普通高中课程标准实验教科书

数学 1（必修）

SHUXUE

教师教学用书

湖北教育出版社数学教材编写组 编著

湖北教育出版社
HUBEI EDUCATION PRESS

(鄂)新登字 02 号

责任编辑 姚 卫
装帧设计 牛 红

普通高中课程标准实验教科书
数学 1(必修)
教师教学用书
湖北教育出版社数学教材编写组 编著
*
湖北教育出版社出版
(武汉市青年路 277 号 邮编:430015)
网址:http://www.hbedup.com
新华书店发行
湖北恒泰印务有限公司印刷
(430223・武汉市江夏庙山开发区汤逊湖工业园)
*
787 毫米×1092 毫米 16 开本 4.5 印张 105 000 字
2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7—5351—4344—X/G・3616
定价:7.20 元
如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

ISBN 7-5351-4344-X
9 787535 143440 >

说　明

为了配合湖北教育出版社出版的《高级中学课程标准实验教科书·数学》的教学实践，我们编写了这套教师用书.

编写教师用书的目的在于，为教师选取素材提供资源，为设计教学提供参考，也为教师处理教学问题提供服务，帮助老师们在充分考虑数学学科特点和高中生心理特点的前提下，运用多种教学方法和手段，实现课程目标.

编写教师用书的目的也在于，与老师们沟通，呈现我们将课程标准转化为教材的心路历程；交流编写意图，特别是在贯彻基本理念、处理某些矛盾时的所思所为，从而对教科书的指导思想和主要特点形成共识，促使教师创造性地使用教材.

编写教师用书的目的还在于，以教科书为载体，从教学的基本问题出发，和老师们一起，共同领会课程标准的基本精神，立足于以人为本，发展和完善人的高度，构建现代理念下的课堂教学.

本套教师用书一般以教科书的章为单元编写，每章由教育价值、教学目标、教材结构、课时分配、内容分析、相关资源、评价建议和习题解答八部分构成.

教育价值：是课程目标在本章的具体化，也是课程设计中确定本章为教学内容的理由.

教学目标：是本章要达到的基本目标，它比课程标准中《内容与要求》要具体些.

教材结构：主要介绍三个方面：知识如何定位，教材怎样展开，有何特点.

课时分配：对每一小节所需的教学课时数作了大致的估计.

内容分析：一般按章头语、各大节逐次展开. 每大节包括三个项目：内容概述及基本要求、重难点分析和教学建议. 其中教学建议是主体，阐述教学中应该强调什么，注意什么，例题的功能及其处理. 除此之外，还涉及到旁批、交流话题、信息技术链接及教科书中课件符号标识处的教学思考等.

相关资源：在于展示本章内容的知识背景，为教学提供素材，包括重要结论的推理、证明与拓展.

评价建议：回答评价什么，如何评价等问题，并提供必要的参考案例.

习题解答：不仅包括练习、习题、复习题等基本题型的参考答案，还就《阅读与讨论》中的讨论题、《思考与实践》中的问题给出了可供参考的解决方案.

我们希望通过上述栏目的设置，既有助于解决教学设计、教学实施中的主要问题，满足教学的基本需要，又能拓展教师的视野，提升数学教学的境界.

诚然，有些想法虽然很好，却是我们力所不及的. 比如评价建议，又比如教学目标中的情感目标，如何落实和实践还有待于我们共同去研究和探索.

我们的课程改革，从理念、内容到实施，与过去相比都有较大的变化. 要实现课程改革的目标，教师是关键. 教师不仅是课程的实施者，而且也是课程研究、建设和资源开发的重要力量. 我们殷切地希望各位老师能为这套教师用书建言，更为教科书的完善献力，使它们更加有利于教师创造性地进行教学，更加有利于学生主动地学习和发展.

本套教师用书由湖北教育出版社数学教材编写组编写. 主编齐民友，副主编裴光亚，徐学文，郭熙汉. 本册主要编者是殷希群，徐惠，裴光亚.

目　　录

第1章 集 合

一、教育价值

集合语言是现代数学的基本语言.使用集合语言,可以简洁、准确的表达数学的一些内容.学习本章的目的,在于使学生学会使用最基本的集合语言表示有关的数学对象,培养运用数学语言进行交流的能力.

集合是最基本的数学概念之一,我们以后学习函数、不等式、立体几何和平面解析几何、概率统计等内容时,都要使用集合语言来描述和交流.许多重要的数学分支,都建立在集合理论的基础之上.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)了解集合的含义,体会元素与集合的"属于"关系.能选择自然语言、图形语言和集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题,感受集合语言的意义和作用.

(2)理解集合之间的包含与相等关系,能识别给定集合的子集,了解全集与空集的含义.

(3)理解两个集合的交集与并集的含义、在给定集合中一个集合的补集的含义,会求两个简单集合的交集与并集和给定子集的补集.

(4)能使用 Venn 图表达集合的关系及运算,体会直观图示对理解抽象概念的作用.

2. 过程与方法

注意加强集合语言的运用,让学生经历用集合语言交流数学问题的过程;经历对"或"与"且"等集合运算中的关键词用实例进行辨析的过程;经历体验集合语言简洁性的过程,从而初步掌握用集合语言描述量关系中简单问题的基本方法(主要指把义务教育阶段用自然语言描述的重要概念用集合语言表示的重要方法).

3. 情感、态度与价值观

(1)通过用集合语言来描述数学对象,刻画现实世界中涉及"事物整体"、"分级分类管理"和"两事物公共部分"等问题来增进对数学的美感,并逐渐形成用数学语言来描述和表达现实问题的意识.

(2)通过认识"不含一个元素"的空集、用"包含关系"确定"相等关系"、从补集的观点看问题、辨析数学与日常生活中关于"或"的含义等,来初步体验数学的理性精神.

三、教材结构

本章把知识定位在"集合是一种语言",即重在掌握语言,而不是学习"集合论".章头语开宗明义就陈述了这一观点,然后按三节内容展开.

1.1 节(集合的含义与表示) 从给一组事物以总称的朴素思想出发,揭示了集合的含义,

集合中元素的确定性和互异性.介绍了集合的两种表示法:列举法和描述法.对义务教育阶段学过的一些数学对象,要求学生能用集合的形式表示出来.另外,还介绍了自然数集、实数集等特殊数集的记号和用区间表示数集的方法.

1.2节(集合间的基本关系)　主要指包含关系和相等关系.介绍了空集、子集、真子集等概念,介绍了 Venn 图,用 Venn 图来表示集合间的包含关系.

1.3节(集合的基本运算)　包括两个集合的交集、并集;给定集合中一个子集的补集等.每种运算除用文字说明、用集合的描述法表示外,还能用 Venn 图作直观解释.

本章在第二部分后设置了阅读与讨论:希尔伯特旅馆——无限集.这个故事说的是,一个集合中的元素可以和它的真子集的元素"一样多",这是无限集的特征,在有限范围内是无法想象的,以此来激发学生的好奇心,拓展学生的视野.

四、课时分配

本章教学时间约需 4 个课时,具体分配如下:(仅供参考)

1.1	集合的含义与表示	约 1 课时
1.2	集合间的基本关系	约 1 课时
1.3	集合的基本运算	约 2 课时

五、内容分析

章头语

章头语主要阐述了集合是一种语言,引进集合语言的必要性.

第一段中的三个例子:一元一次不等式的解,角平分线上的点,一堆数据,分别取自义务教育阶段数学课程的不同领域:数与代数,空间与图形,统计与概率,它们是具有代表性的例子.在这些例子中,不等式的所有解,角平分线上的所有点,数据的全体,作为一个整体,如何表示?有没有统一的方法?如果抓住了这三个例子的共性,也就抓住了本章所要回答的基本问题.

值得注意的是,章头语进一步强调:"而且,还要在这种表达的基础上,研究它们的性质,探讨它们的关系."它指出了用集合表示的意义.学生读懂这句话是困难的,应设法让学生明白,不是"表示"后就完了,而是只有用集合表示的数学对象,才便于进一步研究.

第二段适当展示集合论产生的背景,说明集合论奠定了现代数学的基础.对那些善于思考的学生来说,这一段可能有更加深刻的意义:为解决数学面临的重大问题,产生集合论,而集合论的产生又为数学提供了基本的语言.这一段的解读,应根据学生实际,不必展开过多.

"要学好数学,必须首先掌握集合语言",让学生体会到这一点,从而产生学好本章的欲望,也就实现了章头语的目标.

1.1　集合的含义与表示

1. 内容概述及基本要求

本节给出了集合的含义及集合的表示法.

从给一组事物以总称的思想出发,在日常生活和数学的简单实例的基础上,引出集合的概念.表示法先讲特殊记号,再讲一般方法,以具体集合为载体,说明集合与元素的关系.

叙述以集合的确定性为主线,包括给出集合意义后的阐述,关于表示法必要性的说明和利用实例(即不等式 $2x+3>0$)对描述法所作的解释等.

直辖市的集合是帮助学生认识表示法的适当范例，因为它既便于列举，又容易抽象出共同特征.

本节安排了两个例题：

例1，函数 $y=\frac{1}{x}$ 的自变量的取值范围；某一象限内的点组成的集合，这些都是学生所熟悉的. 本例在于把自然语言转换为集合语言.

例2，以一次不等式组的解集为例，其功能有二：①读懂集合语言，实际上是把集合语言转化为自然语言或图形语言；②引出区间的概念.

本节的练习在于帮助学生认识特殊集合的记号，会用适当的方法（列举法、描述法、区间等）表示给定的集合.

习题在于帮助学生体会集合与元素的关系，能用适当的方法表示集合，初步进行不同语言间的转换.

通过本节的学习，要求学生：

(1)了解集合的含义，体会元素与集合的关系，初步学会用列举法、描述法和区间表示数集的方法. 了解非负整数集（自然数集）、正整数集、整数集、有理数集和实数集的记号. 了解有限集与无限集.

(2)体验集合概念的形成过程，体验将数学问题和日常生活中的问题用集合表示的方法（建模的方法）.

(3)感受集合语言的意义和作用，通过将日常语言转化为集合语言，领悟数学的简洁美.

2. 重难点分析

本节的重点是集合的确定性与表示方法，感受用集合表示数学对象时的简洁性与准确性；难点是正确使用描述法表示一些简单的集合.

3. 教学建议

(1)集合是一个不加定义的概念，教科书中给出的“一般地，某些指定的对象放在一起就叫做一个集合(set)，简称集.”这句话，只是对集合概念的描述性说明. 教学中应结合学生的生活经验和已有数学知识，通过列举丰富的实例，使学生理解集合的含义. 学习集合语言最好的方法是使用，要在教学中创设使学生运用集合语言进行表达和交流的情境和机会，以便学生在实际使用中逐渐熟悉自然语言、集合语言、图形语言各自的特点，进行相互转换，并掌握集合语言.

(2)教材中指出，集合中的元素必须是确定的，又是互异的，通常称作集合中的元素具有确定性和互异性. 在理解集合的概念时，要考虑集合中元素的这两个性质. 有些书上还指出了集合中元素的无序性，即集合中的元素是不计较顺序的，把它们统称为“三性”. 在教学中应避免人为的编制一些繁难的偏题，来讲解和训练所谓的“三性”.

(3)列举法和描述法各有优点，应该根据具体问题确定采用哪种表示方法. 列举法可分两种：完全列举，例如$\{1,2\}$，$\{a,b,c,d\}$等；代表性列举，例如$\{1,2,\cdots,9\}$，$\{1,2,3,\cdots\}$等，这里，集合中的元素没有全部列举出来，但已经列举了有足够代表性的元素，省略号表示可以继续顺次给出集合的其他元素. 但要注意，一般无限集，不宜采用列举法，因为不能将无限集中的元素一一列举出来，而没有列举出来的元素往往难以确定.

(4)据国家标准，自然数集和非负整数集是相同的，也就是说自然数集包括数0.

(5)教学中要鼓励学生按照给一组事物以总称的思想，把现实生活中的事物，已学过的数

学对象用集合的语言表示.

1.2 集合间的基本关系

1. 内容概述及基本要求

本节依次介绍了空集、子集、两集合相等、真子集的概念，接着介绍了 Venn 图，用 Venn 图表示集合间的包含关系.

用计算机窗口“我的文档”来引出空集与子集的意义，其作用在于：①不仅可以说明集合的包含关系，而且可以体会到包含关系的思想；②“新建文档”是很好的空集模型；③有利于学生体会集合思想在日常生活以至现代技术中的广泛应用.

本节安排了三个例题：

例 1，涉及到特殊情形：空集是任何集合的子集，相等是包含关系的特殊情况.

例 2，写出一个集合的所有子集，并区分出真子集.

例 3，集合包含关系的传递性. 用到了包含关系（子集）的定义. 如果例 1、例 2 是数学判断的话，例 3 则是数学证明.

练习要求学生能正确使用$\in$，$\notin$，$\subsetneqq$，$\supsetneqq$，$=$符号；能写出简单有限集合的所有子集.

习题要求学生能探讨一些简单集合之间的关系，用包含、子集、相等的语言描述，用 Venn 图表示，用包含、子集、相等的含义解释.

通过本节的学习，要求学生：

(1)理解集合之间的包含与相等关系，能用 Venn 图表示这种关系，能识别给定集合的子集，在具体情境中，了解空集的含义.

(2)通过了解空集和包含关系的含义，辨析“不含任何元素的集合构成的空集”、“子集并非其中部分元素的全体”与日常认识的不同，初步体验其中的理性精神.

2. 重难点分析

本节的重点是子集的意义，弄清元素与子集、属于与包含之间的区别；难点是理解一个集合是它本身的子集.

3. 教学建议

(1)注意运用 Venn 图表示集合之间的关系，这样有助于学生学习、掌握、运用集合语言和其他数学语言.

(2)要正确理解子集的概念. 一般地，对于两个集合 A 与 B，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，我们就说集合 A 是集合 B 的子集. 也就是说，如果有任一 $x\in A$，可以推出 $x\in B$，那么集合 A 就是集合 B 的子集. 进一步，教材在旁批中给出了真子集的含义. 因此，不宜把子集说成是由原来集合中的部分元素组成的集合.

(3)注意相等是包含关系的特例. 子集的“子”，使人联想到孩子. A 是 B 的子集，有点像说 A 是 B 的孩子，孩子总比父母小. 教学中要创造机会来帮助学生消除这种“自然认识”的影响.

(4)要注意区分一些容易混淆的符号：

①$\in$与$\subseteq$的区别：$\in$是表示元素与集合之间的关系的，因此，有 $1\in\mathbf{N}$，$-1\notin\mathbf{N}$ 等；$\subseteq$是表示集合与集合之间关系的，因此，有 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{R}$，$\varnothing\subseteq\mathbf{R}$ 等.

②a 与$\{a\}$的区别：一般地，a 表示一个元素，而$\{a\}$表示一个集合. 因此，有 $1\in\{1,2,3\}$，$0\in\{0\}$，$\{1\}\subseteq\{1,2,3\}$等，不能写成 $0=\{0\}$，$\{1\}\in\{1,2,3\}$，$1\subseteq\{1,2,3\}$.

③$\{0\}$与$\varnothing$的区别：$\{0\}$是含有一个元素的集合，$\varnothing$是不含任何元素的集合，因此，有$\varnothing\subseteq$

$\{0\}$，不能写成$\varnothing=\{0\}$，$\varnothing\in\{0\}$.

(4)在开始接触子集与真子集的符号时，要提醒学生这些符号的方向不要搞错. 例如，$A\subseteq B$与$B\supseteq A$是同义的，$A\subseteq B$与$A\supseteq B$是不同的.

(5)教学中要注意收集诸如“我的文档”这类例子，也鼓励学生从生活实践中去发现这些例子，还可引导学生在数学问题中寻找空集，从而体会集合语言的应用价值和科学价值.

1.3　集合的基本运算

1. 内容概述及基本要求

本节从学生所熟悉的整除问题入手，依次引入了交集、并集、补集和全集的概念，其中关于交、并、补的每种运算都用三种方式来描述：自然语言，集合表示，Venn 图.

本节分为两课时.

第一课时，介绍交集和并集. 安排了 3 个例题：例 1，用交集和并集的含义进行简单运算；例 2，实际上是求两已知区间的交集和并集，可借助数轴进行运算；例 3，通过日常生活中的问题加深对交集和并集的理解，主要体现用集合语言描述现实问题的导向作用.

第二课时，继续本节开始提出的问题，介绍补集的概念，进而导出全集的概念. 本课时有 2 个例题：例 4，简单的补集运算，可借助数轴来加深对补集含义的理解；例 5，情景与本节引文呼应，涉及到补与交的简单综合，要求把集合语言翻译成自然语言，即给集合语言以解释.

练习定位在集合的简单运算，能用 Venn 图表示运算结果. 习题设计着眼于集合的基本运算，用 Venn 图解与集合有关的问题(如简单计数问题).

本节要求学生：

(1)理解两个集合的并集与交集的含义，会求两个简单集合的并集与交集；

(2)理解在给定集合中一个子集的补集的含义，会求给定子集的补集；

(3)能使用 Venn 图表示集合间的运算，体会直观图示对理解抽象概念的作用.

(4)现实问题中很多问题的思考都可归结为“交集”与“补集”运算，通过用集合运算的方式来描述这些问题，初步形成数学地思考现实问题的意识.

2. 重点与难点

本节的重点是理解交集、并集、补集的含义；难点是理解其中的一些关键词：或、且、不属于等，阐释运算的结果的意义.

3. 教学建议

(1)在关于集合运算的教学中，使用 Venn 图是重要的，有助学生学习、掌握集合语言和其他数学语言.

(2)在讲交集与并集的含义时，教材只画了 Venn 图的一种情况，即两“圆”相交的情况，除此之外，还应有两“圆”相离、内含、重合等情况，它们对深刻理解运算的含义是有帮助的.

(3)在定义集合的“交集”与“补集”时，要注意引导学生弄清“且”与“或”的含义，可以举一些例子来辨析. 如把“$x>0$，且$x\leqslant1$”看成一种情况的话，则“$x>0$，或$x\leqslant1$”可分为三种情况：$x>0$；$x\leqslant1$；$x>0$，且$x\leqslant1$. 注意“或”在数学与日常表达中的差别.

(4)注意补集符号$\complement_A B$，其中，$\complement$是一个专门的符号. 与补集相关联的是全集的概念. 有时我们需要对所讨论的对象的全体作一个限制，即给定一个集合用来描述这些对象的范围，使得在这个范围内所讨论的每个集合都是它的子集. 这个给定的集合称为全集. 全集不是固定的、一成不变的，但在某个具体问题中，它又是确定的. 因此，在解决任何一个问题时，都应先判定

全集是什么. 全集不同,问题的答案常不一样,例如,因式分解和解方程的结果就与全集是什么数集有关.

(5)课本中给出了集合运算的一些简单性质,它们可以用来帮助学生理解运算的含义,体会 Venn 图的作用,但不必要求学生证明这些性质.

(6)引导学生把义务教育阶段学过的数学问题用集合的交、并、补来描述,如用"交"来描述方程组的解;用"并"或"补"来描述三角形的分类等,从而用集合的观点来建立数学知识之间的联系.

(7)第 18 页例 3 左栏中的交流话题在于在直观上帮助学生理解交集运算的结合律,要注意引导学生用自然语言来解释$(A\cap B)\cap C$和$A\cap(B\cap C)$,这也可以作为理解其他性质的借鉴.

(8)学习集合语言的目的在于应用. 具体地说,就是在学习其他知识时,能读懂其中的简单的集合概念和符号;在处理简单实际问题时,能根据需要,运用集合语言进行表述. 在安排训练时,要把握一定的分寸,不要搞偏题、怪题. 例如,集合有关性质的证明,一般不要求学生掌握. 又如,有些可能混淆但在实际问题中并不多见的关系,就不必故意排在一起,让学生去一一辨析,像$\{\varnothing\}$与$\varnothing$,$\{0\}$与$\varnothing$等等.

六、相关资源

1. 原始概念

集合是数学的一个原始概念. 许多数学概念都以集合为基础,它是许多数学概念的出发点. 我们在学习数学时,经常碰到的有概念、公理、命题、定理等,追根溯源,它们都要建立在概念的基础之上. 数学概念是从客观世界中抽象出来的,它概括了一类事物的本质特征,从而形成了某一数学概念. 数学课本中的数学概念一般是以定义的形式给出的,对一个数学概念下定义时,都要借助一些已知的概念,这些已知的概念又是被另一些已知概念来定义的. 这就形成了一系列互相依赖的数学概念系统. 必然会出现的情况是:有这样一些数学概念,它们不可能再用别的数学概念来定义,例如"量"、"计算"、"点"、"直线"、"集合"等,这种概念叫做原始概念. 对于原始概念,它既然不能用其他的数学概念来定义,我们就只能用描述的办法来刻画它的本质特征. 集合作为一个原始概念,我们对它的本质特征也只能用描述的办法.

通常说:把具有某种共同性质的东西放在一起考虑,就可以说这些东西形成了一个集合. 这些东西应当是一个一个的,彼此有所区别的个体,它们叫做这个集合的元素. 这只是对集合的描述,不是定义.

2. 集合的特性

(1)确定性:一个集合,其界限是分明的. 就是说,对于任一个集合 A 和任一个元素 a,a 与 A 之间的关系必居其一且仅居其一:a 属于 A 或者 a 不属于 A,不能含糊不清. 例如,"一切大数的全体"不是一个集合,因为一个数是不是"大数",并没有明确的界限. 像这类问题,属于"模糊集合论"的研究对象. 又如,"偶数作分子的分数的全体"也不是一个集合,因为一个分数属不属于它并不确定. 比方分数$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$,既不属于它,又属于它,这就不符合确定性的要求.

(2)互异性:一个给定的集合,组成它的元素是互异的,例如$(x-1)^2(x-2)=0$的解集是$\{1,2\}$,尽管 1 是这个方程的二重根,但在集合里只能算一个元素. 在问题的研究中,对于重复列举的同一元素,或用不同形式表示的同一元素,仍看作是同一元素. 术语"任给 $a,b\in A$(非空

集）”中的元素 a、b，既可理解为相同元素，也可理解为不同元素．

（3）无序性：表示集合时，元素的书写顺序是任意的．当然，这并不妨碍我们对于某些特殊集合按惯用的次序写出．

按元素的属性，集合可分为数集、点集和有序对集等；按元素的多少，集合可分为无限集、有限集和空集．

3. 集合的运算律

（1）交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$．

（2）结合律：$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$．

（3）分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$．

（4）对偶律：$\complement_U(A\cup B)=\complement_U A\cap\complement_U B$，$\complement_U(A\cap B)=\complement_U A\cup\complement_U B$．

上述运算律可用 Venn 图来解释，也可用集合相等和交集、并集、补集的含义来证明．

4. 平凡子集

设 A 是 B 的子集，能否说 A 是由 B 中部分元素组成的集合呢？注意到两个特殊的子集，就可以得出否定的答案：$\varnothing\subseteq B$，但 $\varnothing$ 不包含任何元素；$B\subseteq B$，B 包含了 B 中的全部元素，不只是部分元素．我们称这两个特殊的子集为平凡子集．

空集的重要意义首先在于我们可以自由的按照某种规则构造一个集合，而不论这个集合里的元素是否存在．例如，方程 $x^2+2=0$ 的实数解构成的集合；甚至，在费马猜想（当自然数 $x\geqslant3$ 时，$x^n+y^n=z^n$ 无整数解）还无法确证的情况下，集合 $A=\{(x,y,z)\mid x^n+y^n=z^n,x,y,z,n\in\mathbf{N},n\geqslant3\}$ 仍然是有意义的．正是空集这个宝贵的“虚构”，使我们可以在事先不知道集合里有多少元素，甚至有没有元素的情况下使用集合的概念．其次，在进行集合的运算时，空集是必不可少的，其作用可以和数 0 类比．

集合 B 本身也是 B 的子集，不仅使子集的定义简明，也使热处理方便，这一点，只要比较一下关于真子集的判断就非常清楚了．集合 B 是 B 的子集，这种有悖于常理的认识，正是数学美的一种体现．

七、评价建议

本章评价的关键是在适当的情境中学生能否正确地运用集合语言进行表达和交流，能否在实际使用中实现自然语言、集合语言和图形语言的转换．

在学习过程中，涉及到适当的数学对象时，可考察学生是否会用集合语言表示．另外，对用集合表示的对象，能否用自然语言来解释．

要注重考查学生是否会用 Venn 图、数轴等直观形象帮助理解抽象的数学概念．

集合作为一种语言，评价时不仅要注重学生与教师的对话，还要注重同学之间的交流．

可从如下两个方面评价学生知识与技能的获得情况：

（1）集合的构成与表示．其中包括三个问题：①给定的条件是否可以构成一个集合；②对于给定的集合，某元素是否属于这一集合；③如何表示一个集合．

（2）集合间的关系及运算．涉及到的问题有：①判断两个集合间的包含关系和相等关系，反之，在关系已知时，求出相应的集合；②对给定的集合进行交、并、补运算，可分为三个层次：只需要直接根据定义的，需要把握与其他问题的基本联系（如交集与方程组的解集）的，需要在集合概念的基础上首先判明集合的元素的；③给定交、并、补的某些结果，求原集合．这三类问题本质上都归结为元素与集合的关系来处理．换言之，需要回答的一个重要问题是：某集合（运算

的结果也是集合)包含哪些元素?

