x=20°$，

　所以　$\angle A=60°$，$\angle C=120°$，$\angle B=80°$，

　又 $\angle B+\angle D=180°$，所以　$\angle D=100°$.



（第 2 题（1））



（第 2 题（2））

2. 解：(1) 当 P 在$\overset{\frown}{AC}$上时，

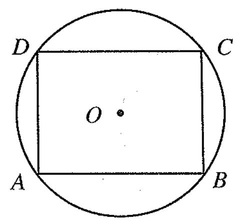
　因为　AB 为圆 O 的直径，所以　$\angle ACB=90°$.

　又 $\angle CAB=50°$，所以　$\angle ABC=40°$，$\angle APC+\angle B=180°$，

　所以　$\angle APC=140°$.

　(2) 当 P 在$\overset{\frown}{BC}$上时，

　$\angle APC=\angle ABC=40°$.



（第 3 题）

3. 已知：$ABCD$ 是圆 O 的内接平行四边形，求证：$ABCD$ 是矩形.

　证明：因为　$ABCD$ 是平行四边形，

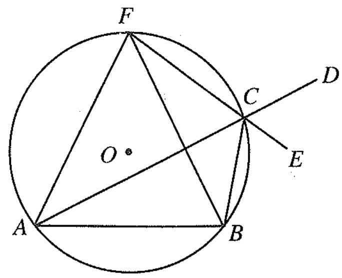
　所以　$\angle A=\angle C$，

　又 $\angle A+\angle C=180°$，

　所以　$\angle A=\angle C=90°$.

　同理 $\angle B=\angle D=90°$，

　所以　$ABCD$ 是矩形.



（第 4 题）

4. 证明：因为　CE 平分$\angle BCD$，

　所以　$\angle BCE=\angle DCE$，

　又 $\angle ACF=\angle DCE$（对顶角），

　$\angle ACF=\angle ABF$（同弧上的圆周角相等），

　所以　$\angle ABF=\angle DCE$.

　又 $\angle FAB=\angle BCE$（圆内接四边形的外角等于它的内对角），

　所以　$\angle FAB=\angle FBA$，从而 $FA=FB$.

练习 1.3.2.2（第 28 页）

1. 证明：假设 D 在圆内，连 BD 延长交圆 O 于 D'，连 AD'，CD'，

　因为　$\angle ADB$，$\angle CDB$ 分别是$\triangle ADD'$和$\triangle CDD'$的外角，

　所以　$\angle ADB>\angle AD'D$，$\angle CDB>\angle CD'D$，

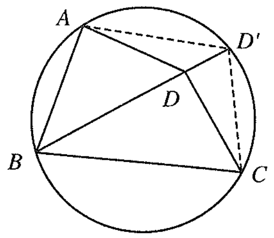
　所以　$\angle AD'D+\angle CD'D<\angle ADB+\angle CDB$，

即 $\angle AD'C < \angle ADC$.

所以　$\angle AD'C + \angle ABC < \angle ADC + \angle ABC = 180°$,

即$\angle AD'C + \angle ABC < 180°$.

这与圆内接四边形的性质矛盾.



（第 1 题）

2. 证明：连 EF，$\angle A + \angle BFE = 180°$,

又 $AB // CD$，所以　$\angle A + \angle D = 180°$,

所以　$\angle BFE = \angle D$,

因为　$\angle BFE + \angle EFC = 180°$,

所以　$\angle D + \angle EFC = 180°$,

所以　D，C，E，F 四点共圆.

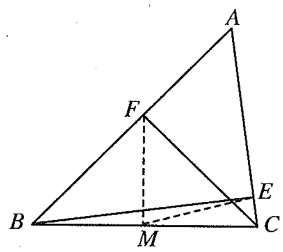
3. 证明：取 BC 的中点M,

因为　$\angle BEC = \angle BFC = 90°$,

所以　$ME = MF = MB = MC = \frac{1}{2}BC$,

所以　B，C，E，F 在以 M 为圆心，半径为$\frac{1}{2}BC$ 的圆上，

即 B，C，E，F 四点共圆.



（第 3 题）

4. 已知：E，F，G，H 分别是菱形 $ABCD$ 各边的中点，求证：E，F，G，H 四点共圆.

证明：设 AC，BD 交于O,

因为　$ABCD$ 是菱形，所以　$AC \perp BD$,

又 E，F，G，H 分别是边的中点，

所以　$OE = OF = OG = OH = \frac{1}{2}a$（$a$ 为边长），

所以　E，F，G，H 四点共圆.

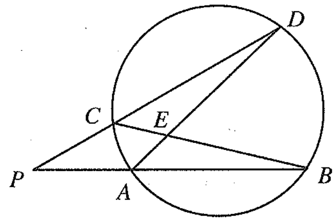
5. 提示：由本节定理证明.

习题 1-3（第 29 页）

1. 解：两对.

因为　$\angle D = \angle B$，设 AD 与 BC 交于 E,

所以　$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$，$\triangle PAD \backsim \triangle PCB$.



（第 1 题）

2. 证明：因为　$ABCD$ 是平行四边形，

所以　$\angle D = \angle B$,

又 A，B，E，F 四点共圆，

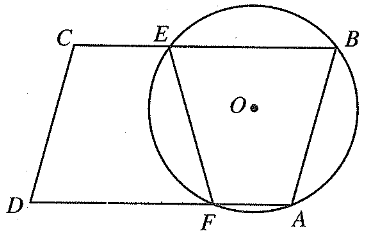
所以　$\angle EFD = \angle B$,

因为　$\angle D = \angle EFD$,

因为　$BC // AD$，所以　$\angle EFD + \angle CEF = 180°$,

所以　$\angle D + \angle CEF = 180°$.

所以　C，D，F，E 四点共圆.



（第 2 题）

3. 解：题中条件 $AB=12$，$AC=13$，$AO=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

$OC=\sqrt{AO^2-AC^2}=\sqrt{15^2-13^2}=2\sqrt{14}$，$DC^2=\sqrt{9^2-56}=5$.

设 $AD=x$，则 $12^2=x(x+10)$. 解此方程得 $x=8(x=-18$ 舍去)，

所以小圆半径为 $2\sqrt{14}$，$AD=8$.

4. 证明：因为 PC，PA 是圆 O 的切线，

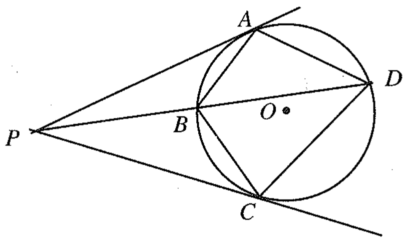
所以 $\angle PCB=\angle PDC$，所以 $\triangle PBC\backsim\triangle PCD$，

所以 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{PB}{PC}$，同理可得$\dfrac{AB}{AD}=\dfrac{PB}{PA}$，

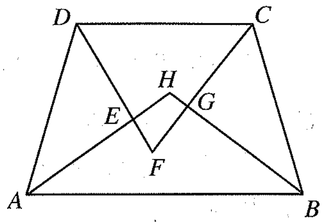
因为 $PA=PC$，

所以 $\dfrac{BC}{CD}=\dfrac{AB}{AD}$，

所以 $AD\cdot BC=AB\cdot DC$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 已知：四边形 $ABCD$ 中，AE，DF，CG，BH 分别平分$\angle A$，$\angle D$，$\angle C$，$\angle B$.

求证：E，F，G，H 四点共圆.

证明：因为 $\angle AHB=180^\circ-\dfrac{\angle A+\angle B}{2}$，

$\angle CFD=180^\circ-\dfrac{\angle C+\angle D}{2}$，

所以 $\angle AHB+\angle CFD=360^\circ-\dfrac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C+\angle D)=180^\circ$，

所以 E，F，G，H 四点共圆.

6. 已知：$ABCD$ 是正方形，P 为 AC 上任一点，过 P 点的直线 $EF\parallel AB$，$GH\parallel AD$.

求证：E，G，F，H 四点共圆.

