普通高中课程标准实验教科书

# 数学 (选修4-1)

# 几何证明选讲
# 教师教学用书

SHUXUE

JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU


北京师范大学出版社

责任编辑／王永会
美术编辑／高　霞

普通高中课程标准实验教科书

数学▼选修4-1　几何证明选讲

教师教学用书

北京师范大学出版社

http://www.bnup.com.cn

ISBN 7-303-07521-6

9 787303 075218 >

ISBN 7-303-07521-6/G·5766

定价：6.00元

普通高中课程标准实验教科书

# 数学（选修4-1）

# 几何证明选讲

## 教师教学用书

SHUXUE

JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU


主　编　王希平　张饴慈
编　者　（按姓氏笔画排序）
王希平　付　勤
刘族平　李　毅
肖国红　林益生



北京师范大学出版社
·北京·

# 前　言

本书是北京师范大学出版社 2005 年 7 月出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学(选修 4-1)》的配套教师用书，其内容是介绍本册教科书的教学目的、编写意图与特色、教学内容及课时安排建议、教学建议、评价建议、课程资源参考，同时还提供了本册教科书各章节练习、习题、复习题的参考答案或提示，供执教教师在教学中参考使用.

本书的第一章由刘族平、李毅、林益生编写，第二章由王希平、付勤、肖国红编写，全书由王希平、张饴慈、李延林统稿审定.希望各执教教师、教研员能在教学实践中继续不断总结，不断创新，用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书，使得课程改革的基本理念和《普通高中数学课程标准(实验)》所设定的课程目标得以真正落实.

编　者

2005 年 8 月

# 目　录

# 总 体 说 明

几何学是培养学生空间想像能力和几何直观能力的最好学科，同时也是培养学生推理能力的重要载体.中学几何课程的主要目标是使学生认识和把握图形的几何性质，培养和提高学生的逻辑推理能力，从而使学生认识空间图形的能力得到进一步发展.

在九年义务教育课程中，学生已经理解了证明的必要性，学习了证明的基本方法，并在给定公理的基础上对平行线、三角形、四边形的性质进行了证明，在这一过程中初步感受了公理化的思想方法；同时，学生还对相似三角形、相似多边形的性质和圆的部分性质进行了直观的探索和认识.

在《普通高中课程标准实验教科书数学(必修 2)》中，学生先从空间几何体的整体观察入手，认识空间图形；再以长方体为载体，直观认识和理解空间点、线、面的位置关系，用数学语言表述有关平行、垂直的性质与判定，并对某些结论进行论证；同时还了解了一些简单几何体的表面积和体积的计算方法.也就是说，在《普通高中课程标准实验教科书数学(必修 2)》中，空间线线、线面、面面关系的判定定理是通过合情推理发现的，而对它们的性质定理则进行了演绎证明.

《几何证明选讲》是在九年义务教育课程的基础上对那些希望进一步学习、了解几何的学生开设的.在本专题中，学生将进一步学习如何通过合情推理发现结论，再利用演绎推理证明结论，通过推理证明进一步发展学生的逻辑推理能力；通过对圆锥曲线性质的进一步探索，提高学生的空间想像能力、几何直观能力和综合运用几何方法解决问题的能力.

《几何证明选讲》共分两章：第一章《直线、多边形、圆》，第二章《圆锥曲线》.

第一章的主要内容包括平面内相似三角形性质的证明、圆与直线的位置关系及相应性质的证明，圆内接四边形性质的探索和证明.这一章的内容大都是传统初中平面几何的知识，要求通过学习使学生的逻辑推理能力较过去有较大程度的提高.

实际上，几何学习有助于发展学生把握空间与图形的能力；有助于发展学生的直觉能力，培养学生的创新精神；有助于发展学生的论证推理能力、合情推理能力、运用图形语言进行表达和交流的能力；有助于学生认识数学内容之间的内在联系，体会数形结合的思想.第一章特别体现了提高学生逻辑推理能力的作用.

第二章主要探索圆柱和圆锥被平面所截得的截线的基本形状及性质，从综合几何的角度研究圆锥曲线.传统教科书只在解析几何小结时介绍圆锥曲线，而用综合几何的方法研究圆锥曲线则要求学生经历一个探索过程，在这个过程中最关键之处在于把“焦球”放入圆锥面的内部，利用“焦球”来证明圆锥曲线的性质.

第一章的内容大家都比较熟悉，一般有过初中教学经历的教师都可以较好地完成教学任

务. 但在教学时需要注意两点：

第一，虽然这一章重点在于培养学生的逻辑推理能力，但同时也应特别重视几何直观. 现代数学认为，几何是可视逻辑，它的很多逻辑关系在图形中可以得到反映. 因此，突出几何直观应该是本章教学的一个特点.

第二，由于大多数教师对这部分内容比较熟悉，因此教学中可能会对教学内容拓宽、加难. 根据《普通高中数学课程标准（实验）》的精神，这部分内容不宜偏难、偏繁，题目本身应有较好的背景和意义，证明思路应当清晰、简明，这样有利于培养学生的逻辑推理能力. 教师不必引导学生去做那些难题、怪题.

与第一章相比，第二章的内容是全新的，因此教学时一方面要介绍用综合几何研究圆锥曲线的思想方法，另一方面又要引导学生独立地（不同于解析几何）得出圆锥曲线的定义、性质. 这一章的教学要重视模型的作用，学生通过动手制作一些模型，并进行观察、讨论，效果会更好.

# 第一章　直线、多边形、圆

## 一、教学目标

1. 了解图形变换的不变性，加深学生对图形与其变换后的图形之间关系的认识，加深对形的概念的理解. 图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题.

2. 理解和掌握平行线分线段成比例定理、直角三角形的射影定理、直线与圆位置关系的重要定理及其相应证明，探索并证明圆内接四边形的性质.

3. 进一步提高学生的几何直观能力及运用综合几何方法解决问题的能力，提高学生对几何命题的论证能力. 通过对几何定理的探索证明，让学生体会“探索一发现一猜想一证明”的思维过程.

## 二、编写意图与特色

中学阶段几何课程的主要目的是使学生能够认识和把握三维空间中的几何图形的基本性质，发展学生的几何直观和空间观念，学习证明的方法，培养和提高推理论证能力. 本章通过对一些几何定理的探索证明，归纳和梳理出直接证明和间接证明的基本方法. 在本章中学生将进一步学习如何通过合情推理发现结论，再利用演绎推理证明结论. 通过推理证明进一步发展学生的逻辑推理能力，提高综合运用几何方法解决问题的能力；在几何定理的证明中突出探索问题的过程. 当今时代，知识本身的获得已经不是最重要的了，重要的是如何获得知识，如何在获得知识的过程中开发潜能，培养学生探索研究问题的能力.

## 三、教学内容及课时安排建议

本章教学时间约为 11 课时，具体分配如下：

§1　全等与相似

| | |
|---|---|
| 1.1　图形变化的不变性<br>1.2　平移、旋转、反射<br>1.3　相似与位似 | 1 课时 |
| 1.4　平行线分线段成比例定理 | 1 课时 |
| 1.5　直角三角形的射影定理 | 1 课时 |

§2　圆与直线

| | |
|---|---|
| 2.1　圆周角定理 | 1 课时 |
| 2.2　圆的切线的判定和性质 | 1 课时 |

2.3　弦切角定理　　1课时

2.4　切割线定理　　1课时

2.5　相交弦定理　　1课时

§3　圆与四边形

3.1　圆内接四边形　　1课时

3.2　托勒密定理　　1课时

阅读材料　定长闭曲线最大面积问题

小结复习　　1课时

## 四、评价建议

本章对问题的探索证明力求深入浅出. 例、习题是“浅出”的，而蕴涵的数学思想是“深入”的. 数学的发展已将这门科学的核心引向高度抽象化的道路，面对各种深奥的数学理论和复杂的数学方法，不少人往往望而却步. 因此提高数学的可接受度，就成为当务之急. 在本章的教学中应避免选用传统内容中的偏题、难题. 要强调探究过程，培养学生探索研究问题的能力，培养学生的逻辑推理能力，培养学生综合运用知识的能力. 为了实现这一目标，选择例、习题时应注意选择那些在方法和证明思路方面对学生有启发的题目.

本章内容比较传统，我们希望通过这些内容的教学，使学生在把握图形、逻辑推理能力等方面都有所提高. 教师应当把问题的思维过程比较清晰地讲述出来，给学生展现出“探索一发现一猜想一证明”这一研究问题的全过程. 不能将本章的教学理解为是与传统内容的衔接，是相似体系、圆体系的补充. 应考虑什么知识对学生更有用，几何学需要培养学生的什么能力. 实际上，完整的体系并不是最重要的，重要的是学生的发展，而逻辑推理能力与几何的综合能力则是几何学习需要培养的两种重要能力.

## 五、教学建议

1. 图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题. 教学时应通过学生熟悉的几种几何变换(平移、旋转、反射)，直观地认识图形变换下的不变性，不宜从纯理论的角度去论证它.

2. 本章要求学生通过对定理的探索、证明，认识研究问题的一般方法，体会“探索一发现一猜想一证明”的思维过程，进一步提高学生的几何论证能力及综合运用知识的能力.

3. 本章教学中应适当对学生进行一些推理论证的训练，通过训练让学生归纳、梳理出几何论证的基本方法：直接法、间接法.

4. 周长一定的封闭曲线中，圆的面积最大. 这一性质在现实世界中有许多重要的应用，了解这一性质的推证过程可以提高学生的数学素养，让学生感受探索研究问题的思维过程.

# §1　全等与相似

## 一、教学目标

1. 感受图形变化过程中的不变性.

2. 掌握平行线分线段成比例定理、三角形内角平分线定理、直角三角形的射影定理，并能运用这些知识熟练地进行有关证明和计算.

3. 进一步提高分析问题和解决问题的能力，提高逻辑论证的能力和综合运用几何知识的能力.

## 二、设计思路

本节内容以义务教育阶段的知识为基础，通过复习相似三角形的性质，学习在几何证明中有广泛应用的平行线分线段成比例定理、三角形内角平分线定理和直角三角形的射影定理. 学生通过这部分内容的学习不仅丰富了必要的几何知识，并且将进一步学习如何通过合情推理发现结论，再利用演绎推理证明结论，提高几何的综合论证能力和探索研究问题的能力.

本节内容的编排结构有如下特点.

1. 突出图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题. 教科书首先通过具体操作，对画在一块方的软木上的圆和两条相互垂直的直径的图形均匀压缩，让学生直观地感受图形变化过程中的不变性. 再通过学生熟悉的平移、旋转、反射、相似、位似，让学生去寻找在这些变化下几何图形的不变量. 这些不变性深刻地揭示了经过几何变换后的图形与原图形的关系，从而加深学生对形的概念的认识，并指出图形变化过程中的不变性是几何学研究的重要而基本的问题. 在目前的几何分支中，许多几何学都对应有一个主变换，图形在该变换下保持不变的性质就是这种几何学所研究的对象. 在这种意义下，几何学就变成了研究在某种变换下图形不变性质的科学. 运动变换下的几何是欧氏几何，射影变换下的几何是射影几何，仿射变换下的几何是仿射几何，拓扑变换下的几何是拓扑几何……这种把几何学按变换下的不变量来分类的思想是十分重要的，尽管它无法概括全部几何.

2. 对于平行线分线段成比例定理的证明，教科书采用了学生更容易接受的面积方法. 同底等高的三角形，其面积相等，这是学生熟悉的数学知识，用它来证明平行线分线段成比例定理不仅证明过程简明易懂，而且也教给学生一种证明线段比的方法. 传统教科书是用举例的方法引入平行线分线段成比例定理的，通常没有证明，因为证明涉及无理数理论、极限思想等，学生不易接受.

## 三、教学建议

1. 这节内容分为 5 小节. 第 1 小节至第 3 小节通过图形变换让学生认识图形变化过程中

的不变性. 第 4 小节、第 5 小节证明了平行线分线段成比例定理及直角三角形的射影定理，其中平行线分线段成比例定理是推证有关线段比的重要依据，是本节的重点.

2. 对于三角形内角平分线定理，教科书中的证明是设想将折线“拉直”后用平行线分线段成比例定理的推论进行证明. 讲完教科书中的证明方法后，教师也可引导学生用面积比转化为线段比的方法加以证明.

已知：如图 1，在$\triangle ABC$中，$AD$平分$\angle BAC$，$AD$交$BC$于点$D$.

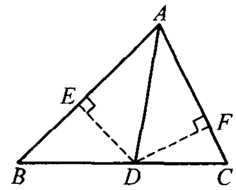



图 1

求证：$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}$.

证明：作$DE\perp AB$，$DF\perp AC$，垂足分别为$E$，$F$，则$DE=DF$.

而 $$\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot DE}{\frac{1}{2}AC\cdot DF}=\frac{AB}{AC},$$

所以 $$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

3.“对应”是数学中一个基本的不加定义的概念，学生已见过多次. 由于成比例线段涉及四条线段，因此这几个定理所讲的“对应”比全等三角形中的“对应”更复杂，教学时要让学生结合图形搞清图形中线段的对应关系.

# §2　圆与直线

## 一、教学目标

1. 经历直线(线段)与圆不同位置关系的分类活动;经历在特定位置下探寻定量刻画图形间关系的活动.

2. 探索直线(线段)与圆的位置关系;探索在特定位置下图形所隐含的数量关系,进一步培养逻辑推理能力.

3. 进一步体会数形结合的思想方法,提高逻辑思维能力和综合运用知识解决问题的能力.

## 二、设计思路与教学建议

### 2.1　圆周角定理

本小节主要介绍圆周角的概念、圆周角定理及其推论.

1. 本小节教学应使学生理解圆周角的概念,掌握圆周角定理及其推论,并能熟练运用它们进行论证和计算.通过圆周角定理的证明,使学生了解抓住图形特征分情况证明数学命题的思想和方法.

2. 圆周角的概念、圆周角定理及其推论在推理论证和计算中应用比较广泛,因此是本节重点内容之一;认识圆周角定理需要分三种情况逐一证明的必要性是难点所在.

3. 圆周角有两个特点,二者缺一不可:(1)角的顶点在圆上;(2)角的两边都与圆相交.这里所说的"角的两边都与圆相交"可理解为:除角的顶点外,角的各边与圆还另有一个公共点.为了加深理解,教学时可安排如图 2 所示图形,让学生判断图形中的角是不是圆周角,并说明理由.

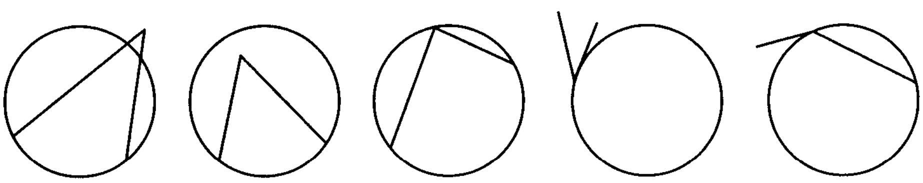


图　2

4. 教科书中的圆周角定理,揭示了一条弧所对的圆周角与所对的圆心角之间的大小关系,没有用角与弧之间的度数关系进行过渡.这样处理可使这一部分内容简化,同时也可避免有些学生犯如下错误:不注意角和弧是两种不同类型的图形,而把角与弧的度数相等说成角和弧相等.

