普通高中课程标准实验教科书

数学 4–2（选修）

SHUXUE

矩阵与变换

教师教学用书

湖北教育出版社数学教材编写组 编著

湖北教育出版社
HUBEI EDUCATION PRESS

(鄂)新登字 02 号

责任编辑 尚甫暑
装帧设计 牛 红

普通高中课程标准实验教科书
数学选修 4-2 矩阵与变换
教师教学用书
湖北教育出版社数学教材编写组 编著
*
湖北教育出版社出版
(武汉市青年路 277 号 邮编:430015)
网址:http://www.hbedup.com
新华书店发行
湖北恒泰印务有限公司印刷
(430223·武汉市江夏庙山开发区汤逊湖工业园)
*
787 毫米×1092 毫米 16 开本 2.75 印张 64 000 字
2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7—5351—4349—0/G·3621
定价:4.40 元
如印刷、装订影响阅读,承印厂为你调换

ISBN 7-5351-4349-0
9 787535 143495 >

说　明

为了配合湖北教育出版社出版的《高级中学课程标准实验教科书·数学》的教学实践，我们编写了这套教师用书.

编写教师用书的目的在于，为教师选取素材提供资源，为设计教学提供参考，也为教师处理教学问题提供服务，帮助老师们在充分考虑数学学科特点和高中生心理特点的前提下，运用多种教学方法和手段，实现课程目标.

编写教师用书的目的也在于，与老师们沟通，呈现我们将课程标准转化为教材的心路历程；交流编写意图，特别是在贯彻基本理念、处理某些矛盾时的所思所为，从而对教科书的指导思想和主要特点形成共识，促使教师创造性地使用教材.

编写教师用书的目的还在于，以教科书为载体，从教学的基本问题出发，和老师们一起，共同领会课程标准的基本精神，立足于以人为本，发展和完善人的高度，构建现代理念下的课堂教学.

本套教师用书一般以教科书的章为单元编写，每章由教育价值、教学目标、教材结构、课时分配、内容分析、相关资源、评价建议和习题解答八部分构成.

教育价值：是课程目标在本章的具体化，也是课程设计中确定本章为教学内容的理由.

教学目标：是本章要达到的基本目标，它比课程标准中《内容与要求》要具体些.

教材结构：主要介绍三个方面：知识如何定位，教材怎样展开，有何特点.

课时分配：对每一小节所需的教学课时数作了大致的估计.

内容分析：一般按章头语、各大节逐次展开. 每大节包括三个项目：内容概述及基本要求、重难点分析和教学建议. 其中教学建议是主体，阐述教学中应该强调什么，注意什么，例题的功能及其处理. 除此之外，还涉及到旁批、交流话题、信息技术链接及教科书中课件符号标识处的教学思考等.

相关资源：在于展示本章内容的知识背景，为教学提供素材，包括重要结论的推理、证明与拓展.

评价建议：回答评价什么，如何评价等问题，并提供必要的参考案例.

习题解答：不仅包括练习、习题、复习题等基本题型的参考答案，还就《阅读与讨论》中的讨论题、《思考与实践》中的问题给出了可供参考的解决方案.

我们希望通过上述栏目的设置，既有助于解决教学设计、教学实施中的主要问题，满足教学的基本需要，又能拓展教师的视野，提升数学教学的境界.

诚然，有些想法虽然很好，却是我们力所不及的. 比如评价建议，又比如教学目标中的情感目标，如何落实和实践还有待于我们共同去研究和探索.

我们的课程改革，从理念、内容到实施，与过去相比都有较大的变化. 要实现课程改革的目标，教师是关键. 教师不仅是课程的实施者，而且也是课程研究、建设和资源开发的重要力量. 我们殷切地希望各位老师能为这套教师用书建言，更为教科书的完善献力，使它们更加有利于教师创造性地进行教学，更加有利于学生主动地学习和发展.

本套教师用书由湖北教育出版社数学教材编写组编写，主编齐民友，副主编裴光亚，徐学文，郭熙汉. 本册主要编者是李桃生.

目　录

第 1 章　二阶矩阵及其运算 …… 1

第 2 章　变换与矩阵 …… 13

第 3 章　二元一次方程组与矩阵 …… 26

第 4 章　特征值和特征向量 …… 32

第 1 章　二阶矩阵及其运算

一、教育价值

现实生活中许多问题都可以用矩阵表示，因而矩阵有着广泛的应用．本章从实例引入矩阵的概念和二阶矩阵的运算．通过本章的学习，学生可了解矩阵的概念和运算反映了各种不同事物共同的内在规律，体会用数学的思维方式如何观察、分析问题，体验数学的抽象更有助于人们对问题的思考与解决，从而激发学习数学的兴趣．

二、教学目标

1．知识目标

（1）理解矩阵的概念，掌握矩阵加法、数乘矩阵和矩阵乘法的运算规律，熟练地进行二阶矩阵加法、数乘矩阵和矩阵乘法的运算．

（2）明确矩阵的运算与数的运算有许多类似的性质，但也有着本质的区别，注意一些特殊矩阵（如零矩阵、单位矩阵）在矩阵运算中的特殊地位．

2．能力目标

从实例中抽象出矩阵概念，从学生自己熟悉的问题中找可以用矩阵表示的例子．

3．情感目标

通过实例分析规律，在此基础上，教师给出矩阵的加法、数乘矩阵以及矩阵乘法运算的规则，使学生亲身感受抽象的矩阵运算反映不同事物的共同的规律，体会矩阵能成为有用的工具的原理．