证明：连 EG，GF，FH，HE，$AGPE$ 与 $PFCH$ 都是正方形，

所以 $\angle GEP=\angle PFH=45^\circ$，

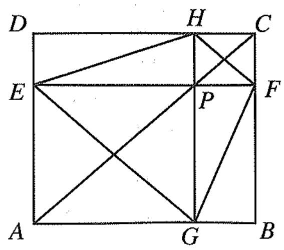
因为 $\mathrm{Rt}\triangle EPH\cong\mathrm{Rt}\triangle GPF$，

所以 $\angle HEP=\angle PGF$，

所以 $\angle HEP+\angle PFG=\angle PGF+\angle PFG=90^\circ$，

从而 $\angle HEG+\angle HFG=180^\circ$，

所以 E，G，F，H 四点共圆.



（第 6 题）

7. 提示：在$\odot O$ 不含点 A 的$\overparen{PB}$上任取一点 F，连 FP，FB，则$\angle F=$

$\angle EPB=\angle BAC=\angle BDC$，所以 $CD\parallel PE$. 与点 P 的位置无关.

8. 提示：过点 A 作$\odot O$和$\odot O'$的公切线.

9. 提示：先证 $PA\cdot PB=PC\cdot PD$，连 AC，BD，则$\triangle PAC\backsim\triangle PBD$，$\angle PAC=\angle PDB$.

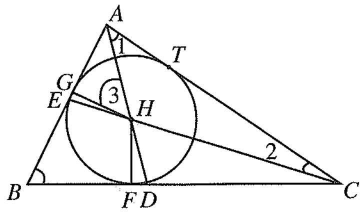
10. 提示：如图，设$\odot H$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆，F，G，T 分别为边 BC，AB，AC 切点，则 $AG=AT$，$CF=CT$.

由$\angle B=60°$，证$\angle 3=\angle 60°$，四边形 $BDHG$ 共圆.

再证 $\text{Rt}\triangle DHF\cong\text{Rt}\triangle EHG$，$DF=GE$.

$AE+CD=AG+EG+CF-DF=AG+CF$

$=AT+CT=AC$.



（第 10 题）

巩固与提高（第 32 页）

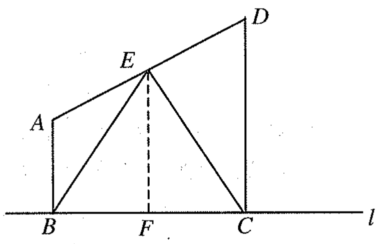
1. D； 2. A； 3. C； 4. D.

5. 证明：设 BC 的中点为 F，则 $AB\parallel EF\parallel DC$，

又 $AB\perp l$，$CD\perp l$，所以 $EF\perp l$，

所以 EF 是 BC 的垂直平分线，

所以 $BE=CE$.



（第 5 题）

6. 解：连接 CD，因为 AC 为圆 O 的直径，

所以 $CD\perp AB$，

又 BC 是圆 O 的切线，

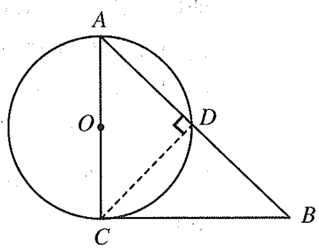
所以 $AC\perp BC$，$AC=6$，$AD=2$，

$AC^2=AD\cdot AB$，所以 $AB=\frac{36}{2}=18$，

所以 $BD=18-2=16$，

$BC^2=BD\cdot BA=16\times 18$，

所以 $BC=12\sqrt{2}$.



（第 6 题）

7. 证明：因为 $\angle H=\angle BCE$，$CE\perp BH$，可知 $HG\perp BC$.

因为 $BD\perp AC$，所以 $GD^2=BG\cdot GC$. ①

又 $\triangle CFG\backsim\triangle HBG$，

所以 $\frac{FG}{BG}=\frac{CG}{GH}$，所以 $BG\cdot GC=GF\cdot GH$， ②

由①②知 $GD^2=GF\cdot GH$.

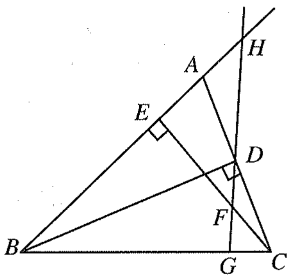
8. 证明：连接 CE，BE，因为 AE 是圆 O 的直径，

所以 $\angle ACE=\angle ABE=90°$，$\angle ABC=\angle AEC$，$\angle ACB=\angle AEB$，

所以 $\tan B\cdot\tan C=\tan\angle AEC\cdot\tan\angle AEB=\frac{AC}{CE}\cdot\frac{AB}{BE}$， ①

$\tan B\cdot\tan C=\frac{AC}{BE}\cdot\frac{AB}{CE}$，

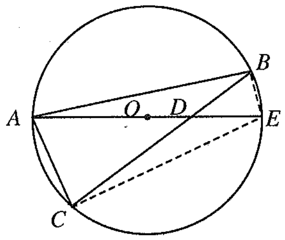
又 $\triangle ABD\backsim\triangle CDE$，$\triangle ACD\backsim\triangle BDE$，



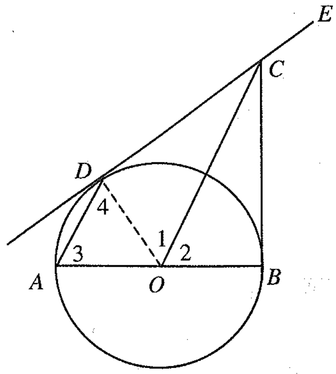
（第 7 题）

所以 $\dfrac{AC}{BE}=\dfrac{AD}{BD}$, $\dfrac{AB}{CE}=\dfrac{BD}{DE}$, ②

由①② $\tan B\cdot\tan C=\dfrac{AD}{DE}$.



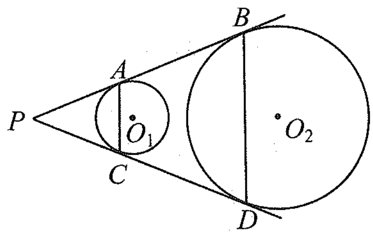
（第 8 题）



（第 9 题）

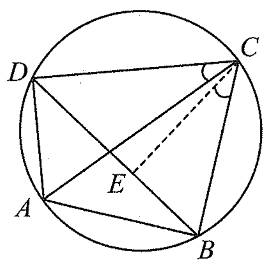
9. 证明：连接 OD，因为 ED 是圆 O 的切线，所以 $OD\perp DE$，
因为 $OC/\!/AD$，所以 $\angle 2=\angle 3$，$\angle 4=\angle 1$，$OD=OA$，
所以 $\angle 3=\angle 4$，$\angle 1=\angle 2$，$OC=OC$，$OD=OB$，
所以 $\triangle COD\cong\triangle COB$，
所以 $\angle OBC=90^\circ$，所以 BC 是圆 O 的切线.

10. 证明：因为 AB、CD 是圆 O_1 和圆 O_2 的公切线，
设 AB 和 CD 相交于点 P，则 $\angle B=\angle D$，$\angle A=\angle C$，
所以 $\angle B+\angle C=180^\circ$，
所以 A，B，D，C 四点共圆.



（第 10 题）

11. 已知：$ABCD$ 是圆 O 的内接四边形.
求证：$AB\cdot CD+AD\cdot BC=AC\cdot BD$.
证明：在 BD 上取一点 E，使 $\angle BCE=\angle ACD$，
因为 $\angle DAC=\angle EBC$，所以 $\triangle ACD\backsim\triangle BCE$
所以 $\dfrac{AD}{BE}=\dfrac{AC}{BC}$，所以 $AD\cdot BC=BE\cdot AC$， ①
又 $\angle CDB=\angle CAB$，$\angle DCE=\angle ACB$，
所以 $\triangle CDE\backsim\triangle CAB$.
所以 $\dfrac{CD}{AC}=\dfrac{DE}{AB}$，所以 $AB\cdot CD=DE\cdot AC$， ②
由①+② $AB\cdot CD+AD\cdot BC=BE\cdot AC+DE\cdot AC=(BE+DE)\cdot AC$
$=BD\cdot AC$.
因此，结论得证.