5. 对圆周角定理的证明,需分三种情况进行讨论.在这三种情况中,第一种情况是特殊情况,是证明的基础,其他两种情况都可以转化为第一种情况来解决,转化的方法是添加以角的

顶点为端点的直径.这种由特殊到一般的思想方法,应当让学生理解和掌握.

分三种情况对定理进行证明,对这种方法,学生可能不很熟悉.因此,教学时应注意引导.首先可以通过画图与观察使学生明确,以圆上任意一点为顶点的圆周角虽然有无数个,但归纳起来它们与圆心的位置关系却只有三种情况:(1)圆心在角的一边上;(2)圆心在角的内部;(3)圆心在角的外部.然后再让学生观察并且推测:一条弧所对的圆周角与它所对的圆心角有什么关系?为什么?可要求学生结合第一情况说明理由.为了便于对照,应把第一种情况的证明过程写在黑板上,再让学生分析这个证明是否也适用于第二、三种情况.由于不适用,所以需要进一步考虑其他两种情况的证明过程.

6.圆周角定理的两个推理在今后的论证、计算与作图中会经常用到,应让学生掌握.例2实际上证明了正弦定理.可以向学生说明,这一定理在今后的学习中还有其他证明方法.

## 2.2 圆的切线的判定和性质

本小节的内容主要是圆的切线的判定定理和性质定理及两个推论.

1.教学时可以从运动的观点让学生理解直线与圆的相交、相切、相离等概念,并转换成用“圆心到直线的距离 $d$ 与半径 $r$ 的关系”来描述,从而引导学生自己得出判定定理.

2.对于切线的判定定理,应要求学生分清定理的条件和结论.教学时应特别强调“经过半径外端”和“垂直于这条半径”这两个条件缺一不可,否则就不是圆的切线(反例如图3所示).实际上,切线的判定定理就是圆心到直线的距离等于半径的另一种说法,因此无须证明.

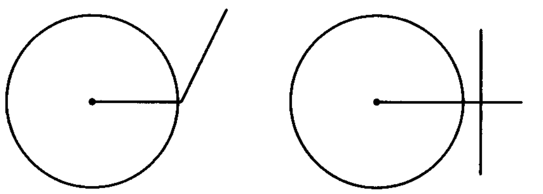


图 3

3.对切线性质定理的证明,教科书应用了反证法.教学时只要求学生了解这种方法,不要求他们用这种方法进行独立证明.

4.切线的性质定理应用较广泛,应让学生熟练掌握.通过学习切线的性质定理及其两个推论,应让学生明确:垂直于切线的半径所在的直线相对于切线来说有三个性质:①垂直于切线,②过切点,③过圆心,这三个性质中只要任意两个成立,第三个必然成立.

5.在应用切线的判定和性质定理时,常常需要添加辅助线.在本小节结束前,要引导学生总结一下添加辅助线的一般方法:

(1)已知一条直线是某圆的切线时,切点的位置一般是确定的.这时在写已知条件时,应交待直线与圆相切于哪一点,辅助线常常是连接圆心和切点得到半径,半径垂直于切线(如教科书中的例4).

(2)证明某直线是圆的切线时,如果已知直线过圆上某一点,那么可作出过这一点的半径,证明直线垂直于半径(如教科书中的例3、练习第3题);如果直线与圆的公共点没有确定,那么应过圆心作直线的垂线,证明圆心到直线的距离等于半径.教学时一定要防止学生错将圆上任意一点当做切点连接出半径.

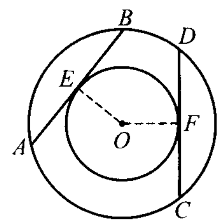
6. 切线的判定定理和性质定理容易混淆，因此要让学生分清判定定理和性质定理的条件和结论，并明确在什么情况下使用切线的判定定理，什么情况下使用切线的性质定理. 关于这个问题，教学时可结合教科书练习第 3 题和下面的补充题第 1 题进行讲解.

7. 本小节有 2 个例题，例 3 是切线判定定理的运用，例 4 是切线性质定理的运用. 练习第 3 题和下面的补充题是切线判定定理和性质定理的综合运用，这几个题除了用到切线的知识，还需要用到同圆的半径相等、同圆的弦与弦心距的关系、全等三角形、等腰三角形、平行线等有关知识，具有一定的综合性. 教学时应引导学生分析，通过师生互动完成证明.

8. 学完本小节后，应使学生明确判定切线有三种方法：(1)与圆只有一个公共点的直线是圆的切线；(2)圆心到直线的距离等于半径，则这条直线是圆的切线；(3)过半径外端且和半径垂直的直线是圆的切线. 其中(1)是切线的定义，(2)和(3)本质上是相同的，只是表达形式不同. 解题时，可根据题目的特点选择适当的判定方式. 切线的性质主要有五个：(1)切线和圆只有一个公共点；(2)圆心到切线的距离等于圆的半径；(3)切线垂直于过切点的半径；(4)经过圆心且垂直于切线的直线必过切点；(5)经过切点且垂直于切线的直线必过圆心.

**附：补充题**

1. 已知：如图，在以 $O$ 为圆心的两个同心圆中，大圆的弦 $AB=CD$，且 $AB$ 与小圆相切于点 $E$. 求证：$CD$ 与小圆相切.

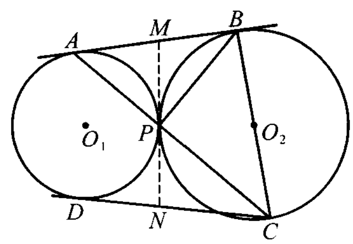



（第 1 题）

证明：连接 $OE$，过点 $O$ 作 $OF\perp CD$，垂足为 $F$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AB\text{ 与小圆相切}\Rightarrow OE\perp AB\\ OF\perp CD\\ AB=CD\end{array}\right\}\Rightarrow OF=OE\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad OF\perp CD\end{array}\right\}\Rightarrow CD\text{ 与小圆相切.}$$

2. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 $P$，$AB$ 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线，连接 $AP$ 并延长交 $\odot O_2$ 于点 $C$，过点 $C$ 作 $CD$ 切 $\odot O_1$ 于点 $D$，连接 $BP$，$BC$.




（第 2 题）

(1)判断$\triangle APB$ 的形状；

(2)判断线段 $BC$ 和 $CD$ 的大小关系.

解：(1)过点 $P$ 作两圆的内公切线 $PM$ 交 $AB$ 于点 $M$，交 $CD$ 于点 $N$.

因为　$AB$ 是 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 的外公切线，

所以　$AM=MP=MB$.

所以　$\triangle APB$ 为直角三角形，$\angle APB=90°$.

(2)因为　$BC$ 是 $\odot O_2$ 的直径，$AB$ 切 $\odot O_2$ 于点 $B$，

所以　$CB\perp AB$.

又　$BP\perp AC$，

所以　$BC^2=CP\cdot CA$.

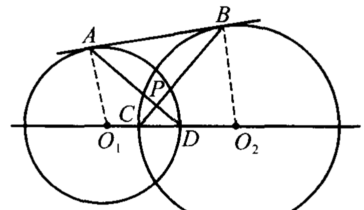
因为　$CD$ 切 $\odot O_1$ 于点 $D$，$CPA$ 为 $\odot O_1$ 的割线，

所以 $CD^2=CP\cdot CA$.

所以 $BC^2=CD^2$.

所以 $BC=CD$.

3. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交，$AB$ 是两圆的外公切线，连心线 $O_1O_2$ 交 $\odot O_2$ 于点 $C$，交 $\odot O_1$ 于点 $D$，那么 $AD$ 与 $BC$ 是否垂直？



（第 3 题）

解：设 $AD$ 与 $BC$ 相交于点 $P$，连接 $O_1A$，$O_2B$.

因为 $AB$ 是 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 的公切线，

所以 $O_1A\perp AB$，$O_2B\perp AB$.

所以 $O_1A/\!/O_2B$.

所以 $\angle AO_1D+\angle BO_2C=180°$.

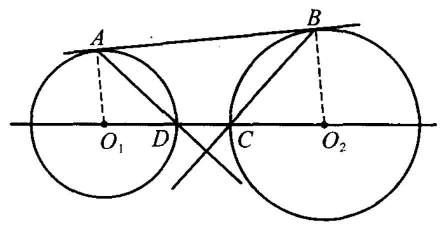
因为 $AO_1=O_1D$，$BO_2=O_2C$，

所以 $2\angle ADO_1+2\angle BCO_2=180°$.

所以 $\angle ADO_1+\angle BCO_2=90°$.

所以 $\angle CPD=90°$，即 $AD\perp BC$.

4. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相离，$AB$ 是两圆的外公切线，连心线 $O_1O_2$ 交 $\odot O_2$ 于点 $C$，交 $\odot O_1$ 于点 $D$，那么 $AD$ 与 $BC$ 是否垂直？



（第 4 题）

提示：连接 $O_1A$，$O_2B$，仿第 3 题的证明方法可知 $AD\perp BC$.

## 2.3 弦切角定理

1. 本小节教学应使学生理解弦切角的概念，掌握弦切角定理及其推论，并会运用它们解决有关问题. 通过弦切角定理的证明，进一步使学生了解分情况证明数学命题的思想和方法.

2. 讲弦切角的定义前，可先复习一下圆心角及圆周角的定义，然后再用运动的方法向学生说明，圆周角的一边绕顶点旋转到与圆相切时，形成了一种新的角，由此引出弦切角的定义.

3. 讲弦切角的定义时，应强调两点：(1)角的顶点在圆上，实际上就是角的顶点是圆的一条切线的切点；(2)角的一边是过切点的一条弦（所在的射线），角的另一边是切线上以切点为端点的一条射线. 讲完后可让学生指出图 4 中哪个角是弦切角.

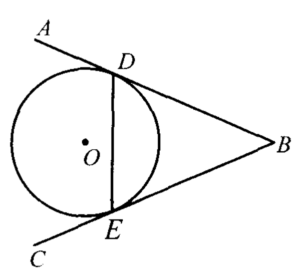


图 4

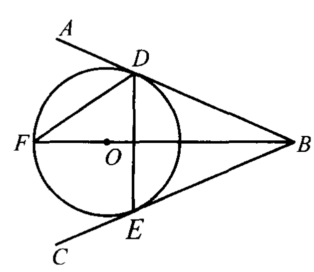


图 5

4. 可以结合图 5 讲清，什么是弦切角所夹的弧，什么是弦切角所夹弧所对的圆周角，以防

止出现$\angle BDE=\angle BFD$的错误.

5. 弦切角定理的证明与圆周角定理的证明相仿，也分为三种情况，可以和圆周角定理的证明相对照，说明第一种情况是特殊情况，其他两种是一般情况，通过作辅助线可转化为第一种情况. 为了使用方便，可以在定理后面补充一个常用的推论：在同圆或等圆中，如果两个弦切角所夹的弧相等，那么这两个弦切角也相等.

### 2.4 切割线定理

### 2.5 相交弦定理

1. 通过这两小节的教学使学生能结合具体图形，准确地表述切割线定理、相交弦定理及有关推论的条件和结论，并能应用它们解决有关的计算和证明问题.

2. 这两小节的定理证明都比较容易，教学时应启发学生自己寻找证明思路. 切割线定理的推论，除了可以用切割线定理证明之外，还可以用三角形相似证明. 因此有的书上把它作为定理（称为割线定理）. 本书把它作为切割线定理的推论，这样可以使它的证明更简单.

3. 学生在应用这两小节定理时常常会出现一些错误，如把教科书图 1-35、图 1-36 中的线段关系错写成$PT^2=PA\cdot AB$，$PA\cdot AB=PC\cdot CD$等. 教学时要结合图形强调定理中所指的是哪几条线段.

4. 为了便于学生接受，教科书采用了较直观的语言叙述定理. 如果学生的理解水平允许，可以告诉学生：经过一个定点作圆的弦或割线，可以作无数条，但是这些弦或割线被此点内分或外分的两条线段的乘积是一个确定的值. 因此，可以把相交弦定理、切割线定理及其推论统一为一个定理：过一定点$P$向$\odot O$作任一直线，交$\odot O$于两点，则从定点$P$到两交点的两条线段长的乘积是一个常数$|PO^2-r^2|$（其中$r$为$\odot O$的半径）. 因为$PO^2-r^2$叫做点$P$对于$\odot O$的幂，所以这两小节的定理统称为圆幂定理.

# §3　圆与四边形

## 一、教学目标

1. 经历圆内接四边形性质的探索过程，认识并证明圆内接四边形的性质定理.

2. 探索并掌握圆内接四边形的判定定理(四点共圆的判定定理).

3. 认识托勒密定理，体会托勒密定理的证明思路.

4. 进一步体会数形结合的思想方法，提高逻辑思维能力和综合运用知识解决问题的能力.

## 二、设计思路与教学建议

### 3.1　圆内接四边形

1. 教科书从圆内接四边形的定义出发，引入对圆内接四边形的角的研究，就得到了圆内接四边形的性质定理. 要让学生认识到这个性质定理的重要性，因为它是在圆中探求角的相等或互补关系时常用的定理. 使用这个定理时要注意观察图形，不要弄错四边形的外角和它的内对角的位置.

2. 对圆内接四边形的判定定理的证明，教科书采用的是反证法. 教学时应让学生了解反证法的基本思想和一般步骤. 证明一个几何命题时，如果用直接证法比较困难，那么可以采用间接证法，反证法就是一种间接证法.

用反证法证明时，由于要假设待证命题的结论不成立，因此就必须弄清结论的反面由哪些事件组成. 如果结论的反面只有一种情况，那么只须否定这种情况，就足以证明原结论的正确性；如果结论的反面不止一种情况，那么必须把各种可能情况全部列举出来，并且一一加以否定之后，才能肯定原结论是正确的(如本小节中的定理证明). 在理解“从假设出发，经过推理论证，得出矛盾”这一步骤时，必须引导学生注意推理的严密性，每一步都要有根据，并且一定要真正理解矛盾在哪里. 这是学生感到困难的地方，教学时可以通过例题让学生慢慢体会. 开始要用一些比较容易找到矛盾的例子，一定不要要求过急过高.

3. 本小节的内容比较难，在学生阅读教科书前，教师可先提出一些思考题，让学生边阅读、边思考，在此基础上再由教师讲解或采用师生共同讨论的方式进行. 下面列出几个思考题供教师参考.