三、教材结构

章头语指出现实生活中的许多问题都与矩阵有关，矩阵是一种非常有用的工具；简要介绍矩阵的历史背景；说明本章是以后各章学习的基础．本章共分三节：

1.1 节　从实例入手抽象出矩阵的概念．在给出矩阵的概念以后，举例说明它的用法．并指出用大写字母（如 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 等）来表示矩阵．继而给出对角矩阵、单位矩阵（用 $\boldsymbol{E}$ 表示）、零矩阵（用 $\boldsymbol{O}$ 表示）的概念以及矩阵相等的意义和有关计算的例子．

1.2 节　通过学生熟悉的两个实例引导学生思考，从中总结规律．在此基础上抽象为矩阵，给出矩阵加法和数乘矩阵的运算规则，并举例计算．通过例子指出矩阵加法满足交换律、结合律以及零矩阵在矩阵加法中扮演的特殊角色，并引导学生思考“两个矩阵相加需要满足什么条件”．在给出数乘运算的规则后举例计算，通过比较总结出数乘运算满足两个分配律．

1.3 节　本节分两个单元．第一单元 1.3.1：通过实例总结出矩阵乘法的运算规则，并举例计算，通过例子指出零矩阵、单位矩阵在矩阵乘法运算中扮演的特殊角色．矩阵乘法规则比较难掌握，而且不是任意两个矩阵都可以相乘，因此明确指出两个矩阵能够相乘以及矩阵相乘所

得的乘积的行数和列数.

为了便于学生对知识有较全面的了解，最后举了一个阶数不是 2 的例子，以拓广学生的知识.

第二单元 1.3.2：介绍矩阵乘法的运算律. 通过例子说明矩阵乘法不满足交换律和消去律. 特别指出“两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵”. 最后指出矩阵乘法满足结合律以及矩阵乘法与数乘运算、加法运算之间的运算律，并给出 A^n 的意义.

本章内容的安排重视从实例引入，并注意从学生实际出发，通过实例给出的矩阵概念及运算规律都很自然，便于学生参与.

四、课时分配

本章共 4 个课时，具体分配如下：(仅供参考)

1.1	矩阵的概念	约 1 课时
1.2	矩阵的加法和数乘运算	约 1 课时
1.3	矩阵的乘法运算	约 2 课时

五、内容分析

1.1 矩阵的概念

1. 内容概述及基本要求

(1)举出生活中的两个实例：某超市的一份进货单、四个城市间的航线都与表格有关，略去表格中的文字说明，表中的数字按原来的位置排成一个矩形数字阵列，并用括号括起来作为一个整体，从而引出矩阵的概念. 通过这部分内容的教学，学生应能感受到：

①矩阵与我们每个人的日常生活都有联系.(可启发学生自己给出一些例子)

②抽象的数学反映了不同事物的共同规律，因而有广泛的应用.

(2)在学生理解了矩阵的概念的基础上介绍：①用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等来表示矩阵. ②给出对角阵、单位矩阵、零矩阵的概念. ③给出两个矩阵相等的概念，并举例计算. 学生通过这部分的学习，可从具体例子中走出来，并理解：

①矩阵是排成矩形阵列的一组数. 这一组数构成一个整体，用大写字母表示.

②对角矩阵、单位矩阵、零矩阵是特殊的矩阵，介绍这几种矩阵是为后面的学习作准备.

③为了学习矩阵的运算需要知道矩阵相等的意义.

2. 重难点分析

重点：矩阵概念的引入.

矩阵是一个非常有用的数学工具，但它是一个很抽象的数学概念. 从熟悉的生活实例出发，自然地引入概念，学生就不会为概念的空洞、抽象与难学而烦恼. 另一方面，对于初学者来说，如果能从具体事例中抽象出矩阵，将有效地激发学习兴趣，因此教学中应将概念的引入作为重点.

难点：(1)用字母表示矩阵；(2)矩阵相等.

一个矩阵由若干个数组成，在实际问题中，每一个位置的数有着不同的含意. 一个矩阵中的数排定以后构成一个整体，不能随意改变. 我们可以用一个字母来表示一个矩阵. 两个矩阵完全相同时才能相等. 这一点对于初学者来说往往不太注意，觉得 $(2\quad 3)$ 与 $(3\quad 2)$ 差不多. 讲

解时用学生比较熟悉的实例来说明容易接受一些.

3. 教学建议

(1)从某超市进货单的表格得到一个数表$\begin{pmatrix}300 & 450\\200 & 160\end{pmatrix}$,要强调指出:从数表$\begin{pmatrix}300 & 450\\200 & 160\end{pmatrix}$可以知道该超市的进货情况.

(2)四个城市间的航线给出的是图而不是表格,因此应该先将图转化为图右边的表格,然后得到4行4列的数表,由数表中的数字让学生说出哪个城市到哪个城市有航线或没有航线.

(3)在讲完上述两例的基础上,给出矩阵、矩阵的元素、n阶矩阵等概念.给出矩阵概念后讲述例1和例2,说明:①矩阵可以表示许多不同的事物;②相同的矩阵在不同的事物中的含意不同;③同一事物中不同的矩阵表示的含意不同,为讲用字母表示矩阵和矩阵相等准备感性素材.

(4)讲述二阶对角矩阵、二阶单位矩阵、零矩阵概念时,要突出这些矩阵的特点.

(5)在感性认识的基础上给出矩阵相等的概念,通过例3加深认识.