（第 11 题）

自测与评估（第 33 页）

1. 解：因为 $\dfrac{S_{\triangle BCD}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{BD}{BA}=\dfrac{4}{9}$，所以 $BD=\dfrac{4}{9}\times 12=\dfrac{16}{3}$，

因为 $DE//BC$，所以 $CE=BD=\dfrac{16}{3}$.

2. 解：因为 $CD^2=AD\cdot DB$，所以 $DB=\dfrac{25}{3}$，所以 $AB=3+\dfrac{25}{3}=\dfrac{34}{3}$.

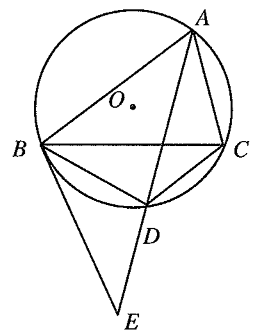
$AC^2=AD\cdot AB=3\times\dfrac{34}{3}=34$. 所以 $AC=\sqrt{34}$，

$BC^2=BD\cdot BA=\dfrac{25}{3}\times\dfrac{34}{3}=\dfrac{25\times 34}{9}$，所以 $BC=\dfrac{5}{3}\sqrt{34}$.

3. 证明：(1) 因为 BE 是圆 O 的切线，
所以 $\angle EBD=\angle BAD$，
又因 $\angle DBC=\angle DAC$，$\angle BAD=\angle DAC$，
所以 $\angle EBD=\angle DBC$.
即 BD 平分$\angle EBC$.

(2) 由 (1) 知$\triangle BDE\backsim\triangle ABE$，$\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{BD}{AB}$，

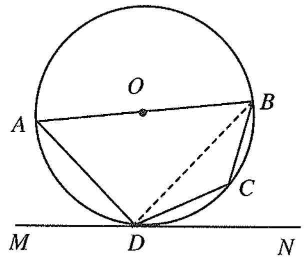
又因 $BD=CD$，所以 $\dfrac{BE}{AE}=\dfrac{CD}{AB}$，所以 $AE\cdot CD=AB\cdot BE$.



（第 3 题）

4. 解：设 $BC=x$，则依切割线定理可得方程
$6^2=(9-x)\cdot 9$.
解得 $x=5$.
所以 $BC=5$.

5. 解：连接 BD，因为 AB 是圆 O 的直径，
所以 $\angle ADB=90°$.
又 MN 是圆 O 的切线，
所以 $\angle ABD=\angle MDA=50°$，
所以 $\angle A=40°$，
又 $ABCD$ 是圆内接四边形，所以 $\angle BCD=140°$.



（第 5 题）

6. 证明：连接 OC，OE，因为 G 为 OA 的中点，

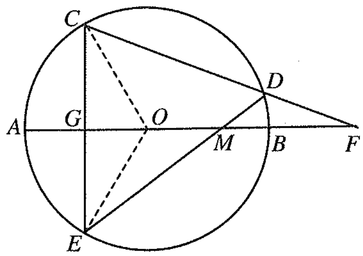
所以 $OG=\dfrac{1}{2}OA=\dfrac{1}{2}OC$，

所以 $\angle COG=60°$，所以 $\angle COE=120°$，

$\angle CDE=\dfrac{1}{2}\angle COE=60°$，

所以 $\angle MDF=120°$（定值）.

7. 证明：因为 $DA\perp AB$，$DA//BC$，
所以 $BC\perp AB$，
所以 DA，CB 分别是圆 O 的切线.



（第 6 题）

因为　$\angle COD=90°$；

所以　$\angle BCO=\angle AOD$；

所以　$\triangle BCO\backsim\triangle AOD$.

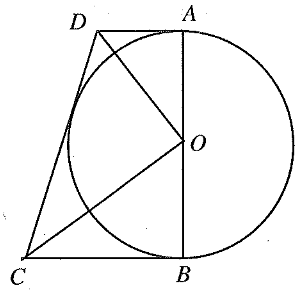
所以　$\dfrac{BC}{OA}=\dfrac{OC}{OD}$. 因为　$OA=OB$，

所以　$\dfrac{BC}{OC}=\dfrac{OA}{OD}=\dfrac{OB}{OD}$，

所以　$\mathrm{Rt}\triangle BCO\backsim\mathrm{Rt}\triangle OCD$，

所以　$\angle OCB=\angle OCD$，所以　OC 是 $\angle BCD$ 的平分线.

所以　O 到 CD 的距离等于半径 OB，所以　CD 是圆 O 的切线.



（第 7 题）

第二章

圆柱、圆锥与圆锥曲线

Ⅰ 概 述

一、教学要求

1. 了解平行投影的含义，通过圆柱与平面的位置关系，体会平行投影；证明平面与圆柱面的截线是椭圆（特殊情形是圆）.

2. 通过观察平面截圆锥面的情境，体会下面定理：

定理 在空间中，取直线 l 为轴，直线 l' 与 l 相交于 O 点，其夹角为 α，l' 围绕 l 旋转得到以 O 为顶点，l' 为母线的圆锥面，任取平面 π，若它与轴 l 交角为 β（π 与 l 平行，记 $\beta=0$），则：

(1) $\beta>\alpha$，平面 π 与圆锥的交线为椭圆；

(2) $\beta=\alpha$，平面 π 与圆锥的交线为抛物线；

(3) $\beta<\alpha$，平面 π 与圆锥的交线为双曲线.

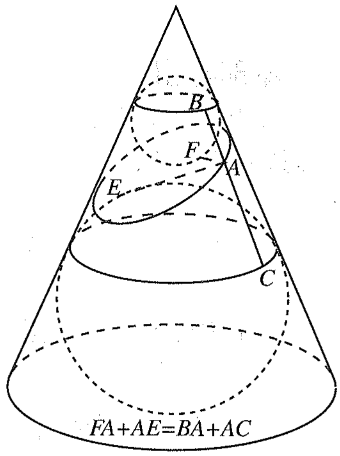


图 2-1

3. 利用 Dandelin 双球（这两个球位于圆锥的内部，一个位于平面 π 的上方，一个位于平面 π 的下方，并且与平面 π 及圆锥均相切）证明上述定理（1）情况.

4. 试证明以下结果：①在（3）中，一个 Dandelin 球与圆锥面的交线为一个圆，并与圆锥的底面平行，记这个圆所在平面为 π'；②如果平面 π 与平面 π' 的交线为 m，在（1）中椭圆上任取一点 A，该 Dandelin 球与平面 π 的切点为 F，则点 A 到点 F 的距离与点 A 到直线 m 的距离比是小于 1 的常数 e.（称点 F 为这个椭圆的焦点，直线 m 为椭圆的准线，常数 e 为离心率.）

5. 探索定理中（3）的证明，体会当 β 无限接近 α 时平面 π 的极限结果.

二、内容编排

本章教材是在高中数学 2 学习了平行投影的有关概念和性质、圆的标准方程及系列 1 选修 1-1（或系列 2 选修 2-1）圆锥曲线与方程的有关知识的基础上编写的.

本章内容分为两部分. 第一部分首先证论了平行投影的性质，然后通过平行投影变换在圆柱面内探索圆与椭圆之间关系. 第二部分，用圆柱或圆锥面的内切球探索圆锥曲线的特征性质，各自给出椭圆、双曲线、抛物线的定义，以及它们的统一定义，揭示它们之间的内在联系.

本章的重点是平行投影的性质和应用、圆柱面的平面截线和圆锥面的平面截线的形状和特征性质及解决上述问题采用的数学思想方法. 本章的知识内容中蕴含着丰富的数学思想方法，它们有助于学生体会空间想像能力和几何直观能力在解决问题中的作用，有助于提高学生综合运用几何知识解决问题的能力. 另外，在本章学习中要注意借助直观图形，尽可能用数学语言清晰地表达思考过程与论证过程.

三、课时分配

本章教学约需 6 课时，具体分配如下（仅供参考）

2.1　平行投影与圆柱面的平面截线	2 课时
2.2　用内切球探索圆锥曲线的性质	3 课时
小结与复习	1 课时

Ⅱ　内容分析

本册导引

导引主要概括说明了本专题的主要内容，使学生初步了解本专题的主要内容，使学生初步接触到本专题的一些概念.