(1)任意一个四边形是不是一定有外接圆？具备什么条件的四边形才有外接圆？

(2)圆内接四边形的判定定理的条件和结论各是什么？你能写出这个定理的已知和求证吗？

(3)圆内接四边形的判定定理是用什么方法证明的？

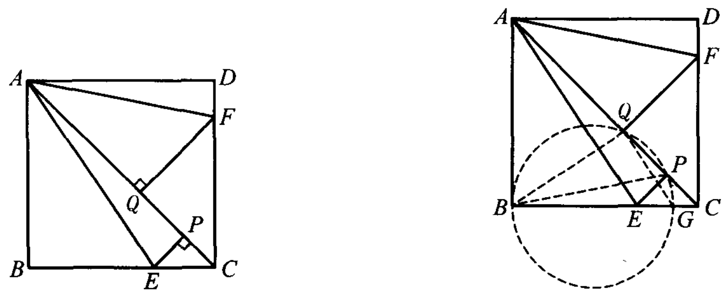
(4)圆内接四边形的判定定理的证明思路是什么？

**附：补充题**

1. 如图(1)，在正方形 $ABCD$ 中，$AC$ 是对角线，$\angle EAF=45^{\circ}$，$\angle EAC\neq\angle FAC$，$EP\perp AC$，$FQ\perp AC$，垂足分别为 $P$，$Q$. 那么过 $B$，$P$，$Q$ 三点的圆的圆心一定在 $BC$ 上.

提示：如图(2)，由 $\triangle APE\backsim\triangle ADF$，$\triangle ABE\backsim\triangle AQF$，得 $\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AD}{AP}$，$\dfrac{AF}{AE}=\dfrac{AQ}{AB}$，因此 $\dfrac{AD}{AP}=\dfrac{AQ}{AB}$.

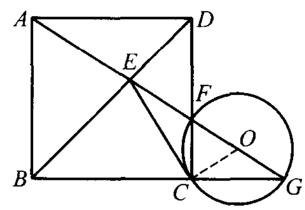
又因为 $AD=AB$，所以 $AB^2=AQ\cdot AP$. 所以 $\triangle ABQ\backsim\triangle APB$，所以 $\angle ABQ=\angle APB=\angle BGQ$，所以 $\angle BQG=90^{\circ}$. 因此 $BG$ 为直径，即圆心在 $BC$ 上.




(1) (2)

(第 1 题)

2. 已知：如图，从正方形 $ABCD$ 的顶点 $A$ 引一条直线与 $BD$，$CD$ 及 $BC$ 的延长线分别交于点 $E$，$F$，$G$. 求证：$CE$ 与 $\triangle CGF$ 的外接圆 $O$ 相切.



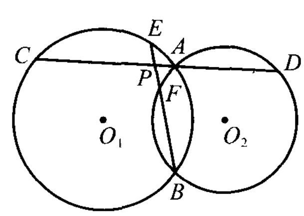

(第 2 题)

提示：连接 $OC$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\triangle ADE\backsim\triangle GBE\\ AD=CD\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{ED}{EB}=\dfrac{CD}{GB},\\ \angle CDE=\angle GBE\end{array}\right\}\Rightarrow \triangle CED\backsim\triangle GEB\Rightarrow$$

$\angle ECD=\angle G\Rightarrow\angle ECD+\angle FCO=\angle G+\angle CFG=90^{\circ}\Rightarrow EC\perp OC$.

3. 已知：如图，两圆相交于 $A$，$B$ 两点，过点 $A$ 的直线交 $\odot O_1$ 于点 $C$，交 $\odot O_2$ 于点 $D$，过点 $B$ 和 $CD$ 的中点 $P$ 作直线交 $\odot O_1$ 于点 $E$，交 $\odot O_2$ 于点 $F$. 求证：$PE=PF$.




(第 3 题)

提示：在 $\odot O_1$ 内，$PE\cdot PB=CP\cdot PA$.

而　$PF\cdot PB=PA\cdot PD$，$CP=PD$，

所以　$PE\cdot PB=PF\cdot PB$.

因此　$PE=PF$.

4. 已知：如图，两圆外切于点 $P$，直线 $AB$，$CD$，$MN$ 为两圆的公切线. 求证：$MP=NP$.

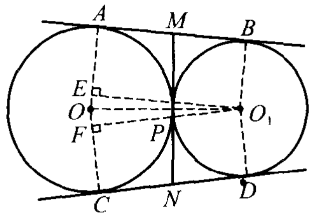
略证：连接 $OA$，$OC$，$O_1B$，$O_1D$，则四边形 $AOO_1B$ 和 $OCDO_1$ 都是直角梯形.

作 $O_1E\perp OA$，$O_1F\perp OC$，垂足分别为 $E$，$F$，则 $OE=OF=$ 两圆半径的差.

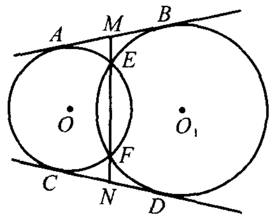
所以　$O_1E=O_1F$，即 $AB=CD$.

由于　$AM=MP=MB$，$CN=NP=ND$，

所以　$MP=NP$.




（第 4 题）




（第 5 题）

5. 在第 4 题中，如果两圆相交于点 $E$，$F$，直线 $EF$ 分别交 $AB$，$CD$ 于点 $M$ 和 $N$，那么结论 $ME=NF$ 成立吗？

提示：仿上题可证 $AB=CD$.

令 $ME=x$，$EF=a$，$NF=y$，则 $AM^2=x\cdot(a+x)=MB^2$.

所以　$AM=MB$.

同理　$CN=ND$.

所以　$AM=CN$.

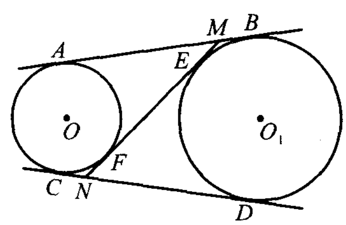
所以　$x(x+a)=y(y+a)$.

所以　$(x+y+a)(x-y)=0$.

所以　$x=y$，即 $ME=NF$.

6. 在第 4 题中，如果两圆外离，直线 $AB$，$CD$，$MN$ 仍为切线，那么结论 $ME=NF$ 成立吗？

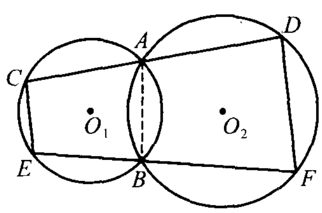
提示：仿第 5 题由切线长相等可知结论成立.



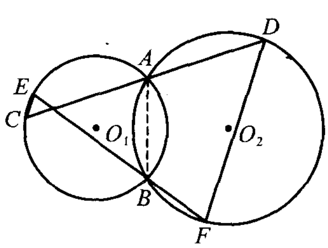

（第 6 题）

7. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 $A$，$B$ 两点，过 $A$，$B$ 两点分别作直线 $CAD$，$EBF$，那么 $CE/\!/DF$ 吗？

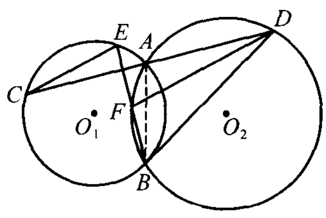
提示：由圆内接四边形的判定定理可知结论成立.




（1）



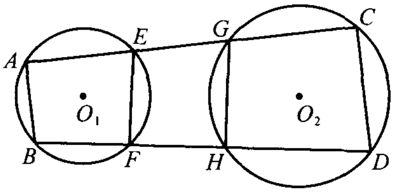

（2）



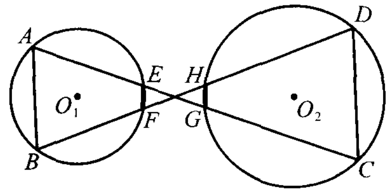

（3）

（第 7 题）

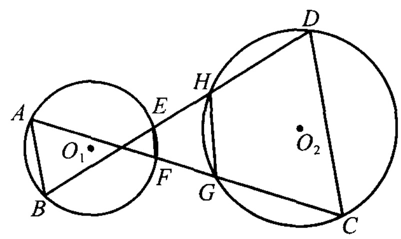
8. 如图，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相离，且 $AB /\!/ CD$，直线 $AC$，$BD$ 分别交 $\odot O_1$ 和 $\odot O_2$ 于 $E$，$G$，$F$，$H$ 四点，那么 $A$，$B$，$H$，$G$ 四点是否共圆？$E$，$F$，$D$，$C$ 四点是否共圆？




（1）




（2）



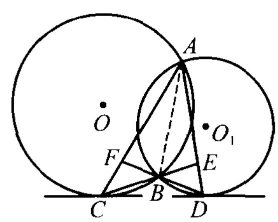

（3）

（第 8 题）

提示：$AB /\!/ CD \Rightarrow \angle B + \angle D = 180°$. $A$，$B$，$F$，$E$ 四点共圆 $\Rightarrow \angle B + \angle AEF = 180° \Rightarrow \angle AEF = \angle D \Rightarrow E$，$F$，$D$，$C$ 四点共圆.

同理　$A$，$B$，$H$，$G$ 四点也共圆.

9. 已知：如图，两圆相交于 $A$，$B$ 两点，$CD$ 为两圆的公切线，$C$，$D$ 为切点，直线 $CB$ 交 $AD$ 于点 $E$，直线 $DB$ 交 $AC$ 于点 $F$.




（第 9 题）

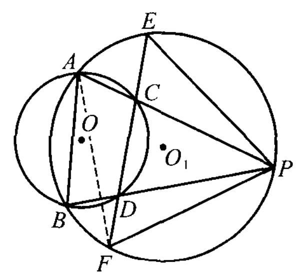
求证：$DE \cdot AD = DB \cdot DF$.

提示：连接 $AB$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle DCB = \angle CAB \\ \angle CDB = \angle DAB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle DAF = \angle CAB + \angle DAB = \angle DCB + \angle CDB$$

$= \angle DBE \Rightarrow \triangle DBE \backsim \triangle DAF$.

10. 已知：如图，$\odot O$ 与 $\odot O_1$ 相交于 $A$，$B$ 两点，$P$ 是 $\odot O_1$ 上一点，连接 $PA$，$PB$，交 $\odot O$ 于 $C$，$D$ 两点，直线 $CD$ 交 $\odot O_1$ 于 $E$，$F$ 两点，连接 $PE$，$PF$. 求证：$PE = PF$.




（第 10 题）

略证：连接 $AF$.

因为　$A$，$B$，$C$，$D$ 四点共圆，

所以　$\angle ABD = \angle PCD = \angle CEP + \angle EPC$.

又因为　$\angle ABD = \angle AFP = \angle EFP + \angle AFE$，

所以　$\angle CEP + \angle EPC = \angle EFP + \angle AFE$.

而　$\angle AFE = \angle APE$，

所以　$\angle CEP = \angle EFP$.

所以　$PE = PF$.

### *3.2 托勒密定理

本小节内容属选学内容，供有条件的学校选讲.

托勒密定理是圆内接四边形的一个重要性质，有较广泛的应用. 教科书的证明采用了构造等角、构造相似的方法，这是定理证明的关键，也是教学的难点. 教学时要引导学生好好体会这一证明方法的思路. 在讲解教科书中的证明方法时，可先从特殊的四边形入手，如在圆内接四边形 $ABCD$ 中，设 $AB=AD$（如图 6），这样可以直接得到 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$，$\triangle ADC \backsim \triangle BEC$，于是 $\frac{AB}{AC}=\frac{DE}{DC}$，$\frac{AD}{AC}=\frac{BE}{BC}$，从而得到 $AB \cdot DC=AC \cdot DE$，$AD \cdot BC=AC \cdot BE$.

将两式相加得到

$AB \cdot DC+AD \cdot BC=AC \cdot (BE+DE)=AC \cdot BD$.

然后抓住上述证明的关键是有 $\angle BCE=\angle ECD$，

因此有 $\triangle ABC \backsim \triangle DEC$，$\triangle ADC \backsim \triangle BEC$.

而在一般的圆内接四边形中不具备这一性质，因此可考虑在 $\angle ECD$ 中作出 $\angle FCD=\angle BCE$. 有了上述的铺垫，学生对定理的证明会感到自然一些.

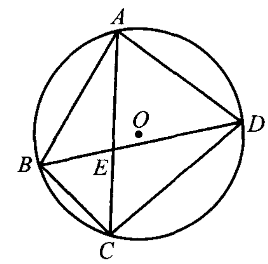


图 6

定理的证明还可以采用面积方法：

如图 7，设 $AC$ 与 $BD$ 相交于点 $E$，$\angle CED=\alpha$，于是

$$S_{\text{四边形}ABCD}=\frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \alpha.$$

不妨设 $AB<BC$. 在 $\overset{\frown}{BC}$ 上取一点 $P$，使 $CP=AB$，连接 $BP$，$AP$.

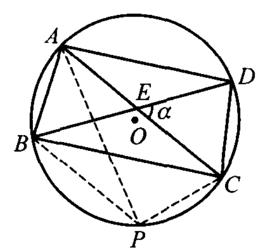


图 7

这样　$\angle BAC=\angle ACP$.

所以　$\triangle ABC \cong \triangle CPA$.

于是　$PA=BC$.

所以　$S_{\text{四边形}ABCD}=S_{\text{四边形}APCD}$.

又　$$S_{\text{四边形}APCD}=\frac{1}{2}AP \cdot AD \cdot \sin\angle PAD+\frac{1}{2}CD \cdot PC \cdot \sin\angle PAD$$
$$=\frac{1}{2}(AP \cdot AD+PC \cdot CD)\sin\angle PAD,$$

$$\begin{aligned}\alpha &=\angle EAD+\angle EDA\\ &=\angle EAD+\angle ECB\\ &=\angle EAD+\angle CBP\\ &=\angle EAD+\angle PAC\\ &=\angle PAD,\end{aligned}$$

所以　$\frac{1}{2}(AP \cdot AD+PC \cdot CD)=\frac{1}{2}AC \cdot BD$.

所以　$BC \cdot AD+AB \cdot CD=AC \cdot BD$.

**附:补充题**

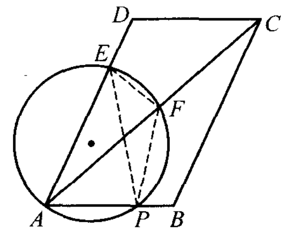



图 8

已知:如图 8,过点 $A$ 的圆交□$ABCD$ 的对角线 $AC$ 于点 $F$,交 $AD$,$AB$ 于点 $E$,$P$.

求证:$AP\cdot AB+AE\cdot AD=AF\cdot AC$.

证明:连接 $PE$,$PF$,$EF$.

在圆内接四边形 $APFE$ 中,

由托勒密定理,得

$$AP\cdot EF+AE\cdot PF=AF\cdot PE. \qquad (*)$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle FAP=\angle FEP\\ \angle ACB=\angle EAF=\angle EPF\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle PEF\backsim\triangle CAB\Rightarrow\frac{EF}{AB}=\frac{FP}{BC}=\frac{PE}{CA}=k$$

$\Rightarrow EF=k\cdot AB,FP=k\cdot BC=k\cdot AD,PE=k\cdot CA$.