教材中是通过两个二阶矩阵给出矩阵相等的含义,教学时应强调两个矩阵相等它们的行数相等、它们的列数相等、对应位置的元素相同,也就是说两个相同的矩阵才相等.

1.2 矩阵的加法和数乘运算

1. 内容概述及基本要求

(1)通过讲解供思考的实例,从中抽象出矩阵加法运算和数乘运算的规则.学生可认识到矩阵的运算规则不是人为的游戏规则,而是符合客观规律的.教师应注意启发引导学生自己给出一些例子.

(2)在给出矩阵加法和数乘运算规则后,通过例题的讲解,学生能熟练地进行运算,并通过例题总结矩阵加法满足交换律、结合律,数乘运算满足分配律.

(3)矩阵的加法归结为两个矩阵中对应位置的数相加,数乘矩阵也归结为数的相乘.这反映出矩阵的运算与数的运算的联系.零矩阵在矩阵加法中扮演的角色($\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$)与数零在数的加法中扮演的角色($0+a=a+0=a$)相当.

(4)虽然矩阵加法归结为数的加法,但矩阵加法又与数的加法有本质的不同.不是任意两个矩阵都可以相加,只有行数相同、列数相同的两个矩阵才能相加.这一结论要求学生在进行了若干次运算之后,在教师的指导下总结.

2. 重难点分析

重难点:在分析实例的基础上抽象出运算规则.

给定两个二阶矩阵,每个矩阵都由4个数组成,两个矩阵有没有必要相加,为什么是对应位置元素相加,行数不同(或列数不同)的两个矩阵能不能相加等一系列问题摆在我们面前,因此矩阵加法比数的加法要难得多,抽象得多,处理不好很容易使学生丧失学习的兴趣,因此是重点也是难点.

3. 教学建议

(1) 对于思考题中的实例,学生很容易从中找到算法,在此基础上引导学生总结规律,再抽象为矩阵、定义矩阵的加法运算就很自然,也能启发学生自己去找实例.

(2)在引入矩阵加法运算之后讲述例1,要求学生按运算规则进行运算,并提示学生观察例1中$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$的结果.提问学生:任意两个二阶矩阵$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$,它们的和$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$与$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$相

等吗？进而指出矩阵加法满足交换律、结合律. 课本对 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ 和 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$ 虽然没有给出一般证明，但是要使学生从中领悟到它们是由“矩阵加法归结为对应位置元素相加”决定的.

例 1 中 $\boldsymbol{C}$ 是零矩阵，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}$，让学生认识到二阶零矩阵与任一个二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相加都等于 $\boldsymbol{A}$，因此零矩阵在矩阵加法中与数 0 在数的加法中扮演的角色相当.

(3)教材中虽然只讲了两个二阶矩阵相加，但是根据加法的规则(对应位置的元素相加)，如果两个矩阵它们的行数不同(或列数不同)则不能相加. 因此应该提示学生去思考去探究.

(4) 也可以在讲完加法运算以后，再引导学生考虑思考题中的(2)，和引入矩阵加法运算一样引入数乘运算，并要求学生能熟练进行运算. 讲例题时注意提示学生观察例 2 中 $5\boldsymbol{A}+5\boldsymbol{B}$ 与 $5(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$ 的结果. 提问学生：任给两个二阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，任给两个数 k,l，等式 $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$ 成立吗？最好要求学生自己去找方法说明它们.

1.3 矩阵的乘法运算

1. 内容概述及基本要求

(1)教材中有关环境污染的例子涉及的量比较多，但学生按要求一步步计算并不难，而且也能理解为什么相乘或相加. 在此基础上，将所列的表格抽象为矩阵，然后分析这些数字哪些数相乘、相加能得到我们所需要的结果. 学生自己参与总结规则能大大激发他们的学习兴趣，鼓励他们自己去寻找用矩阵乘法计算的实例，增强应用意识.

(2)通过例 1、例 2 的计算要求学生能熟练掌握矩阵乘法的规则，例 1 把矩阵乘法与二元一次方程组联系起来. 例 2 中 $\boldsymbol{B}$ 是单位矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{C}$ 是零矩阵，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$. 注意引导学生观察、分析，从而逐步提高学生的能力.

(3)矩阵乘法虽然能够把繁杂的运算简洁地表示出来，但是每得到乘积矩阵的一个数要进行若干次数的运算. 从运算规则中可以看到并不是任意两个矩阵可以相乘，教师要引导学生总结，两个矩阵满足什么条件才可以相乘，乘积的行数和列数如何决定. 在 1.3.1 节最后给出一个 2×3 矩阵与 3×4 矩阵相乘的例子，它能开拓学生的视野，有利于今后的学习.

(4)1.3.2 节通过例题说明矩阵乘法不满足交换律和消去律，两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵. 矩阵乘法能够满足的运算律教材上没有给出证明，教师可以引导有兴趣的学生就二阶矩阵给出证明.

2. 重难点分析

重点：在分析实例的基础上抽象出矩阵乘法规则.

给定两个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相乘有什么意义，怎样的矩阵才能相乘，按怎样的规则相乘，相乘的结果是多少行多少列的矩阵，这许多问题如果不能及时得到解决，会变成学生学习中的障碍. 通过分析实例，总结规律给出矩阵乘法的运算规则，学生容易接受，而且前面所提到的一些问题也容易找到答案，提高学生学习数学的兴趣.

难点：(1)矩阵乘法的计算规则；(2)矩阵乘法不满足交换律和消去律.