就情感和价值观而言,主要看学生对数学对象能否习惯于用集合语言表示,并倾向于用Venn图等直观图示来理解抽象的概念,能对自然语言进行评价,认识到集合语言的简洁性和准确性.

八、习题解答

练习(第11页)

1. $\in$,$\notin$,$\notin$,$\notin$,$\notin$,$\in$,$\in$,$\notin$.

2. (1)$\{2,3,5,7\}$; (2)$\{n|n=12m,m\in\mathbf{N}_+\}$; (3)$\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$; (4)$\{(x,y)|y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$.

3. $\{x\in\mathbf{R}|x\leqslant-1\}$,$(-\infty,-1]$.

习题1.1

1. (1)$\notin$; (2)$\in$; (3)$\in$; (4)$\in$.

2. (1)$\{x|x^2-4x+3=0\}$; (2)$\{x|x$ 是不大于10的正奇数$\}$; (3)$\{-2,-1,0,1,2\}$; (4)$\{(0,0),(0,1),(1,0)\}$.

3. (1)(略); (2)$\{(x,y)|xy=6,x,y\in\mathbf{R}\}$,无限集; (3)$\{2\}$,有限集.

练习(第14页)

1. (1)$\in$; (2)$\subsetneqq$; (3)$\subsetneqq$; (4)$=$; (5)$\supsetneqq$; (6)$\subsetneqq$.

2. U 的子集共有8个,它们是$\varnothing$,$\{a\}$,$\{b\}$,$\{c\}$,$\{a,b\}$,$\{a,c\}$,$\{b,c\}$,$\{a,b,c\}$,除$\{a,b,c\}$外,其余都是它的真子集.

习题1.2

1. $A\subseteq C$,$B\subseteq C$,$A\not\subseteq B$,$B\not\subseteq A$.

2. (1)$A\supseteq B$,$A\supsetneqq B$ 成立,其余不成立;

(2)$A\subseteq B$,$A\supseteq B$,$A=B$ 成立,其余不成立.

3. (1)、(2)、(5)、(6)、(7)正确,其余不正确.

4. 满足条件的集合 M 有3个,它们是$\{2\}$,$\{1,2\}$,$\{2,3\}$.

5. 任取 $x\in A$,则 $x=2m+1$. 当 m 是偶数时,令 $m=2k$,则 $x=4k+1\in B$;当 m 是奇数时,令 $m=2k-1$,则 $x=4k-1\in B$. 即若 $x\in A$,则 $x\in B$,所以 $A\subseteq B$.

反过来,任取 $x\in B$,则 $x=4n\pm1$. 当 $x=4n+1$ 时,$x=2(2n)+1\in A$;当 $x=4n-1$ 时,$x=2(2n-1)+1\in A$. 即若 $x\in B$,则 $x\in A$,所以 $B\subseteq A$.

由 $A\subseteq B$,$B\subseteq A$,得 $A=B$.

讨论题(第16页)

留下客人的编号依次为:$2,4,6,\cdots,2n,\cdots$. 让 $2n$ 与 n 对应,即让编号为 $2n$ 的客人住到 n 号房间,即可做到每人住1房间,且没有空的客房.

练习(第18页)

1. (1)A; (2)B.

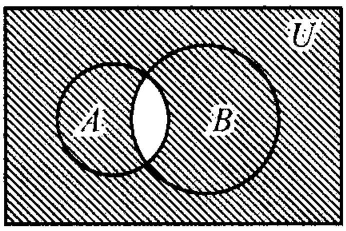
2. (1)$\{(1,2)\}$; (2)因为$(1,2)\in A\cap B$,所以$(1,2)\in A\cup B$. $(0,5)$,$(2,1)\notin A\cup B$.

3. 由 Venn 图可知,甲、乙各订不同的报刊3种,订同样的报刊7种.

练习(第 19 页)

1. $\{x \mid x$ 是斜三角形$\}$.

2. $\complement_U A=\{1,2,6,7,8\}$, $\complement_U B=\{1,2,3,5,6\}$, $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{1,2,6\}$, $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

3. (1) 

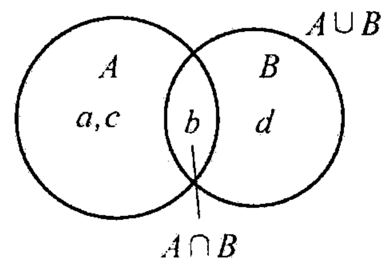
(2)答案同(1).

习题 1.3

1. (1)$N\cap P=P$, $N\cup P=N$;

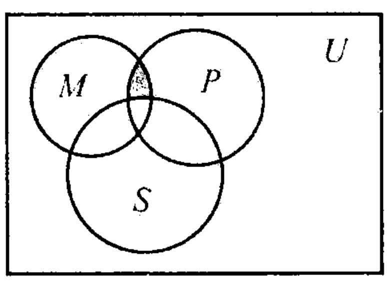
(2)$A\cap B=\{x \mid x$ 是 6 的倍数$\}$, $A\cup B=\{x \mid x$ 是偶数,或 3 的倍数$\}$.

2. $A\cup B=\{a,b,c,d\}$, $A\cap B=\{b\}$,如图所示.



(第 2 题图)

3. $S\cap T=T$, $S\cup T=S$. 图略.

4. 

5. $A\cap B=\{4,9\}$, $A\cup B=\{1,2,4,5,6,7,8,9\}$, $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{3,10\}$, $(A\cap B)\cap C=\varnothing$, $(A\cup B)\cup C=\{x \mid 0<x\leqslant 9, x\in \mathbf{N}\}$.

6. $\complement_U A=\{b,e,f\}$, $\complement_U B=\{b,c,f\}$, $(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\{b,f\}$, $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\{b,c,e,f\}$, $\complement_U(A\cap B)=\{b,c,e,f\}$, $\complement_U(A\cup B)=\{b,f\}$.

其中$(\complement_U A)\cap(\complement_U B)=\complement_U(A\cup B)$, $(\complement_U A)\cup(\complement_U B)=\complement_U(A\cap B)$.

7. 借助 Venn 图,看过甲片的 8 人,乙片的 7 人,其和 15 比 10 多 5,故这两部电影都看过的有 5 人.

复习题 A 组

1. D.

2. (1)$\{-3,3\}$;　(2)$\{1,2\}$;　(3)$\{1,2\}$;　(4)$\{0,5,10,15,20\}$.

3. (1)$\{x \mid x=2k+1, k\in\mathbf{N}\}$;　(2)$\left\{x\in\mathbf{Z} \mid \frac{x}{3}\in\mathbf{Z}\right\}$;

(3)$\{(x,y) \mid xy<0, x,y\in\mathbf{R}\}$;　(4)$\{(x,y) \mid y=kx+b, x\in\mathbf{R}\}$.

4. (1)线段 AB 的垂直平分线;

(2)以点 O 为圆心,以 3cm 为半径的圆.

5. 描述法:$\{(x,y) \mid x^2+y^2=2$,且 $x=y\}$;列举法:$\{(-1,-1),(1,1)\}$.

6. (1) $\complement_U B=\{-3,-2,-1,1,2,3\}$;　(2)$(\complement_U A)\cup B=\{-3,-2,0,4,5\}$;

(3) $\complement_U(A\cup B)=\{-3,-2\}$.

复习题 B 组

1. (1)C　其他选择支都不满足集合中元素的确定性.

(2)B　注意到$\{4,5\}\subseteq M$,问题转化为求 N 的子集的个数.

(3)D　集合 A 表示第Ⅰ象限内的点,集合 B 表示第Ⅰ和第Ⅲ象限内的点,集合 C 表示直线 $y=-x$ 右上侧的点.

2. (1)$\supsetneqq$,注意 $N=\varnothing$.　　(2)$\{0,1,2,3,4,5,6\}$.　　(3)$P\cap \complement_U(M\cup N)$.

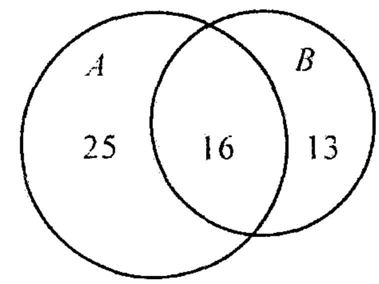
3. 因为$U=A\cup \complement_U A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,$\complement_U B=\{1,3,4,7,9\}$,所以 $B=\{2,5,6,8\}$.

4. 因为 $A=\{1,2\}$,$B\subseteq A$,所以 $B=\varnothing$,或$\{1\}$,或$\{2\}$,或$\{1,2\}$,所以 $a^2<8$,或 $a=3$,即实数 a 的取值所成的集合为$\{a\mid -2\sqrt{2}<a<2\sqrt{2}$,或 $a=3\}$.

思考与实践

1. 设全集 U 为这 54 名同学所构成的集合,A 为乒乓球爱好者所构成的集合,B 为篮球爱好者所构成的集合.

若 $U=A\cup B$,由 Venn 图可知,只爱好乒乓球的学生(非篮球爱好者)25 人,只爱好篮球的学生(非乒乓球爱好者)13 人,此时既爱好乒乓球又爱好篮球的学生 16 人.



(第 1 题图)

若 $A\cup B\subseteq U$,由于 $A\subseteq A\cup B$,当 $A=A\cup B$ 时,篮球爱好者都是乒乓球爱好者,此时既爱好乒乓球又爱好篮球的学生 29 人;当 $A\neq A\cup B$ 时,可推知既爱好乒乓球又爱好篮球的学生不多于 28 人,不少于 17 人.

因此,既爱好乒乓球又爱好篮球的学生至多 29 人,至少 16 人.

一般地,$G(A\cup B)=G(A)+G(B)-G(A\cap B)$.

这个公式被称作容斥原理.

它的正确性可借助 Venn 图理解,因为在计算 $G(A\cup B)$时,属于 $A\cap B$ 的元素在 A 和 B 中各出现了一次,即在 $G(A)+G(B)$中被计算了两次,应将重复计算的减去.

2. 如果将学校所有学生看作全集,则每个年级的学生是学校这个集合的子集,而每个班的学生又构成某年级这个子集的子集.

设非空集合 A_1,A_2,A_3 是集合 U 的子集,如果

$$①A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j);\qquad ②U=A_1\cup A_2\cup A_3,$$

则称 A_1,A_2,A_3 是 U 的一个划分.

由此可知各个"年级的集合"构成"学校这个集合"的一个划分.

思考本题时,可涉及集合包含关系的传递性,集合交、并、补等概念,比如推理小说里侦破人员常常根据线索把犯罪嫌疑人限制在几个集合之中,然后把侦破重点放在这几个集合的交集上,也往往用排除法,即在怀疑对象集里,先找不构成嫌疑的那些集合的并集,再在这个并集的补集上下功夫.

这是一个开放性问题,没有标准答案,关键是体会分级分类管理的思想,认识到数学思想与社会生活的联系.

第 2 章　函数及其基本性质

一、教育价值

本章的主要内容是以集合与对应的观点来审视函数的基本概念，并研究一般函数所具有的一些基本性质.

通过本章的学习，力求使学生感受与初中所学函数内容之间自然的衔接和再次学习函数的必要性，进一步让学生体会函数是描述客观世界变化规律的重要数学模型，结合实际问题，感受运用函数概念建立模型的过程与方法.

函数是高中数学的核心概念，需要多次反复，不断加深理解. 这样做，有利于学生对变量之间的这种依赖关系的认识，有利于学生对数学与现实世界之间联系的认识，最终达到发展学生对数学变量认识的目的.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)用集合与对应的语言加深理解函数概念，了解构成函数的三要素，会求一些简单函数的定义域和值域，了解映射的概念.

(2)掌握函数的三种主要表示方法，即解析法、列表法、图象法.

(3)了解简单的分段函数，并能简单应用.

(4)理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义，了解函数奇偶性的含义.

(5)掌握作函数图象的一般方法，能运用函数图象理解和研究函数的性质.

2. 过程与方法

(1)经历对实际背景问题的分析、概括和抽象，让学生领悟到客观事物运动变化、相互制约、相互联系的普遍规律，借助集合与对应的语言，进一步加深对函数及其相关概念的本质的理解.

(2)通过研究已构造(或已给出)的函数表达式，去解释、探究其性质，揭示相关变量之间的内在关系.

(3)通过复习回顾已学过的函数特别是二次函数，借助其图象去理解和研究函数的相关性质. 掌握数形结合的方法，体验数形结合思想方法的重要作用.

(4)经历运用函数解决一些简单实际问题的过程，学会数学建模的方法，进一步体会函数是描述变量之间的依赖关系的重要数学模型.

(5)鼓励学生运用计算器、计算机来学习、探索和解决问题，可用计算机画出相关函数的图象，探索、比较它们的变化规律，研究其相关性质等.

3. 情感、态度与价值观

(1)结合实际问题，感受运用函数概念建立模型的过程与方法，体会函数在数学和其他学

科中的重要性，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，进一步树立辩证唯物主义的世界观.

(2)通过本章的学习，获得必要的函数基础知识和基本技能，理解其概念的本质，了解相关的实际背景和应用，体会其中所蕴涵的数学思想和方法，以及它们在后续学习中的作用. 提高用数学方法提出、分析和解决问题的能力，数学表达和交流的能力，发展独立获取数学知识的能力.

(3)通过本章的学习，进一步培养学生良好的学习习惯，提高学习数学的兴趣，树立学好高中数学的信心，顺利完成从初中到高中的过渡，尽快适应高中的数学学习.

三、教材结构

本章把知识定位在“通过实例，以集合与对应的观点来审视函数及其基本概念；通过具体函数及其图象来研究一般函数所具有的一些基本性质”这一主干内容上，强调对函数概念和性质的本质的理解，避免人为地编制偏题和出现过于繁琐的训练技巧.

为此，首先在章头语中提供了丰富的“变化现象”的实际背景，特别指出反应变化现象中的变化规律的数学工具就是我们在初中所学过的函数，并明确提出了本章的学习任务和学习要求.

然后按以下两节内容展开：

2.1 节(函数)　这部分内容同以往教科书比较，特别改变了函数与映射出现的顺序，对函数概念的处理方式是先讲函数后讲映射. 这样做的目的是使学生在一个丰富的具体背景下理解抽象的函数概念. 函数概念的建立历来是学生学习的难点，从映射到函数(从抽象到抽象)这样的内容编排方式不能不说是引起困难的主要原因之一. 所以，从丰富的背景实例出发，引导学生经历函数概念的概括过程，使学生看到函数概念就能在头脑中浮现出一批函数实例，可以极大地促进学生对函数本质的理解，如果有了对函数本质的理解与把握，那么稍作迁移就可以得到映射的概念，这实际上为理解映射概念提供了坚实的基础.

教材在引入函数概念时首先从初中函数定义出发，再通过三个具体的例子，引出数集之间的对应，然后用集合与对应的观点给出高中函数定义，并伴随给出相关的几个概念，即定义域、值域、对应法则和记号 $y=f(x)$. 而将映射概念作为函数概念的推广放在函数概念后处理. 最后，教材上又给出了函数的三种常用的表示方法：解析法、列表法和图象法. 函数的三要素及函数的三种表示方法是初中就已经接触过的内容，在高中进一步学习，一方面是观点(集合与对应)的升华；另一方面是在复习的基础上为后续内容作些铺垫. 要注意作出一些简单函数或分段函数、含绝对值符号的函数的图象.

2.2 节(函数的基本性质)　这一部分在初中未接触过，教材在介绍函数的基本性质时，充分使用了数形结合的方法，从观察具体函数图象特征入手，并结合相应的数值表提出问题，引导学生从用日常描述性语言定义函数逐步转化到用数学符号形式化地定义函数. “函数的单调性”及“函数的奇偶性”的编排结构基本上同于传统教材，增添了“最大值与最小值”，并举出了“在闭区间上二次函数的最大值与最小值”的例题.

总之，本章教材的特点是突出对函数概念本质的理解，强调了函数图象的直观作用. 特别注意使学生有更多的时间考虑如何建立函数模型以反映实际问题中变量之间的依赖关系，教材中也为学生提供了大量的从具体问题中抽象出函数模型的机会.

四、课时分配

本章教学时间约需 9 课时，具体分配如下：(仅供参考)

2.1 函数	
2.1.1 函数、映射	约 2 课时
2.1.2 函数的表示方法	约 2 课时
2.2 函数的基本性质	
2.2.1 函数的单调性	约 2 课时
2.2.2 函数的奇偶性	约 1 课时
2.2.3 函数的最大值与最小值	约 2 课时

五、内容分析

章头语

根据学生的生活经验，提供了大量的变化现象实例，即函数的实际背景，并且指出函数在初中已经学过，高中将对其作更深入的剖析与更系统的研究.

教学中要注意通过这些例子(还可以另举例子)，有条件时也可采用多媒体演示，激发学生学习的兴趣，让学生明确学习任务，建立主动学习的心理基础.

2.1 函数

1. 内容概述及基本要求

本节分两小节，第 1 小节是函数与映射，第 2 小节是函数的表示方法. 在第 1 小节里先讲述函数，再推广到映射.

本单元的教学要求是，在集合与对应的基础上，理解函数的概念，明确决定函数的三个要素，即定义域、值域和对应法则；灵活使用函数记号 $f(x)$；掌握函数的三种主要表示方法，即解析法、列表法和图象法；会求一些简单函数的定义域和值域；在函数概念的基础上了解映射的概念及表示方法；了解象及原象的概念；通过具体实例，了解简单的分段函数，并能简单应用；能根据给出的实际问题建立符合要求的函数关系式；能正确作出一类简单函数的图象.

2. 重难点分析

重点是函数及其相关概念，函数的表示方法；难点是函数的概念.

3. 教学建议

(1)函数概念的教学要从实际背景和定义两个方面帮助学生理解函数的本质. 函数概念的引入一般有两种方法，一种方法是先学习映射，再学习函数；另一种方法是通过具体实例，体会数集之间的一种特殊的对应关系，即函数. 考虑到多数高中学生的认知特点，为了有助于他们对函数概念本质的理解，本教材采用的是后一种方式，从学生已掌握的具体函数和函数的描述性定义入手，引导学生联系自己的生活经历和实际问题，尝试列举各种各样的函数，构建函数的一般概念. 再通过对指数函数、对数函数等具体函数的研究，加深学生对函数概念的理解. 像函数这样的核心概念需要多次接触、反复体会、螺旋上升，逐步加深理解，才能真正掌握，灵活运用.

(2)本节从初中学过的函数概念说起，然后通过三个实例强化说明给出用集合与对应的观

点叙述的高中将要学习的函数概念(为了便于比较,下面称它为函数的近代定义,而称用变量叙述的定义为函数的传统定义).

函数的近代定义与传统定义在实质上是一致的.两个定义中的定义域与值域的意义完全相同,两个定义中的对应法则实际上也一样,只不过是叙述的出发点不同.传统定义是从运动变化的观点出发,其中的对应法则是将自变量 x 的每一个取值与唯一确定的函数值对应起来;近代定义中的对应法则,即从集合、对应的观点出发,其中的对应法则是集合 A 中的任一元素与集合 B 中的唯一确定的元素对应起来.从历史上来看,传统定义来源于物理公式,最初的函数概念几乎等同于解析式.后来,人们逐渐意识到定义域与值域的重要性,而要说清楚变量以及两个变量间的相依变化的关系,往往先要弄清各个变量的物理意义,这就使研究受到了不必要的限制,如果只根据变量观点,有些函数就很难进行深入研究.例如

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 是有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是无理数时},\end{cases}$$

对这个函数,如果用变量观点来解释,会显得十分勉强,也说不出 x 的物理意义是什么.但用集合、对应的观点来解释,就十分自然,从这个意义上来说,函数的近代定义更具有一般性.实际上,我们在这里说的传统定义,已经渗透了集合、对应的观点,如"按照某个对应法则,y 都有唯一确定的值和它对应",已经十分接近近代定义了,不过,由于用变量观点描述函数比较生动、直观,所以现在仍然广泛使用着传统定义.今后,为了方便,我们有时也仍然使用传统定义.

(3)函数是一种特殊的对应,对应不一定是函数,课本在图 2-2 中给出了六个对应,(4),(5),(6)这样的对应就不是函数,因为在(4),(6)的对应中是"一对多",在(5)中的对应中,A 中的元素 4 在 B 中没有元素与之对应.集合之间的对应关系情况较复杂,把它研究清楚了,非常有利于把握理解函数概念,也有利于把函数概念推广到映射.函数是具有以下特点的一种特殊的映射 $f:A\to B$,集合 A,B 是非空的数集.

由于映射在近代数学中是一个极其重要且应用极其广泛的概念,所以了解一下函数与映射的上述关系是有好处的,可以为今后进一步学习各类映射作好准备,但不必引申更多内容.

(4)关于映射的定义,要讲清楚以下几点:

①有两个集合 A,B,它们可以是数集,也可以是点集或其他集合,这两个集合有先后次序,A 到 B 的映射与 B 到 A 的映射是截然不同的.

②存在一个集合 A 到集合 B 的对应法则 f,在对应法则 f 的作用下,与 A 中的元素 a 对应的 B 中的元素 b 叫做 a(在 f 下)的象,a 叫做 b 的原象.

③集合 A 中的任何一个元素在 B 中都有象,并且象是唯一的.A 中两个(或几个)元素允许有相同的象.

④不要求集合 B 中每一个元素都有原象,即 B 中可能有些元素不是集合 A 中的元素的象.

映射也是一种特殊的对应,从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$,可以形象地喻之为"射箭".即:可以"一对一",也可以"多对一",但不能"一对多",也不能"多对多".即可以"一箭一雕"、"多箭一雕",但不能"一箭双雕"、"一箭多雕"、"多箭多雕".另外还可理解,"鞘中的箭必须射完,而且箭箭中雕,但有些雕可以不是瞄准的目标."

(5)注意教材所用记号 $f:A\to B$,表示集合 A 到集合 B 的映射,其中对应法则 f 的具体内容用汉字叙述,例如"求正弦"、"开方"、"乘以 2"等,这样处理,对于高中学生来说,比较容易接受,但是在大学教材或其他书中,往往用比较抽象的全部是符号的表示方法.

由于反函数的要求较低，对单射、满射及一一映射等概念可不作要求.

(6)函数概念有三要素：定义域、值域和对应法则，一般来说，定义域与对应法则确定了，则其值域也应随之确定，如果函数的对应关系相同，只是定义域不同，则应是不同的函数.

例如：$y=x^2+1, x\in(-\infty,+\infty)$与函数 $y=x^2+1, x\in[-1,1]$应是不同的函数，而 $y=x^2+1, x\in\mathbf{R}$ 及 $y=t^2+1, t\in\mathbf{R}$ 应是同一函数，$y=f(u)$与 $y=f(x)$应是同一函数.

(7)很多函数的对应关系 f 可以肯定它存在，但不一定能具体表达，能具体表示 f 的方法有解析法、列表法和图象法. 有时分几个式子来表示同一个函数，这时要注意这是“分段函数”，不要误认为是几个函数. 对于“分段函数”课本中已有所涉及，但要求不高.

(8)根据函数的解析式求函数的定义域，是求使解析式各部分都有意义的值的集合的交集，所以常是一个不等式组的解. 在联系实际的函数问题中，不仅应考虑解析式中自变量的取值范围，而且应考虑在实际问题中使所讨论问题有意义时，自变量的取值范围. 在解析式变形时，也应防止出现改变自变量的取值范围而与原来的函数不是同一个函数的错误.

在教学中，应强调对函数概念本质的理解，避免在求函数定义域、值域及讨论函数性质时出现过于繁琐的技巧训练，避免人为地编制一些求定义域和值域的偏题.

(9)把函数的每一组对应值$(a,f(a))$作为平面直角坐标系上点的坐标，这种点的轨迹就是这个函数的图象. 根据函数图象的分布、走向和特征，可以直观地反应函数的性质，所以函数图象是研究函数的一个重要工具. 函数图象是函数的一种几何直观表示形式，它为“数形结合”提供了可能与方法.

(10)函数符号 $y=f(x)$是学生难以理解的抽象符号之一，大约有三层意义：①“y 是 x 的函数”这句话的数学表示，仅是函数符号，可以但不一定是解析式；②$f(a)$与 $f(x)$略有不同，$f(x)$中的 x 可换成任何定义域中的数或式子；③$y=f(x)$可以看作是一个方程.

(11)在本单元的两个小节中共有六道例题. 第 1 小节的例 1，是求函数定义域的例子，它的最后结果是用“区间”来表示的，关于“区间”及“无穷大”这两个概念在本书的第一章集合中出现过. 第 1 小节中的例 2 及例 3 和第 2 小节中的例 1 及例 2 都是实际问题，要学会抽象转化，从实际问题中抽象建立函数关系式，包括建立简单的分段函数. 在函数的三种表示法中，特别要重视根据函数解析式来画出图象，或根据图象来写出函数解析式. 画图象时要注意列表、描点、连线等步骤，注意空心点、实心点等的区别. 在作含绝对值符号的函数的图象时，应注意把含绝对值的函数写成分段函数.

阅读与讨论　函数概念的形成与发展

本阅读材料简单地介绍了函数概念的产生、形成和发展的历史.