因此 $\quad AP\cdot EF+AE\cdot PF=AP\cdot k\cdot AB+AE\cdot k\cdot AD$

$$=k(AP\cdot AB+AE\cdot AD),$$

$$AF\cdot PE=AF\cdot k\cdot AC=k\cdot AF\cdot AC.$$

由($*$)式可得

$$k(AP\cdot AB+AE\cdot AD)=k\cdot AF\cdot AC,$$

即 $$AP\cdot AB+AE\cdot AD=AF\cdot AC.$$

## 阅读材料　定长闭曲线最大面积问题

1. 在周长一定的封闭曲线中，圆的面积最大，这一性质在现实世界中有许多重要的应用. 通过对这一性质的证明，让学生感受“探索－发现－猜想－证明”的思维过程，即由合情推理发现问题，再利用演绎推理加以证明.

2. 用图形举例说明什么叫凸图形，什么叫凹图形. 再利用图形的直观性很自然地得出结论1、结论 2，突出由合情推理发现问题再对问题加以证明的研究过程.

3. 在引入时可做一个实验：将一条有固定长度的柔软细线的两头连接起来，形成一条任意形状的封闭曲线（如图 9）；将此曲线轻轻地放在一个蒙有肥皂膜的铁框上（如图 10）；用小针将曲线内的薄膜刺破，这条曲线立刻变成一个圆（如图 11）. 用物理学知识不难解释：当曲线内的薄膜消失后，由于外部肥皂膜表面张力的收缩作用，曲线所围成的面积就尽可能地张大. 由这个实验可以引出命题：在周长一定的封闭线中，圆的面积最大.

图　9

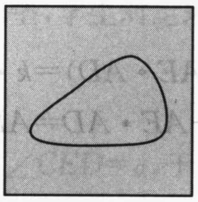


图　10

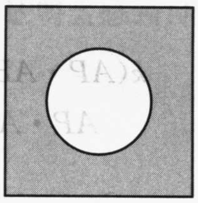


图　11

另外，也可先讲述一个历史上有关这一问题的有趣故事.

4. 对几何图形加上某种约束限制，要确定出最大面积（或体积）的几何图形的形状，这一类问题称为等周问题. 阅读材料所证明的问题是等周问题中的一个基本问题. 在中学数学里，有两个基本定理涉及等周问题：一个是本阅读材料所证明的定理，另一个是“在周长为定值的多边形中，以正多边形的面积最大”.

**附：补充题**

1. 试证：一切周长为 $l$ 的封闭曲线所围成的面积 $S$ 不超过$\frac{l^2}{4\pi}$.

证明：由于一切周长为 $l$ 的封闭曲线中，圆的面积最大，而圆的周长 $l=2\pi R$，

所以　$R=\frac{l}{2\pi}$.

所以　圆的面积为 $\pi\times\frac{l^2}{4\pi^2}=\frac{l^2}{4\pi}$.

因此　$S$ 不超过$\frac{l^2}{4\pi}$.

2. 证明：面积一定的所有平面图形中，圆的周长最短.

证明：如图，设 $A$ 为一个圆，$F$ 是面积与 $A$ 相等的任一平面图形.

另作⊙$B$,使其周长和图形 $F$ 的周长相等.

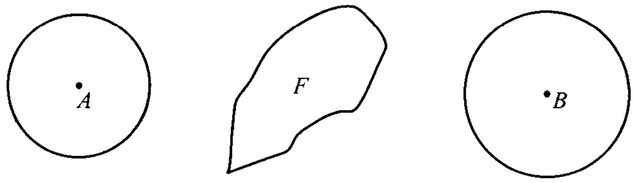
因为　在周长相等的图形中,圆的面积最大,

因此　$S_B > S_F$.

又因为　$S_F = S_A$,

故　$S_B > S_A$.

显然圆 $B$ 的周长大于圆 $A$ 的周长,即 $F$ 的周长大于 $A$ 的周长.




(第 2 题)

## 本章复习小结例题选讲

**例1** 已知：如图12，$PA$切$\odot O$于点$A$，割线$PBC$交$\odot O$于点$B$，$C$，过点$P$作$AB$的垂线，交$AB$于点$D$，交$AO$的延长线于点$E$，直线$CE$交$\odot O$于点$F$. 求证：

(1)$PD \cdot PE = PB \cdot PC$；

(2)$FB$是$\odot O$的直径.

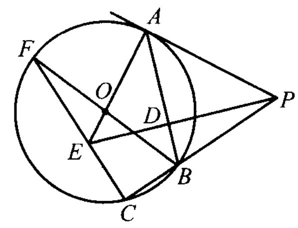


图 12

**分析理解：**(1)因为$EA \perp AP$，$PD \perp AB$，所以由射影定理可知$PA^2 = PD \cdot PE$.

而由切割线定理可知$PA^2 = PB \cdot PC$，

从而$PD \cdot PE = PB \cdot PC$.

(2)由(1)可知$PD \cdot PE = PB \cdot PC$，于是$\triangle PDB \backsim \triangle PCE$，因此$\angle PCE$为直角，所以$FB$为直径.

**例2** 已知：如图13，$\odot O$是$\triangle ABC$的外接圆，$\triangle ABC$的外角$\angle EAC$的平分线$AD$交$\odot O$于点$D$，连接$DB$，$DC$，$P$是$BC$延长线上一点，连接$DP$交$\odot O$于点$F$. 求证：

(1)$BD = DC$；

(2)$DC$是$\triangle PCF$的外接圆的切线.

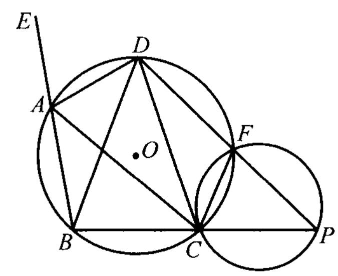


图 13

**分析理解：**(1)因为　$\angle EAD = \angle DCB = \angle DAC = \angle DBC$，

因此　$BD = DC$.

(2)要证$DC$是$\triangle PCF$的外接圆的切线，可考虑证明$DC^2 = DF \cdot DP = BD^2$. 为此可先证明$\triangle DCF \backsim \triangle DPC$或$\triangle DBF \backsim \triangle DPB$.

**例3** 已知：如图14，$\odot O$的直径$AB = d$，$P$是$AB$延长线上一点，$BP = a$，割线$PCD$交$\odot O$于点$C$，$D$，过点$P$作$AP$的垂线，交直线$AC$于点$E$，交直线$AD$于点$F$. 求证：

(1)$\angle PEC = \angle PDF$；

(2)$PE \cdot PF$为定值.

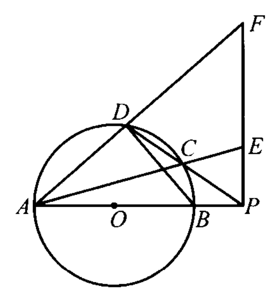


图 14

**分析理解：**(1)因为　$\angle ADB = \angle BPF = 90^\circ$，

所以　$D$，$B$，$P$，$F$四点共圆.

所以　$\angle DBA = \angle DFP$.

又因为　$\angle DBA = \angle DCA$，$\angle DCA = \angle ECP$，

所以　$\angle ECP = \angle DFP$.

因此　$\triangle PEC \backsim \triangle PDF$，

可得　$\angle PEC = \angle PDF$.

(2)由$\angle PEC=\angle PDF$,可证$E,F,D,C$四点共圆,因此有

$$PE\cdot PF=PC\cdot PD=PB\cdot PA=a(a+d)\text{(定值)}.$$

**例 4** 如图 15,$\triangle ABC$是边长为 6 的等边三角形,直线$l$绕点$A$转动. $\odot O_1$切$AB$于点$M$,切直线$BC$于点$D$,交直线$l$于$F,G$两点;$\odot O_2$切$AC$于点$N$,切直线$BC$于点$E$,交直线$l$于$H,I$两点. 设$\odot O_1$和$\odot O_2$的半径分别为$r_1,r_2$,$DE=10$.

(1)求$r_1+r_2$的值;

(2)当直线$l$绕点$A$转动到什么位置时,$AF\cdot AG+AH\cdot AI$的值最小?

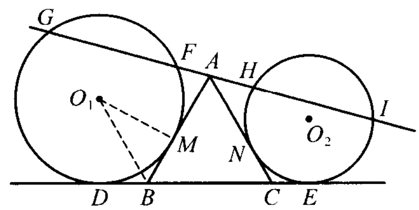


图 15

**分析理解:**(1)连接$O_1M,O_1B$.

在$\mathrm{Rt}\triangle O_1MB$中,$\angle O_1BM=60°$,$\dfrac{BM}{r_1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$,

所以 $BM=BD=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r_1$.

同理 $CN=CE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}r_2$.

因为 $DE=10,BC=6$

所以 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(r_1+r_2)=4$.

所以 $r_1+r_2=4\sqrt{3}$.

(2)$AF\cdot AG+AH\cdot AI$何时值最小的问题可转化为$AM^2+AN^2$何时值最小的问题,而$AM=6-BM,AN=6-CN$,因此

$$\begin{aligned}&AF\cdot AG+AH\cdot AI\\&=AM^2+AN^2\\&=(6-\frac{\sqrt{3}}{3}r_1)^2+(6-\frac{\sqrt{3}}{3}r_2)^2\\&=72-4\sqrt{3}(r_1+r_2)+\frac{1}{3}(r_1{}^2+r_2{}^2)\\&=72-4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}+\frac{1}{3}[r_1{}^2+(4\sqrt{3}-r_1)^2]\\&=24+\frac{1}{3}(2r_1{}^2-8\sqrt{3}r_1+48).\end{aligned}$$

所以 当$r_1=2\sqrt{3}$时,$AF\cdot AG+AH\cdot AI$有最小值,这时$r_1=r_2$,即$l/\!/DE$.

## 本章练习、习题、复习题参考答案或提示

**P5 练习**

1. (1)位似变换;(2)(3)反射变换;(4)平移变换;(5)反射、平移、旋转 90°.

2. 略.

**P7 练习**

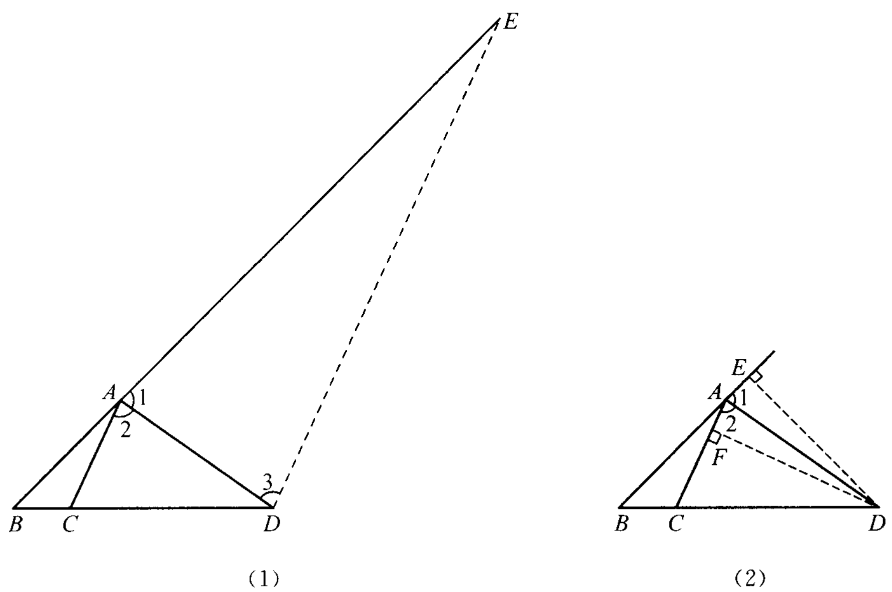
1. $\frac{BD}{EC}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{EC}{AC}=\frac{BD}{AB}\Rightarrow\frac{AC-EC}{AC}=\frac{AB-BD}{AB}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}$.

2. 成立.

证法一:如图(1),过点 $D$ 作 $CA$ 的平行线交 $BA$ 延长线于点 $E$.

$$CA // DE\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\angle 1=\angle 2=\angle 3\Rightarrow AE=DE \\ \frac{BA}{BE}=\frac{AC}{DE}\Rightarrow\frac{BA}{AC}=\frac{BE}{DE}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\frac{BA}{AC}=\frac{BE}{AE} \\ CA // DE\Rightarrow\frac{BE}{AE}=\frac{BD}{DC}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$




(第 2 题)

证法二:如图(2),过点 $D$ 分别作 $AB$,$AC$ 的垂线,垂足为 $E$,$F$.

$\angle 1=\angle 2\Rightarrow DE=DF$. $\quad\frac{BD}{DC}=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ADC}}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot DE}{\frac{1}{2}AC\cdot DF}=\frac{AB}{AC}$.

3. $AB /\!/ CD \Rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{FD}{FM}=\dfrac{DC}{MB} \\ \dfrac{EC}{EM}=\dfrac{DC}{AM} \end{cases} \atop MB=AM \right\} \Rightarrow \dfrac{FD}{FM}=\dfrac{EC}{EM} \Rightarrow \triangle MCD \backsim \triangle MEF \Rightarrow EF /\!/ CD \Rightarrow EF /\!/ AB.$

**P9 练习**

1. (1) $CD=6$ cm, $AC=3\sqrt{13}$ cm; (2) $DB=9$ cm, $CD=12$ cm.

2. (1)根据射影定理，得 $AC^2=AD \cdot AB$, $CB^2=DB \cdot AB$，所以$\dfrac{AC^2}{CB^2}=\dfrac{AD}{DB}$.

(2) $\mathrm{Rt}\triangle ACD \backsim \mathrm{Rt}\triangle ABC \Rightarrow \dfrac{AD}{AC}=\dfrac{CD}{BC} \Rightarrow AC \cdot CD=CB \cdot AD.$

**P9 习题 1—1(A 组)**

1. $\left.\begin{array}{l} EF /\!/ BC \Rightarrow \dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AF}{AC} \\ FG /\!/ AD \Rightarrow \dfrac{FG}{AD}=\dfrac{CF}{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EF}{BC}+\dfrac{FG}{AD}=\dfrac{AF+CF}{AC}=\dfrac{AC}{AC}=1.$

2. $\left.\begin{array}{l} EF /\!/ AD \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{EH}{AD}=\dfrac{BH}{BD} \\ \dfrac{GF}{AD}=\dfrac{CF}{CD} \end{cases} \\ AB /\!/ EF /\!/ BC \Rightarrow \dfrac{BH}{BD}=\dfrac{CF}{CD} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{EH}{AD}=\dfrac{GF}{AD} \Rightarrow EH=GF.$

3. $\left.\begin{array}{l} EF /\!/ AB \Rightarrow \dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CE}{CA} \\ EG /\!/ AD \Rightarrow \dfrac{CG}{CD}=\dfrac{CE}{CA} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{CF}{CB}=\dfrac{CG}{CD} \Rightarrow \triangle CFG \backsim \triangle CBD \Rightarrow FG /\!/ BD.$

4. 证法一：设 $DE$ 与 $AM$ 的交点为 $N$，则

$DE /\!/ BC \Rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{DN}{CM}=\dfrac{NO}{OM} \\ \dfrac{NE}{BM}=\dfrac{NO}{OM} \end{cases}\right\} \Rightarrow \dfrac{NE}{BM}=\dfrac{DN}{CM}.$ ①

$DE /\!/ BC \Rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{NE}{CM}=\dfrac{AN}{AM} \\ \dfrac{DN}{BM}=\dfrac{AN}{AM} \end{cases}\right\} \Rightarrow \dfrac{DN}{BM}=\dfrac{NE}{CM}.$ ②

①×②，得$\dfrac{DN \cdot NE}{BM^2}=\dfrac{DN \cdot NE}{CM^2} \Rightarrow BM^2=CM^2 \Rightarrow BM=CM.$

证法二：过点 $O$ 作 $BC$ 的平行线，交 $AB$ 于点 $G$，交 $AC$ 于点 $H$.