两个矩阵作乘法时，得到乘积矩阵的一个数要进行多次数的乘法和加法运算，矩阵的行数和列数多的时候很容易弄错，即使规则记得很熟计算时也可能出错. 改正了今天的错误，明天还可能又错. 因此老师要让学生反复练习，牢固掌握计算规则.

矩阵乘法不满足交换律和消去律，用教材中的例子 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 和 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O},\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$ 但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 可以说明. 难的是学生是否真正接受这种思想. 在此之前学生接受的大量信息是乘法可以交换，

可以消去不等于零的因子. 在矩阵乘法这种不同于常规的结论面前，初学者或多或少有种茫然的感觉，并且自觉或不自觉地反复犯同样的错误，教师要经常用具体例子提醒学生注意和纠正错误.

3. 教学建议

(1)从实例中让学生找到计算公式，再抽象为矩阵，按总结的计算公式给出矩阵乘法规则.

(2)对于一般的矩阵，先讲 $\boldsymbol{A}=(a,b)$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\end{pmatrix}$ 相乘的规则，进一步，讲 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}x & u\\ y & v\end{pmatrix}$ 相乘的规则. 然后给出矩阵乘法的概念.

(3)例 1 用矩阵乘法表示二元一次方程组，先把二元一次方程组中的两个方程写成矩阵 $\begin{pmatrix}2x+3y\\ 4x-y\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}-1\\ 0\end{pmatrix}$，再利用矩阵相等、矩阵乘法的概念表示出来.

(4)例 2 中 $\boldsymbol{AB}$ 的算式用方框及箭头进一步指出矩阵乘法的计算规则.

提示学生观察：二阶单位矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{A}$，二阶零矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{O}$，进而说明单位矩阵、零矩阵在矩阵乘法中扮演的特殊角色.

(5)引导学生观察两个矩阵相乘是有条件的，乘积的行数和列数也是有规律的.

(6)1.3.2 节的例 1 说明矩阵乘积 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，例 2 说明 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，而 $\boldsymbol{BA}\neq\boldsymbol{O}$，因而 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，同时还说明 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 但是 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

(7)本节最后指出的三条运算律只要求学生懂得含意、会用即可，老师可以鼓励有兴趣的学生自己去证明.

六、相关资源

1. 矩阵的加法

(1)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 $n\times m$ 矩阵，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{bmatrix}$$

也是一个 $n\times m$ 矩阵. 因为数的加法满足交换律，

$$\begin{bmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{11}+a_{11} & b_{12}+a_{12} & \cdots & b_{1m}+a_{1m}\\ b_{21}+a_{21} & b_{22}+a_{22} & \cdots & b_{2m}+a_{2m}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1}+a_{n1} & b_{n2}+a_{n2} & \cdots & b_{nm}+a_{nm}\end{bmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

(2)设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是 $n\times m$ 矩阵，则 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$,则

$$(A+B)+C=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11}+c_{11} & a_{12}+b_{12}+c_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m}+c_{1m} \\ a_{21}+b_{21}+c_{21} & a_{22}+b_{22}+c_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m}+c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1}+c_{n1} & a_{n2}+b_{n2}+c_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm}+c_{nm} \end{pmatrix}=A+(B+C).$$

2. 数乘矩阵

(1)设 k 是一个数,A,B 是 $n\times m$ 矩阵,则 $k(A+B)=kA+kB$.

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$,

$$k(A+B)=k\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{n1} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} k(a_{11}+b_{11}) & k(a_{12}+b_{12}) & \cdots & k(a_{1m}+b_{1m}) \\ k(a_{21}+b_{21}) & k(a_{22}+b_{22}) & \cdots & k(a_{2m}+b_{2m}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k(a_{n1}+b_{n1}) & k(a_{n2}+b_{n2}) & \cdots & k(a_{nm}+b_{nm}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} kb_{11} & kb_{12} & \cdots & kb_{1m} \\ kb_{21} & kb_{22} & \cdots & kb_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kb_{n1} & kb_{n2} & \cdots & kb_{nm} \end{pmatrix}=kA+kB.$$

(2)设 k,l 是数,A 是 $n\times m$ 矩阵,则 $(k+l)A=kA+lA$.

设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$,则

$$(k+l)A=\begin{pmatrix} (k+l)a_{11} & (k+l)a_{12} & \cdots & (k+l)a_{1m} \\ (k+l)a_{21} & (k+l)a_{22} & \cdots & (k+l)a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (k+l)a_{n1} & (k+l)a_{n2} & \cdots & (k+l)a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1m} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{n1} & ka_{n2} & \cdots & ka_{nm} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} la_{11} & la_{12} & \cdots & la_{1m} \\ la_{21} & la_{22} & \cdots & la_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ la_{n1} & la_{n2} & \cdots & la_{nm} \end{pmatrix}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}.$$

3. 矩阵乘法

(1)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms} \end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+\cdots+a_{1m}b_{m1} & a_{11}b_{12}+\cdots+a_{1m}b_{m2} & \cdots & a_{11}b_{1s}+\cdots+a_{1m}b_{ms} \\ a_{21}b_{11}+\cdots+a_{2m}b_{m1} & a_{21}b_{12}+\cdots+a_{2m}b_{m2} & \cdots & a_{21}b_{2s}+\cdots+a_{2m}b_{ms} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b_{11}+\cdots+a_{nm}b_{m1} & a_{n1}b_{12}+\cdots+a_{nm}b_{m2} & \cdots & a_{n1}b_{1s}+\cdots+a_{nm}b_{ms} \end{pmatrix}.$$