函数概念的形成在历史上大体分三个阶段. 第一阶段，把函数定义为“解析表达式”，由于 17，18 世纪工程技术和天体力学研究的需要，引进了变量，研究变量必然涉及到变量与变量之间的关系，于是函数概念就逐渐形成了. 第二阶段，把函数定义为变量之间的单值对应，随着研究函数的发展和应用广泛，只停留在把函数理解为解析表达式显然不够全面，例如由列表法、图象法所表示的函数关系就不包含在上述定义中，于是产生了把函数定义为“变量之间的单值对应”. 柯西给出的定义是“对于 x 的每一个值，如果 y 有完全确定的值与之对应，那么 y 就叫做 x 的函数”，现阶段初中数学的函数概念就接近这个定义. 所以函数可以用解析式表示，也可以不用解析式表示，这样就把函数概念又一次扩大了. 为了更深入地研究函数，不仅仅限制在数的范围，在集合映射概念的基础上，把函数定义为映射是函数概念的第三个发展阶段，现

在高中把函数作为一种特殊的映射来解释函数概念，这就是按照第三阶段的函数概念来讲述的. 但是，由于中学研究的函数还主要是数值函数，而且又以连续函数为主，所以本书的函数概念也仅限于以集合、映射的概念来解释数值函数概念，还不能称之为任意集合之间的单值对应近代函数定义.

函数概念的发展过程对同学们的学习至少有这样的有益启示：像函数这样的核心概念需要多次接触、反复体会，逐步加深理解，才能真正掌握，灵活运用.

2.2 函数的基本性质

1. 内容概述及基本要求

本节分三小节，第 1 小节是函数的单调性，第 2 小节是函数的奇偶性，第 3 小节是函数的最大值与最小值，这三小节都是从实际问题出发，从学过的函数图象，如二次函数图象出发展开叙述与研究的.

本节的教学要求是了解增函数、减函数的概念，并能掌握判断某些函数的增减性的方法；了解偶函数、奇函数的概念，并能掌握判断某些简单函数的奇偶性的方法；理解函数的最大(小)值及其几何意义，会求简单函数在给定区间上的函数的最大值与最小值. 学会运用函数图象特别是二次函数图象理解和研究函数的单调性、奇偶性及最大(小)值.

2. 重难点分析

重点是函数的单调性、奇偶性、最大(小)值的有关概念；难点是利用这些概念证明或判断函数的单调性或奇偶性，及在闭区间上二次函数的最大(小)值的求法.

3. 教学建议

(1)为了研究函数的基本性质(单调性、奇偶性及最大(小)值)，课本中先按照初中《函数及其图象》一章的知识，画出了一些常见函数 $y=x^2-2x+2$，$y=\frac{1}{x}$，$y=2x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{200}(t-150)^2+100$，$t\in[0,250]$的图象，这些函数在初中大部分都学过，它们可以作为研究函数性质的直观图象. 在教学中要注意复习巩固初中函数图象知识，充分利用其图象理解相关概念和讨论函数的性质.

(2)第 1 小节中例 1 的答案是，$f(x)$在$(-3,-1]$，$[0,1]$上是减函数；在区间$[-1,0]$，$[1,3)$上是增函数，学生很可能提出这样一个问题：在两个区间的公共端点处，比如在点 $x=-1$ 处，这个函数到底是增函数还是减函数？这里应向学生讲清楚，函数的单调性是对某个区间而言的，对于单独的一点，由于它的函数值是唯一确定的常数，因而没有增减变化，所以不存在单调性问题. 另一方面，中学阶段研究的主要是连续函数或分段连续函数，对于闭区间上的连续函数来说，只要在开区间上单调，它在闭区间上也就单调. 因此，在考虑它的单调区间时，包括不包括端点都可以. 必须注意，对于在某些点上不连续的函数，单调区间不包括不连续点.

(3)函数的单调性是对定义域内某个区间而言的，有些函数在整个定义域内具有单调性. 例如，一次函数 $y=kx+b$ 就是这样，这可按照 k 值的正负分两种情况进行证明：

如果 $k>0$，设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(kx_2+b)-(kx_1+b)=k(x_2-x_1).$$

由于 $k>0$，$x_1<x_2$，可知 $x_2-x_1>0$，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$. 所以 $f(x)$是增函数.

如果 $k<0$，同样可证此时 $f(x)$是减函数.

教材中第 1 小节的练习第 2 题是一次函数的一个特例. 教学上可根据学生的情况只讲此题或进一步讲一般一次函数的增减性.

有些函数在定义域内某些区间上是增函数，而在另一些区间上是减函数，如教材中例 1、例 2 及例 3 均是，从函数的图象可观察出单调区间，再用增减性定义来证. 若是一个函数的图象画不出来，那如何探求增减区间呢？这样的问题难度较大.

有些函数没有单调区间，或者它的定义域根本就不是区间. 例如函数 $y=5x, x\in\{1,2,3\}$.

(4)在第 1 小节的引入例子中，指出函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上是减函数，同样它在 $(-\infty,0)$ 上也是减函数.

注意：$x=0$ 不属于函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的定义域. 因此，切不可把这里的区间 $(0,+\infty)$ 误写成为 $[0,+\infty)$，也不可说 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，也不能说 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在区间 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上是减函数.

(5)第 1 小节中的例 3，给出的函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 很有用. 在很多实际问题中都有所触及. 若先知道其图象，则其单调区间就好找多了；反之，若先知道单调区间，则画出函数的图象就容易多了. 在不知图象的前提下，求出函数的单调区间有定义法及今后要学习的导数法.

(6)判断一个函数是奇函数，还是偶函数，或者既不是奇函数也不是偶函数，叫做判断函数的奇偶性，这是在研究函数的性质时应予考察的一个重要方面. 对于一个奇函数或偶函数，根据它的图象关于原点或 y 轴对称的特性，就可由自变量取正值时的图象和性质，来推断它在整个定义域内的图象和性质.

结合讲解奇函数与偶函数的定义，可以分析一下最简单的几个函数的奇偶性. 例如：$y=x$ 与 $y=x^{-1}$ 是奇函数，$y=x^2$ 和 $y=x^{-2}$ 是偶函数；$y=\sqrt{x}$ 与 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 既不是奇函数也不是偶函数，因为它们的定义域分别是 $[0,+\infty)$ 与 $(0,+\infty)$，即 x 取负值时函数无意义，所以不能满足奇函数和偶函数的定义. 具有奇偶性的函数其定义域一定关于原点对称，定义域不关于原点对称的函数，肯定不具有奇偶性. 如 $f(x)=x^2, x\in[-1,2]$ 不具有奇偶性.

(7)教材中第 2 小节的例 1 是根据奇函数、偶函数的定义判断函数的奇偶性. 有时也可以根据下面的式子来判断函数的奇偶性：

$$f(x)\pm f(-x)=0.$$

当定义域内任意一个 x，有 $f(x)-f(-x)=0$ 成立，则 $f(x)$ 为偶函数；当对于定义域内任意一个 x，有 $f(x)+f(-x)=0$ 成立，则 $f(x)$ 为奇函数.

(8)教材中第 2 小节的例 2 的证明是个难点，讲解时要紧扣奇函数与增函数的定义，同时要层次分明，思路清晰，比如，可按以下步骤进行讲解：

①把题目的要求具体化，设 $x_1, x_2\in(-\infty,0)$，即 $x_1<0, x_2<0$，且设 $x_1<x_2$，要判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小.

②为了利用 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上所具有的性质，可转而考虑 x_1, x_2 的相反数 $-x_1, -x_2$，易知 $-x_1>0, -x_2>0$，且 $-x_1>-x_2$. 因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$.

③根据 $f(x)$ 是奇函数的条件，有 $f(-x_1)=-f(x_1), f(-x_2)=-f(x_2)$，所以，由上面的

式子可知 $f(x_1)<f(x_2)$. 即证得 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上是增函数.

(9)函数的最大(小)值是我们研究函数时常常关注的问题，画出函数的图象，与单调性结合观察又是研究函数最大(小)值的常用方法. 第 3 小节中的例 1、例 2 都是求闭区间上二次函数的最大(小)值问题. 这类问题就是考察图象(一段弧)，从而得出结论. 对于例 2，它是一个含有参系数的二次函数，其对称轴为 $x=-\frac{a}{2}$，要与给定的区间 $[-1,1]$ 的位置关系进行分类讨论.

一般说来，闭区间 $[\alpha,\beta]$ 上的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的最大(小)值情形有如下结论：

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为 $x=-\frac{b}{2a}$. 当 $-\frac{b}{2a}\in[\alpha,\beta]$ 时，最大值与最小值从三数 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$，$f(\alpha)$，$f(\beta)$ 中去比较得出，当 $-\frac{b}{2a}\notin[\alpha,\beta]$ 时，最大值与最小值从 $f(\alpha)$ 与 $f(\beta)$ 中去比较得出.

(10)信息技术链接. 画函数图象的方法或软件很多，课本上介绍了几何画板. 鼓励学生运用现代教育技术学习、探索和解决问题.

六、相关资源

1. 函数的整体教学安排

函数是中学教学中最重要的基本概念之一，在中学数学教材中，函数的教学大致可分为三个阶段.

第一阶段是在初中代数课本内初步探讨了函数的概念、函数关系的表示法以及函数图象的绘制等，并具体地讨论了正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数等最简单的函数. 通过函数值的计算、列对应值表以及描绘函数的图象，使学生获得关于函数的感性认识，初步了解函数的意义，理解正比例函数、反比例函数、一次函数的概念和性质，理解二次函数的概念，能根据函数性质画出正比例函数、一次函数的图象，用描点法画出反比例函数、二次函数的图象.

本章函数及第三章与第四章及数学 4 中三角函数是函数教学的第二阶段，也就是对函数概念的再认识阶段. 即用集合、映射的思想理解函数的一般定义，加深对函数概念的理解，在此基础上研究了指数函数、对数函数、幂函数，以及后续内容三角函数等基本初等函数，从而使学生在第二阶段获得较为系统的函数知识，并初步培养函数的应用意识，为今后学习打下良好的基础.

第三阶段安排在选修内容中，选修 1-1 及选修 2-2 中有导数等，这些内容是函数及其应用研究的深化与提高，也是进一步学习、参加生产实际生活中需要具备的基础知识.

函数是中学数学的主要内容，几乎每一章都贯穿着函数的思想，可以说函数思想是整个高中数学的基本的数学语言，这一章涉及到的一些重要思想方法，对学好高中数学起着重要的作用.

2. 两个结论的证明

教材中“奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 y 轴对称”这两个结论是通过观察图象得出的. 为了不增加教学上的难度，此处没有给予证明. 如果学生复习了初中已学过的平面内任意一点 $P(x,y)$ 与点 $P'(-x,-y)$ 关于坐标原点对称；点 $P(x,y)$ 与点 $P'(-x,y)$ 关于 y 轴对称的知识，这两个结论的证明也是不难接受的. 现证明如下：

设函数 $f(x)$ 是奇函数，则有 $f(-x)=-f(x)$. 如图 2-1 所示，在 $f(x)$ 的图象上任取一点 $P(a,f(a))$，那么点 P 关于原点的对称点是点 $P'(-a,-f(a))$，即点 $P'(-a,f(-a))$. 而点 $P'(-a,f(-a))$ 是函数 $f(x)$ 的图象上的点，这就是说，函数 $f(x)$ 的图象上任意一点关于原点的对称点都在函数 $f(x)$ 的图象上，所以函数 $f(x)$ 的图象关于原点成中心对称.

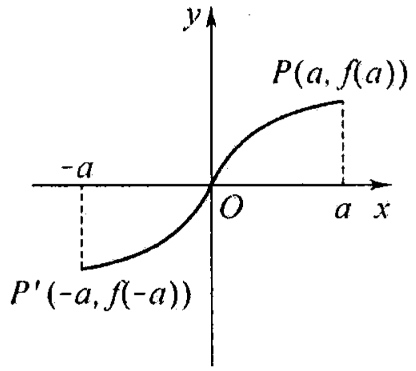


图 2-1

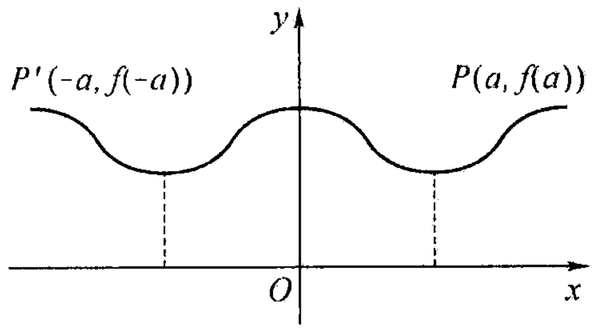


图 2-2

偶函数的图象关于 y 轴成轴对称图形，如图 2-2，证明过程可以仿照上述证明过程证得.

3. 应适当补充的内容

本章的函数及其相关概念、函数的一般性质的讨论都很抽象，是我们教学中的重点与难点. 在这部分要多花一些课时，适当加深、拓宽、补充一些内容. 如：

①求函数的定义域；

②根据实际问题建立函数关系式；

③对 $f(x)$ 的理解与求法；

④值域的求法；

⑤分段函数；

⑥画函数的图象；

⑦对于一次函数 $f(x)=kx+b$，若 $f(\alpha)>0$，$f(\beta)>0$，则在 $[\alpha,\beta]$ 内恒有 $f(x)>0$；

⑧一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根与常数的位置关系讨论；

⑨含参系数的一元二次方程的问题.

函数 $y=f[g(x)]$ 一般称为复合函数，尽管课本上没有明确提出“复合函数”这一概念，但复合函数随处可见，建议在教学中，有意识地渗透复合函数思想，用复合函数观点来解释一些问题，当然不求一次到位.

在教学中要有意识地渗透“数形结合法”及“分类讨论法”的教学，也应逐步培养学生的“范围意识”及“变量观点”.

七、评价建议

1. 数学学习过程的评价. 应特别重视考察学生在函数的概念的建立与一般性质讨论的过程中，能否从实际情境中抽象出简单的函数模型以及能否应用函数模型知识解决问题；应关注学生在教学活动中的参与性及合作交流的意识.

2. 知识与技能的评价. 要注重对函数概念及性质的本质的理解和思想方法的把握，避免强调机械记忆、模仿以及复杂技巧. 应评价学生能否理解函数及其相关概念，能否用函数图象研究函数性质；能否建立“函数观点”；能否初步掌握“数形结合”的方法及“分类讨论”的方法.

3. 能力的评价. 应着重评价学生在“利用函数性质探究”与“函数实际建模”的活动中，是

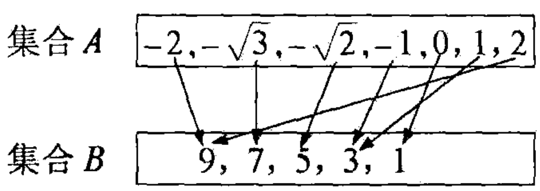
否有问题意识，是否善于发现与提出问题，能否独立思考，能否将解决问题的方案与结果准确地表达，并与同学交流，在交流互补中调整完善解决问题的方案.

4. 采用建立成长记录、开展常规作业、笔试、口试等多种方式相结合进行评价，并以定性与定量相结合的方式呈现评价结果. 对评价结果要指明学生在本章学习中的进步与发展、特点与优点，以及需要改进的地方等. 函数的深化学习与研究是高中数学的重点与难点，评价时应注意帮助学生提高学习兴趣，改善学习方法，尽快完成从初中到高中的过渡，以适应高中的学习要求.

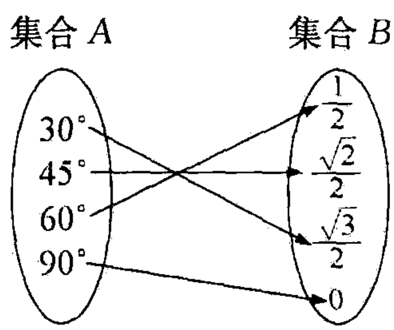
八、习题解答

练习(第 28 页)

1. (1)



(2)



2. D.

3. (1)$(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$；　(2)$[-4,-2]\cup(-2,+\infty)$.

4. $f(x)$的值域为$\{-3,-1,1,3\}$.

5. 映射的实际例子如：

①$A=\{$平面α内的矩形$\}$，$B=\{$平面α内的圆$\}$，f：作矩形的外接圆.

②$A=\{$某商场内应售的商品$\}$，$B=\{y|y>0\}$，f：每个商品所标明的出售价格.

③$A=\{$某人某月的工资收入$\}$，$B=\{y|y>0\}$，f：按我国个人所得税税法规定应缴的个人所得税.

6. $y=x\sqrt{50^2-x^2}\quad(0<x<50)$.

习题 2.1.1

1. ①,②,③.

2. (1)$[-5,0]\cup[2,6)$；　(2)$[0,+\infty)$；　(3)$[0,1)\cup(5,+\infty)$.

3. A.

4. (1)由$f(1)=0,f(2)=-\frac{1}{2}$，得

$$\begin{cases}a+b=0,\\2a+b=-\frac{1}{2},\end{cases}$$

解得$a=-\frac{1}{2},b=\frac{1}{2}$，所以$f(x)=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 从而有$f(5)=-\frac{1}{2}\cdot5+\frac{1}{2}=-2$.

(2)由 $f(1)=f(2)=0$,得

$$\begin{cases}1^2+p+q=0,\\2^2+2p+q=0,\end{cases}$$

解得 $p=-3$,或 $q=2$,所以 $f(x)=x^2-3x+2$. 从而有 $f(-1)=1+3+2=6$.

5. $v=8000=6x\cdot u$,其中 u 为池底的另一边长(单位:m),解得 $u=\frac{8000}{6x}=\frac{4000}{3x}$. 所以

$$y=2ax\cdot u+2(x+u)\cdot 6\cdot a=\frac{8000}{3}a+12ax+\frac{16000}{x}a \quad (x>0).$$

6. 经查阅《中华人民共和国个人所得税法实施条例》中的个人所得税税率表,如下:

个人所得税税率表 (工资、薪金所得适用)

级数	全月应纳税所得额	税率(%)
1	不超过 500 元的	5
2	超过 500 元至 2000 元的部分	10
3	超过 2000 元至 5000 元的部分	15
4	超过 5000 元至 20000 元的部分	20
5	超过 20000 元至 40000 元的部分	25
6	超过 40000 元至 60000 元的部分	30
7	超过 60000 元至 80000 元的部分	35
8	超过 80000 元至 100000 元的部分	40
9	超过 100000 元的部分	45

(注:本表所称全月应纳税所得额是指以每月收入额减除费用八百元后的余额或者减除附加减除费用后的余额.)

根据上表,可写出税率 y 与个人税前所得 x 的函数为

$$y=\begin{cases}0 & (0<x<800),\\5\% & (800\leqslant x<1300),\\10\% & (1300\leqslant x<2800),\\15\% & (2800\leqslant x<5800),\\20\% & (5800\leqslant x<20800),\\25\% & (20800\leqslant x<40800),\\30\% & (40800\leqslant x<60800),\\35\% & (60800\leqslant x<80800),\\40\% & (80800\leqslant x<100800),\\45\% & (x\geqslant 100800).\end{cases}$$

另外,税额 y 表示为个人税前所得 x 的函数为

$$y=\begin{cases}0 & (0<x<800),\\ 5\%(x-800) & (800\leqslant x<1300),\\ 10\%(x-1300)+25 & (1300\leqslant x<2800),\\ 15\%(x-2800)+175 & (2800\leqslant x<5800),\\ 20\%(x-5800)+625 & (5800\leqslant x<20800),\\ 25\%(x-20800)+3625 & (20800\leqslant x<40800),\\ 30\%(x-40800)+8625 & (40800\leqslant x<60800),\\ 35\%(x-60800)+14625 & (60800\leqslant x<80800),\\ 40\%(x-80800)+21625 & (80800\leqslant x<100800),\\ 45\%(x-100800)+29625 & (x\geqslant 100800).\end{cases}$$

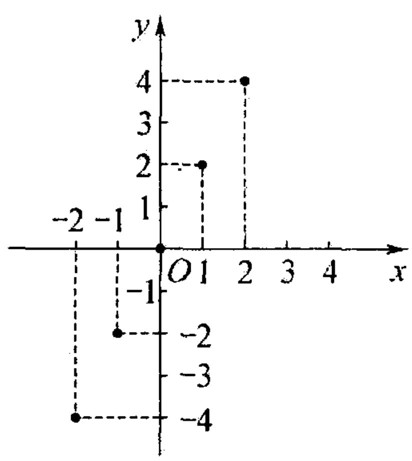
练习(第 31 页)

1. (略)

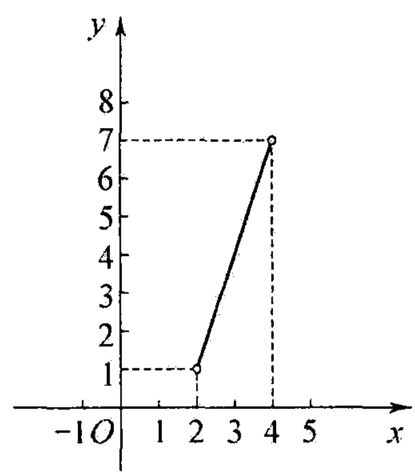
2. (1)因为 $|x|\leqslant 2$ 且 $x\in\mathbf{Z}$,所以 $x=-2,-1,0,1,2$. 所以

$$f(-2)=-4,f(-1)=-2,f(0)=0,f(1)=2,f(2)=4.$$

函数图象如图所示.



(第 2(1)题图)



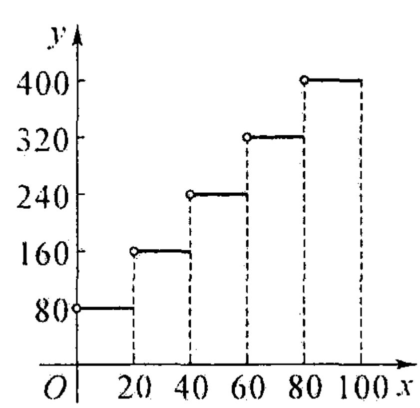
(第 2(2)题图)

(2)函数 $f(x)=3x-5,x\in(2,4)$ 的图象如图所示.

(3)解析式为

$$y=\begin{cases}80 & (0<x\leqslant 20),\\ 160 & (20<x\leqslant 40),\\ 240 & (40<x\leqslant 60),\\ 320 & (60<x\leqslant 80),\\ 400 & (80<x\leqslant 100).\end{cases}$$

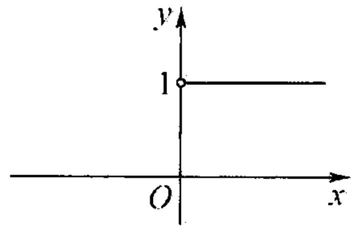
这个函数的图象如图所示.



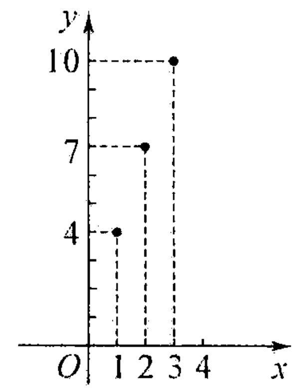
(第 2(3)题图)

习题 2.1.2

1. (1)如图.



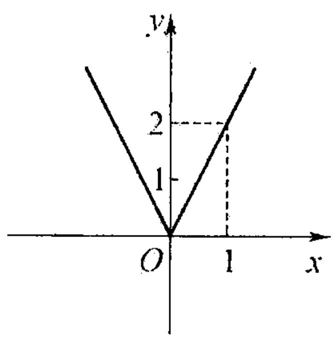
(第 1(1)题图)



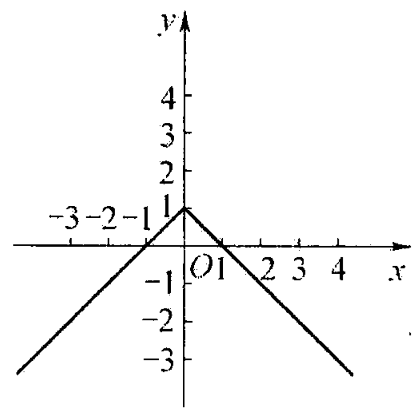
(第 1(2)题图)

(2)$G(1)=4, G(2)=7, G(3)=10$. 所作图象如图所示.

2. (1)$y=2|x|=\begin{cases}2x & (x\geqslant 0),\\ -2x & (x<0).\end{cases}$所作图象如图所示.



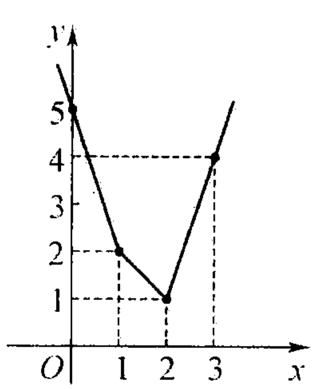
(第 2(1)题图)



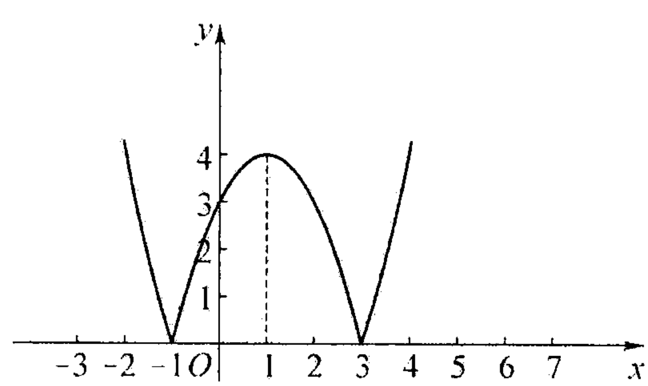
(第 2(2)题图)

(2)$y=1-|x|=\begin{cases}1-x & (x\geqslant 0),\\ 1+x & (x<0).\end{cases}$所作图象如图所示.