$\dfrac{GO}{BC}=\dfrac{DO}{DC}=\dfrac{EO}{EB}=\dfrac{OH}{BC} \Rightarrow GO=OH.$

$$GH /\!/ BC \Rightarrow \frac{GO}{BM}=\frac{AO}{AM}=\frac{OH}{CM}\Rightarrow BM=CM.$$

**P10　习题 1—1(B 组)**

1. 证法一：过点 $D$ 作 $AB$ 的平行线，交 $AC$ 于点 $G$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DG /\!/ CF\\ BD=DC\end{array}\right\}\Rightarrow BG=GF\\ DG /\!/ CF\Rightarrow \dfrac{AF}{GF}=\dfrac{AE}{DE}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AF}{\frac{1}{2}BF}=\frac{AE}{DE}\Rightarrow AE\cdot BF=2DE\cdot AF.$$

证法二：过点 $A$ 作 $CF$ 的平行线，交 $BC$ 的延长线于点 $G$.

$$AG /\!/ CF\Rightarrow\left.\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AF}{BF}=\dfrac{GC}{BC}=\dfrac{GC}{2DC}\\ \dfrac{AE}{DE}=\dfrac{GC}{DC}\end{array}\right.\right\}\Rightarrow\frac{AF}{BF}=\frac{AE}{2DE}\Rightarrow AE\cdot BF=2DE\cdot AF.$$

证法三：过点 $B$ 作 $FC$ 的平行线，交 $AD$ 的延长线于点 $G$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}BG /\!/ FC\\ BD=DC\end{array}\right\}\Rightarrow GD=DE\\ BG /\!/ FC\Rightarrow \dfrac{AF}{BF}=\dfrac{AE}{EG}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{AF}{BF}=\frac{AE}{2DE}\Rightarrow AE\cdot BF=2DE\cdot AF.$$

注：该题有多种证法，可用它来训练学生转移比例线段的能力.

2. 证法一：过点 $A$ 作 $DC$ 的平行线，交 $FM$ 于点 $G$；过点 $B$ 作 $DC$ 的平行线，交 $FM$ 的延长线于点 $H$.

$$\left.\begin{array}{l}AG /\!/ DC\Rightarrow\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{DN}{AG}\\ BH /\!/ DC\Rightarrow\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{CN}{BH}\\ \left.\begin{array}{l}AG /\!/ BH\\ AM=MB\end{array}\right\}\Rightarrow AG=BH\\ \qquad\qquad DN=CN\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{ED}{EA}=\frac{FC}{FB}\Rightarrow\frac{ED}{FC}=\frac{EA}{FB}.$$

证法二：过点 $D$ 作 $FM$ 的平行线，交 $AB$ 于点 $G$；过点 $C$ 作 $FM$ 的平行线，交 $AB$ 于点 $H$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DG /\!/ FM /\!/ CH\\ DN=CN\end{array}\right\}\Rightarrow GM=MH\\ DG /\!/ FM\Rightarrow\dfrac{ED}{EA}=\dfrac{GM}{AM}\\ CH /\!/ FM\Rightarrow\dfrac{FC}{FB}=\dfrac{MH}{BM}\\ AM=MB\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{ED}{EA}=\frac{FC}{FB}\Rightarrow\frac{ED}{FC}=\frac{EA}{FB}.$$

**P13　练习**

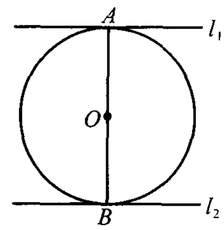
1. 连接 $BD$.

$$\left.\begin{array}{l} AD\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\Rightarrow\angle ABD=90^\circ \\ AE\perp BC\Rightarrow\angle AEC=90^\circ \\ \angle D=\angle C \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle ABD\backsim\triangle AEC\Rightarrow\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}\Rightarrow AB\cdot AC=AD\cdot AE.$$

2. 略.

**P16　练习**



(第 1 题)

1. 如图，$\left.\begin{array}{l} AB\text{ 是}\odot O\text{ 的直径} \\ l_1,l_2\text{ 分别切}\odot O\text{ 于点 }A,B \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{cases} AB\perp l_1 \\ AB\perp l_2 \end{cases}\right\}\Rightarrow l_1/\!/l_2.$

2. $\angle ABD=45^\circ.$

3. 连接 $OD$.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA=OD\Rightarrow\angle A=\angle ODA \\ OC/\!/AD\Rightarrow\begin{cases}\angle COB=\angle A \\ \angle ODA=\angle COD\end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow\angle COB=\angle COD \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad OD=OB,OC\text{ 是公共边} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow\triangle ODC\cong\triangle OBC\Rightarrow\angle ODC=\angle OBC \\ BC\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }B\Rightarrow\angle OBC=90^\circ \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\angle ODC=90^\circ\Rightarrow CD\text{ 是}\odot O\text{ 的切线}.$$

**P18　练习**

1. 连接 $OB$.

$$\left.\begin{array}{r} \angle 2=\frac{1}{2}\angle O \\ \text{在 Rt}\triangle AOB\text{ 中},BC\perp OA\Rightarrow\angle ABC=\angle O \end{array}\right\}\Rightarrow\angle 1=\angle 2.$$

2. (1)$AB$ 是$\odot O$ 的直径$\Rightarrow\angle ACB=90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow\angle B+\angle CAB=90^\circ \\ \angle CAD=\angle B \end{array}\right\}\Rightarrow\angle CAD+\angle CAB=90^\circ\Rightarrow AD\text{ 是}\odot O\text{ 的切线}.$$

(2)$\left.\begin{array}{l}\text{作直径 }AE,\text{连接 }CE\Rightarrow\angle E=\angle B \\ \angle CAD=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow\angle CAD=\angle E.$

由(1)可知 $AD$ 是$\odot O$ 的切线.

**P20　练习**

1. $$\left.\begin{array}{l} AE\text{ 是}\odot O\text{ 的切线}\Rightarrow AE^2=AC\cdot AD \\ BF\text{ 是}\odot O\text{ 的切线}\Rightarrow BF^2=BD\cdot BC \\ AC=BD\Rightarrow AD=AC+CD=BD+CD=BC \end{array}\right\}\Rightarrow AE^2=BF^2\Rightarrow AE=BF.$$

2. 提示：$AB^2=BC\cdot BE\Rightarrow AB=3;CF=2,FE=6;AF=\dfrac{CF\cdot FE}{FD}=4.$

**P21　练习**

1. 因为　$PN$ 切$\odot O$ 于点 $P$，

所以　$PN^2=NB\cdot NA$.

又因为　$NBA$ 和 $NMQ$ 是$\odot Q_1$ 的两条割线，

所以　$NM\cdot NQ=NB\cdot NA$.

所以　$PN^2=NM\cdot NQ$.

2. 设 $PF$ 与$\odot O$ 的另一交点为 $G$.

因为　直径 $AB\perp$ 弦 $PG$，

所以　$DP=DG$.

所以　$DP^2=DP\cdot DG=AD\cdot DB$.

因为　$\angle ACB=\angle FDB=90^\circ$，

所以　$\angle A=\angle F$.

所以　$\triangle ADE\backsim\triangle FDB$.

所以　$\dfrac{AD}{DE}=\dfrac{FD}{DB}$.

所以　$AD\cdot DB=DE\cdot DF$.

所以　$DP^2=DE\cdot DF$.

**P22　习题 1—2(A 组)**

1. 设 $AM$ 与$\odot O$ 的另一交点为 $N$.

因为　直径 $BC\perp$ 弦 $MN$，

所以　$DM=DN$.

所以　$DM^2=DM\cdot DN=DB\cdot DC$

因为　$\angle BEC=90^\circ$，

所以　$\angle EBC=\angle DAC$.

所以　$\mathrm{Rt}\triangle BDH\backsim\mathrm{Rt}\triangle ADC$.

所以　$\dfrac{DH}{DB}=\dfrac{DC}{DA}$.

所以　$DB\cdot DC=DH\cdot DA$.

所以　$DM^2=DH\cdot DA$.

2. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}PA\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }A\\ MBC\text{ 是}\odot O\text{ 的割线}\end{array}\right\}\Rightarrow MA^2=MB\cdot CM\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad MP=MA\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow MP^2=MB\cdot CM\Rightarrow\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{CM}{MP}\\ \angle PMB=\angle PMC\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle PMB\backsim\triangle CMP\Rightarrow\angle MPB=\angle MCP.$$

3. $$\left.\begin{array}{l}\angle AOB=2\angle ACB\\ \angle BOC=2\angle BAC\\ \angle AOB=2\angle BOC\end{array}\right\}\Rightarrow\angle ACB=2\angle BAC.$$

4. 提示：证明$\angle BAE=\angle DAC$，从而 Rt$\triangle BAE\backsim$Rt$\triangle DAC$，因此$\frac{AB}{AE}=\frac{AD}{AC}$，即 $AB\cdot AC=AE\cdot AD$.

5. 提示：由勾股定理可知 $BA=5\text{cm}$.

由 $BC$ 是$\odot O$ 的切线可知，$BC^2=BD\cdot BA$，$BD=\frac{BC^2}{BA}=\frac{16}{5}(\text{cm})$.

另外，也可以连接 $CD$，利用射影定理求解.

6. 连接 $FC$，$AC$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DC\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\Rightarrow DF\perp FC\\ DF\perp AB\end{array}\right\}\\ \Rightarrow AB/\!/FC\Rightarrow\angle BAC=\angle ACF\\ \angle BDC=BAC,\angle ADF=\angle ACF\end{array}\right\}\Rightarrow\angle ADE=\angle BDC.$$

另外，也可以连接 $BC$.

**P23　习题 1—2(B 组)**

1. $$\left.\begin{array}{l}PF\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }E\\ PDA\text{ 是}\odot O\text{ 的割线}\end{array}\right\}\Rightarrow PF^2=PD\cdot PA.$$

因为　$BC/\!/PE$，

所以　$\angle PED=\angle C$.

又因为　$\angle C=\angle A$，

所以　$\angle PED=\angle A$.

因为　$\angle EPD=\angle EPA$，

所以　$\triangle PED\backsim\triangle PAE$.

所以　$\frac{PE}{PD}=\frac{PA}{PE}$.

所以　$PE^2=PD\cdot PA$.

所以　$PE^2=PF^2$.

所以　$PE=PF$.

2. (1)连接 $DO$.

因为　$OD=OA$，

所以　$\angle ODA=\angle OAD$.

又因为　$AB=BC$，

所以　$\angle OAD=\angle C$.

所以　$\angle ODA=\angle C$.

所以　$DO/\!/BC$.

因为　$DE\perp BC$，

所以　$DO\perp DE$.

所以　$DE$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)连接 $BD$.

因为　$AB$ 是$\odot O$ 的直径，

所以　$\angle BDA=90°$.

所以　$\angle BDC=90°$.

因为　$DE\perp BC$，

所以　$DE^2=BE\cdot CE$.

又因为　$DE$ 切$\odot O$ 于点 $D$，$EFA$ 是$\odot O$ 的割线，

所以　$DE^2=EF\cdot BA$.

所以　$BE\cdot CE=EF\cdot EA$.

3. (1)连接 $OD$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}OB=OD\Rightarrow\angle OBD=\angle ODB\\ AB=AC\Rightarrow\angle ABC=\angle ACB\end{array}\right\}\Rightarrow\angle ODB=\angle ACB\Rightarrow OD\parallel AC\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad DE\perp AC\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow OD\perp DE\Rightarrow DE$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)连接 $AD$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}DE\perp AC\\ AB\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\Rightarrow AD\perp DC\end{array}\right\}\Rightarrow DE^2=AE\cdot EC\\ DE\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }D\Rightarrow DE^2=EF\cdot BE\end{array}\right\}\Rightarrow AE\cdot EC=EF\cdot BE.$$

**P26　练习**

1. $\angle D=80°$.

2. 作$\triangle ABC$ 的外接圆 $O$，在$\overset{\frown}{AB}$上取一点 $E$，构成圆内接四边形 $ACBE$，且$\angle C$ 与$\angle E$ 为其内对角，则$\angle C+\angle E=180°$.

又因为　$\angle C=\angle D$，

所以　$\angle D+\angle E=180°$.

所以　点 $D$ 在 $A,C,B,E$ 四点所确定的圆上，故 $A,B,C,D$ 四点共圆.

3. (1)因为　$AP\perp BC$，$D$ 是 $AC$ 的中点，

所以　$PD=DA$.

同理　$PF=FA$.

所以　$\angle DAP=\angle DPA$，$\angle FAP=\angle FPA$.

所以　$\angle DPF=\angle DAF$，

即　$\angle DPF=\angle BAC$.

(2)因为　$D,E,F$ 分别是$\triangle ABC$ 三边的中点，

所以　四边形 $ADEF$ 为平行四边形.

所以　$\angle DEF=\angle DAF=\angle DPF$.

根据第 2 题的结论可知，$E,F,D,P$ 四点共圆.

## P28 练习

1. 连接 $AC,BD$. 根据托勒密定理,得

$$PA\cdot CD+AD\cdot PC=AC\cdot PD,$$
$$PB\cdot CD+PD\cdot BC=PC\cdot BD.$$

两式相除,得$\dfrac{(PA+PC)\cdot CD}{(PB+PD)\cdot CD}=\dfrac{PD}{PC}$.

2. 提示:应用切线长定理列出方程组,可求出四边的长分别为 10 cm,8 cm,14 cm,16 cm.

## P28 习题 1—3(A 组)

1. (1)$\left.\begin{array}{l}DF\perp AB\\ GE\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow\angle FDG=\angle GEF=90^\circ\Rightarrow D,E,F,G$ 四点共圆.