(2)设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

$$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{11}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{21} & (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})c_{12}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})c_{22} \\ (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{11}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{21} & (a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})c_{12}+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})c_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}c_{11}+a_{11}b_{12}c_{21}+a_{12}b_{22}c_{21} & a_{11}b_{11}c_{12}+a_{12}b_{21}c_{12}+a_{11}b_{12}c_{22}+a_{12}b_{22}c_{22} \\ a_{21}b_{11}c_{11}+a_{22}b_{21}c_{11}+a_{21}b_{12}c_{21}+a_{22}b_{22}c_{21} & a_{21}b_{11}c_{12}+a_{22}b_{21}c_{12}+a_{21}b_{12}c_{22}+a_{22}b_{22}c_{22} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{11}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{12}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \\ a_{21}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{22}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21}) & a_{21}(b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22})+a_{22}(b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22} \\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}).$$

(3)一般地，可以证明：

如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $m\times s$ 矩阵，$\boldsymbol{C}$ 是 $s\times t$ 矩阵，则$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

由于矩阵乘法满足结合律，因此，对于 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，$m\times s$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$，$s\times t$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$，三个矩阵的乘积 $\boldsymbol{ABC}$ 有意义，它等于$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$，也等于 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是二阶矩阵，那么，四个矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 相乘也有意义. 相乘时可以任意加括号，即 $\boldsymbol{ABCD}=[(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}]\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{CD})=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{CD})]$. 由于矩阵乘法不满足交换律，矩阵相乘时 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 的次序不能交换.

七、评价建议

1. 能否熟练的进行二阶矩阵加法、数乘矩阵和矩阵乘法的运算.
2. 是否能举出与数表有关的例子，用矩阵表示和计算.
3. 能否指出矩阵运算与数的运算的联系与区别.

八、习题和复习题解答

习题 1.1

1. (略)

2. 因为二阶方阵中,第一行与第二列交叉位置和第二行与第一列交叉位置上的元素都为零的矩阵叫二阶对角矩阵,所以上述矩阵中$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}0&0\\0&-1\end{pmatrix}$都是对角矩阵.

3. 如果两个二阶方阵对应位置的元素相同就说这两个矩阵相等.

(1)若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$,即$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&3\end{pmatrix}$,那么,$a=2,b=-2,c=0,d=3$.

(2)若$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{C}$,即$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-4\\3&-3\end{pmatrix}$那么,$a=1,b=-4,c=3,d=-3$.

4. 矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$与$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$不相等,这是因为矩阵$\boldsymbol{A}$只有一列,$\boldsymbol{B}$有两列,因此$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不可能成为对应位置元素相同的矩阵,所以$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$不相等.

习题 1.2

1. (略)

2. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-2\\0&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-4\\2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+1&-2+(-4)\\0+2&5+(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\2&2\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-4\\2&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&-2\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2&-4+(-2)\\2+0&-3+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-6\\2&2\end{pmatrix}$.

3. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\left[\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right]+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}0+0&-2+0\\4+0&5+0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\4&6\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}+\left[\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right]$

$=\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0+1&0+0\\0+0&0+1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-2\\4&6\end{pmatrix}$.

4. (略)

5. $-3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-3\times2&-3\times(-2)\\-3\times0&-3\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6&6\\0&-9\end{pmatrix}$,

$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\times2&2\times(-2)\\2\times0&2\times3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-4\\0&6\end{pmatrix}$,

$-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-6&6\\0&-9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-4\\0&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2\\0&-3\end{pmatrix}$.

6. $3(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=3\begin{pmatrix}2+(-1)&1+3\\-1+2&0+(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times1&3\times4\\3\times1&3\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&12\\3&-6\end{pmatrix}$,

$3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\times2&3\times1\\3\times(-1)&3\times0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\times(-1)&3\times3\\3\times2&3\times(-2)\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&3\\-3&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&9\\6&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&12\\3&-6\end{pmatrix}$.

习题 1.3.1

1. $AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times2+(-2)\times(-1)\\ -1\times2+3\times(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix}$.

2. $AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\times4+(-2)\times2 & 1\times(-2)+(-2)\times1\\ 0\times4+4\times2 & 0\times(-2)+4\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 8 & 4\end{pmatrix}$,

$BA=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\times1+(-2)\times0 & 4\times(-2)+(-2)\times4\\ 2\times1+1\times0 & 2\times(-2)+1\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -16\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

3. $AB=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 8 & 4\end{pmatrix}$,

$BC=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 1\end{pmatrix}$，$AC=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -4\end{pmatrix}$.

4. 二元一次方程组左边可以写成$\begin{pmatrix}x-2y\\ 3x-y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，等式右边可以写成$\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$，于是二元一次方程组用矩阵表示为$\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 0\end{pmatrix}$.

习题 1.3.2

1. $ABC=(AB)C=\left[\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 8 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}$,

$(A+B)C=\left[\begin{pmatrix}0 & -2\\ 0 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 2 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ -3\end{pmatrix}$.