(3)$y=|x-1|+2|x-2|=\begin{cases}5-3x & (x\leqslant 1),\\ -x+3 & (1<x<2),\\ 3x-5 & (x\geqslant 2).\end{cases}$所作图象如图所示.



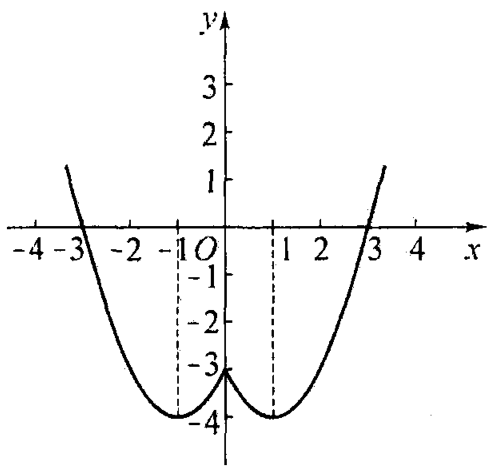
(第 2(3)题图)



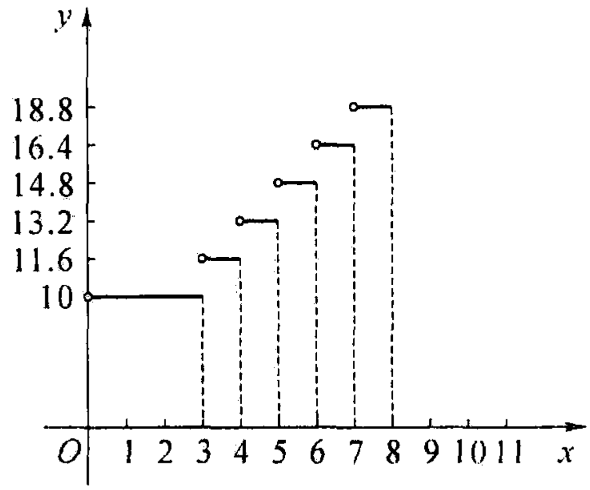
(第 2(4)题图)

(4)$y=|x^2-2x-3|=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 3),\\ -x^2+2x+3 & (-1<x<3).\end{cases}$所作图象如图所示.

(5)$y=x^2-2|x|-3=\begin{cases}x^2-2x-3 & (x\geqslant 0),\\ x^2+2x-3 & (x<0).\end{cases}$所作图象如图所示.



（第 2(5)题图）



（第 4 题图）

3. $T(5)$表示小丽 5 小时后完成工作量的百分数，为 50%.

4. 设行车里程为 x，车费为 y，

$$y=\begin{cases}10 & (0<x\leqslant 3),\\ 11.6 & (3<x\leqslant 4),\\ 13.2 & (4<x\leqslant 5),\\ 14.8 & (5<x\leqslant 6),\\ 16.4 & (6<x\leqslant 7),\\ 18.8 & (7<x\leqslant 8),\\ \cdots\cdots \end{cases}$$

所求函数的图象如图所示.

5. (A)——(3)；(B)——(2)；(C)——(4)；(D)——(1).

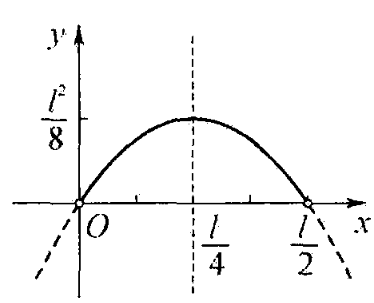
6. (1)因为 $AB+BC+CD=l$，又 $AB=CD=x$，所以 $BC=l-2x$，所以

$$S=AB\cdot BC=x(l-2x)=-2x^2+lx,$$

即 $$S(x)=-2x^2+lx.$$

(2)令 $\begin{cases}x>0,\\ l-2x>0,\end{cases}$ 解得 $0<x<\frac{l}{2}$. 所以 $S(x)$的定义域为$(0,\frac{l}{2})$.

(3) $S(x)$的图象如图所示.



（第 6 题图）

练习(第 37 页)

1. 由 $f(x)$的图象得，$f(x)$的单调区间为$(-\infty,-1)$，$[-1,1]$，$(1,+\infty)$，其中在$(-\infty,-1)$上递减，在$[-1,1]$上递增，在$(1,+\infty)$上递减.

2. 任给 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(-2x_1+1)-(-2x_2+1)=2(x_2-x_1).$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $2(x_2-x_1)>0$. 所以 $f(x)>f(x_2)$.
即 $f(x)=-2x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

3. 任给 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(-\frac{3}{x_1})-(-\frac{3}{x_2})=\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}.$$

因为 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>0$，从而有$\frac{3(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$.

于是 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)=-\frac{3}{x}$在$(0,+\infty)$上是增函数.

$\boxed{\text{习题 2.2.1}}$

1. 因为 $f(x)=(2a-1)x+b$ 是 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $2a-1<0$，解得 $a<\frac{1}{2}$. 故选 D.

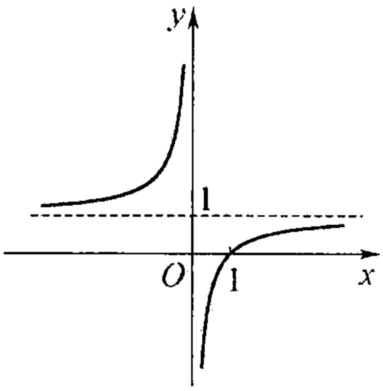
2. $f(x)=1-\frac{1}{x}$的图象如图所示.

观察得该图象在$(-\infty,0)$上为单调递增.
证明如下：
任给 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(1-\frac{1}{x_1})-(1-\frac{1}{x_2})=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}.$$

因为 $x_1x_2>0$，$x_1-x_2<0$，所以$\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}<0$.

于是 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.
所以 $f(x)$在$(-\infty,0)$上为增函数.



（第 2 题图）

3. 任给 $x_1,x_2\in(-\infty,\frac{b}{2}]$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(-x_1^2+bx_1+c)-(-x_2^2+bx_2+c)$$
$$=(x_2^2-x_1^2)+bx_1-bx_2$$
$$=(x_2-x_1)(x_2+x_1-b).$$

因为 $x_1<\frac{b}{2}$，$x_2\leqslant\frac{b}{2}$，$x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，$x_2+x_1-b>0$，即

$$(x_2-x_1)(x_2+x_1-b)>0.$$

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$(-\infty,\frac{b}{2}]$上是增函数.

4. 因为 $a+b>0$，所以 $a>-b$，$b>-a$.
又 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为增函数，所以 $f(a)>f(-b)$，$f(b)>f(-a)$，所以

$$f(a)+f(b)>f(-a)+f(-b).$$

5. (1) $y=1-f(x)$在区间 I 上递减.
证明如下：任取 $x_1,x_2\in I$，且 $x_1<x_2$.
因为 $f(x)$在 I 上递增，所以 $f(x_1)<f(x_2)$. 所以

$$y_1-y_2=[1-f(x_1)]-[1-f(x_2)]=f(x_2)-f(x_1)>0,$$

即 $y_1>y_2$. 所以 $y=1-f(x)$在区间 I 上递减.

(2)$y=\dfrac{1}{f(x)}$在区间 I 上也递减.

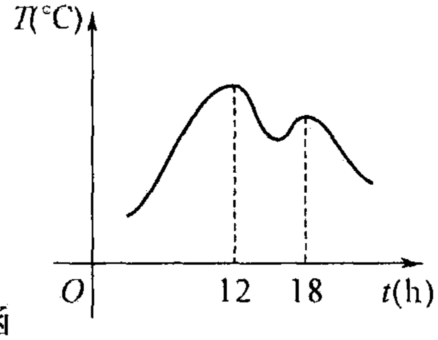
证明如下:任取 $x_1,x_2\in I$,且 $x_1<x_2$.

因为 $f(x)$在区间 I 上递增,所以 $f(x_1)<f(x_2)$. 又 $f(x)>0$,所以 $f(x_1)>0,f(x_2)>0$. 所以

$$\frac{1}{f(x_1)}>\frac{1}{f(x_2)},$$

即 $y_1>y_2$. 所以 $y=\dfrac{1}{f(x)}$在区间 I 上递减.

6. 它的一个可能图象如图所示.



(第 6 题图)

练习(第 41 页)

1. (1)因为 $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2}=\dfrac{1}{x^2}=f(x)$,所以 $f(x)$为偶函数.

(2)因为 $f(x)$的定义域为$[0,+\infty]$,不关于原点对称,所以 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

(3)因为 $f(-x)=-x+\dfrac{1}{-x}=-(x+\dfrac{1}{x})=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数.

2. $f(x)$在$(0,+\infty)$上是减函数. 证明如下:

设 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$,且 $x_1<x_2$,则$-x_1,-x_2\in(-\infty,0)$,且$-x_1>-x_2$.

因为 $f(x)$在$(-\infty,0)$为增函数,所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$.

又 $f(x)$为偶函数,所以 $f(-x_1)=f(x_1),f(-x_2)=f(x_2)$.

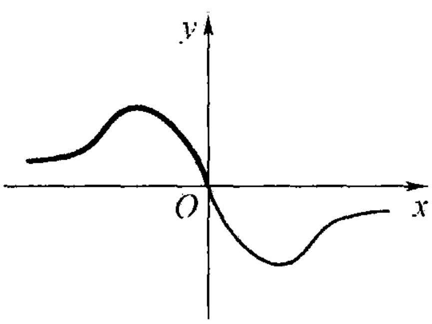
所以 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为减函数.

3. 因为 $f(x)$为奇函数,所以 $f(-x)=-f(x)$.

故 $f(x)$的图象关于原点中心对称.

于是 $f(x)$的另一半图象如图所示(粗线部分).



(第 3 题图)

习题 2.2.2

1. (1)$y=x^{-2}$为偶函数;$y=x^{-3}$为奇函数.

(2)$y=x^{-2}$的图象关于 y 轴对称;$y=x^{-3}$的图象关于原点对称.

(3)$y=x^{-2}$在$(0,+\infty)$上单调递减;$y=x^{-3}$在$(0,+\infty)$上单调递减.

(4)$y=x^{-2}$在$(-\infty,0)$上单调递增;$y=x^{-3}$在$(-\infty,0)$上单调递减.

2. 因为 $f(x)=\begin{cases}x-1,x\in[0,+\infty),\\x+1,x\in(-\infty,0),\end{cases}$所以

$$f(2)=1,f(-2)=-1.$$

所以 $f(2)\neq f(-2)$,故 $f(x)$不是偶函数.

又 $f(0)=-1$,所以 $f(-0)\neq -f(0)$,故 $f(x)$不是奇函数.

综合得出 $f(x)$既不是奇函数也不是偶函数.

3. 设定义在区间 I 上的函数 $f_1(x),f_2(x)$ 均是奇函数,则 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 在区间 I 上也是奇函数.

证明如下:因为 $f_1(x),f_2(x_2)$ 均是 I 上的奇函数,所以

$$f_1(-x)=-f_1(x),f_2(-x)=-f_2(x).$$

设 $F(-x)=f_1(x)+f_2(x)$,则

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=-f_1(x)-f_2(x)=-F(x),$$

所以 $F(x)=f_1(x)+f_2(x)$ 也是 I 上的奇函数.

4. 设 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$,且 $x_1<x_2$,则 $-x_1,-x_2\in(0,+\infty)$,且 $-x_1>-x_2$.
因为 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上递增,且 $f(x)<0$,则 $f(-x_2)<f(-x_1)<0$.
而 $f(x)$ 又为奇函数,所以 $-f(x_2)<-f(x_1)<0$,即 $f(x_2)>f(x_1)>0$.
所以

$$F(x_1)-F(x_2)=\frac{1}{f(x_1)}-\frac{1}{f(x_2)}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{f(x_1)f(x_2)}.$$

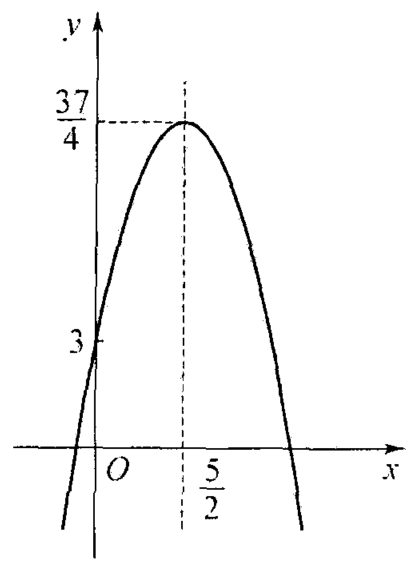
而 $f(x_2)-f(x_1)>0,f(x_1)f(x_2)>0$,所以 $F(x_1)>F(x_2)$.
所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为减函数.

练习(第 44 页)

1. $f(x)=-x^2+5x+3=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{37}{4}\leqslant\frac{37}{4}$.

所以 $f(x)_{\max}=\frac{37}{4}$.

图象如图所示.



（第 1 题图）

2. $y=2x^2-6x+3=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$.

对称轴 $x=\frac{3}{2}\notin[-1,1]$,所以 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上单调递减.

所以 $y_{\min}=f(1)=-1$.

3. 因为 $f(x)$ 在 $[3,7]$ 上是增函数,最小值为 5. 由于 $f(x)$ 是奇函数,考察图象的对称性知,$f(x)$ 在 $[-7,-3]$ 上递增,且有最大值 $f(-3)=-f(3)=-5$.

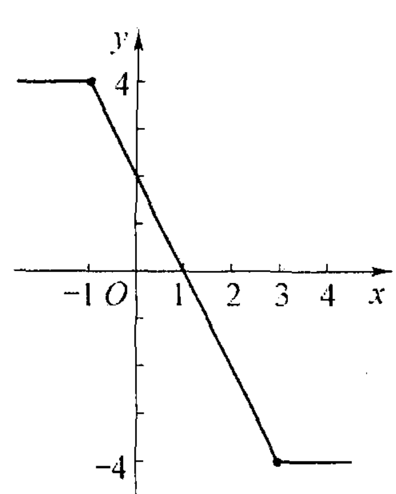
习题 2.2.3

1. $f(x)=x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$.

而 $x\in[-1,1]$,$\frac{3}{2}\notin[-1,1]$,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=0$.

2. $y=|x-3|-|x+1|=\begin{cases}4 & (x<-1),\\ 2-2x & (-1\leqslant x\leqslant 3),\\ -4 & (x>3).\end{cases}$

画出其图象,如图所示.



（第 2 题图）

所以 $y_{\max}=4,y_{\min}=-4$.

3. 因为 $f(x),g(x)$ 都是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,所以

$$f(x)=-f(-x),g(x)=-g(-x).$$

又因为 $F(x)=af(x)+bg(x)+2$ 在 $(0,+\infty)$ 上最大值为 5,所

以 $F(x)-2=af(x)+bg(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上最大值为 3. 而

$$F(-x)-2=af(-x)+bg(-x)$$
$$=-[af(x)+bg(x)]=-[F(x)-2],$$

所以 $F(x)-2$ 为奇函数，则 $F(x)-2$ 在 $(-\infty,0)$ 上有最小值 -3，即 $F(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最小值为 -1.

4. $f(x)=-x^2+2ax+1-a=-(x-a)^2+a^2-a+1$.

(ⅰ)若 $a<0$，则 $f(x)_{\max}=f(0)=1-a=2$，所以 $a=-1<0$.

(ⅱ)若 $0\leqslant a\leqslant 1$，则 $f(x)_{\max}=f(a)=1-a+a^2$.

令 $1-a+a^2=2$，则 $a=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$（舍去）或 $a=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（舍去）.

(ⅲ)若 $a>1$，则 $f(x)_{\max}=f(1)=a=2$，所以 $a=2>1$.

综合(ⅰ)、(ⅱ)、(ⅲ)，可得 $a=-1$ 或 2.

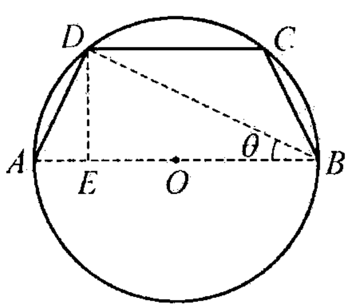
5. 设梯形的腰长为 x. 作 $DE\perp AB$，连接 BD，如图所示.

记 $\angle ABD=\theta$，则 $\sin\theta=\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{x}{2R}$.

又 $\angle ADE=\angle DBA=\theta$，所以 $AE=AD\sin\theta=\dfrac{x^2}{2R}$. 所以周长

$$C=2R+2x+2R-\frac{x^2}{2R}\cdot 2=4R-\frac{x^2}{R}+2x,\ x\in(0,\sqrt{2}R).$$

当且仅当 $x=R$ 时，$C_{\max}=4R-R+2R=5R$.



（第 5 题图）

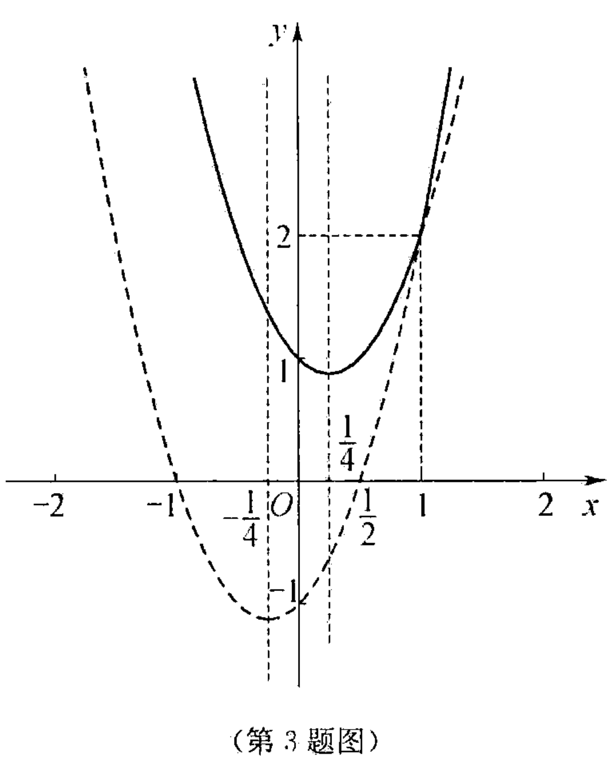
$\boxed{\text{复习题 A 组}}$

1. (1)×；　(2)√；　(3)×；　(4)×.

2. 定义域为 $[-2,3]$，值域为 $[-3,0]$，最大值为 0，最小值为 -3.

3. $y=2x^2+|x-1|=\begin{cases}2x^2+x-1 & (x\geqslant 1),\\ 2x^2+1-x & (x<1).\end{cases}$

它的图象如图所示.



（第 3 题图）

4. 在$(0,m_0]$时，生产效率随工人人数增多而上升；在$[m_0,+\infty)$时，生产效率随工人人数增多而下降. 在 m_0 处生产效率最高.

5. $f(x_1)-f(x_2)=(ax_1^2+bx_1)-(ax_2^2+bx_2)$
$=a(x_1+x_2)(x_1-x_2)+b(x_1-x_2)$
$=(x_1-x_2)[a(x_1+x_2)+b]=0.$

因为 $x_1\neq x_2$，$ab\neq 0$，所以 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$. 所以

$$f(x_1+x_2)=f\left(-\frac{b}{a}\right)=a\left(-\frac{b}{a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{a}\right)=\frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a}=0.$$

6. 设 $\sqrt{x-1}=t(t\geqslant 0)$，则 $x=t^2+1(x\geqslant 1)$. 所以

$$y=2x-\sqrt{x-1}=2(t^2+1)-t$$
$$=2t^2-t+2=2\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}\geqslant\frac{15}{8}.$$

所以当且仅当 $t=\frac{1}{4}$，即 $x=\frac{17}{16}$时，$y_{\min}=\frac{15}{8}$.

7. 因为 $f(x)=2ax+1$ 的图象是一条直线，而它在$[-1,1]$上恒大于 0，所以

$$\begin{cases}f(-1)>0,\\ f(1)>0,\end{cases}\quad 即\begin{cases}-2a+1>0,\\ 2a+1>0.\end{cases}$$

所以$-\frac{1}{2}<a<\frac{1}{2}$.

8. 设 $x_1,x_2\in(0,\sqrt{3}]$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\left(x_1+\frac{3}{x_1}\right)-\left(x_2+\frac{3}{x_2}\right)$$
$$=(x_1-x_2)+\frac{3}{x_1}-\frac{3}{x_2}=(x_1-x_2)+\frac{3(x_2-x_1)}{x_1x_2}=(x_1-x_2)\left(1-\frac{3}{x_1x_2}\right).$$

因为 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$. 又 $x_1,x_2\in(0,\sqrt{3}]$，所以 $x_1x_2\in(0,3)$，则$\frac{3}{x_1x_2}>1$. 所以

$$(x_1-x_2)\left(1-\frac{3}{x_1x_2}\right)>0.$$

于是 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$(0,\sqrt{3}]$上递减.

同样，再设 $x_1,x_2\in[\sqrt{3},+\infty]$，且 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1-x_2)\left(1-\frac{3}{x_1x_2}\right).$$

由于 $x_1,x_2\in[\sqrt{3},+\infty]$，$x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，$x_1x_2>3$，则有 $1-\frac{3}{x_1x_2}>0$. 所以

$$(x_1-x_2)\left(1-\frac{3}{x_1x_2}\right)<0.$$

于是 $f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$.

所以 $f(x)$在$[\sqrt{3},+\infty)$上递增.

9. (ⅰ)当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2+|x|+1$.

显然 $f(-x)=f(x)$，所以 $f(x)$为偶函数.

（ⅱ）当 $a\neq0$ 时，$f(x)=x^2+|x-a|+1$.

因为 $f(0)=|a|+1\neq0$，所以 $f(x)$ 不是奇函数.

又 $f(1)=|a-1|+2$，$f(-1)=|a+1|+2$，令 $f(1)=f(-1)$，得 $|a-1|=|a+1|$，解得 $a=0$. 所以当 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数.

综合可得，当 $a=0$ 时，$f(x)$ 为偶函数，当 $a\neq0$ 时，$f(x)$ 为非奇非偶函数.

10. $y=f(x)=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}\geqslant\dfrac{7}{4}$.

考察图象，知 $\dfrac{3}{2}\in[0,m]$，所以 $m\geqslant\dfrac{3}{2}$.

又 $f(0)=4$，再令 $y=f(x)=x^2-3x+4=4$，解得 $m=0$ 或 3.

综上所述，得 $\dfrac{3}{2}\leqslant m\leqslant3$.

$\boxed{\text{复习题 B 组}}$

1. 因为 $f(5+t)=f(5-t)$，所以

$$f(13)=f(5+8)=f(5-8)=f(-3),$$

$$f(9)=f(5+4)=f(5-4)=f(1).$$

$-3<-1<1<5$，且 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,5)$ 上单调递减，所以 $f(-3)>f(-1)>f(1)$，即 $f(13)>f(-1)>f(9)$.

2. $f(x)=-x^2+ax-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{2}=-\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a}{4}+\dfrac{1}{2}$.

该函数开口向下，对称轴为 $x=\dfrac{a}{2}$.

（ⅰ）当 $\dfrac{a}{2}\in[0,1]$ 时，有 $0\leqslant a\leqslant2$.

$$f(x)_{\max}=\frac{a^2}{4}-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=2,$$

解得 $a=-2$ 或 $a=3$（全部舍去）.

（ⅱ）当 $\dfrac{a}{2}<0$ 时，有 $a<0$，此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递减. 则

$$f(x)_{\max}=f(0)=-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=2,$$

解得 $a=-6<0$.

（ⅲ）当 $\dfrac{a}{2}>1$ 时，有 $a>2$，此时 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增. 则

$$f(x)_{\max}=f(1)=-1+a-\frac{a}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}=2,$$

解得 $a=\dfrac{10}{3}>2$.

综上所述，可得 $a=-6$ 或 $\dfrac{10}{3}$.

3. 设存在实数 λ 满足题意，则

$$F(x)=g(x)-\lambda f(x)=x^4+2x^2+2-\lambda(x^2+1)=x^4+(2-\lambda)x^2+(2-\lambda).$$

设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则

$$F(x_1)-F(x_2)=x_1^4+(2-\lambda)x_1^2+(2-\lambda)-[x_2^4+(2-\lambda)x_2^2+(2-\lambda)]$$
$$=(x_1^2+x_2^2)(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(2-\lambda)(x_1+x_2)(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)(x_1+x_2)[x_1^2+x_2^2+2-\lambda].$$

当 $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ 时，有 $x_1-x_2<0,x_1+x_2<0$.

因为 $F(x_1)-F(x_2)>0$，所以 $x_1^2+x_2^2+2-\lambda>0$，解得 $\lambda<x_1^2+x_2^2+2$.

而 $x_1^2+x_2^2+2>4$，所以 $\lambda\leqslant4$.