2.1　平行投影与圆柱面的平面截线

本节内容主要为探索圆锥曲线的特征性质作基础铺垫的.

2.1.1 平行投影的性质

教材首先复习与回顾了平行投影的有关概念及性质，然后对性质 1 与性质 5 进行了证明.

1. 由于平行投影的知识已在高中数学 2 中 1.1.4 投影与直观图中学习过，因此，本节学习学生接受起来较易.

2. 平行投影的性质以前学生没有证明过，学生在学习时有些困难，因此要特别注意画出直观图形、

分析思路.

3. 在进行平行投影性质的证明时，要用到平行投影的概念及立体几何中大量的有关知识. 因此在教学中可先让学生复习平面的基本性质及推论，线面平行的性质及判定定理.

2.1.2 圆柱面的平面截线

本小节利用平行投影的性质及解析几何的方法，研究了圆柱面的平面截线的形状.

1. 通过本小节的学习，要求学生掌握圆柱面的平面截线是椭圆（或圆）.

2. 由于学生在高中必修 2 中已学习了圆柱的有关知识，因此在教学中可以向学生提出如下问题：如果一平面垂直于一圆柱的轴线，则截圆柱所得的截线是什么曲线？针对学生的回答，要求学生画出图形，教师用计算机演示. 接着向学生提出问题：如果一个平面与圆柱的轴线所成的角为锐角，截圆柱所得的截线是什么曲线？可以通过计算机演示，让学生直观地看出截线是椭圆，如何论证呢？从而引出本节课要解决的问题.

3. 在教材中研究$\odot O$与曲线m的关系时，要求学生正确画出图形，还要注意曲线m所在平面与圆柱的轴线所成的角α.

在图 2-2 中$\angle OO'A'=\alpha$，在直角梯形$AOO'A'$中，

$AO=A'D=A'O'\sin\alpha$，即　$\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}A'B'\sin\alpha$，

所以　$AB=A'B'\sin\alpha$.

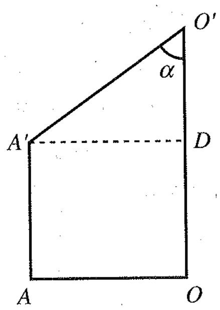


图 2-2

4. 在证明曲线m是一个椭圆时，由于学生的认知基础只能从椭圆的标准方程来判断椭圆，因此教材中利用解析几何的思想，通过建系求出曲线C的方程为$\frac{x'^2}{(r\csc\alpha)^2}+\frac{y'^2}{r^2}=1$，学生易于掌握、理解.

5. 本节知识在寻找$\odot O$与曲线m的关系，证明曲线m是椭圆，使用的数学思想和方法是解决立体几何问题的一种方法，要引起重视.

2.2　用内切球探索圆锥曲线的性质

2.2.1 球的切线与切平面

本小节介绍了球的切线与切平面的概念与性质.

1. 为了本节知识的顺利学习，可先复习球的有关概念及性质（高中数学 2）.

2. 本节知识与圆的切线有关知识类似，因此可用类比的方式学习.

3. 注意：从圆外一点引圆的切线有且只有两条，而从球外一点引该球的切线就有无数条. 过圆上一点引圆的切线有且只有一条，而过球面上一点引圆的切线有无数条.

4. 球的切平面的性质的证明用到线面垂直的判定定理，要适当提前复习.

已知：平面δ为球O的切平面，M为切点（图 2-3）.

求证：$OM\perp$平面δ.

证明：如图，在平面δ内，

过M任意作两条直线a，b，

因为　平面 δ 为球 O 的切平面，

所以　平面 δ 与球 O 只有唯一公共点，

从而直线 a，b 与球 O 只有唯一公共点，

所以　a，b 均为球 O 的切线，所以

$$\left.\begin{array}{l}OM\perp a,\ OM\perp b,\\ a\cap b=M,\end{array}\right\}\Rightarrow OM\perp \text{平面 }\delta,$$

即一个球的切平面，垂直于过切点的半径.

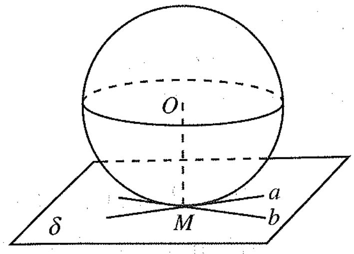


图 2-3

2.2.2 圆柱面的内切球与圆柱面的平面截线

1. 圆柱的母线与圆柱的轴平行，学生要明白这一点，才能得出切点圆、圆柱面的内切球的概念.

一般地，圆柱面准线和母线的概念，在空间解析几何中，定义如下：

一般地，对空间中任一条平面曲线 c，过 c 上一点引一条直线 l，l 沿 c 作平行移动所形成的轨迹称为柱面. 曲线 c 称为柱面的准线，l 称为柱面的母线. 当曲线 c 为圆时，形成的柱面即为圆柱面，此时圆 c 称为圆柱面的准线，l 称为圆柱面的母线.

2. 圆柱面的内切球的切点集合是一个圆.

3. 平面 δ 截圆柱面时，若平面 δ 与圆柱面的轴线垂直，则平面 δ 截圆柱面所得的截线是一个圆，此时称 δ 平面为圆柱面的直截面；若平面 δ 与圆柱面的轴线所成的角为锐角，则平面 δ 截圆柱面所得的截线是一个椭圆，此时称平面 δ 为斜截面.

4. 一平面 δ 与圆柱面轴线所成的角为 $\alpha(0^\circ<\alpha<90^\circ)$，截得的曲线记为 m，则存在圆柱面的两个内切球分别在 δ 的上方与下方，且它们分别与平面 δ 相切，下面对此结论证明如下：

在平面 δ 的上方作一平面 $\alpha /\!/$ 平面 δ，且使平面 α 与平面 δ 的距离等于圆柱面准线的半径 r，设平面 α 与圆柱面的轴线交于一点 C_1，以 C_1 为球心，r 为半径作球，则

球 $C_1(C_1, r)$ 为圆柱面的内切球. 过 C_1 作 $C_1F_1\perp$ 平面 δ，$F_1\in\delta$，

则　$C_1F_1=r$，又因为　球 $C_1(C_1, r)$ 的半径为 r，所以　F_1 在球上，

所以　C_1F_1 为球的一条半径，

又因为　过球的半径的外端与半径垂直的平面与球只有唯一一个公共点，

所以　球 $C_1(C_1, r)$ 与平面 δ 相切.

同理在平面 δ 的下方也存在圆柱面的一个内切球 $C'(C', r)$ 与平面 δ 相切.

注意：圆柱面的这两个内切球，叫做 Dandelin 双球.

5. 在 2.1.2 中已证明曲线 m 为一个椭圆. 本节教材主要是研究椭圆上任一点 M 所具有的性质，利用球的切线长的性质易得出 $MF_1+MF_2=P_1P_2$，从而得出椭圆的一个特征性质，因此可用这个性质定义椭圆，即：在一个平面内，到两个定点的距离和等于定长（大于两定点的距离）的轨迹，叫做椭圆.

6. 教材中有这样一句话：还可证明，在平面 δ 内，除曲线 m 上的点外，其他各点都不具有上述性质，即曲线 m 外的点“到两个切点的距离之和不等于这个常数”，下面证明如下：

如图 2-4 (1)，设 P 为平面 δ 内，在曲线 m 外的任一点，连接 PF_1，PF_2，设 PF_2 交曲线 m 为 M 点，再连接 MF_1.