2. $(kA)B=\left[k\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12}\\ ka_{21} & ka_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}ka_{11}b_{11}+ka_{12}b_{21} & ka_{11}b_{12}+ka_{12}b_{22}\\ ka_{21}b_{11}+ka_{22}b_{21} & ka_{21}b_{12}+ka_{22}b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}) & k(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})\\ k(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}) & k(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})\end{pmatrix}$

$=k\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=k\left[\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right]=k(AB)$,

$A(kB)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\left[k\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}kb_{11} & kb_{12}\\ kb_{21} & kb_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}kb_{11}+a_{12}kb_{21} & a_{11}kb_{12}+a_{12}kb_{22}\\ a_{21}kb_{11}+a_{22}kb_{21} & a_{21}kb_{12}+a_{22}kb_{22}\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}=k(AB)$,

所以$(kA)B=A(kB)=k(AB)$.

3. $A(B+C)=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12}\\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}(b_{11}+c_{11})+a_{12}(b_{21}+c_{21}) & a_{11}(b_{12}+c_{12})+a_{12}(b_{22}+c_{22})\\ a_{21}(b_{11}+c_{11})+a_{22}(b_{21}+c_{21}) & a_{21}(b_{12}+c_{12})+a_{22}(b_{22}+c_{22})\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{11}c_{11}+a_{12}b_{21}+a_{12}c_{21} & a_{11}b_{12}+a_{11}c_{12}+a_{12}b_{22}+a_{12}c_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{21}c_{11}+a_{22}b_{21}+a_{22}c_{21} & a_{21}b_{12}+a_{21}c_{12}+a_{22}b_{22}+a_{22}c_{22}\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}c_{11}+a_{12}c_{21} & a_{11}c_{12}+a_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11}+a_{22}c_{21} & a_{21}c_{12}+a_{22}c_{22}\end{pmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{bmatrix}=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}.$$

复习题

1. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4&2\\0&-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&2\\0&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&14\\0&-9\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-4&2\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16&14\\0&-9\end{pmatrix}$.

2. $4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-8\\16&20\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&8\\-16&-20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$，$4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=4\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$，

$4\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{B}=4(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$.

3. $\boldsymbol{AB}=(1\quad 2)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=(1\times2+2\times(-1))=(0)$，

$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}(1\quad 2)=\begin{pmatrix}2\times1&2\times2\\-1\times1&-1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}$.

4. $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}0&-2\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2\\-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-2\\1&3\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&-6\\5&7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&4\\-5&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2\\0&0\end{pmatrix}$.

5. 方程组$\begin{cases}2x-3y=-1,\\-x+4y=5,\end{cases}$用矩阵表示为$\begin{pmatrix}2&-3\\-1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

6. 左边$=\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x-2y\\3y\end{pmatrix}$，右边$=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$，方程组为$\begin{cases}4x-2y=0,\\3y=-1.\end{cases}$

7. $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16&-14\\0&9\end{pmatrix}$，

$3\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=3\begin{pmatrix}16&-14\\0&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}4&-2\\0&3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}48&-42\\0&27\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8&4\\0&-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&0\\0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44&-38\\0&25\end{pmatrix}$.

8. $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-5&2\\3&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

9. $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(1\quad 2)\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=(0)$，

$\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}=(1\quad 2)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}+(1\quad 2)\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}=(0)+(0)=(0)$.

10. $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$是单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，

$$A^{20}=(A^2)^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}^{10}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

11. $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\left[\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-bc&0\\0&ad-bc\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

12. 因为 α 与 β 互为余角，所以 $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta&\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\-\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta&\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta)&\sin(\alpha+\beta)\\-\sin(\alpha+\beta)&\cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&\sin\frac{\pi}{2}\\-\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\cos\beta&\sin\beta\\-\sin\beta&\cos\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\\-\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha&\cos\beta\sin\alpha+\sin\beta\cos\alpha\\-\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha&-\sin\beta\sin\alpha+\cos\beta\cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(\beta+\alpha)&\sin(\beta+\alpha)\\-\sin(\beta+\alpha)&\cos(\beta+\alpha)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\frac{\pi}{2}&\sin\frac{\pi}{2}\\-\sin\frac{\pi}{2}&\cos\frac{\pi}{2}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

13. $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a&2b\\0&3c\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&b\\0&c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+2&b\\0&c+3\end{pmatrix},$$

由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，可得 $2a=a+2, 2b=b, 3c=c+3$，因此 $a=2, b=0, c=\frac{3}{2}$.

14. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 为所求的矩阵，由 $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}$ 得

$$\begin{bmatrix}2a_{11}-a_{21}&2a_{12}-a_{22}\\-a_{11}+\frac{1}{2}a_{21}&-a_{12}+\frac{1}{2}a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\-\frac{1}{2}&0\end{bmatrix},$$

于是得到两个方程组(Ⅰ)$\begin{cases}2a_{11}-a_{21}=1,\\-a_{11}+\frac{1}{2}a_{21}=-\frac{1}{2};\end{cases}$ 和(Ⅱ)$\begin{cases}2a_{12}-a_{22}=0,\\-a_{12}+\frac{1}{2}a_{22}=0.\end{cases}$

由方程组(Ⅰ)得 $2a_{11}-a_{21}=1, a_{21}=2a_{11}-1$. 令 $a_{11}=1$，得 $a_{21}=1$，令 $a_{11}=2$，得 $a_{21}=3$，令

$a_{11}=3$,得 $a_{21}=5$. 由方程组(Ⅱ)得 $2a_{12}-a_{22}=0, a_{22}=2a_{12}$. 令 $a_{12}=1$,得 $a_{22}=2$. 于是得到满足条件的三个不同的矩阵:$\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}2&1\\3&2\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}3&1\\5&2\end{pmatrix}$.