同理，当 $x_1,x_2\in(-1,0)$ 时，有 $\lambda>x_1^2+x_2^2+2$. 而 $x_1^2+x_2^2+2<4$，所以 $\lambda\geqslant4$.

综合得 $\lambda=4$.

4. 设 t 小时后水量为 y 吨，则

$$y=400+mt-120\sqrt{6t}=400+80t-120\sqrt{6t}\quad(0\leqslant t\leqslant24).$$

设 $x=\sqrt{6t}(0\leqslant x\leqslant12)$，则 $t=\frac{x^2}{6}$. 所以

$$y=400+80\cdot\frac{x^2}{6}-120x=\frac{40}{3}x^2-120x+400=\frac{40}{3}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+130.$$

当 $x=\frac{9}{2}$，即 $t=\frac{27}{8}$(小时)时，y 有最小值 130.

所以 $\frac{27}{8}$ 小时后蓄水池中的水量最少.

5. 设日销售额为 $S(x)$，依题意得，

$$S(x)=f(t)g(t)$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{1}{2}t+11\right)\left(-\frac{1}{3}t+\frac{43}{3}\right) & (0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N})\\ (-t+41)\left(-\frac{1}{3}t+\frac{43}{3}\right) & (20\leqslant t\leqslant40,t\in\mathbf{N})\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-\frac{1}{6}t^2+\frac{7}{2}t+\frac{473}{3} & (0\leqslant t<20,t\in\mathbf{N}),\\ \frac{1}{3}t^2-28t+\frac{1763}{3} & (20\leqslant t\leqslant40,t\in\mathbf{N}).\end{cases}$$

当 $0\leqslant t<20$ 时，$S_{max}=S(10)=S(11)=-\frac{1}{6}\times10^2+\frac{7}{2}\times10+\frac{473}{3}=176$.

当 $20\leqslant t\leqslant40$ 时，$S_{max}=S(20)=\frac{1}{3}\times(20)^2-28\times20=161<176$.

所以当 $t=10$ 或 11 时，日销售额最大，最大值为 176.

思考与实践

1. 例如：狄利克雷函数 $D(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ 为有理数}),\\ 0 & (x\text{ 为无理数}),\end{cases}$ 这个函数是难以用简单的包含自变量的解析式表达的，更不好列表表出，更画不出图象.

2. 当 $|a-b|$ 很小时，对 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 的值，可预测为 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$.

例如，当 $a=2001,b=2003$ 时，$f(2001)=3.50,f(2003)=3.90$，所以

$$f(2002)=\frac{3.50+3.90}{2}=3.70.$$

3. (a)为供应曲线,(b)为需求曲线.

4. 自由落体运动中位移与时间 t 的关系是 $S=\frac{1}{2}gt^2$,定义域为$[0,+\infty)$,值域$[0,+\infty)$.

第3章 指数函数、对数函数、幂函数

一、教育价值

在这一章中，学生将学习指数函数、对数函数、幂函数等具体的基本初等函数的概念、图象、性质及简单应用. 本章突出了指数函数、对数函数、幂函数的实际背景和应用；通过丰富的实例引入数学知识，让学生了解函数模型建立的实际背景，感受运用函数概念建立模型的过程和方法，体会指数函数、对数函数、幂函数是重要的函数模型；引导学生初步运用函数思想理解和处理现实生活和社会中的简单问题，经历探索、解决问题的过程，体会数学的应用价值.

学生在学习本章基础知识的同时，进一步学习与运用数形结合、分类讨论、等价转化及函数思想等重要的数学思想方法，如根据指数函数与对数函数的图象观察并归纳其性质（数形结合）；分底数 $a>1$ 与 $0<a<1$ 两种情况解决底数含参数 a 的指数函数或对数函数问题（分类讨论）；通过指数式与对数式的互化解题（等价转化）；构造函数解决应用问题（函数思想）等. 本章学习的知识，特别是其中包含的数学思想方法，是今后进一步学习其他数学内容的基础.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)理解有理指数幂的含义，了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算.

(2)通过具体实例，了解指数函数模型的实际背景.

(3)理解指数函数的概念和意义，能借助计算器或计算机画出具体指数函数的图象，探索并理解指数函数的单调性与特殊点.

(4)在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数是一类重要的函数模型.

(5)理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数；通过阅读材料，了解对数的发现历史以及对简化运算的作用.

(6)通过具体实例，直观了解对数函数模型所刻画的数量关系，初步理解对数函数的概念，体会对数函数是一类重要的函数模型. 能借助计算器或计算机画出具体对数函数的图象，探索并了解对数函数的单调性与特殊点.

(7)知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数（$a>0$，且 $a\neq1$）.

(8)了解幂函数的概念；结合函数 $y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$，$y=\frac{1}{x}$，$y=\frac{1}{x^2}$ 的图象，了解它们的变化情况.

(9)利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数的增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同类型函数增长的含义.

2. 过程与方法

(1)指数幂的教学，在回顾整数指数幂的概念及其运算性质的基础上，引入有理指数幂及

其运算性质，以及实数指数幂的意义及其运算性质，进一步体会“用有理数逼近无理数”的思想，并且可以让学生利用计算器或计算机进行实际操作，感受“逼近”过程.

(2)从现实世界中蕴涵的一些数学模型抽象出指数函数、对数函数、幂函数的概念，使学生学会用数学的思考方式解决问题、认识世界.

(3)借助图象，引导学生探索、理解指数函数、对数函数、幂函数的性质，感受数形结合的思想.

(4)简单运用指数函数、对数函数、幂函数的性质解决实际问题，有助于学生认识数学的应用价值，增强应用意识，形成解决简单实际应用问题的能力.

(5)鼓励学生使用现代技术手段比较指数函数、对数函数以及幂函数的增长差异，以取得更多的时间和精力去探索和发现数学的规律，培养创新精神和实践能力.

3. 情感、态度与价值观

(1)提高学生学习数学的兴趣，树立学好数学的信心，形成锲而不舍的钻研精神和科学态度.

(2)引导学生通过网络搜集资料，研究数学的文化，体会数学的人文价值.

(3)帮助学生形成一定的数学视野，逐步认识数学的科学价值、应用价值和文化价值，形成批判性的思维习惯，崇尚数学的理性精神，体会数学的美学意义，从而进一步树立辩证唯物主义和历史唯物主义世界观.

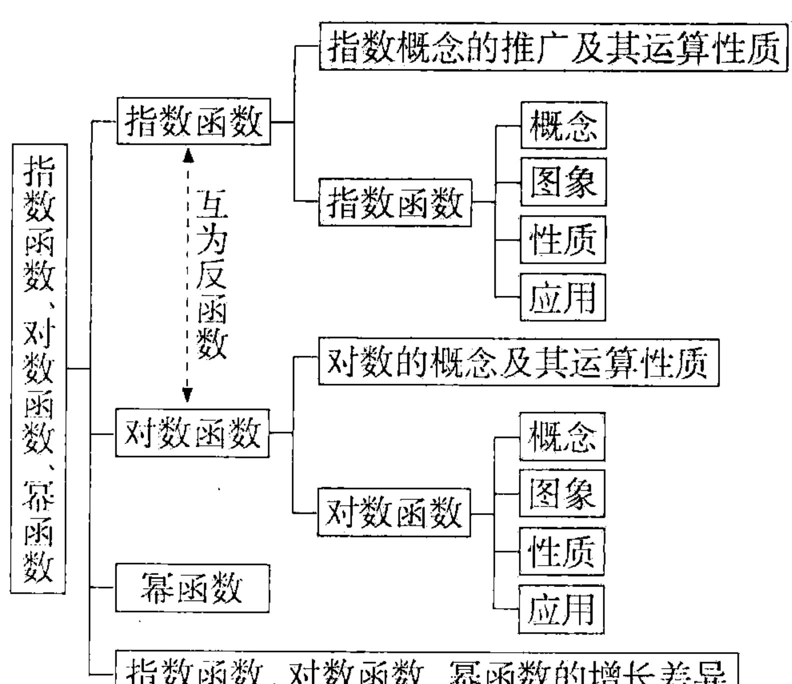
三、教材结构

本章把知识定位在“学生通过实例，学习指数函数、对数函数、幂函数的概念、图象、性质，并能简单应用”这一主干内容上. 在内容展开上突出主干.

本章是函数及其基本性质的后续，学生将学习指数函数、对数函数、幂函数等具体的基本初等函数；结合实际问题，感受运用函数概念建立模型的过程和方法；体会函数在数学和其他学科中的重要性；初步运用函数思想理解和处理现实生活和社会中的简单问题.

本章学习的重点是分数指数幂与对数的概念和运算性质，指数式与对数式的等价转化，指数函数与对数函数的定义、图象和性质；难点是根式与对数的计算，函数知识的应用.

本章内容结构框图如下：



四、课时分配

本章教学时间约需 11 课时，具体分配如下：(仅供参考)

3.1 指数函数	
3.1.1 指数概念的推广及其运算性质	约 2 课时
3.1.2 指数函数	约 2 课时
3.2 对数函数	
3.2.1 对数的概念及其运算性质	约 2 课时
3.2.2 对数函数	约 2 课时
3.3 幂函数	约 2 课时
3.4 指数函数、对数函数、幂函数的增长差异	约 1 课时

五、内容分析

3.1 指数函数

3.1.1 指数概念的推广及其运算性质

1. 内容概述及基本要求

(1)在回顾整数指数幂(正整数指数幂，零指数、负整数指数幂)的意义及运算性质的基础上，引入有理指数幂及其运算性质.

(2)通过具体实例了解实数指数幂的意义，掌握幂的运算性质. 让学生体会“用有理数逼近无理数”的思想，利用计算器或计算机进行实际操作，感受“逼近”过程.

2. 重难点分析

重点是分数指数幂的概念及运算性质；难点是根式的概念、分数指数幂的概念、实数指数幂的意义.

3. 教学建议

(1)指数幂的教学，应在回顾整数指数幂的概念及其运算性质的基础上，引入有理指数幂的概念及其运算性质.

(2)安排根式内容，是为学习分数指数幂做准备. 根据 n 次方根的意义，可得$(\sqrt[n]{a})^n=a$.

但应当注意，$\sqrt[n]{a^n}$不一定等于a.

当 n 是奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；

当 n 是偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0, \\ -a, & a<0. \end{cases}$

例如，$\sqrt[4]{(-2)^4}=2$，$\sqrt[5]{(-2)^5}=-2$.

(3)利用有理指数幂的运算法则进行计算时，要注意 $a>0$ 这一条件，避免出现类似 $\sqrt[4]{(-2)^{12}}=(-2)^{\frac{12}{4}}=(-2)^3=-8$ 的错误.

(4)通过实例，了解实数指数幂的意义及其运算性质，进一步体会“用有理数逼近无理数”的思想. 可以让学生利用计算器或计算机进行实际操作，感受“逼近”过程.

(5)例题的功能及其处理：

例 1 的目的是运用根式的概念和运算性质求值.

例 2 的目的是运用分数指数幂的概念和运算性质求值.

例 3 的目的是利用分数指数幂化简.

3.1.2 指数函数

1. 内容概述及基本要求

(1)通过细胞的分裂、森林木材储量、考古中所用的^{14}C的衰减等一串实际问题,让学生了解指数函数模型的实际背景,抽象出指数函数的概念.引导学生经历从具体实例抽象出数学概念的过程,激发学生对数学学习的兴趣,理解指数函数的概念和实际意义.

(2)鼓励学生借助计算器或计算机画出具体指数函数 $y=2^x$,$y=10^x$,$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图象,引导学生借助图象,探索、比较具体的指数函数的变化规律,并归纳出指数函数的一般性质(单调性与特殊点).

(3)通过几个例子,让学生进一步理解指数函数的概念,掌握指数函数的图象和性质,在解决简单实际问题的过程中,体会指数函数是一类重要的函数模型.

2. 重难点分析

重点是指数函数的定义、图象及性质;难点是底数 $a>1$,$0<a<1$ 时指数函数的图象、性质的不同.

如何处理:引导学生自主探索、动手实践,画出具体指数函数的图象.鼓励学生观察图象,分析特点,借助直观图形进行思考,归纳出底数 $a>1$,$0<a<1$ 时指数函数的图象的特点,掌握指数函数的性质,从而提高学生观察归纳的能力和看图用图的意识.

3. 教学建议

(1)教学中,在建立指数函数的概念时,通过丰富的实例来说明建立这一概念的必要性和实际背景,让学生感到知识的发展是水到渠成而不是强加于人,帮助学生认识到数学与我有关,与实际生活有关,使学生主动学习.在教学中引导学生经历从实际问题中抽象出数学概念的过程,提高学生分析数学问题的能力.

(2)一般地,函数 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)叫做指数函数,其中 x 是自变量.

在指数函数的概念中,规定底数 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的理由:

如果 $a=0$,$\begin{cases}\text{当 } x>0 \text{ 时},a^x \text{ 恒等于 } 0,\\ \text{当 } x\leqslant0 \text{ 时},a^x \text{ 没有意义};\end{cases}$

如果 $a<0$,比如 $y=(-2)^x$,这时对于 $x=\frac{1}{2}$,$x=\frac{1}{4}$,……在实数范围内函数值不存在.

如果 $a=1$,$y=1^x=1$,是一个常数,没有研究的必要.

所以,为了避免以上各种情况,我们规定底数 $a>0$ 且 $a\neq1$.

(3)由于我们将指数幂的概念推广到了实数指数幂,所以当底数 $a>0$ 且 $a\neq1$ 时,$x\in\mathbf{R}$,即定义域是 $\mathbf{R}$.

(4)函数 $y=2\cdot3^x$ 是指数函数吗?

要注意,指数函数的解析式 $y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq1$)中,a^x 的系数是 1.

有些函数貌似指数函数,实际上却不是.如 $y=3^x+2$,它可以看成是指数函数和常数经过算术运算得到的基本初等函数.

有些函数看起来不像指数函数,实际上却是,如 $y=3^{-x}$,因为它可以化为 $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

(5)注意鼓励学生利用计算器、计算机画出指数函数的图象，借助图形直观探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质.

从图象特征抽象出指数函数的性质，并加以对照.

图象特征		函数性质
都在 x 轴的上方		函数值恒大于零
经过点(0,1)		当 $x=0$ 时，$y=1$
$a>1$	图象在第一象限部分的点的纵坐标都大于 1	当 $x>0$ 时，$y>1$
	图象在第二象限部分的点的纵坐标都小于 1	当 $x<0$ 时，$0<y<1$
$0<a<1$	图象在第一象限部分的点的纵坐标都小于 1	当 $x>0$ 时，$0<y<1$
	图象在第二象限部分的点的纵坐标都大于 1	当 $x<0$ 时，$y>1$
$a>1$	图象上升	增函数
$0<a<1$	图象下降	减函数

(6)例题的功能及其处理：

例 1 的目的是通过药物在人体内残留量的变化呈指数衰减这一实例，让学生熟悉指数函数图象的特征，体会指数函数是一类重要的函数模型.

例 2 的目的是通过利用指数函数的性质比较两个数的大小，让学生进一步掌握指数函数的性质.

①$2^{0.11}$，$2^{0.12}$两个数都是以 2 为底，由指数函数 $y=2^x$ 的单调性可比较其大小.

②$0.6^{0.4}$，1 两个数中的 $1=0.6^0$. 再由指数函数 $y=0.6^x$ 的单调性可比较其大小. 本题可使学生充分注意底数 $a>1$，$0<a<1$ 时指数函数的图象、性质的不同.

③$1.7^{0.8}$，$0.9^{2.8}$两个数都先与 1 比较大小，再得出两个数的大小关系. 注意体会③的解题依据.

例题的解答要引导学生去分析、发现解法，这样有利于学生尽快掌握函数的性质，掌握比较两个数大小的方法，让学生在观察、发现、解决问题的过程中，建立起学好函数、学好数学的信心.

例 3 的目的是根据指数函数的图象，比较底的大小，体会指数函数图象的本质特征，加强几何直观，重视图形在数学学习中的作用，鼓励学生借助直观进行思考. 同时此题和第 56 页旁批提出的问题相呼应.

例 4 的目的是让学生在计算我国艾滋病病毒感染人数这一简单实际问题的过程中，体会建立指数函数模型的过程，并认识到指数函数是一类重要的函数模型. 这一题的计算结果，还可以让学生对指数效应有一个直观的认识，同时也为以后将要提到的指数效应埋下伏笔.

例 5 的目的还是让学生在解决简单实际问题的过程中，体会指数函数型是一类重要的函数模型. 同时这一问题还照应了章头图中的悬链线.

(7)旁批、交流话题、信息技术链接及课件的教学处理：

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象与 $y=2^x$ 的图象有什么对称关系？

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的图象与 $y=2^{x}$ 的图象具有的对称关系，可制作相关内容的教学辅助课件.

提倡用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容，引导学生用计算机来学习、探索和发现，增进学生的探究性.

3.2 对数函数

3.2.1 对数的概念及其运算性质

1. 内容概述及基本要求

(1)通过直观发现计算器面板上的"log"、"ln"符号，再结合上一节谈到的艾滋病病毒感染人数的增长问题，提出问题，并归结为如何由 $1.3^{x}=2$ 求 x. 式子 $1.3^{x}=2$ 是一个已知幂和底数的值，求指数的问题，引出对数这一话题，给出对数的概念.

(2)理解对数的概念，掌握指数式与对数式之间的等价关系，对数恒等式. 由指数的运算性质及指数式与对数式之间的等价关系得出对数的运算性质.

(3)推导出换底公式，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数.

(4)通过阅读材料，了解对数的发现历史以及对简化运算的作用.

2. 重难点分析

重点是对数的概念及其运算性质；难点是对数的概念.

如何处理：让学生从对数式与指数式的互化中体会对数的运算性质与指数的运算性质的联系. 对数是指数的另一种表达形式，对数运算性质也是指数运算的另一种表现形式. 掌握对数的概念及其运算性质.

3. 教学建议

(1)教学中，结合上一节例题 4 谈到的艾滋病病毒感染人数的增长问题，提出问题"如果我们想知道在不加以控制的条件下，经过多少年后我国艾滋病病毒感染人数增加一倍"，并归结为如何由 $1.3^{x}=2$ 求 x. 对于式子 $a^{x}=N(a>0,a\neq1,N>0)$，是一个已知幂 N 和底数 a 的值，求指数 x 的问题，由指数函数的单调性，我们知道方程有唯一的解，从而引出对数的概念. 以此帮助学生认识到数学与实际生活有关，使学生主动学习.

(2)给出对数的概念，一般地，如果 $a(a>0,a\neq1)$ 的 b 次幂等于 N，即 $a^{b}=N$，那么数 b 就叫做以 a 为底 N 的对数，记为

$$\log_{a}N=b,$$

其中 a 叫做底数，N 叫做真数. 引导学生得出：

$$a^{b}=N\Longleftrightarrow\log_{a}N=b$$

底数 指数 幂 底数 真数 对数

如果把 $a^{b}=N$ 中的 b 写成 $\log_{a}N$，就有

$$a^{\log_{a}N}=N\quad(a>0,a\neq1,N>0),$$

称这个式子叫做对数恒等式.

(3)在对数的定义中，规定底数 $a>0$ 且 $a\neq1$ 的理由：

如果 $a=0$，$\begin{cases}\text{当 } N\neq0 \text{ 时，} b \text{ 不存在，如 } \log_{0}2 \text{ 不存在，}\\ \text{当 } N=0 \text{ 时，} b \text{ 可以为任意数，不唯一，即 } \log_{0}0 \text{ 有无数个值；}\end{cases}$

如果 $a<0$，则 N 为某些值时，b 的值不存在. 如 $b=\log_{-3}9$ 不存在；

如果 $a=1$，$\begin{cases}\text{当 } N\neq 1 \text{ 时，} b \text{ 不存在，如 } \log_1 2 \text{ 不存在，}\\ \text{当 } N=1 \text{ 时，} b \text{ 可以为任意数，不唯一，即 } \log_1 1 \text{ 有无数个值.}\end{cases}$

所以，为了避免以上各种情况，我们规定底数 $a>0$ 且 $a\neq 1$.

(4)由于在实数范围内，正数的任何次幂都是正数，因而 $a^b=N$ 中 N 总是正数. 要特别强调的是：零和负数没有对数.

(5)对数运算是指数运算的逆运算，可由指数的运算性质及指数式与对数式之间的等价关系得出对数的运算性质.

如果 $a>0, a\neq 1, M>0, N>0$，那么有：

(ⅰ) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$；

(ⅱ) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$；

(ⅲ) $\log_a M^n=n\log_a M \quad (n\in \mathbf{R})$.

说明几点：

1°用文字语言表述以上三条性质：

(ⅰ)正因数的积的对数，等于同一底数各因数的对数的和(即积的对数等于对数的和).

(ⅱ)两个正数的商的对数，等于同一底数的被除数的对数减去除数的对数(即商的对数等于对数的差).

(ⅲ)正数的幂的对数，等于同一底数的幂的底数的对数乘以幂指数(即 M 的 n 次方的对数等于 M 对数的 n 倍).

2°有时可逆向运用公式，如 $\log_{10}5+\log_{10}2=\log_{10}10=1$.

3°注意真数的取值范围必须是 $(0,+\infty)$.

如 $\log_2(-3)(-5)=\log_2(-3)+\log_2(-5)$，$\log_{10}(-10)^2=2\log_{10}(-10)$ 是不成立的.

4°对公式容易错误记忆，要特别注意：

$\log_a(M\pm N)\neq \log_a M\pm \log_a N$；

$\log_a(MN)\neq \log_a M\cdot \log_a N$；

$\log_a \dfrac{M}{N}\neq \dfrac{\log_a M}{\log_a N}$.

(6)例题的功能及其处理：

例 1 的目的是通过将所给的指数式化为对数式，掌握指数式与对数式之间的等价关系，熟悉对数的定义.

例 2 的目的是通过将所给的对数式化为指数式，掌握指数式与对数式之间的等价关系，熟悉对数的定义.

例 3 的目的是求对数等式中的未知数，强化指数式与对数式之间的等价关系，熟悉对数的定义.

例 4 的目的是简单运用对数运算性质，让学生熟悉、掌握对数的运算性质.

例 5 的目的是简单运用对数运算性质求值，让学生掌握对数的运算性质.

例 6 的目的是推导出换底公式. 对数换底公式：

$$\log_b N=\frac{\log_a N}{\log_a b} \quad (a>0, a\neq 1, b>0, b\neq 1, N>0).$$

由换底公式可得：

$$\ln N=\frac{\lg N}{\lg e}\approx\frac{\lg N}{0.4343}\approx 2.303\lg N.$$

此式是自然对数和常用对数的互换公式.

由换底公式还可以推出一些常用的结论：

①$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$或 $\log_a b\cdot\log_b a=1\quad(a>0,a\neq1,b>0,b\neq1)$；

②$\log_{a^n}b^m=\dfrac{m}{n}\log_a b\quad(a>0,a\neq1,b>0)$；

③$\log_{a^n}b^n=\log_a b\quad(a>0,a\neq1,b>0)$；

④$\log_{a^n}a^m=\dfrac{m}{n}\quad(a>0,a\neq1)$.

(7)旁批、交流话题、信息技术链接及课件的教学处理：

在“由对数的定义可以证明 $\log_a 1=0$、$\log_a a=1(a>0,a\neq1)$”处的旁批：你能证明吗？可增进学生的探究性.

提倡用信息技术来呈现以往教学中难以呈现的课程内容；引导学生用计算机来学习、探索和发现，增进学生的探究性.

3.2.2 对数函数

1. 内容概述及基本要求

(1)由一个实际问题引出对数函数的概念. 在研究指数函数时，我们讨论过考古中常用的 ^{14}C 的残留量同原含量之比 y 与年数 x 具有关系 $y=a^x$，如何根据 y 值来求 x？从而引出对数函数的概念，让学生直观了解对数函数模型所刻画的数量关系.

(2)鼓励学生借助计算器或计算机画出具体的对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$的图象，引导学生借助图象直观归纳出对数函数的一般性质(单调性与特殊点).

(3)通过几个例子，让学生进一步理解对数函数的概念，掌握对数函数的图象和性质，在解决简单实际问题的过程中，体会对数函数是一类重要的函数模型.

(4)鼓励学生运用现代教育技术学习、探索和解决问题. 例如，利用计算器、计算机画出几个具体对数函数的图象，探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质.

(5)反函数的处理，只以具体函数为例进行解释和直观理解，不一般地讨论反函数的定义，也不要求求已知函数的反函数. 知道指数函数 $y=a^x$ 与对数函数 $y=\log_a x$ 互为反函数($a>0$，$a\neq1$).

2. 重难点分析

重点是对数函数的图象、性质；难点是底数 $a>1$，$0<a<1$ 时对数函数的图象、性质的不同.

如何处理：引导学生自主探索、动手实践，画出具体对数函数的图象，鼓励学生借助直观图形进行思考，归纳出底数 $a>1$，$0<a<1$ 时对数函数的性质.

3. 教学建议

(1)对四个对数函数 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{2}}x$，$y=\log_{\frac{1}{10}}x$ 的图象的认识.