则 $PF_1+PF_2=PF_1+PM+MF_2>MF_1+MF_2=$ 定长，

如图 2-4（2）设 P 为平面 δ 内，在曲线 m 内的任一点，（P 不在 F_1F_2 上），延长 F_1P 交曲线 m 于 M，连接 MF_2，则

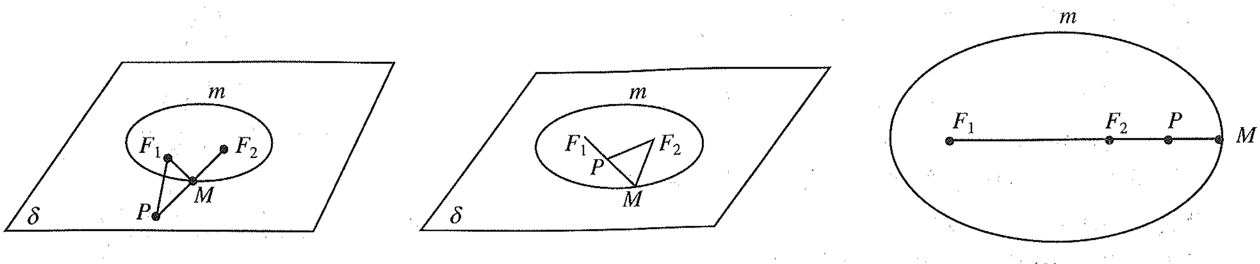


图 2-4

$MF_1+MF_2=MP+PF_1+MF_2=(MP+MF_2)+PF_1>PF_2+PF_1$，

即 $PF_1+PF_2<MF_1+MF_2=$定长，

如图 2-4（3），设 P 在平面 δ 内，且 P 在直线 F_1F_2 上，

F_1F_2 交曲线 m 于 M，

$MF_1+MF_2=MP+PF_1+MP+PF_2$，

所以　$PF_1+PF_2<MF_1+MF_2=$定长.

这说明在平面 δ 内，只有曲线 m 上的点 M，具有性质 $MF_1+MF_2=$定长（P_1P_2）.

2.2.3 圆锥面及其内切球

本节内容分为三部分．第一部分为圆锥面及其性质，第二部分为圆锥面的内切球及性质，第三部分为圆锥面的平面截线．本节内容多且有一定难度，因此在条件允许的学校，要尽可能利用现代计算机技术，动态展现 Dandelin 两球的方法，帮助学生利用几何直观地进行思维.

1. 圆锥面及其有关概念学生容易理解，但要搞清楚，它与高中数学 2 学过的圆锥知识既有联系又有区别.

一般地，对空间中任一条平面曲线 c 及不与 c 共面的一定点 P，过 P 点及 c 上的一点引一条直线 l，l 沿着 c 移动所形成的轨迹称为锥面．曲线 c 称为锥面的准线，l 称为锥面的母线．当曲线 c 为圆时，形成的锥面即为圆锥面，此时圆 c 称为圆锥面的准线，l 称为圆锥面的母线.

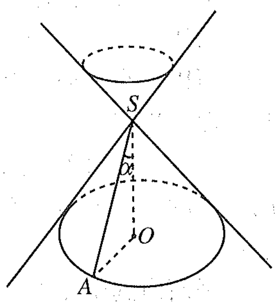


图 2-5

2. 圆锥面有以下基本性质.

性质 1　圆锥面的轴线和每一母线的夹角相等.

证明如下：设 SA 为圆锥面 S 的任一母线，它与圆锥准线交于 A，SO 为圆锥面的轴，则 $\angle ASO$ 为圆锥面的轴线和母线的夹角，在 $\mathrm{Rt}\triangle SOA$ 中，$\tan\angle ASO=\dfrac{OA}{SO}$.

其中 OA 为圆锥面的准线的半径，SO 为圆锥面的轴，它们均为定值，所以 $\tan\angle ASO=$定值，因此，$\angle ASO$ 为定值.

又由于 SA 的任意性，所以圆锥面的轴线和每一母线的夹角相等.

性质 2　如果一平面平行于准线所在的平面，则截圆锥面所得的截线是圆.

证明：已知圆锥面 S 的准线是 $\odot O$，平面 σ 平行于准线所在的平面，设平面 σ 截圆锥面的截线为曲线 m，交圆锥面的轴于 O'点.

因为　$SO\perp$平面 σ，平面 $\sigma//$平面 δ，

所以　$SO'\perp$平面 σ.

设 M 为曲线 m 上任一点，连 $O'M$，SM，

则 SM 为圆锥面的任一母线.

由性质 1，圆锥面的轴线和每一母线的夹角相等，

设其夹角为 α，则 $\angle O'SM=\alpha$，

因为　$SO'\perp$平面 σ，所以　$SO'\perp O'M$，

在 $\mathrm{Rt}\triangle SO'M$ 中，$O'M=SO'\tan\alpha$，

因为　SO'，$\tan\alpha$ 均为定值，

所以　$O'M$ 为定值，即曲线 m 上任一点到定点 O' 的距离相等，所以　曲线 m 为圆. 所以，如果一平面平行于准线所在的平面，则截圆锥面所得的截线是圆.

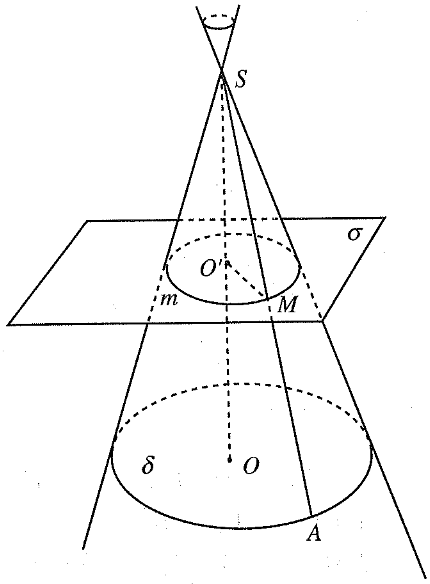


图 2-6

3. 圆锥面与内切球的交线是一个圆，并且该圆所在平面垂直于该圆锥面的轴线.

4. 已知圆锥面 S，其轴为 SX，其轴线与母线成 α 角，用一个不通过顶点 S 并且与 S 的轴线成 β 角的平面 σ 去截圆锥面 S，与圆轴面 S 的轴线相交于 M，且 $\beta<\alpha$，求证：存在圆锥面的内切球与平面 σ 相切.

证明：如图 2-7：证法同教材中的证明. 同理可证明，在平面 σ 的上方仍然存在一个球，既是圆锥面 S 的内切球，又与平面 σ 相切.

5. 同 4，当 $\beta=\alpha$ 时，求证：存在圆锥面的内切球与平面 σ 相切.

证明：证明同教材中的证明.

由于 $\alpha=\beta$，所以　$SP//$平面 σ，

所以　在平面 σ 上方只存在一个球，既是圆锥面 S 的内切球，又与平面 σ 相切.

6. 在一个平面内到两定点的距离之差的绝对值等于常数（小于两定点的距离）的点的轨迹，叫做双曲线，两个定点叫做双曲线的焦点.

平面内到定点与到定直线距离相等点的轨迹叫做抛物线，这个定点叫做抛物线的焦点，定直线叫做抛物线的准线.

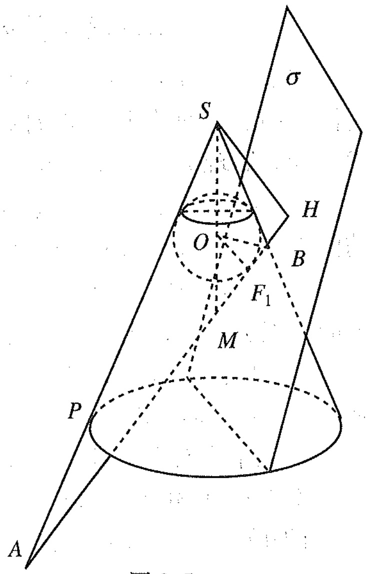


图 2-7

7. 对以下定理的学习要会画图、识图，并能证明，此部分知识较难，可通过计算机演示，模型制作等方法形成直观印象.

定理：在空间给定一个圆锥面 S，轴线与母线的夹角为 α，任取一个不通过 S 的平面 σ，设与轴线的夹角为 β（β 与轴线平行，规定 $\beta=0$），则：

（1）当 $\beta>\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为椭圆；

（2）当 $\beta=\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为抛物线；

（3）当 $\beta<\alpha$ 时，平面 δ 与圆锥面的交线为双曲线.