(2)证法一:连接 $GC,BF$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}AD=DB\\ DF\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow AF=BF\Rightarrow\angle A=\angle FBG\\ \text{同理}\angle A=\angle FCG\end{array}\right\}\Rightarrow\angle FBG=\angle FCG\Rightarrow G,B,C,F\text{ 四点共圆.}$$

证法二:连接 $DE,GF$.

因为 $D,E,F,G$ 四点共圆,

所以 $\angle AED=\angle AGF$.

又因为 $AD=DB,AE=EC$,

所以 $DE/\!/BC$.

所以 $\angle AED=\angle ACB$.

所以 $\angle AGF=\angle ACB$.

所以 $G,B,C,F$ 四点共圆.

2. 因为 四边形 $ADBE$ 是$\odot O$ 的内接四边形,

所以 $\angle FEB=\angle D$.

又因为 $A,C,B,F$ 四点共圆,

所以 $\angle DCB=\angle F$.

所以 $\triangle CDB\backsim\triangle FEB$.

3. $$\left.\begin{array}{l}\angle DCA=\angle DBA\\ DF/\!/AB\Rightarrow FDE=\angle DBA\\ AE/\!/CD\Rightarrow\angle FAE=\angle DCA\end{array}\right\}\Rightarrow\angle FDE=\angle FAE\Rightarrow D,A,E,F\text{ 四点共圆}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle DAF=\angle DEF\\ \angle DAF=\angle DBC\end{array}\right\}\Rightarrow\angle DEF=\angle DBC\Rightarrow EF/\!/BC.$$

4. 证法一:连接 $A_2A_7,A_2A_4,A_4A_7$. 易证 $A_1A_3=A_2A_4=A_2A_7,A_4A_7=A_1A_4$.

$$\left.\begin{array}{l}\text{在圆内接四边形 }A_2A_1A_7A_4\text{ 中},A_2A_7\cdot A_1A_4=A_1A_2\cdot A_4A_7+A_1A_7\cdot A_2A_4\\ A_1A_2=A_1A_7\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow A_1A_3 \cdot A_1A_4 = A_1A_2 \cdot A_1A_4 + A_1A_2 \cdot A_1A_3 \Rightarrow \dfrac{1}{A_1A_2} = \dfrac{1}{A_1A_3} + \dfrac{1}{A_1A_4}$.

证法二:过点 $A_2$ 作 $A_3A_4$ 的平行线,交 $A_1A_3$ 于点 $B$,交 $A_1A_4$ 于点 $C$.

易证四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 为等腰梯形,四边形 $A_2CA_4A_3$ 为菱形,$\triangle A_1A_2B$ 为等腰三角形. 所以 $\dfrac{A_1C}{A_1A_4} = \dfrac{A_1B}{A_1A_3}$,即

$$\frac{A_1A_4 - A_1A_2}{A_1A_4} = \frac{A_1A_2}{A_1A_3}.$$

整理,得
$$\frac{1}{A_1A_2} = \frac{1}{A_1A_3} + \frac{1}{A_1A_4}.$$

5. 提示:应用切线长定理列出方程组.

**P29 习题 1—3(B 组)**

1. 证法一:连接 $AC, AN$.

$$\left.\begin{array}{r} AM^2 = MD \cdot MC \Rightarrow \dfrac{AM}{MD} = \dfrac{MC}{AM} \\ \angle AMD = \angle AMC \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \triangle AMD \backsim \triangle CMA \Rightarrow \angle ACM = \angle MAD \\ \angle ACM = \angle ANM \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \angle MAD = \angle ANM \\ \angle MAD + \angle AMN = 90^\circ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle ANM + \angle AMN = 90^\circ \Rightarrow \angle MAN = 90^\circ \Rightarrow MN$ 是$\odot O$ 的直径.

证法二:连接 $AC, NC, AN$. 由证法一可知$\triangle AMD \backsim \triangle CMA$.

$$\left.\begin{array}{l} \triangle AMD \backsim \triangle CMA \Rightarrow \angle MDA = \angle MAC \\ \angle MAC = \angle MNC \end{array}\right\} \Rightarrow \angle MDA = \angle MNC$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow G, D, C, N \text{ 四点共圆} \Rightarrow \angle DCN + \angle NGD = 180^\circ \\ \angle DCN + \angle MAN = 180^\circ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow \angle MAN = \angle NGD = 90^\circ \Rightarrow MN$ 是$\odot O$ 的直径.

2. 连接 $BE$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAE = \angle EAC \\ \angle E = \angle C \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABE \backsim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AC}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB \cdot AC = AD \cdot AE \\ BD \cdot DC = AD \cdot DE \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$AD^2 + BD \cdot DC = AD^2 + AD \cdot DE = AD(AD + DE) = AD \cdot AE = AB \cdot AC$

$\Rightarrow AD^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$.

**P33 复习题一(A 组)**

1. $\left.\begin{array}{l}CE\perp AB\\EH\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow EH^2=BH\cdot HC.$

$\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\FH\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow F,D,H,B$ 四点共圆

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle F=\angle GBH\\\angle GHB=\angle FHC\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle FHC\backsim\triangle BHG$

$\Rightarrow\dfrac{FH}{HC}=\dfrac{BH}{HG}\Rightarrow BH\cdot HC=HG\cdot FH.$

因此 $EH^2=HG\cdot FH.$

2. $\left.\begin{array}{l}AB\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\\CD\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow CE=ED.$

$\left.\begin{array}{l}CE\perp AB\\EF\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow CE^2=CF\cdot CA.$

另一方面 $CE^2=CE\cdot ED=AE\cdot EB$,所以 $CF\cdot CA=AE\cdot EB.$

3. $FG$ 切$\odot O$ 于点 $G\Rightarrow FG^2=BF\cdot FA.$

$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}A,B,C,D\text{ 四点共圆}\Rightarrow\angle EAF=\angle DCE\\EF/\!/CD\Rightarrow\angle BEF=\angle DCE\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BEF=\angle EAF\\\angle AFE=\angle EFB\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\triangle FAE\backsim\triangle FEB\Rightarrow\dfrac{FA}{EF}=\dfrac{FE}{BF}\Rightarrow EF^2=BF\cdot FA.$

所以 $EF^2=FG^2$,从而 $EF=FG.$

4. 连接 $BG.$

$\left.\begin{array}{l}AD\perp BC\\BE\perp AC\end{array}\right\}\Rightarrow A,E,D,B$ 四点共圆

$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle EAD=\angle EBD\\\angle EAD=\angle CBG\end{array}\right\}\Rightarrow\angle EBD=\angle CBG\\\qquad\qquad BD\perp HG\Rightarrow\angle BDH=\angle BDG=90^\circ\\\qquad\qquad BD=BD\end{array}\right\}$

$\Rightarrow\triangle BDH\cong\triangle BDG\Rightarrow DH=DG.$

**P33 复习题一(B 组)**

1. 连接 $ED.$

$\left.\begin{array}{l}AF\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }A\Rightarrow\angle FAE=\angle DCB\\\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\FE\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow\angle AEF=\angle BDC=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle F=\angle DBC.$

$\left.\begin{array}{l}BD\perp AC\\CE\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow D,E,B,C$ 四点共圆$\Rightarrow\angle DEC=\angle DBC.$

因此$\angle DEC=\angle F\Rightarrow DE/\!/AF\Rightarrow\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{FE}{EC}$.

2. 过点 $A$ 作 $EM$ 的平行线，交 $FD$ 的延长线于点 $H$.

$$\odot O\text{内切于}\triangle ABC\Rightarrow\begin{cases}AE=AD,\\ DC=CF,\\ BE=BF.\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}EM/\!/BC\Rightarrow\dfrac{EG}{BE}=\dfrac{EG}{BF}=\dfrac{AE}{AB}\Rightarrow\dfrac{EG}{AE}=\dfrac{BE}{AB}\\ EM/\!/BC/\!/AH\Rightarrow\left.\begin{cases}\dfrac{GM}{AH}=\dfrac{FG}{FA}\\ \dfrac{BE}{AB}=\dfrac{FG}{FA}\end{cases}\right\}\Rightarrow\dfrac{GM}{AH}=\dfrac{BE}{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{EG}{AE}=\dfrac{GM}{AH}\\ \left.\begin{array}{r}BC/\!/AH\Rightarrow\dfrac{AD}{DC}=\dfrac{AH}{CF}\\ DC=CF\end{array}\right\}\Rightarrow AD=AH=AE\end{array}\right\}\Rightarrow EG=GM.$$

3. $$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{四边形 }ABCD\text{ 是平行四边形}\\ \angle D=60^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow\angle B=60^\circ\\ AE\perp BC\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BAE=30^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l}AE\perp BC\\ CF\perp AB\end{array}\right\}\Rightarrow A,F,E,C\text{ 四点共圆}$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\angle BEF=\angle BAC\\ \angle B=\angle B\end{array}\right\}\Rightarrow\triangle BEF\backsim\triangle BAC\Rightarrow\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{EF}{AC}\\ \text{在 Rt}\triangle AEB\text{ 中，}\angle BAE=30^\circ\Rightarrow\dfrac{BE}{BA}=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\dfrac{EF}{AC}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow AC=2EF.$$

4. $$\left.\begin{array}{r}FG/\!/BC\Rightarrow\dfrac{FG}{BC}=\dfrac{AF}{AB}\\ AF=AD\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{FG}{BC}=\dfrac{AD}{AB}.$$

$\angle B$ 是 Rt$\triangle CBE$ 和 Rt$\triangle ABD$ 的公共角

$\Rightarrow\triangle CBE\backsim\triangle ABD\Rightarrow\dfrac{CE}{BC}=\dfrac{AD}{AB}$.

因此$\dfrac{FG}{BC}=\dfrac{CE}{BC}\Rightarrow FG=CE$.

**P34　复习题一（C组）**

1. (1) $$\left.\begin{array}{l}PA\text{ 和 }PB\text{ 是}\odot O\text{ 的切线}\Rightarrow\angle E\Rightarrow\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}{}^\circ=\angle POB\\ AE/\!/PD\Rightarrow\angle PFB=\angle E\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow\angle PFB=\angle POB\Rightarrow P,F,O,B$ 四点共圆.

(2)$P,F,O,B$ 四点共圆$\Rightarrow\angle OFD=\angle OBP=90^\circ\Rightarrow CF=FD$.

2. (1)连接 $DB$.

$$AB\text{ 是}\odot O\text{ 的直径}\Rightarrow\left.\begin{cases}\angle ADB=90^\circ\\ \angle ABD=\angle ACD\\ \text{在 }\mathrm{Rt}\triangle ABD\text{ 与 }\mathrm{Rt}\triangle AFG\text{ 中},\angle ABD=\angle AFE\end{cases}\right\}$$

$\Rightarrow\angle ACD=\angle AFE$

$\Rightarrow C,D,F,E$ 四点共圆.

$$\left.\begin{array}{l}(2)C,D,F,E\text{ 四点共圆}\Rightarrow GE\cdot GF=GC\cdot GD\\ GH\text{ 切}\odot O\text{ 于点 }H\Rightarrow GH^2=GC\cdot GD\end{array}\right\}\Rightarrow GH^2=GE\cdot GF.$$

3. (1)过点 $P$ 作两圆的公切线，交 $AB$ 于点 $G$，交 $CD$ 于点 $F$.

$\angle GBP=\angle BPG=\angle CPF=\angle PCF\Rightarrow AB/\!/CE$.

(2)连接 $PD$.

$AB/\!/CE\Rightarrow\angle BDP=\angle ABP=\angle BCD$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\triangle BDP\backsim\triangle BCD\Rightarrow BD^2=BC\cdot BP\\ AB\text{ 切}\odot O_1\text{ 于点 }A\Rightarrow AB^2=BP\cdot BC\end{array}\right\}\Rightarrow BD=AB\\ \left.\begin{array}{l}AB/\!/CE\Rightarrow\angle ABD=\angle BDE\\ AB\text{ 切}\odot O_2\text{ 于点 }B\Rightarrow\angle E=\angle ABD\end{array}\right\}\Rightarrow\angle BDE=\angle E\Rightarrow BD=BE\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB=BD=BE$.

4. 本题证法较多，这里介绍两种证明方法.

证法一：过点 $A$ 作 $LN$ 的平行线，交 $BD$ 于点 $H$.

$$\left.\begin{array}{l}MN/\!/AH\\ AM=BM\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}HN=NB\\ \dfrac{HN}{ND}=\dfrac{AL}{LD}\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\dfrac{NB}{ND}=\dfrac{AL}{LD}\\ DC/\!/AB\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{AE}{DC}=\dfrac{AL}{LD}\\ \dfrac{BF}{DC}=\dfrac{NB}{ND}\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{AE}{DC}=\frac{BF}{DC}\Rightarrow AE=BF.$$

$$\left.\begin{array}{l}AE=BF\\ AC=CB\Rightarrow\angle CAE=\angle CBF\end{array}\right\}$$

$\Rightarrow\triangle CAE\cong\triangle CBF\Rightarrow\angle ACL=\angle BCF$.

证法二：过点 $B$ 作 $AD$ 的平行线，交 $LN$ 的延长线于点 $G$.

$M$ 是 $AB$ 的中点$\Rightarrow BG=AL$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BN}{ND}=\dfrac{BG}{DL}=\dfrac{AL}{DL} \\ DC /\!/ AB\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{BN}{ND}=\dfrac{BF}{DC}\\ \dfrac{AE}{DC}=\dfrac{AL}{DL}\end{array}\right.\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{BF}{DC}=\frac{AE}{CD}\Rightarrow AE=BF.$$

$$\left.\begin{array}{l}AE=BF\\ AC=CB\Rightarrow\angle CAE=\angle CBF\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\triangle CAE\cong\triangle CBF\Rightarrow\angle ACL=\angle BCF.$$

# 第二章　圆锥曲线

## 一、教学目标

1. 初步掌握平面截圆锥面所得交线的几何特征，掌握椭圆、双曲线、抛物线的几何性质及圆锥曲线的统一定义，了解圆锥曲线的应用价值.

2. 逐步探索平面与球面、平面与圆柱面、平面与圆锥面相截所得交线的形状和几何性质，经历由一类曲线提出其共同性质，再根据这些性质确定它是什么曲线的过程，感悟、体会用综合几何方法探索几何图形性质的思想方法.

3. 对平面截圆锥面所得曲线的研究是一个由具体到抽象、由特殊到一般的过程；对圆锥曲线共性的研究运用了运动、变化的观点. 因此，本章的学习有助于培养学生的探究意识，加强学生“科学观”的形成.

## 二、编写意图与特色

圆锥曲线的研究起源于古希腊，它与几何学三大问题之一的倍立方问题有关. 本章研究圆锥曲线使用的是综合几何的方法，用一个平面去截圆锥面，研究交线的几何性质. 在历史上，这种方法是认识圆锥曲线的重要方法，它更突出反映了几何学的基本思想，有利于培养学生综合运用各种能力探索、认识几何图形的性质. 一些著名数学家（如柯朗和阿诺德）极力推荐这种方法，并希望能出现在中学数学教材中.