图象特征与函数性质：

图象特征	函数性质
图象都位于 y 轴右侧	定义域：$\mathbf{R}^+$，值域：$\mathbf{R}$
图象都过点(1,0)	$x=1$ 时，$y=0$，即 $\log_a 1=0$
$y=\log_2 x$，$y=\lg x$ 当 $x>1$ 时，图象在 x 轴上方，当 $0<x<1$ 时，图象在 x 轴下方； $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$\log_{\frac{1}{10}} x$ 与上述情况刚好相反	当 $a>1$ 时，若 $x>1$，则 $y>0$，若 $0<x<1$，则 $y<0$； 当 $0<a<1$ 时，若 $x>0$，则 $y<0$，若 $0<x<1$，则 $y>0$
$y=\log_2 x$，$y=\lg x$ 从左向右图象上升； $y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$\log_{\frac{1}{10}} x$ 从左向右图象下降	$a>1$ 时，$y=\log_a x$ 是增函数； $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 是减函数

(2)对图象的进一步的认识(通过四个函数图象的相互关系的比较)：

①所有对数函数的图象都过点(1,0)，但是 $y=\log_2 x$ 与 $y=\lg x$ 在点(1,0)曲线是交叉的，即当 $x>0$ 时，$y=\log_2 x$ 的图象在 $y=\lg x$ 的图象上方；而 $0<x<1$ 时，$y=\log_2 x$ 的图象在 $y=\lg x$ 的图象的下方. 故有：$\log_2 1.5>\lg 1.5$，$\log_2 0.1<\lg 0.1$.

(2) $y=\log_2 x$ 的图象与 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象关于 x 轴对称.

(3)通过 $y=\log_2 x$，$y=\lg x$，$y=\log_{\frac{1}{2}} x$，$y=\log_{\frac{1}{10}} x$ 四个函数图象，可以做出任意一个对数函数的示意图，如作 $y=\log_3 x$ 的图象，它一定位于 $y=\log_2 x$ 和 $y=\lg x$ 两个图象的中间，且过点(1,0)，$x>0$ 时，在 $y=\lg x$ 的上方，而位于 $y=\log_2 x$ 的下方，$0<x<1$ 时，刚好相反，则由对称性，可知 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$ 的示意图.

因而通过课本上的四个函数的图象进一步认识无限个函数的图象.

(3)反函数的处理，只以具体函数为例进行解释和直观理解，不一般地讨论反函数的定义，也不要求求已知函数的反函数.

(4)例题的功能及其处理：

例 1 的目的是通过比较对数与 0 的大小关系，熟悉对数函数的图象、性质.

例 2 的目的是通过证明函数 $y=\log_a x(a>1)$ 在定义域上是增函数，掌握指数式与对数式之间的等价关系，以及指数函数的性质.

例 3 的目的是让学生在解决简单实际问题——世界人口增长问题的过程中，体会对数函数是一类重要的函数模型.

例 4 的目的是家用电器使用的氟化物的释放影响臭氧的含量，计算臭氧的含量，使学生在解决简单实际问题的过程中，体验指数函数、对数函数与现实世界的密切联系及其在刻画现实问题中的作用.

(5)旁批、交流话题、信息技术链接及课件的教学处理：

利用计算器、计算机画出几个具体对数函数的图象，探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质. 引导学生用计算机来学习、探索和发现以往教学中难以呈现的课程内容.

3.3 幂函数

1. 内容概述及基本要求

(1)通过开普勒关于行星运动的第三定律这一实例，引出幂函数的概念. 一般地，我们将函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}$，$\alpha$ 是常数)叫做幂函数.

结合函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=x^{\frac{1}{2}}$ 的图象，研究它们的定义域、特殊点、单调区间、奇偶性，从而归纳出幂函数的一般性质.

2. 重难点分析

重点是幂函数的概念、图象、性质；难点是幂函数的图象、性质.

如何处理：结合具体幂函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x^2}$ 的图象，研究幂函数的性质.

3. 教学建议

(1)教学中，在建立幂函数的概念时，通过开普勒关于行星运动的第三定律这一实例，引出幂函数的概念. 这样让学生感到知识的发展与实际生活有关，使学生主动学习.

(2)一般地，我们将函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}, \alpha$ 是常数)叫做幂函数. α 可以是任何实数，本书我们仅研究 α 是有理数的情形.

由幂函数的定义知道，函数 $y=2x^2$、$y=2x^2+2$ 不是幂函数，它们不符合幂函数的定义. 它们可以看成是幂函数和常数经过算术运算得到的基本初等函数.

(3)通过分析具体幂函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x^2}$ 的定义域，提醒学生注意幂函数 $y=x^\alpha(\alpha\in\mathbf{R}, \alpha$ 是常数)的定义域是使 x^α 有意义的实数的集合.

(4)鼓励学生先画出幂函数 $y=x, y=x^2, y=x^3, y=\frac{1}{x}, y=\frac{1}{x^2}$ 的图象，再与课本提供的图形对照，借助图形直观探索、比较它们的变化规律，研究函数的性质.

(5)例题的功能及其处理：

例 1 的目的是在解决估计塞德娜运行轨道的长半轴长这一简单实际问题的过程中，体会幂函数是一类重要的函数模型，本题与本节引入时的例子开普勒第三定律相呼应.

例 2 的目的是利用幂函数的性质比较两个数的大小.

例 3 的目的是利用幂函数的性质解决问题.

例 4 的目的是在解决简单实际问题(短跑成绩的世界记录)的过程中，体会幂函数是一类重要的函数模型. 本题有利于增强学生的应用意识，扩展学生的视野.

(6)旁批、交流话题、信息技术链接及课件的教学处理：

旁批 1 通过反思例 3 中具体幂函数在第一象限内的图象之间的关系，抽象出幂函数在第一象限内的图象之间的关系.

旁批 2 让学生画例 4 的草图，尽量增加操作性的题目.

3.4 指数函数、对数函数、幂函数的增长差异

1. 内容概述及基本要求

利用计算工具，比较指数函数、对数函数以及幂函数增长差异；结合实例体会直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义.

2. 重难点分析

重难点是体会指数函数、对数函数、幂函数的增长差异.

3. 教学建议

以 $y=2^x, y=\log_2 x, y=x^2$ 这几个具体的函数在 $x\in[5, +\infty)$ 时的情形为例，借助计算工

具，比较指数函数、对数函数及幂函数的增长差异. 发现 $y=2^x$ 的增长速度比 $y=x^2$ 大，$y=x^2$ 的增长速度比 $y=\log_2 x$ 大.

教学中应注意控制本内容的教学难度.

六、相关资源

1. 指数

指数是相同因子相乘的因子个数. 例如 $a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdots a}^{n\text{个}}$，$a$ 是底数，n 是指数，亦即正整数指数. 除了正整数指数外，指数概念亦被推广到分数指数、负数指数等一般指数.

指数的概念发展缓慢. 德国数学家史提非在 1544 年把等差数列 0，1，2，3，4，5，6，…的各项称为等比数列 1，2，4，8，16，32，64，…各对应项的 Exponent，意思是“代表人物”，后来便成为数学中的专用术语——指数.

最早使用正整数指数的是中国，当时主要用在音乐理论中.《淮南子·天文训》中把 3^{11}（即 177，147）称为“十一三之”，即 3 的 11 次幂. 更早的《管子》在《地员篇》也有“先主一而三次，四开以合九九”，即 1 先用 3 去乘，连乘四次得九九之数，即 $1\times3^4=9\times9=81$，指数概念已很明确.

分数指数最早出现在法国著名数学家奥力森的《比例算法》（1360 左右，但未发表）中，他把 $2^{1/2}$ 写成 $\boxed{\frac{1\cdot p}{2\cdot 2}}$ 或 $\frac{1}{2}2^p$.

负数指数则最早出现在 1655 年英国人瓦里斯的《无穷小算术》中，“平方数倒数的数列 $\frac{1}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{9}$，…各项的指数是 -2，平方根倒数的数列 $\frac{1}{\sqrt{1}}$，$\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\frac{1}{\sqrt{3}}$，…各项的指数是 $-\frac{1}{2}$”即使没有用指数符号，也已跨进了一大步.

最早使用虚数指数的是意大利人法格纳诺，他在 1719 年发现了 $\pi=3\ln\left(\frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^{\frac{\mathrm{i}}{2}}$ 的关系.

1679 年，莱布尼兹第一个使用变量指数，他写信给惠更斯讨论了如下的方程：$x^x-x=24$，$x^x+z^x=b$.

2. 对数简史

对数是中学初等数学中的重要内容，那么当初是谁首创“对数”这种高级运算的呢？在数学史上，一般认为对数的发明者是十六世纪末到十七世纪初的苏格兰数学家纳皮尔男爵.

在纳皮尔所处的年代，哥白尼的“太阳中心说”刚刚开始流行，这导致天文学成为当时的热门学科. 可是由于当时常量数学的局限性，天文学家们不得不花费很大的精力去计算那些繁杂的“天文数字”，因此浪费了若干年甚至毕生的宝贵时间. 纳皮尔也是当时的一位天文爱好者，为了简化计算，他多年潜心研究大数字的计算技术，终于独立发明了对数.

当然，纳皮尔所发明的对数，在形式上与现代数学中的对数理论并不完全一样. 在纳皮尔那个时代，“指数”这个概念还尚未形成，因此纳皮尔并不是像现行代数课本中那样，通过指数来引出对数，而是通过研究直线运动得出对数概念的.

那么，当时纳皮尔所发明的对数运算，是怎么一回事呢？在那个时代，计算多位数之间的乘积，还是十分复杂的运算，因此纳皮尔首先发明了一种计算特殊多位数之间乘积的方法. 让

我们来看看下面这个例子：

0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13、14…

1、2、4、8、16、32、64、128、256、512、1024、2048、4096、8192、16384…

这两行数字之间的关系是极为明确的：第一行表示 2 的指数，第二行表示 2 的对应幂. 如果我们要计算第二行中两个数的乘积，可以通过第一行对应数字的加和来实现.

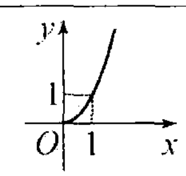
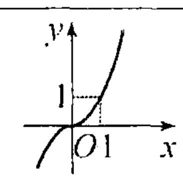
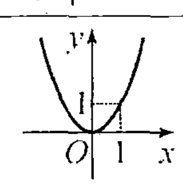
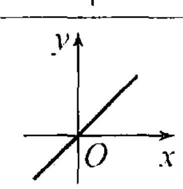
比如，计算 64×256 的值，就可以先查询第一行的对应数字：64 对应 6，256 对应 8；然后再把第一行中的对应数学加和起来：$6+8=14$；第一行中的 14，对应第二行中的 16384，所以有：$64\times256=16384$.

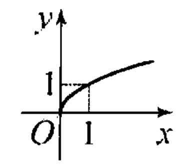
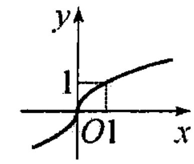
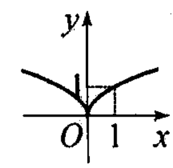
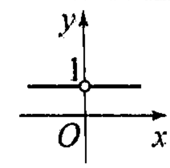
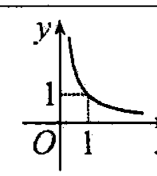
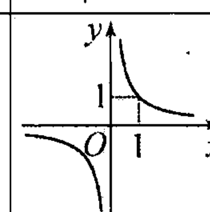
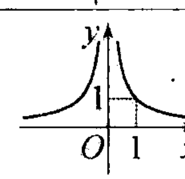
纳皮尔的这种计算方法，实际上已经完全是现代数学中“对数运算”的思想了. 回忆一下，我们在中学学习“运用对数简化计算”的时候，采用的不正是这种思路：计算两个复杂数的乘积，先查《常用对数表》，找到这两个复杂数的常用对数，再把这两个常用对数值相加，再通过《常用对数的反对数表》查出加和值的反对数值，就是原先那两个复杂数的乘积了. 这种“化乘除为加减”，从而达到简化计算的思路，不正是对数运算的明显特征.

经过多年的探索，纳皮尔男爵于 1614 年出版了他的名著《奇妙的对数定律说明书》，向世人公布了他的这项发明，并且解释了这项发明的特点.

所以，纳皮尔是当之无愧的“对数缔造者”，理应在数学史上享有这份殊荣. 伟大的导师恩格斯在他的著作《自然辩证法》中，曾经把笛卡尔的坐标、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为十七世纪的三大数学发明. 法国著名的数学家、天文学家拉普拉斯曾说：对数，可以缩短计算时间，“在实效上等于把天文学家的寿命延长了许多倍”.

3. $y=x^{\frac{q}{p}}$ 的性质

类别		定义域	值域	奇偶性	图象
$\frac{q}{p}>1$	p 偶 q 奇	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	非奇非偶	
	p 奇 q 奇	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数	
	p 奇 q 偶	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	偶函数	
$\frac{q}{p}=1$		$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数	

$0<\frac{q}{p}<1$	p 偶 q 奇	$[0,+\infty)$	$[0,+\infty)$	非奇非偶	
	p 奇 q 奇	$(-\infty,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	奇函数	
	p 奇 q 偶	$(-\infty,+\infty)$	$[0,+\infty)$	偶函数	
$\frac{q}{p}=0$		$\{x\mid x\neq 0\}$	$\{y\mid y=1\}$	偶函数	
$\frac{q}{p}<0$	p 偶 q 奇	$(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	非奇非偶	
	p 奇 q 奇	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	奇函数	
	p 奇 q 偶	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$	偶函数	

七、评价建议

1. 评价学生在学习指数幂、对数的概念及运算性质的过程中，在经历从具体实例抽象出数学概念的过程中，在借助计算器或计算机画出具体指数函数、对数函数、幂函数的图象的过程中，在借助直观图形探索、归纳出指数函数、对数函数、幂函数的性质的过程中，在简单运用指数函数、对数函数、幂函数的性质解决实际问题过程中的参与程度、思维特征、与同学们合作交流等情况. 评价应关注学生能否不断反思自己的数学学习过程，并改进学习方法. 评价应关注学生能否建立不同知识之间的联系，把握数学知识的结构体系.

2. 重视对学生能力的评价

在日常的数学学习，尤其是数学探索与数学建模活动中，是否具有问题意识，是否善于发现和提出问题，能否在解决问题的过程中，既能够独立思考，又能够与他人很好地交流与合作. 在评价中，要注意肯定学生在数学学习中的发展和进步、特点和优点.

3. 数学学习评价贯穿数学学习的全过程，既要发挥评价的甄别与选拔功能，更要突出评价的激励与发展功能.

数学教学的评价应有利于营造良好的育人环境，有利于数学教与学活动过程的调控，有利于学生和教师的共同成长.

八、习题解答

练习(第 54 页)

1. $a^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{a^2}$； $a^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{a^3}$； $a^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$； $a^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$.

2. (1) $\sqrt[3]{x^2}=x^{\frac{2}{3}}$； (2) $\sqrt[4]{x^3}=x^{\frac{3}{4}}$； (3) $\sqrt[3]{(m-n)^2}=(m-n)^{\frac{2}{3}}$；

(4) $\frac{m^3}{\sqrt{m}}=\frac{m^3}{m^{\frac{1}{2}}}=m^{3-\frac{1}{2}}=m^{\frac{5}{2}}$.

3. (1) $0.064^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{0.064^{\frac{1}{3}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{0.064}}=\frac{1}{0.4}=2.5$；

(2) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=9$；

(3) $81^{0.75}=81^{\frac{3}{4}}=3^{4\times\frac{3}{4}}=3^3=27$；

(4) $(0.001)^{-\frac{2}{3}}=(0.1^3)^{-\frac{2}{3}}=0.1^{-2}=\frac{1}{0.1^2}=100$；

(5) $\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

4. (1) $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^0\right]^{-0.5}-7.5\times(\sqrt{4})^2+81^{0.25}=1-30+3=-26$；

(2) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-(0.27)^0+(0.125)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}-1+\frac{1}{0.5}=\frac{2}{3}-1+2=\frac{5}{3}$.

5. 4.7.

练习(第 60 页)

1. (1) $0.2^{0.11}>0.2^{0.12}$； (2) $8.1^3<8.1^4$；

(3) $0.01^{-0.1}>0.01^2$； (4) $3^{0.99}>0.99^3$.

2. (1) $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$； (2) $x\in[1,+\infty)$.

3. 2 年.

习题 3.1

1. (1) $m<n$； (2) $m<n$； (3) $m>n$； (4) $m>n$.

2. (1) $4.1^{\frac{2}{5}}<4.1^{\frac{3}{5}}$； (2) $0.7^{0.6}>0.7^{0.9}$； (3) $1.03^{2.6}<1.03^{3.4}$； (4) $0.9^{\frac{3}{4}}<1.2^{\frac{3}{4}}$.

3. (1)由题意，得 $x^2+x+2>x^2+2x$，解得 $x<2$.

所以 x 的取值范围是 $(-\infty,2)$.

(2)由题意，得 $x>1-x$，解得 $x>\frac{1}{2}$.

所以 x 的取值范围是 $(\frac{1}{2},+\infty)$.

4. 因为 $f(x)=\frac{2^x+1}{2^x-1}$，所以

$$f(-x)=\frac{2^{-x}+1}{2^{-x}-1}=\frac{1+2^x}{1-2^x}=-f(x).$$

5. 由 $Q=Q_0\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$，得

当 $t=4$ 时， $Q=Q_0\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{4}{2}}\approx 0.11Q_0$；

当 $t=8$ 时， $Q=Q_0\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{8}{2}}\approx 0.01Q_0$.

若漏服一次药，体内药仅剩 1%.

练习(第 25 页)

1. (1) $\log_2 4=2$； (2) $\log_2 32=5$； (3) $\log_2 \frac{1}{2}=-1$； (4) $\log_9 \frac{1}{3}=-\frac{1}{2}$.

2. (1) $3^2=9$； (2) $3^4=81$； (3) $e^0=1$； (4) $3^{-3}=\frac{1}{27}$.

3. (1) $\log_5 5=1$； (2) $\log_5 1=0$； (3) $\lg 1000=3$； (4) $\log_5 0.2=-1$.

练习(第 67 页)

1. (1) $\lg(x^2yz^3)=2\lg x+\lg y+3\lg z$； (2) $\lg\frac{x^2z^3}{y}=2\lg x+3\lg z-\lg y$；

(3) $\lg\frac{x^{\frac{1}{4}}}{y^3z^2}=\frac{1}{4}\lg x-3\lg y-2\lg z$； (4) $\lg\frac{x^5\sqrt{y}}{\sqrt[4]{z}}=5\lg x+\frac{1}{2}\lg y-\frac{1}{4}\lg z$.

2. (1) $\log_5 50-\log_5 2=\log_5 25=2$； (2) $\lg 100^2=4$；

(3) $\log_3 5+\log_3\frac{27}{5}=3$； (4) $\log_3(\log_3 27)=\log_3 3=1$.

3. (1) $\lg\sqrt{6}=\frac{1}{2}(\lg 2+\lg 3)=\frac{1}{2}(0.3010+0.4771)\approx 0.3891$；

(2) $\lg\frac{12}{25}=\lg\frac{48}{100}=\lg 48-2=\lg(3\times 2^4)-2=\lg 3+4\lg 2-2=-0.3189$.

练习(第 71 页)

1. (1) $\log_{0.5}0.6>0$； (2) $\log_{0.5}1.3<0$； (3) $\log_{7.8}1.01>0$.

2. (1) $x^2-1>0\Longleftrightarrow x^2>1\Longleftrightarrow x<-1$ 或 $x>1$.

所求函数的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2) $\begin{cases}x>0,\\ \log_{0.3}x\neq 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x>0,\\ x\neq 1.\end{cases}$

所求函数的定义域为 $(0,1)\cup(1,+\infty)$.

(3) $\begin{cases}x-1>0,\\ \log_{0.5}(x-1)\neq -2\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ x-1\neq 4\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x>1,\\ x\neq 5.\end{cases}$

所求函数的定义域为 $(1,5)\cup(5,+\infty)$.

(4) $\begin{cases}1-x>0,\\ \log_2(1-x)\geqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x<1,\\ 1-x\geqslant 1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x<1,\\ x\leqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow x\leqslant 0$.

所求函数的定义域为 $(-\infty,0]$.

3. (1) $2x-1>1\Longleftrightarrow x>1$.

所求不等式的解集为 $(1,+\infty)$.

(2) $4-x>7\Longleftrightarrow x<-3$.

所求不等式的解集为$(-\infty,-3)$.

(3)$\begin{cases}3x+1>0,\\5x+7>0,\\5x+7>3x+1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}3x+1>0,\\5x+7>3x+1\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{1}{3},\\x>-3\end{cases}\Longleftrightarrow x>-\dfrac{1}{3}$.

所求不等式的解集为$\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$.

$\boxed{\text{习题 3.2}}$

1. (1)$\log_3 27=x$；　(2)$\log_3 1=x$；　(3)$\log_4 2=x$；　(4)$\log_2 0.5=x$.

2. (1)$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-5}=32$；　(2)$2^8=256$；　(3)$10^{-3}=0.001$；　(4)$e^{2.303}=10$.

3. (1)$\log_a(x^3y^{-1}z^{-\frac{1}{2}})=3\log_a x-\log_a y-\dfrac{1}{2}\log_a z$；

(2)$\log_a\dfrac{x}{y^2z^3}=\log_a x-2\log_a y-3\log_a z$；

(3)$\log_a x^2\sqrt[4]{\dfrac{z^2}{y^2}}=2\log_a x+\dfrac{1}{2}\log_a z-\dfrac{1}{2}\log_a y$；

(4)$\log_a\dfrac{x^3y^2}{\sqrt[3]{xz^2}}=3\log_a x+2\log_a y-\dfrac{1}{3}\log_a x-\dfrac{2}{3}\log_a z=\dfrac{8}{3}\log_a x+2\log_a y-\dfrac{2}{3}\log_a z$.

4. (1)$\lg2+\lg5-7\log_3 1=\lg10-0=1$；

(2)$\lg14-2\lg\dfrac{7}{3}+\lg7-\lg18=\lg\dfrac{14\times7}{\left(\dfrac{7}{3}\right)^2\times18}=\lg\dfrac{14\times7}{7^2\times2}=\lg1=0$；

(3)$\dfrac{\lg243}{\lg9}=\dfrac{\lg3^5}{\lg3^2}=\dfrac{5}{2}$；

(4)$\dfrac{\lg\sqrt{27}+\lg8-3\lg\sqrt{10}}{\lg1.2}=\dfrac{\dfrac{3}{2}\lg3+3\lg2-\dfrac{3}{2}}{\lg1.2}=\dfrac{\dfrac{3}{2}(\lg3+2\lg2-1)}{\lg12-1}$

$$=\frac{\dfrac{3}{2}(\lg12-1)}{\lg12-1}=\frac{3}{2}.$$

5. $[-3,0]$.

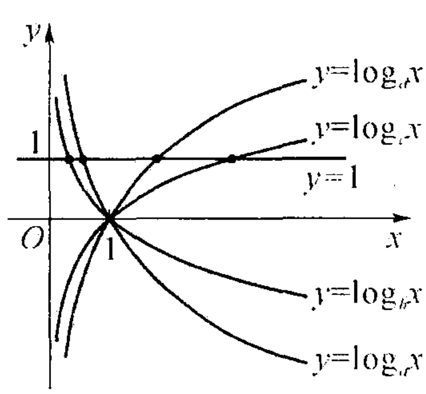
6. (1)因为a,b均大于0，且不等于1，所以

$$\log_a b=\frac{\lg b}{\lg a}=\frac{1}{\dfrac{\lg a}{\lg b}}=\frac{1}{\log_b a}.$$

(2)因为a,b,c均大于0，且不等于1，所以

$$(\log_a b)\cdot(\log_b c)\cdot(\log_c a)=\frac{\lg b}{\lg a}\cdot\frac{\lg c}{\lg b}\cdot\frac{\lg a}{\lg c}=1.$$

7. 如图，作直线$y=1$，则该直线与上述四个函数的图象均有一交点，分别为$(a,1)$，$(b,1)$，$(c,1)$，$(d,1)$. 因此，由交点位置的左右，可判断a,b,c,d的大小关系为$b<a<d<c$.



（第 7 题图）

8. 已知$v=2000\ln\left(1+\dfrac{M}{m}\right)$，将$v=12000$代入，得

$$12000=2000\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)$$

$$\Longleftrightarrow\ln\left(1+\frac{M}{m}\right)=6$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{M}{m}=e^6$$

$$\Longleftrightarrow\frac{M}{m}=e^6-1.$$

答：当燃料质量是火箭质量的 e^6-1 倍时，火箭的最大速度为 12km/s.

9. (1)当 $t=0$ 时，$y=p_0e^0=p_0$；

当 $t=5$ 时，$y=p_0e^{-5k}=0.9p_0\Longleftrightarrow e^{-5k}=0.9$；

当 $t=10$ 时，$y=p_0e^{-10k}=p_0\times0.9^2=0.81p_0$.

答：10 小时后还剩百分之八十一的污染物.

(2)设污染物减少 50% 需花 t 小时，则

$$p_0e^{-kt}=0.5p_0,$$

即 $e^{-kt}=0.5$. 又 $e^{-5k}=0.9$，故

$$e^{-kt}=e^{-5k\left(\frac{t}{5}\right)}=0.9^{\frac{t}{5}}=0.5,$$

解得 $t=5\log_{0.9}0.5\approx32.894$.