2.2.4 圆锥曲线的统一定义

1. 圆锥曲线的统一定义：

定理：除了圆之外，每一条圆锥曲线都是平面上某个定点 F 到某条定直线 l 的距离之比等于常数的点的轨迹.

其中点 F 叫做圆锥曲线的焦点，直线 l 叫做圆锥曲线的准线.

对定理的证明主要是作出图形，找出关系.

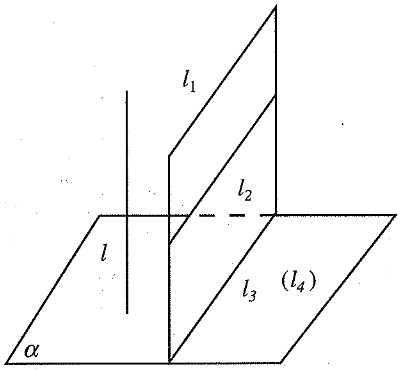
2. 对例题分析证明之后，可拓展到证明双曲线、抛物线，使学生更加熟悉图形，同时加强对前置知识的理解.

Ⅲ　习题参考答案

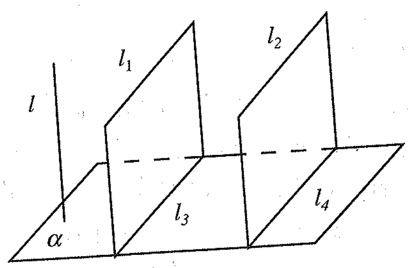
习题 2-1（第 41 页）

1. **性质 2 的证明：**

如图（1），（2），设直线 $l_1 /\!/$ 直线 l_2，l_1，l_2 在 α 内的平行投影为 l_3，l_4.



(1)



(2)

（第 1 题）

下面用反证法加以证明：

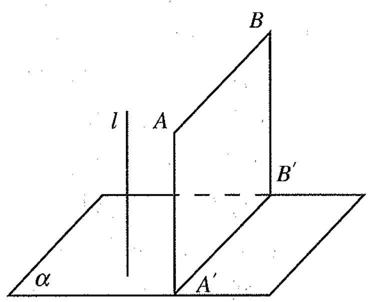
假设 l_3，l_4 既不重合也不平行，又 $l_3 \subset \alpha$，$l_4 \subset \alpha$

因此设 $l_3 \cap l_4 = P'$，由性质 1 知一定存在一点 $P \in l_1$，$P \in l_2$，使 P 在 α 内的投影为 P'，即 $l_1 \cap l_2 = P$，这与 $l_1 /\!/ l_2$ 矛盾，所以假设不成立，因此 l_3，l_4 平行或重合.

因此可证，平行直线的平行投影是平行或重合的直线.

性质 3 的证明：

如图（3），设线段 AB 的两个端点 A，B 在平面 α 内的投影为 A'，B'.



(3)

由性质 1 知，AB 在 α 内的投影为 $A'B'$，

所以 $AA'//BB'$，所以 它们确定一个平面 $AA'B'B$，

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB//\alpha,\\ \text{面 } AA'B'B\cap\alpha=A'B',\end{array}\right\}\Rightarrow AB//A'B',\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{又 } AA'//BB',\end{array}\right\}\Rightarrow \text{四边形 } AA'B'B \text{ 为平行四边形} \Rightarrow AB=A'B'.$$

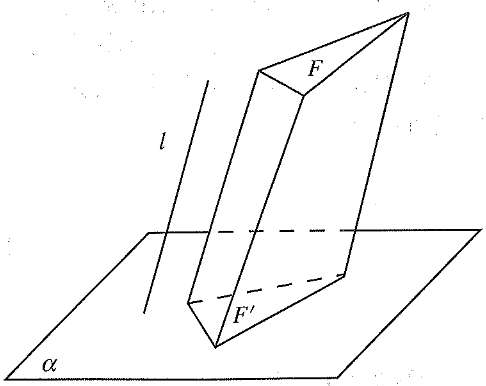
因此可证，平行于投影面的线段，它的投影与这条线段平行且等长.

性质 4 的证明：

由性质 3：平行于投影面的线段，它的投影与这条线段平行且等长.

高中数学 2 定理：如果一个角的两边与另一个角的两边分别对应平行，并且方向相同，那么这两个角相等.

由此，根据平面图形全等的定义，从而可以证明与投影面平行的平面图形，它的投影与这个图形全等（如图（4））.



(4)

2. 不一定是. 有可能是在同一条直线上的线段.
3. 利用教材的结论：

   $\odot O$ 的方程为 $x^2+y^2=3^2$，$x^2+y^2=9$，

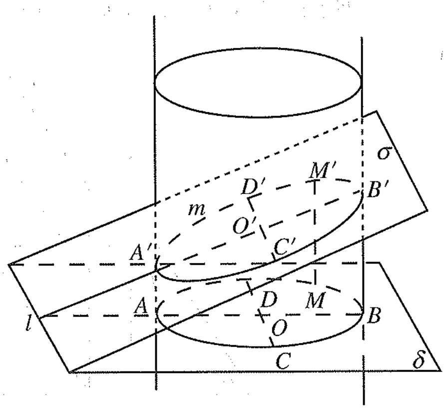
   椭圆截线所在方程为 $\dfrac{x'^2}{(r\sec\alpha)^2}+\dfrac{y'^2}{r^2}=1$，

   即 $\dfrac{x'^2}{(3\sec 60°)^2}+\dfrac{y'^2}{3^2}=1$，$\dfrac{x'^2}{6^2}+\dfrac{y'^2}{3^2}=1$，

   在此椭圆中：$a^2=6^2$，$b^2=3^2$，$c^2=a^2-b^2=36-9=27$.

   所以 椭圆截线的两个焦点之间的距离为 $2c=2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$.
4. 设曲线 $m\subset$ 平面 σ，$\odot O\subset$ 平面 δ，且 $\odot O$ 是曲线 m 在平面 δ 内的正射影（不妨将 $\odot O$ 看作一圆柱的准线）. 因此设平面 σ 与圆柱的轴线所成的角为锐角 α.

   设 $\sigma\cap\delta=l$. 在 δ 内，过 O 作 $CD//l$ 交 $\odot O$ 于 C、D，在曲线 m 上找出正射影为 C，D，O 的三点 C'，D'，O'，下面的证明见教材.



（第 4 题）

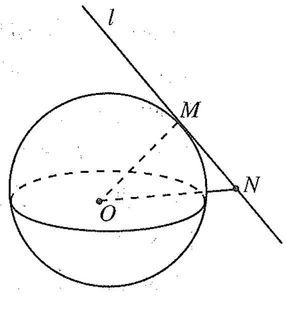
练习 2.2.1（第 42 页）

1. 已知：OM 是球 $O(O,r)$ 的一条半径，直线 l 过点 M，并 $l\perp OM$.

   求证：l 与球 O 只有唯一的公共点 M.

   证明：如图，设点 N 是 l 上不同于点 M 的任一点，

   则 OM，ON 确定一个平面，且 $\triangle OMN=90°$，$ON>OM=r$，于是 N 在球 O 外，所以 l 与球 O 只有唯一的公共点 M.



（第 1 题）

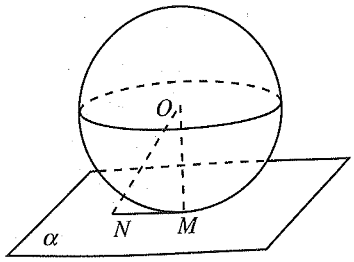
2. 已知：OM 是球 $O(O,r)$ 的一条半径，平面 α 过点 M，且 $OM\perp\alpha$.

   求证：平面 α 与球 O 只有唯一公共点 M.

   证明：如图，设点 N 是平面 α 内不同于点 M 的任一点，因为 $OM\perp\alpha$，$MN\subset\alpha$，所以

$OM\perp NM$.

在 Rt△OMN 中，$ON>OM=r$，所以　N 点在球 O 外，所以平面 α 与球 O 只有唯一的公共点 M.



（第 2 题）

3. (1) 球的切线垂直于过切点的半径.