15. 由三个生产班的产量得矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}500&600&700&400\\300&400&500&300\\400&300&600&500\end{bmatrix}$,由四个品种的价格得矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}64\\62\\60\\66\end{bmatrix}$. 各生产班的日产值由矩阵 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}500&600&700&400\\300&400&500&300\\400&300&600&500\end{bmatrix}\begin{bmatrix}64\\62\\60\\66\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}137600\\93800\\113200\end{bmatrix}$决定.

因此,第一生产班的日产值为 137600 元,第二生产班日产值为 93800 元,第三生产班日产值为 113200 元.

第 2 章　变换与矩阵

一、教育价值

映射是讨论两个集合之间对应关系的工具.一个集合到自身的映射称为这个集合的变换.大千世界中变换无处不在.本章从动画制作谈起介绍常见的几种平面上点的变换以及变换的矩阵,使学生了解几种常见变换的特点,变换的矩阵、变换的复合、逆变换的意义以及复合变换、逆变换与对应矩阵及其运算的关系.通过学习,学生应逐步学会用数学思想来认识事物,用数学思维方式观察和分析问题,用数学方法来描述客观规律,从而体验抽象数学的巨大作用,进一步激发学生学习数学的兴趣.

二、教学目标

1. 知识目标

(1)了解旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换、切变变换、恒等变换等变换的意义,熟练掌握各种变换的矩阵,给定平面上的点能准确地求出它在某种变换下的象.

(2)了解向量的线性组合及线性变换的含意,知道线性变换把直线上的点变到同一直线上.

(3)了解线性变换的复合及逆变换的意义,明确线性变换的复合与矩阵乘法、逆变换与逆矩阵的关系,会用二阶行列式判断二阶矩阵(或线性变换)是否可逆.

2. 能力目标

对于比较规则的图形和几种常见的变换要求做到:

(1)根据给定变换画出此图形变换后所得到的图形.

(2)给定图形上点的坐标,通过计算求出象点的坐标,并画出变换后所得到的图形.

3. 情感目标

矩阵和变换是不同的数学概念,从不同侧面描述事物的客观规律,变换和它的矩阵分别从几何与代数角度描述同一个事物,两种方法各具特色.从中体会数学揭示客观规律的深刻性,数学的抽象更有助于人们对问题的思考与解决.

三、教材结构

章头语指出变换无处不在,本章主要研究平面上点的某些变换.学习变换的矩阵表示、变换的复合和逆变换,并指出这些变换都是线性变换.本章共分六节:

2.1 节　通过例子介绍了几种常见的平面上的变换,指出这些变换适当的组合起来可以制作各种动画.

2.2 节　分别给出了旋转变换、反射变换、伸缩变换、投影变换与切变变换的矩阵.对每一种变换,都给出了由已知点求象点的计算方法.

2.3节　讨论向量的线性组合、向量的线性组合在变换下的象，指出本书所讨论的变换都是线性变换，都可以用矩阵表示.

2.4节　通过图形说明变换复合的几何意义，用矩阵乘积表示复合变换. 复合变换 $\mathscr{AB}\neq\mathscr{BA}$ 与矩阵 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$ 是相互决定的. 指出变换的复合、矩阵的乘法以及它们的运算律在动画制作中起着重要的作用.

2.5节　举例说明存在着变换 $\mathscr{A},\mathscr{B}$ 使得 $\mathscr{AB}$ 和 $\mathscr{BA}$ 都是恒等变换，从而引出逆变换的概念. 通过图形说明逆变换的几何意义，指出在制作动画中逆变换的实际意义. 利用变换与矩阵之间的对应关系给出逆矩阵概念，并讨论逆矩阵的简单性质.

2.6节　从实际中了解不是所有矩阵（或变换）都是可逆的，进而介绍二阶矩阵（或变换）可逆的条件.

本章的内容非常强调形与数的结合.

四、课时分配

本章共8个课时，具体分配如下：（仅供参考）

2.1	从动画的制作谈起	约2课时
2.2	变换的矩阵	约2课时
2.3	线性变换	约1课时
2.4	变换的复合	约1课时
2.5	逆变换与逆矩阵	约1课时
2.6	矩阵可逆的条件	约1课时

五、内容分析

1. 内容概述及基本要求

本章章头的图画显示篮球从投掷到进入篮框的连续过程，计算机可以将它制成动画. 动画由许多静止画面组成，使学生理解动与静的相对关系.

2.1节　通过实例介绍常见的几种变换，使学生了解旋转变换、反射变换、伸缩变换，投影变换与切变变换等常见的几种平面上变换的几何特征.

2.2节　通过建立坐标系给出变换的矩阵，使学生从代数的角度了解变换的特征，给定点的坐标会求象点的坐标.

2.3节　进一步揭示变换的共性：旋转变换、反射变换、伸缩变换，投影变换、切变变换等都是线性变换，它们都保持向量的线性组合关系，使学生了解数学的抽象性在于它能描述事物的共性.

2.4节　介绍连续施行两次线性变换的结果仍然是线性变换、变换复合与矩阵乘法之间的对应，使学生进一步加深认识变换与它的矩阵之间的关系.

2.5节　介绍逆变换与逆矩阵. 把在计算机上施行一项操作看成是作一次变换，删除这项操作就是作它的逆变换，使学生了解逆变换与逆矩阵的意义与作用.

2.6节　讨论二阶矩阵可逆的条件及求逆矩阵的方法，要求学生能够判别一个二阶矩阵（或变换）是否可逆，并会求逆矩阵.