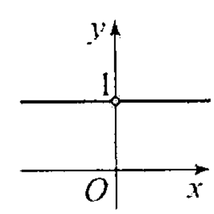
练习(第 76 页)

1. (1)$(-\infty,+\infty)$；　(2)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

(3)$(-\infty,+\infty)$；　(4)$[0,+\infty)$.

2. B.

3. 如图所示.



(第 3 题图)

习题 3.3

1. (1)$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；　(2)$(-\infty,+\infty)$；

(3)$x+5\neq0$，得 $x\neq-5$. 故所求定义域为 $(-\infty,-5)\cup(-5,+\infty)$.

2. (1)$4.9^3<5.1^3$；　(2)$16.5^{\frac{1}{2}}>16.04^{\frac{1}{2}}$；

(3)$0.45^{-0.6}>0.47^{-0.6}$；　(4)$25.1^{0.5}>25.01^{0.5}$.

3. (1)因为 $x>0,y>0$，所以 $f(xy)=(xy)^a=x^ay^a=f(x)f(y)$.

(2)$f\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{x}{y}\right)^a=\frac{x^a}{y^a}=\frac{f(x)}{f(y)}$.

4. (略)

复习题 A 组

1. (1)$a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{5}{6}}\div a^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{6}-\frac{5}{6}-\frac{3}{6}}=a^{-\frac{2}{3}}$；

(2)$\sqrt[5]{a^3b^4}=a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{4}{5}}$；

(3)$\frac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a^2}}{2a\sqrt[6]{a}}=\frac{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{2}{3}}}{2a\cdot a^{\frac{1}{6}}}=\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}a^0=\frac{1}{2}$；

(4)$x^2\sqrt[4]{\frac{z^3}{y^2}}=x^2y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{3}{4}}$.

2. (1)$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right]^{-\frac{1}{2}}-(-2)^{-4}+4^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{16}+\frac{1}{2}=\frac{23}{16}$；

(2)$\left[125^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+343^{\frac{1}{3}}\right]^{\frac{1}{2}}=(25+4+7)^{\frac{1}{2}}=36^{\frac{1}{2}}=6$；

(3)$2\times\sqrt{2}\times\sqrt[4]{2}\times\sqrt[8]{4}=2^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=2^2=4$；

(4)$\log_5 3+\log_5 \frac{1}{3}+3\log_2 4=0+6=6$；

(5)$1+\log_{0.6}\sqrt{0.36}+\lg 0.01=1+\log_{0.6}0.6+\lg 10^{-2}=1+1-2=0$；

(6)$\lg 0.001^3+\log_3(27\times 81)=-9+7=-2$.

3. (1)$(-\infty,+\infty)$；　　(2)$\left(\frac{3}{4},+\infty\right)$；

(3)$\begin{cases}3x-2>0,\\3x-2\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>\frac{2}{3},\\x\neq 1.\end{cases}$

则所求函数的定义域为$\left(\frac{2}{3},1\right)\cup(1,+\infty)$.

(4)$2^x\geqslant 1\Leftrightarrow x\geqslant 0$.

则所求函数的定义域为$[0,+\infty)$.

(5)$\begin{cases}x>0,\\\ln x\geqslant 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\geqslant 1\end{cases}\Leftrightarrow x\geqslant 1$.

则所求函数的定义域为$[1,+\infty)$.

(6)$\begin{cases}x>0,\\\ln x>-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0,\\x>\frac{1}{e}\end{cases}\Leftrightarrow x>\frac{1}{e}$.

则所求函数的定义域为$(\frac{1}{e},+\infty)$.

4. (1)因为a,b都大于0且不等于1,所以

$$\log_{a^n}b^n=\frac{\lg b^n}{\lg a^n}=\frac{n\lg b}{n\lg a}=\frac{\lg b}{\lg a}=\log_a b.$$

(2)因为a,b都大于0且不等于1,所以

$$\log_{a^m}b^n=\frac{\lg b^n}{\lg a^m}=\frac{n\lg b}{m\lg a}=\frac{n}{m}\log_a b.$$

5. 当$t=1$时,有$52=15+(62-15)e^{-k}$,解得$k=\ln\frac{47}{37}\approx 0.24$.

当$\theta=42$时,有$42=15+47\times e^{-kt_1}$.

将k值代入,得$42=15+47\times\left(\frac{37}{47}\right)^{t_1}$,解得$t_1\approx 2.317064985$.

当$\theta=22$时,同理有$22=15+47\times\left(\frac{37}{47}\right)^{t_2}$,解得$t_2\approx 7.959870953$.

当$\theta=15.1$时,亦有$15.1=15+47\times\left(\frac{37}{47}\right)^{t_3}$,解得$t_3\approx 25.71893447$.

物体不会冷却到12℃.

复习题B组

1. 由题意得 $x=\log_3 10^{-2}$，$y=\log_{0.03}10^{-2}$. 从而有

$$\frac{1}{x}=\log_{10^{-2}}3,\ \frac{1}{y}=\log_{10^{-2}}0.03.$$

故 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\log_{10^{-2}}3-\log_{10^{-2}}0.03=\log_{10^{-2}}10^2=-1.$

2. $$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{4b^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+a^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{4b^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+a^{\frac{2}{3}}}\div\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)$$

$$=a^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{1}{3}}-2b^{\frac{1}{3}})\div\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)=a^{\frac{2}{3}}.$$

3. 取 $x\in(-\infty,0)$，则 $-x\in(0,+\infty)$.

我们有 $f(-x)=-x\lg(-x)$.

又 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，故 $f(-x)=-f(x)$. 从而有

$$f(x)=-f(-x)=x\lg(-x).$$

4. (1)奇函数.

(2)任取 $x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{2^{x_1}-1}{2^{x_1}+1}-\frac{2^{x_2}-1}{2^{x_2}+1}=\frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(2^{x_1}+1)(2^{x_2}+1)}<0,$$

于是 $f(x_1)<f(x_2)$，所以 $f(x)$ 是增函数.

(3) $f(0)=0$.

由 $f(x^2-x)>0$，有 $f(x^2-x)>f(0)$. 又 $f(x)$ 是增函数，故 $x^2-x>0$.

所以 $x\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$.

5. $f(t)=at^2$；$g(t)=bt^3$；$h(t)=ab^t$.

思考与实践

（略）

第4章　函数的应用

一、教育价值

本章主要突出了函数与方程、不等式、算法等内容的联系以及函数模型的广泛应用. 通过本章的学习，引导学生不断地体验函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型. 结合实际问题，感受运用函数概念建立模型的过程和方法，体会函数在数学和其他学科中的重要性. 初步运用函数思想理解和处理现实生活和社会中的简单问题. 学生还将学习用函数的性质求方程的近似解，体会函数与方程的有机联系. 让学生通过现实生活中普遍使用的函数模型实例，去了解函数模型的广泛应用，这可以使学生在亲身经历上述过程中，更好地认识数学，认识数学的价值.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)结合二次函数的图象，判断一元二次方程根的存在性及根的个数，从而了解函数的零点与方程根的联系.

(2)能够根据具体函数的图象，借助计算器用二分法求相应方程的近似解，了解这种方法是求方程近似解的常用方法.

(3)通过收集一些社会生活中普遍使用的函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)的实例，了解函数模型的广泛应用.

2. 过程与方法

(1)通过本章的学习，使学生学会用二分法求方程近似解.

(2)通过一些实例，让学生进一步感受建立函数模型的过程与方法，学会初步运用函数思想解决现实生活中的一些简单问题.

3. 情感、态度与价值观

(1)通过学习利用函数的性质求方程的近似解，进一步体会函数与方程之间的有机联系，初步形成用函数观点处理问题的意识.

(2)通过一些实例，让学生进一步体会函数在数学和其他学科中的广泛应用，进一步认识到函数是描述客观世界变化规律的基本数学模型.

三、教材结构

本章把知识定位在“函数的应用”，试图通过本章的学习，让学生初步领略用函数去解决实际问题的方法，从而进一步加深对函数重要性的认识. 本章的章头语非常明确地提出了这一点，并指明了这一章的安排及学习任务. 特别强调，研究函数的目的之一，就是希望以它为工具去刻画变化规律，并能用它解决一些与我们生活密切相关的问题. 我们将在实际应用中扩展自

己的视野，也将在问题解决中增强自己认识世界的能力.

本章教材分为两节展开.

4.1节(函数与方程) 这部分内容完全是新增加的，在以往的教科书上均没有这块内容. 教材上通过考察一元二次方程、一元一次方程的根，导出了函数零点的概念，然后着重研究方程的根、相应函数的零点及相应函数图象与 x 轴交点的横坐标的关系. 这种相互之间的"转化"很重要，它为我们讨论方程根的分布，及求方程的近似解等问题开辟了道路.

教材上在引入零点概念，揭示"根"、"零点"、"图象与 x 轴交点的横坐标"之间的关系后，加强了知识间的联系. 具体体现在结合二次函数的图象，判断方程根的存在性及根的个数与分布，从而了解函数的零点与方程根之间的关系；类比可推导出方程组的解与函数图象的交点的关系. 根据具体函数的图象，能借助计算器用二分法求相应方程的近似解，为学习算法做准备.

4.2节(函数模型及其应用) 函数的应用是学习函数的一个重要方面，学生学习函数的应用，目的就是利用已有的函数知识分析问题和解决问题. 通过函数的应用这部分内容，对学生完善函数的思想、激发应用数学的意识、培养分析和解决问题的能力、增强进行实践的能力等，都有很大的帮助. 教材上在这部分举了五个例题，后面又附了阅读与讨论材料：从 SARS 的数学模型谈起，数学课题学习：数学建模(人口增长模型)，应该说是突出了函数模型的应用，突出了数学建模思想.

总之，本章教材的特点是通过具体问题的实例，培养学生的数学应用意识，在解决问题的过程中加深学生对函数概念的认识与理解.

四、课时分配

本章教学时间约需 8 课时，具体分配如下：(仅供参考)

4.1 函数与方程	
4.1.1 函数的零点与方程的根	约 2 课时
4.1.2 方程的近似解	约 2 课时
4.2 函数模型及其应用	约 4 课时

五、内容分析

章头语

教材在章头语中主要讲了三点：

(1)研究函数的目的之一，就是希望以它为工具来刻画变化规律，并用它来解决实际问题.

(2)当我们以函数的观点去认识方程时，就能得到判断方程根的分布、求方程的近似解的一些重要方法.

(3)在本章，我们将学会用二次函数去了解二次方程根的分布情况，掌握一种求方程的近似解的基本方法，初步领略用函数去解决实际问题的方法.

教学中应让学生明确本章的学习任务，初步了解本章的大致结构，从而激发学习兴趣，为进一步深入学习作好心理准备.

4.1 函数与方程

1. 内容概述及基本要求

本节分两小节，第1小节主要讲的是函数的零点与方程的根，第2小节主要讲的是方程的近似解. 在第1小节里，除讲了函数的零点与方程的根的概念及关系外，还特别讲了二次方程的根的分布问题；在第2小节里着重讲了求方程近似解的一种方法——二分法.

这一节主要是用函数观点来看待方程，沟通了函数、方程、不等式以及算法等内容. 教学中要使学生体会知识之间的联系，体会函数观点在方程中的应用.

本单元的教学要求是，结合二次函数的图象，了解函数的零点与方程的根的联系；会判断一元二次方程根的存在性及根的个数；能利用二次函数的图象讨论方程的根的分布；能根据具体函数的图象，借助计算器用二分法求相应方程的近似解.

2. 重难点分析

本单元的教学重点和难点是通过利用二次函数的图象来研究二次方程的根的分布及通过用“二分法”求方程的近似解，使学生体会函数的零点与方程根之间的联系，初步形成用函数观点处理问题的意识.

在利用“二分法”求方程的近似解的过程中，由于数值计算较为复杂，因此对获得给定精确度的近似解增加了困难，要解决这一困难，需要恰当地使用信息技术工具.

3. 教学建议

(1)教材注重从学生已有的基础(一元二次方程及其根的求法，一元二次函数及其图象与性质)出发，从具体(一元二次方程的根与对应的一元二次函数的图象与 x 轴的交点的横坐标之间的关系)到一般，揭示方程的根与对应函数的零点之间的关系. 在此基础上，再介绍求函数零点的近似值的“二分法”，并在总结“用二分法求函数零点的步骤”中渗透算法的思想，为学生后续学习算法埋下伏笔.

教学时，要遵循从具体到一般的认识过程，注意让学生通过具体实例的探究，归纳概括所发现的结论或规律，并用准确的数学语言表述出来.

(2)教科书中选取具体的方程，直观的图象来直接说明方程 $f(x)=0$ 的根就是使函数值为零的自变量 x 的值(即零点)，也就是函数图象与 x 轴的交点的横坐标. 教学中，这种关系的揭示需要多举例说明，也可给学生提供情景，让学生自己探究、归纳与陈述. 值得注意的是，并不是所有的函数都有零点. 在给出了函数的零点的概念之后，要让学生明确“方程的根”与“函数的零点”尽管有密切的联系，但不能将它们混为一谈. 之所以介绍通过求函数的零点求方程的根，是因为函数的图象和性质为理解函数的零点提供了直观认识，并为判断零点是否存在和求出零点提供了支持，这就使方程的求解与函数的变化形成联系，有利于分析问题的本质.

(3)教材在“函数的零点与方程的根”这一小节中举出了三个例题，例1是实际应用问题，这个问题是要求函数零点，可直接转化为求方程的根，进一步体会函数零点与方程的根之间的关系. 例2给出的是一个含有参数的二次方程的根的分布问题，教材中提供了两种解法，解法1是用不等式组来控制相应二次函数的图象的零点位置，难点是这个不等式组的建立与求解要等价，要控制住；解法2是将方程“=”左、右两边的代数式分别设为函数 $f(x)$，$g(x)$，而不像解法1那样，将“=”右边的项移至“=”左边，然后将“=”左边的代数式设为函数 $f(x)$，再通过函数的零点得出方程的根的情况. 然后利用方程的根与函数 $f(x)$，$g(x)$ 的图象的关系求解. 它们之间是什么关系呢?

一般来说，方程 $f(x)=g(x)$ 的根的个数等价于方程组 $\begin{cases} y=f(x), \\ y=g(x) \end{cases}$ 的解的个数，也等价于

函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=g(x)$ 的图象的交点的个数.

例 3 就是利用上述结论做的.

应该说这是函数的零点与方程根的关系的深化与推广，当然也是函数的应用，是利用函数图象来研究方程的根. 这种"数形结合法"要求较高，在教学中要注意适可而止，就例论事.

(4)一元二次方程的根的分布的一般情形及其相关结论，可给学生讲一讲，让学生加深理解.

设 $f(x)=ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq0)$.

当 $a>0$ 时，①若方程的两根，一个小于 m，一个大于 m，则

$$\begin{cases}\Delta>0,\\ f(m)<0\end{cases}\Longleftrightarrow f(m)<0;$$

②若方程的两根都大于 m，则

$$\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\ -\dfrac{b}{2a}>m,\\ f(m)>0;\end{cases}$$

③若方程的两根都在 $[m,n]$ 之间，则

$$\begin{cases}\Delta\geqslant0,\\ -\dfrac{b}{2a}\in(m,n),\\ f(m)\geqslant0,f(n)\geqslant0;\end{cases}$$

④若方程的两根，一根在 (α,β) 内，另一根在 (m,n) 内，且 $m>\beta$，即满足 $\alpha<x_1<\beta<m<x_2<n$，则

$$\begin{cases}f(\alpha)>0,\\ f(\beta)<0,\\ f(m)<0,\\ f(n)>0.\end{cases}$$

当 $a<0$ 时，结论可类似得出.

(5)教科书在介绍"二分法"时，指出了二分法的基本思想. 这实际上是给出了零点的一个性质，或者说是给出了零点的判别方法. 教材中给出的下述结论：如果函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a_0,b_0]$ 上的图象是一条连续的曲线，并且有 $f(a_0)f(b_0)<0$，那么，函数 $f(x)$ 在区间 $[a_0,b_0]$ 内有零点，即存在 $c\in[a_0,b_0]$，使得 $f(c)=0$，这个 c 就是方程 $f(x)=0$ 的根. 该结论只要求学生理解并会用就行，而不需给出证明.

(6)二分法的一般算法比较抽象，学生不易理解，但只要按部就班地去做，总会算出结果，这可以用计算机来实现. 教学中，不必先讲一般的理论，可结合课本中的例题来引导学生探究，这样更便于学生理解. 事实上，第一步是取初始区间 $[a_0,b_0]$，使 $f(a_0)f(b_0)<0$. 第二步是取区间 $[a_0,b_0]$ 的中点 x_1，求 $f(x_1)$ 的值，并作出判断. 若 $f(x_1)=0$，x_1 就是所求的零点，计算结束；若 $f(x_1)\neq0$，判定零点是在区间 $[a_0,x_1]$ 还是 $[x_1,b_0]$ 上，从而进入下一步计算. 第三步对已确定的区间，重复第二步的方法……直到达到规定的误差要求，计算结束.

(7)对二分法的算法过程，教材上附了框图，建议引导学生结合具体例子去理解.

算法是数学及其应用的重要组成部分，是计算科学的重要基础. 随着现代信息技术的飞速

发展，算法在科学技术、社会发展中发挥着越来越大的作用，算法思想已经成为现代人应具备的一种数学素养. 教材有目的、有意识地将算法思想渗透在高中数学的有关内容中，让学生不断加深对算法思想的理解，体会算法思想在解决问题和培养理性思维中的意义和作用. 二分法正是这一思想的体现.

(8)教材在第 2 小节中的例 1、例 2，是用二分法求方程近似解的具体例子. 例 1 的方程简单些，可直接将值求出来进行比较；例 2 复杂些. 它应该有两个零点，课本中只求了一个. 在具体讲解例 1、例 2 时，应该让学生利用计算器或计算机边操作边认识，最好是由学生自己得出表中内容，这样可使学生更深刻地理解二分法的思想，思考与体会二分法的实质.

4.2 函数模型及其应用

1. 内容概述及基本要求

本节的教学要求是通过实际问题的例子，培养学生的数学应用意识，在解决问题中加深学生对函数概念的认识和理解.

2. 重难点分析

本节的教学重点与难点是让学生从实际问题中发现或建立函数模型，并体会函数在实际问题中的应用价值.

3. 教学建议

(1)本节教材给出了五个实例. 这些函数模型应用实例主要包含以下几个方面：利用给定的函数模型解决实际问题，如例 1、例 5；建立确定的函数模型解决实际问题及建立拟合函数模型解决实际问题，如例 2、例 3、例 4.

例 1 所涉及的数学模型是确定的，函数模型是用图象表出的. 此题的主要意图是让学生看图解决问题，所以本题有培养学生读图能力的功能.

例 2 和例 3 都有两问. 第一问是要求学生观察出一个函数模型，能吻合题目中的表格提供的数据；第二问是用建立的函数模型解释、预测或解决实际问题.

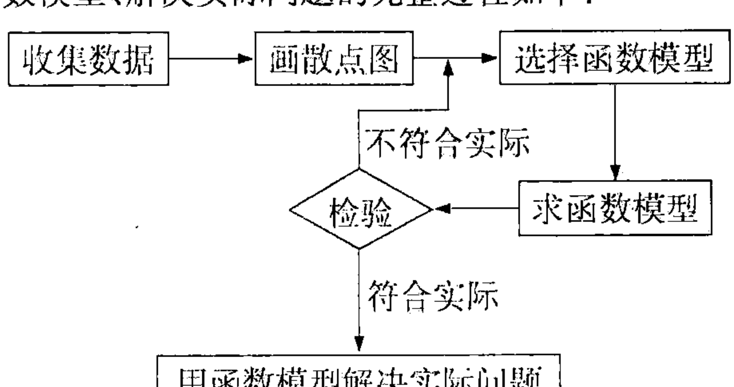
例 4 是函数拟合问题. 教学时应注意引导学生分析问题所提供的数据特点，由数据特点选择一个函数解析式，由部分数据建立起函数模型. 同时，应注意把表中的其他数据代入检验.

例 5 是综合问题，题目中涉及到的函数模型是给定的. 要求解释 $f(0)$ 的实际意义和判断 $f(x)$ 的单调性，也要求利用模型解决相关实际问题.

在本节的例题与习题中，函数应用问题与方程的近似解一样，也多数涉及较复杂的数据，建议引导学生多运用信息技术工具.

(2)在例题教学结束后，建议引导学生回顾问题特点、解决问题的过程与方法. 教学时要逐渐让学生感受和明确建立函数模型解决问题的完整过程.

一般来说，建立函数模型、解决实际问题的完整过程如下：



阅读与讨论　从 SARS 的数学模型谈起

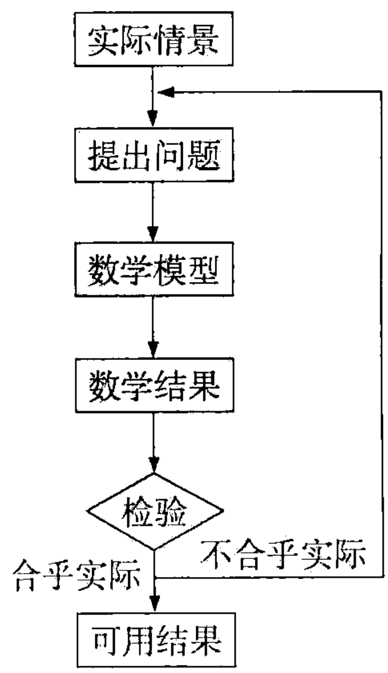
教材上附上这篇阅读材料，目的是让学生进一步感受函数模型的广泛应用. 在实际生活中出现的函数比书本上讲的函数要丰富得多，函数表示法中的列表法、图象法的重要性远远超过我们的想象.

这篇阅读材料不要求让学生一次能看懂，只是想让学生感受人们是怎样得到各种不同的函数的.

课题学习　数学建模——人口增长模型

教材上通过展示一种人口增长模型的完整过程，让学生继续感受函数模型的广泛应用；同时，它又从另一侧面第一次告诉学生如何数学建模.

数学建模是运用数学思想、方法和知识解决实际问题的过程，数学建模可通过框图体现：



“数学建模”是数学学习的一种新的方式，是课题学习的一种较好形式. 它为学生提供了自主学习空间，有助于学生体验数学在解决实际问题中的价值和作用；体验数学与日常生活和其他学科的联系；体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程，增强应用意识；有助于激发学生学习数学的兴趣，发展学生的创新精神和实践能力.

六、相关资源

1. 秦九韶法求方程的近似解

我国古代数学家秦九韶约在 1247 年(南宋时代)发现了一种高次方程根的近似计算法，我们称之为秦九韶法. 这种方法在有的国家又叫霍耐(Horner)法，霍耐是英国数学家，他在 1819 年才发现这个方法，迟我国 500 多年.

但由于这种方法计算程序冗长，不便于精确度要求较高的运算. 如果精确度要求不高，如要求到小数点后一位，可用此法来求. 例如：

试求 $f(x)=x^3-8x+1=0$ 在区间[2,3]内的实根的近似值，精确到 0.1.

如果只要求精确到 0.1，可将区间[2,3]十等份，对各分点值逐个代入 $f(x)$ 中试验，即可求得.

这一计算过程，可利用下表进行：

x	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3
$f(x)$	−	−	−	−	−	−	−	−	+	+	+

由于 x 从 2.7 变到 2.8 有一变号零点，所以 $f(x)=0$ 在区间(2.7，2.8)内有一实根. 这样，$x=2.8$ 就是 $f(x)$在区间[2，3]内，精确到 0.1 的实根近似值.

2. 函数思想在解题中的应用

函数思想在解题中的应用主要表现在两个方面. 一是借助函数的性质解有关的求值、解(证)不等式、解方程以及讨论参数的取值范围等问题；二是在问题的研究中，通过建立函数关系式或构造中间函数，把所研究的问题转化为讨论函数的有关性质，达到化难为易，化繁为简的目的，举例说明如下：

例 1　解不等式：$(x^2-20x+38)^3+4x^2+152<x^3+84x$.

解：原不等式可变形为

$$(x^2-20x+38)^3+4(x^2-20x+38)<x^3+4x.$$

令 $f(x)=x^3+4x$，原不等式即为

$$f(x^2-20x+38)<f(x). \qquad (*)$$

因为 $f(x)=x^3+4x$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，所以不等式(*)与 $x^2-20x+38<x$ 同解.

解此不等式，得 $2<x<19$.

例 2　设 a,b,c 为绝对值小于 1 的实数，求证：$ab+bc+ca+1>0$.

证明：$ab+bc+ca+1=(b+c)a+bc+1$.

因为$|a|<1$，$|b|<1$，$|c|<1$，所以

当 $b+c=0$ 时，有 $ab+bc+ca+1=bc+1=1-c^2>0$.

当 $b+c\neq0$ 时，构造函数 $f(x)=(b+c)x+bc+1$. 由于

$$f(1)=b+c+bc+1=(b+1)(c+1)>0,$$

$$f(-1)=-b-c+bc+1=(1-b)(1-c)>0,$$

知对任何$-1<x<1$ 时，都有 $f(x)>0$ 成立. 所以 $f(a)>0$.

即　$ab+bc+ca+1>0$.

七、评价建议

1. 知识与技能的评价. 要注重评价学生能否用函数图象来研究方程的根的分布问题，能否选择、建立函数模型来解决实际问题，能否掌握“二分法”求方程的近似解，能否掌握“数形结合法”，能否建立“函数观点”.