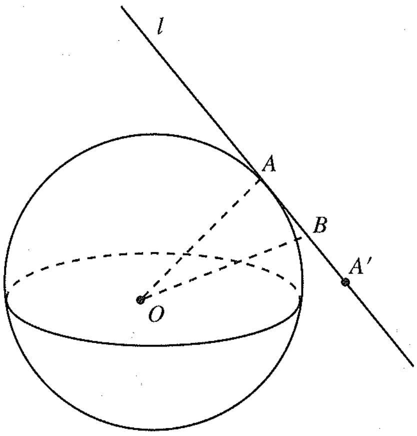
已知：直线 l 是球 $O(O, r)$ 的切线，A 为切点.

求证：$OA\perp l$.

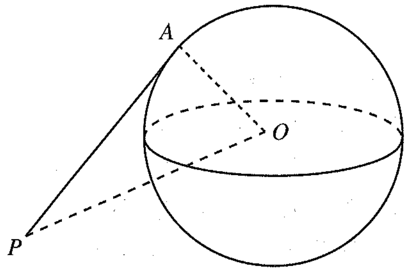
证明：如图，假设 l 不与 OA 垂直，取 l 与 O 确定的圆面，在此中作 $OB\perp l$ 于 B，则以 OB 为对称轴，点 A 应有一个对称点 A' 在 l 上，则 $OA'=OA=r$ 所以　点 A' 也在球 O 上.

这样 l 就和球 O 有两个公共点了，这与 l 与球 O 相切矛盾.

所以　假设不成立. 因此 $OA\perp l$.



（第 3 题（1））



（第 3 题（2））

(2) 从球外任一点引该球的所有切线长相等.

如图，A 为切点，P 为球 $O(O, r)$ 外任一点，PA 为球 O 的任一条切线，则 PA 与 O 确定一个平面，在 Rt△PAO 中，

$$PA=\sqrt{PO^2-OA^2}=\sqrt{PO^2-r^2},$$

当 P 为一定点时，则 PO 为定值，从而 PA 不变，因此从球外任一点引该球的所有切线长相等.

练习 2.2.2（第 43 页）

1. 证明：作一平面 σ∥平面 δ，且平面 σ 与平面 δ 的距离等于圆柱面准线的半径 r，则平面 σ 与圆柱面的轴线相交于一点 C.

以点 C 为圆心，r 为半径作球，则球 $C(C, r)$ 为圆柱面的内切球.

过 C 作 $CC'\perp$ 平面 σ，则 $C'\in\delta$，$CC'=r$，

又因为　球的半径为 r，所以　C' 在球面上.

又因为　过球的半径的外端与半径垂直的平面与球只有唯一公共点，

所以　球 C（C, r）与平面 δ 只有一个公共点.

所以　球 C（C，r）与平面相切.

因此存在圆柱面的内切球 C（C，r）与平面 δ 相切.

2. 设截割圆柱的平面为 σ，与 σ 相切的圆柱面的两个内切球的球心分别为 C_1，C_2，切点分别为 F_1 和 F_2. 如图.

由题意知 $C_1F_1\perp\sigma$，$C_2F_2\perp\sigma$，

所以　$C_1F_1 /\!/ C_2F_2$，

从而 C_1，F_1，C_2，F_2 共面，

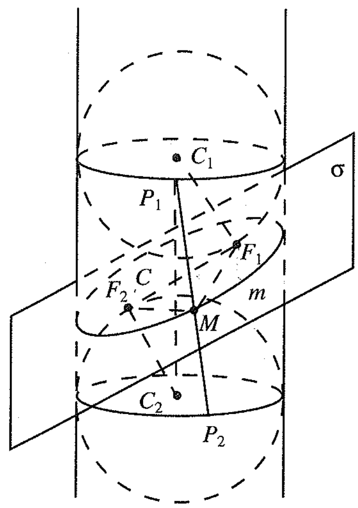
设 C_1C_2 与 F_1F_2 相交于 C 点.

因为　$C_1F_1\perp$ 截面 $\sigma\Rightarrow\angle C_1CF_1=60°$，

$$C_1C=\frac{C_1F_1}{\sin 60°}=\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{3}\sqrt{3},$$

同理　$C_2C=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，所以　$O_1O_2=C_1C+C_2C=\frac{8}{3}\sqrt{3}$.

所以　两个内切球的球心间的距离为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ cm.



（第 2 题）

练习 2.2.3（第 47 页）

1. 两条母线或一条母线.

2. 设内切球的球心为 O'，半径为 R，且设球 $O(O, R)$ 与锥面一个切点为 P，球 $O(O, R)$ 与平面 α 切于 M，在 Rt$\triangle SPO$ 中，$OP=R$，$\angle PSO=30°$，

所以　$SO=2R$，在 Rt$\triangle OMC$ 中，$\angle OCM=60°$，

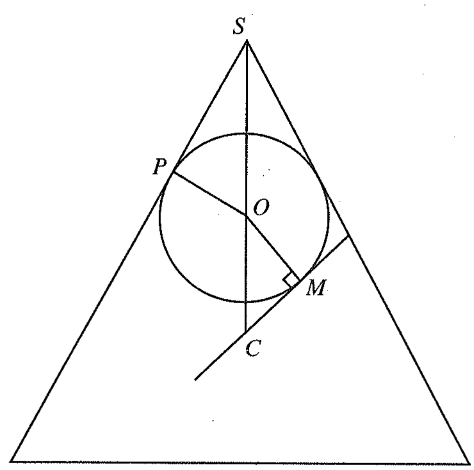
所以　$$OC=\frac{R}{\sin 60°}=\frac{R}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}R,$$

又知

$$SC=4=SO+OC=2R+\frac{2\sqrt{3}}{3}R,$$

所以　$R=3-\sqrt{3}$，

所以　此内切球的半径为 $3-\sqrt{3}$.



（第 2 题）

3. （1）椭圆；（2）线段 F_1F_2；（3）不存在实轨迹.

练习 2.2.4（第 49 页）

1. $0°<\beta<\alpha$，双曲线. β 越大，开口越小.

$\beta=\alpha$，抛物线.

$\alpha<\beta<90°$，椭圆. β 越大，椭圆越接近圆.

2. 两条准线分别是两个内切球切点圆所在平面与截面的交线.

习题 2-2（第 49 页）

1. 假设 P 在椭圆上或内部.

如果 P 在椭圆上，则 $PF_1+PF_2=2a$，

与 $PF_1+PF_2>2a$ 矛盾.

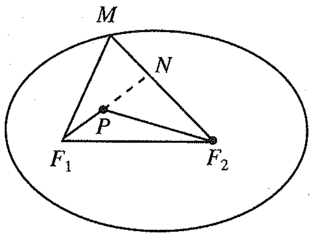
如果 P 在椭圆内部. 在椭圆上取一点，使 P 在$\triangle MF_1F_2$ 内，延长 F_1P 交 MF_2 于 N，

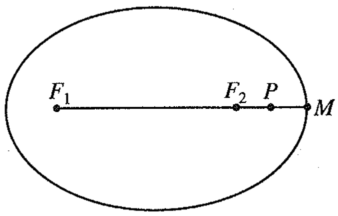
则 $PN+NF_2>PF_2$，

$MF_1+MN>F_1N=F_1P+PN$，

相加得 $MF_1+MF_2>PF_1+PF_2$，

所以 $PF_1+PF_2<2a$ 与 $PF_1+PF_2>2a$ 矛盾.





（第 1 题）

另外，如果 P 在直线 F_1F_2 在椭圆内的部分上.

设 F_2P 与椭圆交点 M，

则 $MF_2>PF_2$，$MF_1>PF_1$，

所以 $PF_1+PF_2<2a$ 与 $PF_1+PF_2>2a$ 矛盾.

综上所述，$PF_1+PF_2>2a$ 的点都在椭圆的外部.

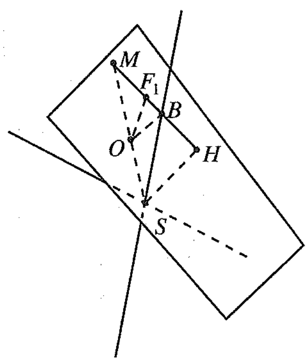
2. 如图，过顶点 S 作直线垂直于截面于 H，设截面与轴线交于 M.