首先，教科书安排了一组截面图形的欣赏，这些图形与学生的生活相关. 通过这些图形使学生明确，用一个平面去截我们所研究的物体，研究其截面图形，这是科学研究的一个重要方法.

接下来，教科书引导学生建立球外一点到球面切线的概念，讨论直线与球、平面与球的位置关系. 这实际上是把初中直线与圆的位置关系类比推广到空间. 研究的重点是直线与球相切、平面与球相切的情况.

为了研究的需要，我们把一个球塞进一个圆锥内部. 教科书引导学生探索当球面和锥面接触时，它们的交线应该是一个什么样的图形，让学生经历由直观感知到证明它们的交线是一个圆的过程.

在研究平面截圆柱面、平面截圆锥面所得交线的几何性质时，教科书不是先给出圆锥曲线的定义，然后进行验证，而是在探索过程中引导学生发现、寻找、证明这些曲线的性质，从而得出椭圆、双曲线、抛物线的定义（第一定义），然后进一步讨论圆锥曲线的共同性质，得到圆锥曲线的统一定义. 这样处理更符合实际问题的研究过程.

平面截圆锥面产生的几何问题很多，本章教科书只研究最基本的内容，目的是让学生在讨论问题时经历一个探索过程，掌握探索的方法.

发展空间想像能力是本章教学的一个非常重要的目标. 平面截圆锥面所得交线及塞入焦球后学生能想像出一幅清晰的图形，并把图形清楚地画出来，这对学生是十分重要的.

学习本章内容有助于将合情推理能力与严格论证能力综合起来，学生能够更好地体会什么是合情推理，什么是严格论证，并对它们的作用有所了解.

平面截圆锥面产生的几何问题很多，但大多数难度较大，不太适合高中学生解答. 教科书安排的证明题都是最基本的内容，学生可以完成.

教科书对学生作业还有两个要求：一是要求学生自己动手制作一些相应的平面截圆锥面的模型，通过模型了解交线的情况；二是本章设计了一个研究性学习，这些问题与传统的证明或计算问题不同，要求学生以小论文或读书报告的形式，把自己的思维过程清晰、严格地表述出来.

## 三、教学内容及课时安排建议

本章内容共 8 课时，具体安排如下：

| | | |
|---|---|---|
| §1 | 截面欣赏 | 1 课时 |
| §2 | 直线与球、平面与球的位置关系 | 1 课时 |
| §3 | 柱面与平面的截面 | 2 课时 |
| §4 | 平面截圆锥面 | 2 课时 |
| §5 | 圆锥曲线的几何性质 | 1 课时 |
| 研究性学习 | | 1 课时 |

## 四、评价建议

1. 了解椭圆、双曲线、抛物线是如何由平面截圆锥面而产生的.

2. 完成教科书规定的最基本的几何性质的证明.

3. 完成研究性学习中提出的问题，有能力的学生可以进一步探索圆锥曲线的几何性质，并以小论文或报告呈现，这是评价的重点.

# §1 截面欣赏

## 一、教学目标

1. 了解平面截立体图形产生的各种截面的形状，并欣赏其截面.

2. 体会研究截线性质的重要意义和价值.

3. 体会数学美及其价值.

## 二、设计思路

教科书呈现了几个截面图形的实例，让学生欣赏.

用平面截物体产生截面，研究这些截面的有关几何性质是科学研究的一个方面. 对空间图形我们可以用三视图、直观图来反映其几何特征，也可以用截面去研究其内部性质.

对截面图形的欣赏，包含了认识、分析、理解截面图形的过程.

## 三、教学建议

1. 本节可以定位为“数学欣赏”课，教师应尽可能多用直观模型讲解“截面”的有关问题及研究截面的意义. 例如，飞机机翼的剖面图形状不同，上下气流的运动情况也不同，从而达到飞机升降的目的等等.

2. 教学时可以根据情况，多选用一些截面图. 介绍截面图，一方面可以提高学生的空间想像能力，另一方面也可以加强图形欣赏的美育作用.

3. 本节课后可以要求学生自己动手制作一个截物体的实物模型；还可以让学生仿照图 2-2、图 2-3，画出自己家里的户型图.

## §2　直线与球、平面与球的位置关系

### 一、教学目标

1. 了解直线与球、平面与球的三种位置关系，为研究平面截圆锥面做准备.

2. 经历由直观感知到推理证明的过程，体会合情推理与严格论证的关系及作用.

### 二、设计思路

本节承接上一章中同一平面内直线与圆的三种位置关系，类比得到空间中直线与球、平面与球的三种位置关系，突出用综合几何的方法对两个结论的产生过程的探究.

### 三、教学建议

1. 教学中应注意对学生识图、作图能力的培养.

2. 两个结论的探究除用“旋转”的方式得到外，还可以逐步使学生感知用综合几何方法探究问题的过程. 如第一个结论可按如下方法探究：

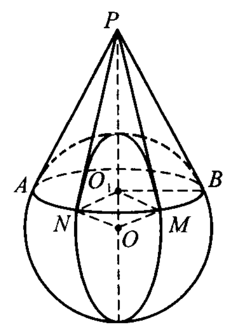


图 1

如图 1，过点 $P$ 作球的任意两条切线 $PM$，$PN$，切点分别为 $M$，$N$，则 $PM$ 为平面 $POM$ 与球面相交所得圆的切线，$PN$ 为平面 $PON$ 与球面相交所得圆的切线. 因此 $OM\perp PM$，$ON\perp PN$. 又 $PO=PO$，$OM=ON$（球半径），所以 $\mathrm{Rt}\triangle POM\cong\mathrm{Rt}\triangle PON$，所以 $PM=PN$.

在平面 $PMO$ 内作 $MO_1\perp PO$，垂足为 $O_1$，连接 $NO_1$. 根据上面的证明可知：$MO_1=NO_1$，且 $NO_1\perp PO$. 由切线 $PM$，$PN$ 的任意性，可知结论成立.

## §3　柱面与平面的截面

### 一、教学目标

1. 能够用运动变化的观点理解柱面、旋转面的概念，进而掌握圆柱面的垂直截面的性质.

2. 在一般截面的几何性质(椭圆的第一定义)的探究中，体验使用“焦球”的意义，逐步培养对几何图形中“不变量”的研究意识.

### 二、设计思路

本节 3.1 和 3.2 运用平面曲线在空间中的旋转形成空间曲面，旨在使学生明确平面曲线(问题)与空间曲面(问题)间的辩证关系；而 3.3 则用综合几何的方法探究平面与柱面一般位置关系下的截面性质，进而引出椭圆的第一定义.

### 三、教学建议

3.1 和 3.2 的教学应注意用多媒体演示曲面及垂直截面的发生过程，而 3.3 的教学应注意以下两点：

1. 可以引导学生探究特殊位置下的球与圆柱的位置关系. 如图 2，设球心 $O$ 在圆柱的轴上，球的半径为 $R$，圆柱底面圆半径为 $r$. 当 $R$ 与 $r$ 满足下列关系时，球与圆柱分别有怎样的位置关系？

(1)$R<r$;(2)$R=r$;(3)$R>r$.

2. 在此基础上，还可引导学生分析：当 $R=r$ 或 $R>r$ 时，球面与圆柱面的交线是什么图形？如何用综合几何的方法进行探究？

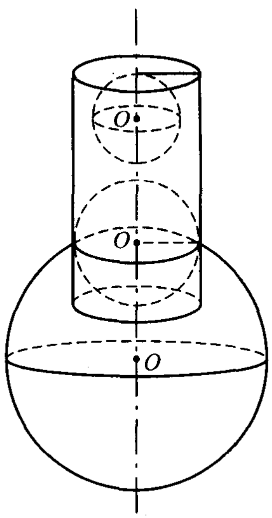



图　2

# §4 平面截圆锥面

## 一、教学目标

1. 用平面截圆锥面研究所得曲线的基本特征并加以证明，使学生从新的角度认识椭圆、双曲线和抛物线.

2. 理解用综合几何研究圆锥曲线的思路，掌握进行探索的方法.

## 二、设计思路

教科书首先让学生了解圆锥面的形成过程. 传统的立体几何教科书中是以直角三角形的一条直角边为轴，将另外两边绕轴旋转一周而得到圆锥，这样的圆锥是一个有底面的封闭图形. 本教科书中的圆锥面是直线 $l'$ 绕直线 $l$ 旋转一周所得，它是上下两个圆锥面，且无限伸展开的. 这样处理是为了方便研究双曲线和抛物线.

接下来，教科书研究的是截面垂直轴线的情况，这时交线为圆. 对此，直观上很好理解，但这里不能仅停留在直观层次上，要用综合几何方法进行证明. 教科书中的证明使用了有底面的圆锥，教学时要给学生讲清楚.

对一般截面，教科书首先研究交线为椭圆的情况. 这一证明的巧妙之处在于放入了两个焦球，利用这两个焦球来研究椭圆的几何特征.

在此基础上教科书又讨论了双曲线和抛物线的情况.

本节内容设计从特殊到一般、由具体到抽象，分别讨论了三类圆锥曲线，最后得出一般结论.

## 三、教学建议

1. 教学时教师可重点介绍 $\theta>\sigma$ 的情况，$\theta<\sigma$ 和 $\theta=\sigma$ 这两种情况可由学生类比研究. 对于 $\theta>\sigma$ 的讨论，需要强调两点：(1) 从球面外一点 $P$ 作球的两切线，它们的切线长相等；(2) 无论点 $P$ 在曲线的什么位置，$M'$，$M$，$S$（顶点）三点共线. 这些都需要结合图形讲清楚.

2. 焦球的引入是一个难点，教学时可对照前一节的相关内容进行分析.

3. 有条件的学校可以用几何画板等软件来演示教科书图 2-23，用彩色线段区分，使学生更明确其中的关系.

4. 教学时要让学生明确：$\theta<\sigma$ 时，截面与圆锥面上下两部分相交；$\theta>\sigma$ 和 $\theta=\sigma$ 时，截面与圆锥面只有一部分相交.

## §5 圆锥曲线的几何性质

### 一、教学目标

1. 经历探索圆锥曲线几何性质的过程，了解圆锥曲线的统一定义.
2. 进一步用运动、变化的观点理解圆锥曲线的共性.
3. 解决研究性学习提出的课题.

### 二、设计思路

本节的主要内容是推导圆锥曲线的统一定义. 教科书重点研究平面截圆锥面所得交线为椭圆的情况. 所用的研究方法是：从三角函数定义出发，导出$\frac{PF}{PE}=\frac{PB}{PE}=\frac{\cos\theta}{\cos\sigma}$，然后通过讨论确定范围. 这一研究方法比较简明，关键要讲清楚 $\cos\theta$ 和 $\cos\sigma$.

在完成了对椭圆的研究之后，可以类似地研究双曲线和抛物线的情况.

对于双曲线，因为 $0°<\theta<\sigma<90°$，所以 $0<\cos\sigma<\cos\theta<1$，因此 $e=\frac{\cos\theta}{\cos\sigma}>1$；对于抛物线，因为 $\theta=\sigma$，所以 $e=1$.

在此基础上，引导学生归纳出圆锥曲线的统一定义.

### 三、教学建议

1. 本节所用的研究方法是教学的重点. 教学时要引导学生详细地理清研究思路，明确圆锥面是由相交直线旋转而成，圆锥的轴与母线的夹角为 $\sigma$，截面与轴的夹角为 $\theta$，关键是利用 $\theta$ 和 $\sigma$ 的三角函数关系寻求一个比值不变量.

另外，教科书图中未作出 $\theta$ 和 $\sigma$ 所在的直角三角形，教学时可以连线作出直角三角形，以利于学生理解.

2. 教学中应指出，圆锥曲线的准线实际上是两个平面的交线，其中一个平面是截圆锥面的平面，另一个平面是焦球与圆锥面的交线（圆）所在的平面. 过去在解析几何中都是直接给出准线的定义，而并没有说明为什么这样规定，这里可以结合准线的几何意义进行说明.

# 研究性学习

## 一、教学目标

解决研究性学习提出的课题，梳理和领会研究问题的方法.

## 二、设计思路与教学建议

1. 在本章最后，教科书提供了一个研究性学习，目的是引导学生通过对这些问题的研究，体会研究圆锥曲线的过程，掌握研究这一类问题的方法. 因此，完成这一研究性学习的过程，实际上就是对本章主要学习内容的总结与梳理的过程.

2. 研究性学习的 4 个问题都是开放性问题，学生应根据自己的观察、研究独立得出结论，并写出研究报告. 例如，对于问题 1，手电筒的位置不同，观察结果也不一样，因此不应强求统一的标准答案.

## 本章练习、习题、复习题参考答案或提示

**P38 习题 2—1(A 组)**

略.

**P40 习题 2—2(A 组)**

略.

**P43 习题 2—3(A 组)**

1. 略.
2. 当平面与圆柱面的轴的夹角由小到大逐渐增大到 $90^\circ$时，所截出的椭圆形状由“瘦长”逐渐变为“胖短”直至成为圆.
3. 所截出的椭圆形状相同、大小不同(即都相似).
4. 因动圆 $M$ 恒过定点 $P$，所以 $MP$ 为$\odot M$ 的半径；又$\odot C$ 与$\odot M$ 内切，且 $M$ 在$\odot C$ 内，所以 $8-MP=MC$，所以 $MC+MP=8$；又 $PC=6<8$，所以 $M$ 点的轨迹为椭圆.

**P43 习题 2—3(B 组)**

1. 提示：设平面 $\beta$ 与平面 $\beta'$ 的夹角为 $\theta$，在教科书图 2-18 中，作 $PE\perp m$，垂足为 $E$，则$\dfrac{PF_1}{PE}=\dfrac{PM}{PE}=\sin\theta$.

2. (1)投影是圆；(2)投影是椭圆.

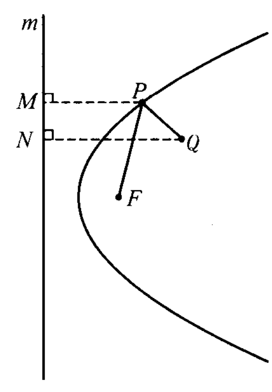
**P45 练习**

1. 略.
2. 当 $\theta$ 逐渐增大时，椭圆由“瘦长”逐渐变为“胖短”.
3. (1)提示：由椭圆的对称性知 $A_1F_1=A_2F_2$，而 $A_1F_1+A_1F_2=PF_1+PF_2=3$，因此 $A_1F_2+A_2F_2=3$，即 $A_1A_2=3$.

   (2)$\triangle MNF_2$ 的周长为：$MF_1+MF_2+NF_1+NF_2=3+3=6$.