2. 能力的评价. 应着重评价学生在“利用函数图象探究方程根的分布”与“数学建模”的活动中，是否有问题意识，是否善于发现问题与提出问题，能否独立思考，能否将解决问题的方案与结果准确表达，能否与同学交流合作.

3. 对数学学习过程的评价. 应注重评价学生在教学活动中的积极性、参与性. 应关注学生的情感体验与感受，评价形式应灵活多样，评价结果要指明学生在本章学习中的进步与发展、特点与优点，以及需要改进的地方.

八、习题解答

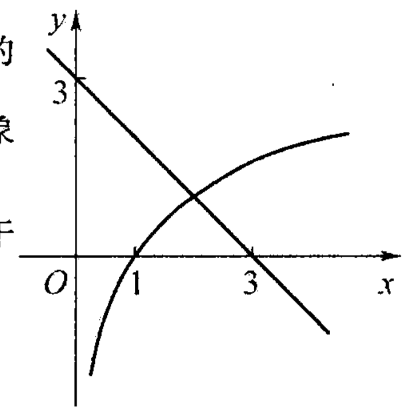
练习(第 88 页)

1. 考察函数 $y=5^x$，当 $x\in(-\infty,0)$时，$y\in(0,1)$. 所以

$$0<5-a<1,$$

即 a 的取值范围是$\{a|4<a<5\}$.

2. 方程 $x+\lg x=3$ 的实数根的个数等价于方程组$\begin{cases}y=\lg x,\\ y=3-x\end{cases}$的解的个数，等价于两函数图象的交点的个数. 由图可知，两函数图象仅有一交点，所以原方程仅有一实根.



(第 2 题图)

3. 因为方程 $2kx^2-2x-3k-2=0$ 有两个实数根，且一个小于 1，另一个大于 1，记

$$f(x)=2kx^2-2x-3k-2,$$

则有

$$\begin{cases}k>0,\\ \Delta>0,\\ f(1)<0,\end{cases}\quad \text{或}\begin{cases}k<0,\\ \Delta>0,\\ f(1)>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\Delta>0,\\ kf(1)<0.\end{cases}$$

解得 $k<-4$ 或 $k>0$.

所以 k 的范围为$(-\infty,-4)\cup(0,+\infty)$.

习题 4.1.1

1. 由题意得 $f(-1)\cdot f(2)\leqslant 0$，即$(-k-4)(2k-4)\leqslant 0$，解得 $k\leqslant -4$ 或 $k\geqslant 2$.

所以实数 k 的取值范围为$\{k|k\leqslant -4$，或 $k\geqslant 2\}$.

2. 考察函数 $f(x)=3x^2-5x+a$，由题意知，$f(x)$与 x 轴的两交点在$(-2,0)$与$(1,3)$内，所以

$$\begin{cases}f(-2)>0,\\ f(0)<0,\\ f(1)<0,\\ f(3)>0,\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}a>-22,\\ a<0,\\ a<2,\\ a>-12,\end{cases}$$

所以$-12<a<0$. 即实数 a 的取值范围是$\{a|-12<a<0\}$.

3. 因为 $f(3+x)=f(3-x)$，所以 $f(x)=f(6-x)$.

因为 $f(x_1)=0$，所以 $f(6-x_1)=0$. 又 $f(x_2)=0$，且 $x_1\neq x_2$，则 $6-x_1=x_2$，即 $x_1+x_2=6$.

4. 当 $x>0$ 时，方程可化为 $x^2-3x+2=0$，所以 $x_1=1$ 或 $x_2=2$；

当 $x<0$ 时，方程可化为$-x^2+3x+2=0$，即 $x^2-3x-2=0$，所以 $x_3=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$(舍去)或 $x_4=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$.

综上，方程 $x|x|-3|x|+2=0$ 的实数根有 3 个.

5. 设 $f(x)=2x^2-3x-a$.

对称轴为 $x=\dfrac{3}{4}$，且较为靠近 1，所以函数图象与 x 轴交点必有一点在区间$\left(-1,\dfrac{3}{4}\right)$上，所以

$$\begin{cases} f(-1)=2+3-a=5-a>0, \\ f\left(\dfrac{3}{4}\right)=2\times\dfrac{9}{16}-3\times\dfrac{3}{4}-a=-\dfrac{9}{8}-a\leqslant 0, \end{cases}$$

解得$-\dfrac{9}{8}\leqslant a<5$. 所以 a 的取值范围是$\left[-\dfrac{9}{8},5\right)$.

练习(第 92 页)

1. 这里 $\varepsilon=0.001$.

设 $f(x)=\lg x-x+2$,利用计算器估算得:

$f(2.3)=0.0617$,$f(2.4)=-0.0198$.

取 $a_0=2.3$,$b_0=2.4$,有 $f(a_0)f(b_0)<0$. 列表计算(中间结果取四位小数):

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$
0	2.3000	2.4000	0.1000	0.0617	−0.0198	2.3500
1	2.3500	2.4000	0.0500	0.0211	−0.0198	2.3750
2	2.3750	2.4000	0.0250	0.0007	−0.0198	2.3875
3	2.3750	2.3875	0.0125	0.0007	−0.0096	2.3813
4	2.3750	2.3813	0.0062	0.0007	−0.0045	2.3782
5	2.3750	2.3782	0.0031	0.0007	−0.0020	2.3766
6	2.3750	2.3766	0.0015	0.0007	−0.0006	2.3758

由于 $b_6-a_6=0.0015<0.002=2\varepsilon$,计算停止,取 $\bar{x}=x_6=2.376$ 为方程的近似解.

2. 这里 $\varepsilon=0.001$.

设 $f(x)=x^3+4x^2-10$,用计算器估算得:

$f(1.3)=-1.043$,$f(1.4)=0.584$.

取 $a_0=1.3$,$b_0=1.4$,有 $f(a_0)f(b_0)<0$,列表计算(中间结果取四位小数):

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\dfrac{a_n+b_n}{2}$
0	1.3000	1.4000	0.1000	−1.0430	0.5840	1.3500
1	1.3500	1.4000	0.0500	−0.2496	0.5840	1.3750
2	1.3500	1.3750	0.0250	−0.2496	0.1621	1.3625
3	1.3625	1.3750	0.0125	−0.0450	0.1621	1.3688
4	1.3625	1.3688	0.0062	−0.0450	0.0591	1.3657
5	1.3625	1.3657	0.0031	−0.0450	0.0078	1.3641
6	1.3641	1.3657	0.0015	−0.0187	0.0078	1.3649

由于 $b_6-a_6=0.0015<0.002=2\varepsilon$,计算停止,取 $\bar{x}=x_6=1.365$ 为方程近似解.

习题 4.1.2

1. 这里 $\varepsilon=0.001$.

设 $f(x)=x^2+3x-1$,用计算器估算得:

$f(0.3)=-0.01, f(0.4)=0.36$.

取 $a_0=0.3, b_0=0.4$,有 $f(a_0)f(b_0)<0$,列表计算(中间结果取四位小数):

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$
0	0.3000	0.4000	0.1000	−0.0100	0.3600	0.3500
1	0.3000	0.3500	0.0500	−0.0100	0.1725	0.3250
2	0.3000	0.3250	0.0250	−0.0100	0.0806	0.3125
3	0.3000	0.3125	0.0125	−0.0100	0.0352	0.3063
4	0.3000	0.3063	0.0062	−0.0100	0.0127	0.3032
5	0.3000	0.3032	0.0031	−0.0100	0.0015	0.3016
6	0.3016	0.3032	0.0015	−0.0042	0.0015	0.3024

由于 $b_6-a_6=0.0015<0.002=2\varepsilon$,计算停止,取 $\bar{x}=x_6=0.302$ 为方程近似解.

由求根公式可得近似解为 $x=\frac{\sqrt{13}-3}{2}\approx 0.303$.

而 $\Delta x=x-\bar{x}=0.303-0.302=0.001$,误差较小.

2. 这里 $\varepsilon=0.001$.

设 $f(x)=x^3-x-1$,用计算器估算得:

$f(1.3)=-0.103, f(1.4)=0.344$.

取 $a_0=1.3, b_0=1.4$,有 $f(a_0)f(b_0)<0$,列表计算(结果保留四位小数):

n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$
0	1.3000	1.4000	0.1000	−0.1030	0.3440	1.3500
1	1.3000	1.3500	0.0500	−0.1030	0.1104	1.3250
2	1.3000	1.3250	0.0250	−0.1030	0.0012	1.3125
3	1.3125	1.3250	0.0125	−0.0515	0.0012	1.3188
4	1.3188	1.3250	0.0062	−0.0251	0.0012	1.3219
5	1.3219	1.3250	0.0031	−0.0120	0.0012	1.3235
6	1.3235	1.3250	0.0015	−0.0052	0.0012	1.3243

由于 $b_6-a_6=0.0015<0.002<2\varepsilon$,计算停止,取 $\bar{x}=x_6=1.324$ 为方程近似解.

3. 设使用 x 年后,花费在该车上的费用达到 14.4 万元. 依题意可得

$14.4[1-(0.9)^x]+2.4x=14.4$,

化简得 $2.4x-14.4\times 0.9^x=0$. (*)

再令 $f(x)=2.4x-14.4\times 0.9^x$. 用计算器估算得

$f(4)=0.2>0, f(3)=-3.3<0.$

所以方程(*)在区间(3,4)上应有一个根.

所以大约使用4年后,花费在该车上的费用达到售价14.4万元.

练习(第96页)

1. 由题意得,盒子的高为x,底边是边长为$a-2x$的正方形,所以

$$V=x(a-2x)^2=4x^3-4ax^2+a^2x.$$

又$a-2x>0$,所以定义域为$(0,\frac{a}{2})$.

2. 今年的产量为a,平均增长率为$p\%$,经过一年后的产量为$a(1+p\%)$,经过两年后的产量为$a(1+p\%)^2$,……,经过x年后产量为$a(1+p\%)^x$.所以

$$y=a(1+p\%)^x,\quad x\in(0,m].$$

3. 设这批服装的新标价为y元,原价为x元,则进价为$75\%x$,销售价为$(1-20\%)y$.由题意得

$$(1-20\%)y=(1+25\%)\cdot 75\%\cdot x,$$

解得$y=\frac{(1+25\%)\cdot 75\%}{(1-20\%)}x=\frac{75}{64}x.$

习题4.2

1. 设n年后人口为m万人,则

$$m=10(1+1.1\%)^n.$$

将$n=14$代入,得$m\approx 11.66$(万人).即14年后约有11.66万人.

2. 设x小时后的细菌数为y,则

$$y=1000(1-11\%)^x.$$

将$x=24$代入,得$y\approx 61$.即24小时后还剩61个细菌.

3. 设x个一百年后还剩$y$mg的镭,又衰变率为3.8%,由题意得

$$y=100(1-3.8\%)^x.$$

已知$x=\frac{1000}{100}=10$,则$y=100(1-3.8\%)^{10}\approx 67.9$(mg).即1000年后,镭还剩约67.9mg.

4. 注入t s后,所注入的溶液体积为Vt cm^3.由题意得

$$x\cdot\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi=Vt,$$

解得$x=\frac{4Vt}{\pi d^2}$.

又$0\leqslant x\leqslant h$,所以$0\leqslant t\leqslant\frac{\pi d^2h}{4V}$.

即定义域为$[0,\frac{\pi d^2h}{4V}]$,值域为$[0,h]$.

5. (1)因为$N=N_0e^{-\lambda t}$,又$N_0>0,\lambda>0,t>0$,所以$-\lambda t<0$,又$e>1$,所以$N=N_0e^{-\lambda t}$是关于t的减函数,即在$(0,+\infty)$上单调递减.

(2)因为$N=N_0e^{-\lambda t}$,所以$\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda t}$,且$\frac{N}{N_0}>0$.

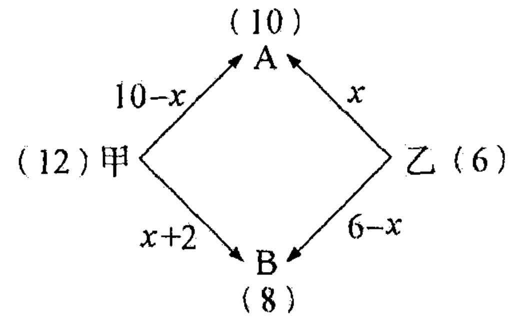
两边同取对数，可得 $\ln\dfrac{N}{N_0}=-\lambda t$，所以 $t=-\dfrac{\ln\dfrac{N}{N_0}}{\lambda}=\dfrac{\ln\dfrac{N_0}{N}}{\lambda}$.

(3)将 $N=\dfrac{N_0}{2}$代入，得$\dfrac{N_0}{2}=N_0e^{-\lambda t}$. 解得 $e^{-\lambda t}=\dfrac{1}{2}$，即 $t=-\dfrac{\ln\dfrac{1}{2}}{\lambda}=\dfrac{\ln 2}{\lambda}$.

6. (1)如图所示，乙厂调运 x 台至 A 地，则甲厂调运 $(10-x)$台至 A 地；乙厂调运$(6-x)$台至 B 地，则甲厂调运 $8-(6-x)=(x+2)$台至 B 地. 所以总费用为

$$\begin{aligned}y&=400(10-x)+800(x+2)+300x+500(6-x)\\&=200x+8600.\end{aligned}$$

即 y 关于 x 的解析式为 $y=200x+8600(0\leqslant x\leqslant 6, x\in\mathbf{N})$.



(第 6 题图)

(2)因为 $y\leqslant 9000$，所以 $200x+8600\leqslant 9000$，解得 $x\leqslant 2$.

即 $x=0,1,2$，共有 3 种调运方案.

(3)$y=200x+8600$ 为增函数.

所以当 $x=0$ 时，$y_{\min}=8600$.

即甲地调运 10 台给 A 地，调运 2 台给 B 地，乙地调运 6 台给 B 地. 此时最低费用为 8600 元.

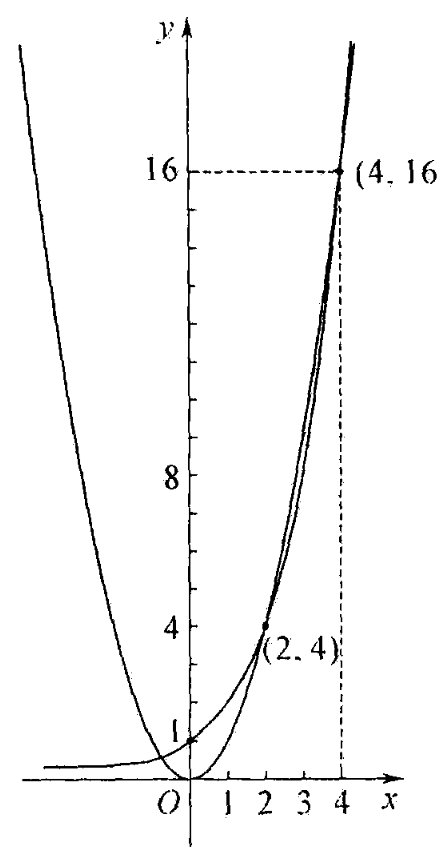
复习题 A 组

1. 记 $f(x)=x^2-5x+a$. 因为方程 $x^2-5x+a=0$ 的两根均大于 1，所以

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ -\dfrac{-5}{2}>1,\\ f(1)>0,\end{cases}\quad\text{即}\begin{cases}25-4a\geqslant 0,\\ a-4>0,\end{cases}$$

解得 $4<a\leqslant\dfrac{25}{4}$. 即实数 a 的取值范围是$\left(4,\dfrac{25}{4}\right]$.

2. 如图所示，画出函数 $f(x)=2^x$ 和 $g(x)=x^2$ 的图象. 由图象观察可知，$f(x)$和 $g(x)$有三个交点，即 $2^x=x^2$ 有三个根.



(第 2 题图)

3. 方程可化简为 $\log_2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)=a$.

设 $u(x)=1+\dfrac{3}{x}, x\in(3,4)$，$f(u)=\log_2 u, u\in\left(\dfrac{7}{4},2\right)$，则 $u(x)$在$(3,4)$内单调递减，$f(u)$在$\left(\dfrac{7}{4},2\right)$内单调递增.

故 $f(x)=\log_2\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$在$(3,4)$内单调递减. 又

$$f(3)=1, f(4)=\log_2\frac{7}{4},$$

所以 $a\in\left(\log_2\dfrac{7}{4},1\right)$.

4. 这里 $\varepsilon=0.1$.

设 $f(x)=x^3+\lg x-18$，估算得：

$$f(2)=-9.70,f(3)=9.48.$$

取 $a_0=2,b_0=3$，有 $f(a_0)f(b_0)<0$，列表计算（结果保留两位小数）：

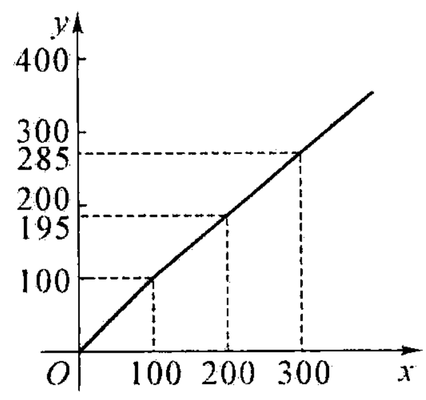
n	a_n	b_n	b_n-a_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	$x_n=\frac{a_n+b_n}{2}$
0	2.00	3.00	1.00	−9.70	9.48	2.50
1	2.50	3.00	0.50	−1.98	9.48	2.75
2	2.50	2.75	0.25	−1.98	3.24	2.63
3	2.50	2.63	0.13	−1.98	0.61	2.57

由于 $b_3-a_3=0.13<0.2=2\varepsilon$，计算停止，取 $\bar{x}=x_3=2.6$ 为方程的近似解.

5. y 与 x 的函数关系式为：

$$y=\begin{cases}x & (0<x\leqslant 100),\\ 95\%x+5 & (100<x\leqslant 200),\\ 90\%x+15 & (200<x\leqslant 300),\\ 85\%x+30 & (x>300).\end{cases}$$

它们的图象如图所示.



（第 5 题图）

复习题 B 组

1. (1) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$.

设 $0<x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(\sqrt{x_2}-\frac{1}{x_2}\right)-\left(\sqrt{x_1}-\frac{1}{x_1}\right)$$

$$=(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})+\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}=(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})\left(1+\frac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}{x_1x_2}\right).$$

因为 $x_2>x_1>0$，则 $\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}>0,1+\frac{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}{x_1x_2}>0$. 所以 $f(x_2)>f(x_1)$.

即 $f(x)$ 在定义域 $(0,+\infty)$ 上是增函数.

(2) 若存在 x_0，使 $f(x_0)=1$，则对于定义域上任意 $x_1<x_0$，因为 $f(x)$ 为单调增函数，则有

$$f(x_1)<f(x_0)=1.$$

同理，对任意 $x_2>x_0$，有 $f(x_2)>f(x_0)=1$.

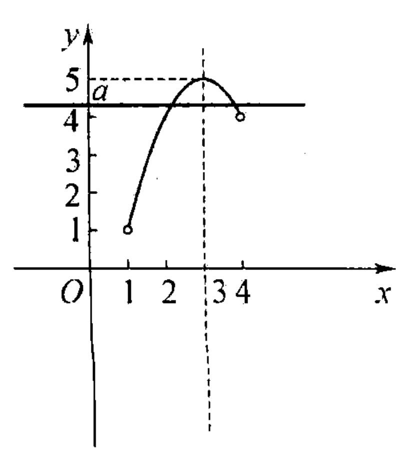
所以满足 $f(x)=1$ 的 x 值至多只有 1 个.

2. 方程 $\lg(x-1)+\lg(4-x)=\lg(a-x)$ 可化为

$$\begin{cases}\lg[(x-1)(4-x)]=\lg(a-x),\\ x-1>0,\\ 4-x>0,\\ a-x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-x^2+6x-4=a,\\ 1<x<4.\end{cases}$$



（第 2 题图）

考察函数 $y=-x^2+6x-4(1<x<4)$ 的图象与函数 $y=a$ 的图象的交点情形，如图所示.

(ⅰ) 当 $4<a<5$ 时，方程有两个实数根；

(ⅱ)当 $1<a\leqslant 4$ 或 $a=5$ 时，方程有一个实数根；

(ⅲ)当 $a\leqslant 1$ 或 $a>5$ 时，方程没有实数根.

3. 设时间为 t(单位：小时)，目前药量为 y，则

$$y=640(1-20\%)^t=0.8^t\cdot 640.$$

(ⅰ)当 $y=100\text{mg}$ 时，有 $0.8^t\cdot 640=100$.

用二分法或直接用计算器算得 $t=\log_{0.8}\frac{100}{640}=8.35(\text{h})$.

(ⅱ)当 $y=640\times 10\%\,\text{mg}$ 时，有 $640\times 0.8^t=640\times 10\%$，解得 $0.8^t=0.1$.

用二分法或直接用计算器算得 $t=\log_{0.8}{}^{0.1}=10.32(\text{h})$.

4. 设应在第 x 天注射该种药物，此时病毒细胞数量为 y，则有

$$y=2^x.$$

令 $2^x\leqslant 10^6$. 若 $x=19$，则 $2^{19}=524288<10^6$；若 $x=20$，则 $2^{20}=1048576>10^6$.

故最迟应在第 19 天注射该种药物.

5. 设 $y=(a-a_1)^2+(a-a_2)^2+\cdots+(a-a_n)^2$

$$=na^2-2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)a+(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2).$$

当 $a=\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}$ 时，a 与各数据差的平方和最小.

6. 设年利润为 y(万元)，投入养殖业资金为 x(万元)，投入养殖加工生产业资金为 $60-x$(万元)，则有

$$y=P+Q=\frac{x}{3}+\frac{10}{3}\sqrt{60-x}=-\frac{1}{3}(\sqrt{60-x}-5)^2+\frac{85}{3},x\in[0,60].$$

所以当 $x=35$(万元)，$60-x=25$(万元)时，$y_{\max}=\frac{85}{3}$(万元).

所以对养殖业投入 35 万元，对养殖加工生产业投入 25 万元时，可获最大利润 $\frac{85}{3}$ 万元.

思考与实践

1. 采用小组合作的形式，进行社会调查，可利用假期时间落实. 像课本第 92 页习题 4.1.2 中的第 3 题那样的模型正好就是求方程的近似解在社会生活中的应用模型. 一般来说，要对所调查的实际问题背景进行抽象整理.

2. 对于一个实际问题，一般采用两种方法来建立该问题的函数模型.

方法一：直接建立函数关系解析式.

在实际问题中，常有量在变化着，且其中两个量的变化是有相互联系及相互制约的情形，这两个量的关系有时就可直接建立解析式.

方法二：进行数据拟合.

研究数量变化是从收集数据开始的，收集好数据后，往往用表格的形式给出或画出图象. 从图象中感觉它的变化趋势，再由某个函数来拟合它. 这个拟合函数就是函数模型.

3. 建立一个"冰块随时间变化溶于水"的函数模型，关键在于设计出收集数据的方案.

可取一块冰，放在常温下的教室里，记下冰块的质量与室温，并定时测量其溶于水的质量. 显然，在这个过程中，你需要考虑一些影响冰块溶化为水的因素. 例如，教室温度越高，在单位时间内溶化为水的冰块越多. 为了研究问题的方便，在权衡各种因素的影响大小后，我们常常忽略其他因素，而只看时间的影响，据此建立冰块随时间变化溶于水的函数模型. 另外，为了使

别人能相信你的模型的可靠性,你需要尽量详细地描述建立函数模型的过程和它成立的条件,并以适当的形式写出一个实习报告.

{
"filename": "MTI3OTU0Mjhf5pmu6YCa6auY5Lit6K++56iL5qCH5YeG5a6e6aqM5pWZ56eR5Lmm5pWw5a2mMeW/heS/ruaVmeW4iOaVmeWtpueUqOS5pi56aXA=",
"filename_decoded": "12795428_\u666e\u901a\u9ad8\u4e2d\u8bfe\u7a0b\u6807\u51c6\u5b9e\u9a8c\u6559\u79d1\u4e66\u6570\u5b661\u5fc5\u4fee\u6559\u5e08\u6559\u5b66\u7528\u4e66.zip",
"filesize": 6345000,
"md5": "df42c6276ad56b2b6c1e83b7dc4c9eda",
"header_md5": "c7b4738ed3cc1290c3fb0e5115d25711",
"sha1": "a14a304def91c19221c5503ace13a7c6563956a7",
"sha256": "515de29dfc328608831801e2927b3d948b645190ee032d8ad23d9953fa4d0a26",
"crc32": 1412974851,
"zip_password": "",
"uncompressed_size": 6307064,
"pdg_dir_name": "12795428_\u255e\u2552\u2550\u00bf\u2555\u2580\u2553\u2568\u2510\u256c\u2502\u2560\u2592\u03a9\u256b\u255d\u2569\u2561\u2564\u0398\u255c\u2560\u2510\u255e\u2569\u0398\u2569\u00b2\u2564\u00ba1\u2592\u256a\u2568\u2590\u255c\u2560\u2569\u00aa\u255c\u2560\u2564\u00ba\u2559\u251c\u2569\u0398",
"pdg_main_pages_found": 66,
"pdg_main_pages_max": 66,
"total_pages": 71,
"total_pixels": 410524917,
"pdf_generation_missing_pages": false
}