则面 $SMH\perp$截面. 设 MH 交锥面于 B. 作$\angle SBM$ 平分线 BO 交 SM 于 O，作 $OF_1\perp MB$ 于 F_1，以 O 为球心，OF_1 为半径作球 O，则球 O 与截面切于 F_1.

因为 BO 是$\angle SBM$ 平分线，所以 O 到 SB 的距离等于半径 OF_1，

所以 球 O 与母线 SB 相切，因为 所有母线与轴线夹角相等，

所以 球 O 与所有母线相切，即与圆锥面相切.（下面的证明参见教材）.



（第 2 题）

3. 椭圆.

$$e=\frac{\cos 45^\circ}{\cos 30^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

如图，$MF_1+MF_2=AB$.

设圆锥面内切球 O_1 的半径为 R_1，内切球 O_2 的半径为 R_2，

$SO_1=2R_1$，$CO_1=\sqrt{2}R_1$，$SC=(2+\sqrt{2})R_1=5$，

$R_1=\dfrac{5(2-\sqrt{2})}{2}$，

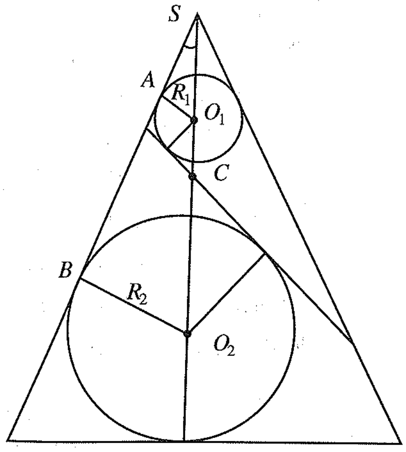
$SO_2=2R_2$，$CO_2=\sqrt{2}R_2$

$SC=(2-\sqrt{2})R_2=5$，$R_2=\dfrac{5(2+\sqrt{2})}{2}$，

$O_1O_2=CO_1+CO_2=\sqrt{2}(R_1+R_2)=10\sqrt{2}$，

$AB=O_1O_2\cdot\cos 30^\circ=O_1O_2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{6}$，

即 $MF_1+MF_2=5\sqrt{6}$.



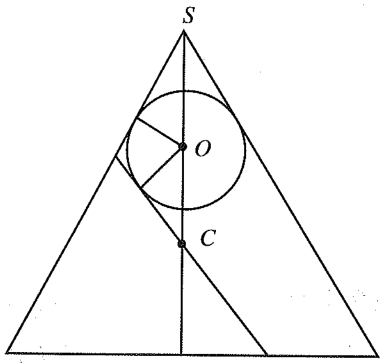
（第 3 题）

4. 双曲线.

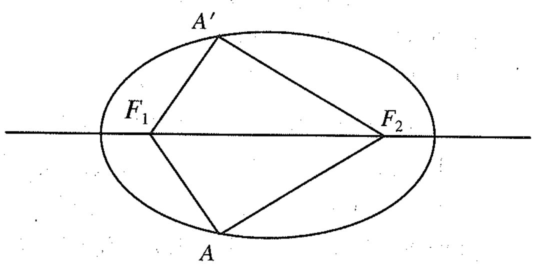
设内切球半径为 R，

$SO=\sqrt{2}R$，$OC=2R$，

所以　$SC=(2+\sqrt{2})R=5$，$R=\dfrac{5}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{5(2-\sqrt{2})}{2}$.



（第 4 题）



（第 5 题）

5. 任取椭圆上一点 A，作 A 关于直线 F_1F_2 的对称点 A'.

则$\triangle AF_1F_2\cong\triangle A'F_1F_2$，

所以　$AF_1=A'F_1$，$AF_2=A'F_2$，

所以　$A'F_2+A'F_1=AF_2+AF_1$，

所以　A'也在椭圆上.

即椭圆上任意一点的对称点都在椭圆上.

所以　椭圆是轴对称图形，一条对称轴为 F_1F_2.

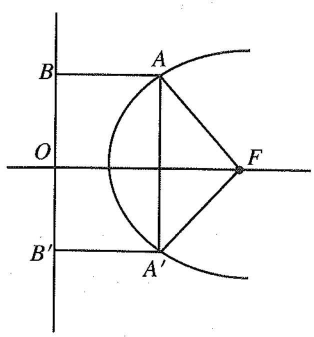
同理可证双曲线也有类似的性质.

对于抛物线，取任意一点 A，作它关于 FO 的对称点 A'.

则 $A'F=AF$，

因为　$AA'\perp OF$，易证 $ABB'A'$为矩形.

所以　$A'B'=AB$. 又 $AF=AB$，



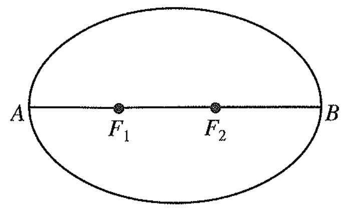
（第 5 题）

所以　$A'F=A'B'$，

所以　A'也在抛物线上.

椭圆和双曲线还有另外的对称轴，过 F_1F_2 的中点且与 F_1F_2 垂直的直线.

巩固与提高（第 50 页）



（第 1 题）

1. $AF_1+AF_2=2a$，$BF_1+BF_2=2a$，

   所以　$AF_1+AF_2+BF_1+BF_2=4a$，

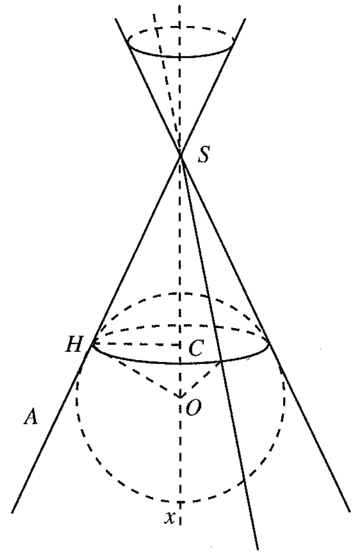
   所以　$AF_1+AF_1+F_1F_2+F_1F_2+BF_2+BF_2=4a$，

   $2(AF_1+F_1F_2+F_2B)=4a$，所以　$AB=2a$.

2. 如图. $OH=\frac{1}{2}SO=\frac{3}{2}$，

   $HC=OH\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm，

   所以　球 O 的半径为$\frac{3}{2}$ cm，切点圆的半径为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$ cm.



（第 2 题）

3. 设两个内切球 O，O'的半径分别为 r，R，

   则 $SO=2r$，$OA=\sqrt{2}r$，所以　$SA=2r+\sqrt{2}r=5$，

   $r=\frac{5}{2+\sqrt{2}}=\frac{5}{2}(2-\sqrt{2})$，

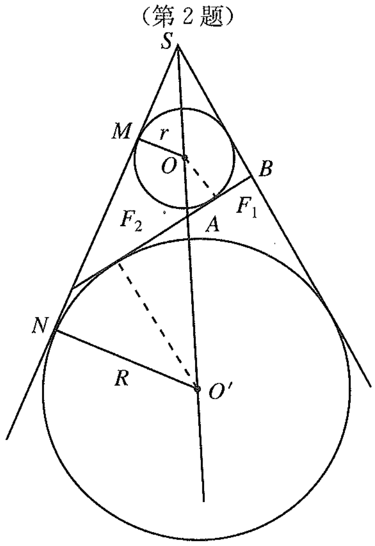
   $SO'=2R$，$AO'=\sqrt{2}R$，

   所以　$SO'=SA+AO'=5+\sqrt{2}R$，$2R=5+\sqrt{2}R$，

   $(2-\sqrt{2})R=5$，所以　$R=\frac{5}{2-\sqrt{2}}=\frac{5}{2}(2+\sqrt{2})$.

   所以　与截平面相切的两个圆锥面的内切球的半径分别为

   $\frac{5}{2}(2-\sqrt{2})$，$\frac{5}{2}(2+\sqrt{2})$.



（第 3 题）

4. 略.