**P47 练习**

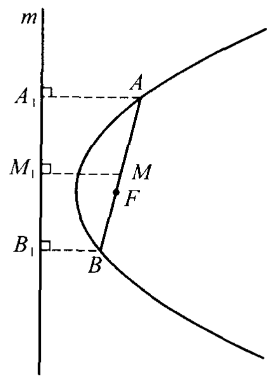
1. 略.
2. 如图，作 $PM\perp m$，$QN\perp m$，垂足分别为 $M,N$. 因点 $P$ 在抛物线上，根据抛物线的定义，得 $PF=PM$. 所以 $PF+PQ=PM+PQ\geqslant QN$. 故 $QN$ 与抛物线的交点即为所求点 $P$ 的位置.




(第 2 题)

3. 如图，$m$ 为抛物的准线，$AB$ 为过抛物线的焦点 $F$ 的弦，设 $AB$ 的中点为 $M$. 作 $AA_1\perp m$，$MM_1\perp m$，$BB_1\perp m$，垂足分别为 $A_1$，$M_1$，$B_1$，则 $MM_1$ 为直角梯形 $AA_1B_1B$ 的中位线，所以 $MM_1=\frac{1}{2}(AA_1$

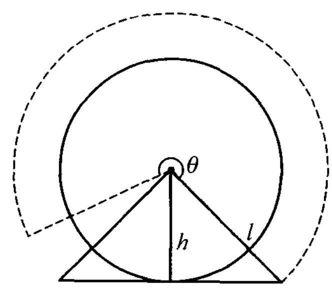
$+BB_1$). 根据抛物线的定义，得 $AF=AA_1$，$BF=BB_1$，因此 $MM_1=\frac{1}{2}(AA_1+BB_1)=\frac{1}{2}(AF+BF)=\frac{1}{2}AB$，即以 $AB$ 为直径的圆一定与准线 $m$ 相切.




（第 3 题）

**P48　习题 2—4(A 组)**

1. 略.
2. 略.
3. 爆炸点距 $A,B$ 的时间差为 3 s，所以爆炸点与 $A,B$ 两点的距离差为 $340\times3=1\ 020$ (m)，且 $1\ 020<1\ 400$，所以爆炸点在以 $A,B$ 为焦点的双曲线上.
4. 如图，作球与圆锥的轴截面，并将圆锥按一条母线展开为一个扇形，设圆锥的母线为 $l$，高为 $h$，扇形的圆心角为 $\theta°$，则 $\frac{\theta\pi l^2}{360}=2\cdot\frac{\theta\pi h^2}{360}$，从而 $l^2=2h^2$，所以 $l=\sqrt{2}h$，所以圆锥的高与母线的夹角为 45°.

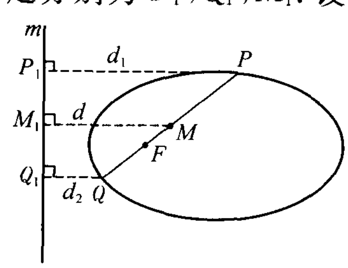



（第 4 题）

5. (1) 由双曲线的定义可知 $A_2F_1-A_2F_2=2a$，$A_1F_2-A_1F_1=2a$，所以 $(A_2F_1-A_1F_1)+(A_1F_2-A_2F_2)=4a$，即 $2A_1A_2=4a$，所以 $A_1A_2=2a$.
   (2) $\triangle MNF_2$ 的周长 $=MN+MF_2+NF_2=m+MF_2+NF_2=m+(MF_1+2a)+(NF_1+2a)=m+4a+(MF_1+NF_1)=2m+4a$.

**P51　习题 2—5(A 组)**

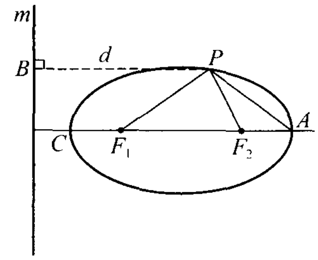
1. 如图，$M$ 为 $PQ$ 的中点，作 $PP_1\perp m$，$QQ_1\perp m$，$MM_1\perp m$，垂足分别为 $P_1,Q_1,M_1$. 设 $PP_1=d_1$，$QQ_1=d_2$，$MM_1=d$，则 $d=\frac{d_1+d_2}{2}$. 因为 $P,Q$ 为椭圆上的两点，所以 $QF=d_2e$，$PF=d_1e$，所以 $PQ=PF+QF=e(d_1+d_2)$，$\frac{1}{2}PQ=e\cdot\frac{d_1+d_2}{2}=ed$. 因此 $\frac{1}{2}PQ<d$，即以 $PQ$ 为直径的圆与直线 $m$ 相离.




（第 1 题）

2. (1)如图,作 $PB\perp m$,垂足为 $B$. 设 $PB=d$,则 $PF_1=ed=\frac{2}{3}d$,

所以 $PA+\frac{3}{2}PF_1=PA+d=PA+PB$. 当且仅当 $P,A,B$ 在一条直线上,即 $P$ 为椭圆与直线 $F_1F_2$ 的交点 $A$ 或 $C$ 时,$PA+\frac{3}{2}PF_1$ 最小.




(第 2 题)

(2)如图,$F_1F_2=CA-2AF_2=6-2\sqrt{2}$.

当点 $P$ 不在直线 $F_1F_2$ 上时,$PA+PF_1>AF_1$;

当点 $P$ 在 $A$ 处时,$PA+PF_1=AF_1$;

当点 $P$ 在 $C$ 处时,$PA+PF_1>AF_1$.

故当点 $P$ 在 $A$ 处时,$PA+PF_1$ 最小,其最小值为 $6-\sqrt{2}$.

由椭圆的定义可知 $PF_1+PF_2=6$,所以 $PF_1=6-PF_2$,所以 $PA+PF_1=6+PA-PF_2$.

当点 $P$ 不在直线 $F_1F_2$ 上时,$PA-PF_2<AF_2$;

当点 $P$ 在 $C$ 处时,$PA-PF_2=AF_2=\sqrt{2}$.

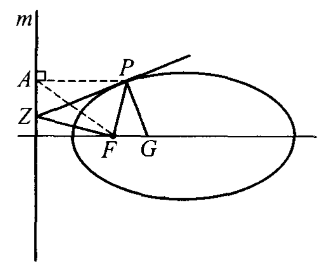
故当点 $P$ 在 $C$ 处时,$PA-PF_2$ 最大,此时 $PA+PF_1$ 也最大,其最大值为 $6+\sqrt{2}$.

3. 如图,作 $PA\perp m$,垂足为 $A$,连接 $FA$. 因为 $FZ\perp FP$,所以 $A,P,F,Z$ 四点共圆,所以 $\angle FAP=\angle FZP$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle FZP+\angle FPZ=90^\circ\\ \angle GPF+\angle FPZ=90^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \angle GPF=\angle FZP=\angle FAP.$$

$$PA/\!/FG\Rightarrow\angle PFG=\angle APF\Rightarrow\triangle PFG\backsim\triangle APF\Rightarrow\frac{FG}{FP}=\frac{PF}{PA}\Rightarrow$$

$$FG=\frac{PF}{PA}\cdot FP=e\cdot FP.$$




(第 3 题)

## P54 复习题二(A 组)

1. 因为 $AB=6$ cm,$BC=8$ cm,$CA=10$ cm,所以 $AB^2+BC^2=CA^2$,所以 $\triangle ABC$ 为直角三角形,$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 $r=5$ cm. 设已知球的半径为 $R$ cm,球心到 $\triangle ABC$ 外接圆的距离为 $d$ cm,则有 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$(cm).

2. 设两平行截面的面积分别为 $S_1=\pi r_1^2$,$S_2=\pi r_2^2$,球心到两截面的距离分别为 $d_1$ cm,$d_2$ cm,球半径为 $R$ cm. 由 $\pi r_1^2=49\pi$,$\pi r_2^2=400\pi$,得 $r_1^2=49$,$r_2^2=400$. 因此

$$d_1=\sqrt{R^2-r_1^2}=\sqrt{R^2-49},d_2=\sqrt{R^2-r_2^2}=\sqrt{R^2-400}.$$

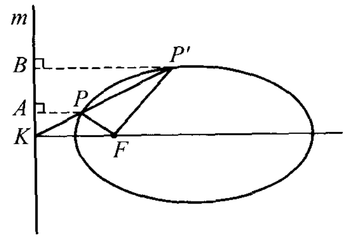
又 $d_1-d_2=9$,得

$$\sqrt{R^2-49}-\sqrt{R^2-400}=9.$$

解得 $R=25$.

3. 如图，作 $P'B\perp m$，$PA\perp m$，垂足分别为 $B$，$A$，则 $\mathrm{Rt}\triangle KPA\backsim\mathrm{Rt}\triangle KP'B$. 所以$\dfrac{KP}{KP'}=\dfrac{PA}{P'B}$.

由椭圆的定义，得$\dfrac{PF}{PA}=\dfrac{P'F}{P'B}=e$，所以$\dfrac{PA}{P'B}=\dfrac{PF}{P'F}$. 所以$\dfrac{KP}{KP'}=\dfrac{PF}{P'F}$.



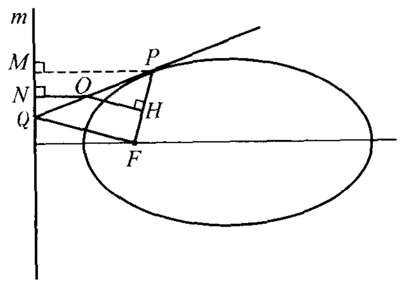
（第 3 题）

**P54　复习题二（B 组）**

1. 所截出的椭圆形状相同、大小不同（即都相似）.
2. 如图，作 $PM\perp m$，垂足为 $M$.

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{Rt}\triangle QON\backsim\mathrm{Rt}\triangle QPM\Rightarrow\dfrac{ON}{PM}=\dfrac{QO}{QP}\\ \left.\begin{array}{l}QF\perp PF\\ OH\perp PF\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{QO}{QP}=\dfrac{FH}{FP}\end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{ON}{PM}=\dfrac{FH}{FP}\Rightarrow$$

$$FH=\frac{FP}{PM}\cdot ON=e\cdot ON.$$



（第 2 题）

3. 略.

# 附录:圆锥曲线小史

圆锥曲线的研究起源于古希腊,它与当时希腊人提出的尺规作图三大难题之一的“倍立方问题”有关.“倍立方问题”是说:已知一个立方体的棱长为 $a$,用尺规作另一个立方体,使其体积为 $2a^3$.

古代对圆锥曲线进行研究的学者很多,其中最著名的是希腊学者梅内克缪斯(Menaechmus,前 375—前 325).他是这样引入圆锥曲线的:取轴截面顶角分别是直角、锐角和钝角的三种圆锥,用垂直于锥面一条母线的平面去截每一个圆锥面,所得的交线就是圆锥曲线.他将这三种交线分别称为“直角圆锥截线”“锐角圆锥截线”“钝角圆锥截线”,即我们现在所说的抛物线、椭圆和双曲线(其中一支).

需要指出的是,由于古代的生产力水平低下,理想的圆锥既不可能在自然界天然形成,又不太容易人工生产,因此需要数学家有极高的抽象思维能力及空间想像能力,这是很了不起的.

公元前 3 世纪,古希腊数学家欧几里得(Euclid,前 300 前后)、阿基米德(Archimedes,前 287—前 212)、阿波罗尼奥斯(Apollonius,前 262—前 190)等人在前人基础上进一步研究和发展了圆锥曲线的理论.其中阿波罗尼奥斯处理圆锥曲线的方法与前人不同,他只用一个圆锥,通过改变截面的位置就产生了三种不同曲线,这种方法对以后研究圆锥曲线有重要影响.

用综合几何方法研究圆锥曲线,从图形到图形,以平面几何知识为主、立体几何知识为辅,直截了当导出圆锥曲线的大批几何性质,这种研究一直延续到 19 世纪.1822 年比利时数学家丹德林(G. P. Dandelin)给出了简明而优美的证明,在圆锥中塞入两个球,利用这两个球的位置来证明圆锥曲线的几何性质,这两个球恰好过圆锥曲线的焦点,称为焦球或丹德林球.

在对圆锥曲线的长期研究中,人们发现了它的很多几何性质,其中一个很重要的结论是:把圆锥曲线上任意 4 个点 $A,B,C,D$ 和第 5 个点 $O$ 用线段 $a,b,c,d$ 连接起来,其交比与曲线上点 $O$ 的位置无关.

到 17 世纪,笛卡儿(R. Descartes,1596—1650)、费马(P. de Fermat,1601—1665)等数学家开始用代数方法研究图形的几何性质.他们建立坐标系,把圆锥曲线放在坐标系中,用方程来研究有关问题,发现了圆锥曲线与二元二次方程的联系.这就是用解析几何的方法研究圆锥曲线.从此,圆锥曲线的研究进入到一个新阶段.

古代对圆锥曲线的研究仅局限在数学领域内,随着科学技术的发展,圆锥曲线在天文学、建筑学等领域得到应用.德国天文学家开普勒(J. Kepler,1571—1630)发现天体运行轨道是椭圆,意大利物理学家伽利略(G. Galilei,1564—1642)研究得出弹道轨迹是抛物线,法国学者迈过尔日(Mydorge)发展了圆锥曲线在光学中的应用.

在现代，圆锥曲线的应用已非常广泛，日常生活、工农业生产、科学研究都会用到圆锥曲线.

有关圆锥曲线的发展历史，可参阅下列文献：

1.［美］莫里斯·克莱田《古今数学思想》，上海科学技术出版社.

2.［英］科克肖特《圆锥曲线的几何性质》，上海教育出版社.

3. 项武义《古典几何学》，复旦大学出版社.

4. 柯朗《数学是什么》，科学出版社.

5. 汪晓勤《中学数学中的数学史》，科学出版社.

{
  "filename": "5pmu6YCa6auY5Lit6K++56iL5qCH5YeG5a6e6aqM5pWZ56eR5LmmICDmlbDlraYgIOmAieS/rjQtMSAg5Yeg5L2V6K+B5piO6YCJ6K6yICDmlZnluIjmlZnlrabnlKjkuaZfMTE2NTMyOTIuemlw",
  "filename_decoded": "\u666e\u901a\u9ad8\u4e2d\u8bfe\u7a0b\u6807\u51c6\u5b9e\u9a8c\u6559\u79d1\u4e66 \u6570\u5b66 \u9009\u4fee4-1 \u51e0\u4f55\u8bc1\u660e\u9009\u8bb2 \u6559\u5e08\u6559\u5b66\u7528\u4e66_11653292.zip",
  "filesize": 4817747,
  "md5": "df5c17aff71254f75e469d90d71adf29",
  "header_md5": "f1df4c9632f1302cb7539f98cbfa2e46",
  "sha1": "e42056e7ab44f0e957e0901b0143d0e13f191cae",
  "sha256": "a99cdf05a299389767649cd8104637c30496440ccbf0dc13a64109037e820432",
  "crc32": 3267208802,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 5262230,
  "pdg_dir_name": "",
  "pdg_main_pages_found": 48,
  "pdg_main_pages_max": 48,
  "total_pages": 53,
  "total_pixels": 461762368,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}