2. 重难点分析

本章的重点是认识教材中所介绍的几种变换和它们的矩阵，以及由已知点的坐标用矩阵

计算象点的坐标.

难点是变换的矩阵和线性变换的推导.

3. 教学建议

(1) 讲解 2.1 节时,让学生从图形上理解各种变换的几何特征,为 2.2 节在坐标平面上找点与象点之间的关系作准备.

(2)求出了变换矩阵之后,给定点的坐标,在计算象点的坐标的运算过程中让学生进一步体会矩阵的又一个应用.

(3)给出一些简单的矩阵,让学生说明它们分别是什么样的变换,进一步树立数形结合的思想.

(4)2.3 节讨论向量的线性组合时要充分利用几何图形,突出数形结合的思想.

从几何图形来看,向量 $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的和 $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ 是以向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 为邻边的平行四边形的与 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$ 共起点的对角线的向量. 数 k 乘 $\boldsymbol{u}$ 所得的向量 $k\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 共线,若 $k>0$,$k\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 方向相同;若 $k<0$,$k\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 方向相反,$k\boldsymbol{u}$ 的长等于 $\boldsymbol{u}$ 的长的 $|k|$ 倍. 从代数角度看,

$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$,$k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}ka+lc\\kb+ld\end{pmatrix}$可以用矩阵运算求得.

一方面从几何图形看出,$\mathscr{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\mathscr{A}(\boldsymbol{u})+\mathscr{A}(\boldsymbol{v})$;另一方面,设变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}$,$\mathscr{A}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a+c\\b+d\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}+\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}=\mathscr{A}(\boldsymbol{u})+\mathscr{A}(\boldsymbol{v})$.

(5)在讲解变换的复合、逆变换时,注意与矩阵的乘法、逆矩阵联系起来,使学生加深对变换与矩阵的关系的理解.

(6)在讲完矩阵可逆的条件以后,有意识地引导学生思考:“如何判断一个变换可逆?”

六、相关资源

1. 矩阵的初等变换及初等矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,以下变换称为矩阵的初等变换:

(1)交换矩阵的两行(或两列)(简称换法变换);

(2)用一个不等于零的数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)(简称倍法变换);

(3)将 $\boldsymbol{A}$ 的某一行(或列)的若干倍加到另一行(或列)(简称消法变换).

对二阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 作一次行(或列)的初等变换所得的矩阵叫初等矩阵. 例如:

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{E}$ 经过一次交换一、二两行(或一、二两列)的换法变换所得的矩阵,称为换法矩阵.

$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{E}$ 经过一次 2 乘以第一行(或第一列)的倍法变换所得的矩阵,称为倍法矩阵.

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{E}$ 经过一次第二行的(-1)倍加到第一行(或第一列的(-1)倍加到第二列)的消法变换所得的矩阵,称为消法矩阵.

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$等都是二阶初等矩阵,初等矩阵都是可逆矩阵. 初等矩阵对应的变换是线性变换. 例如:

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$是以第一、三象限角的平行线为轴的反射变换的矩阵.

$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$是横坐标伸长到 2 倍，纵坐标不变的伸压变换的矩阵.

$\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$是横坐标不变，纵坐标伸长到 3 倍的伸压变换的矩阵.

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$是沿 Ox 轴方向切变角为 45°的切变变换的矩阵.

$\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$是沿 Oy 轴方向切变角为 45°的切变变换的矩阵.

由于初等矩阵都是可逆矩阵，因而反射变换、伸缩变换、切变变换是可逆变换. 虽然旋转变换也是可逆变换，但旋转变换的矩阵不是初等矩阵.

2. 三阶矩阵与空间的变换

三阶单位矩阵经过一次行(或列)的初等变换所得的矩阵叫三阶初等矩阵，例如：

$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$是三阶单位矩阵经过一次换法变换所得的矩阵.

$k\neq0$，$\begin{pmatrix}k&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&&\\&k&\\&&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&k\end{pmatrix}$是三阶单位矩阵经过一次倍法变换所得的矩阵.

$\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&k\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&k\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&k&1\end{pmatrix}$是三阶单位矩阵经过一次消法变换所得的矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶矩阵，对于三维空间的一个向量 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，规定 $\mathscr{A}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，则 $\mathscr{A}$ 是三维空间的一个线性变换. 对于空间中任意两个向量 $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ 和任意两个数 k,l，有 $\mathscr{A}(k\boldsymbol{u}+l\boldsymbol{v})=k\mathscr{A}(\boldsymbol{u})+l\mathscr{A}(\boldsymbol{V})$.

即 $\mathscr{A}$ 是三维空间的线性变换，显然三维空间的变换比平面上的变换复杂得多. 用以上初等矩阵对应的线性变换作用于三维空间的向量 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$，所得向量的分量至少有一个没有改变. 例如：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix},$$

$\mathscr{A}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\\b\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{u}$ 的分量 a 在变换 $\mathscr{A}$ 下不变.

$$\mathscr{B}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}k&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka\\b\\c\end{pmatrix}$$,$\boldsymbol{u}$ 的分量 b,c 在变换 $\mathscr{B}$ 下不变.

$$\mathscr{C}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{C}\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\k&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\ka+c\end{pmatrix}$$,$\boldsymbol{u}$ 的分量 a,b 在变换 $\mathscr{C}$ 下不变.

3. 三阶行列式

三阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{23}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式的计算可以用右图帮助记忆：

用实线连接的三个数相乘,乘积前面带正号；

用虚线连结的三个数相乘,乘积前面带负号.

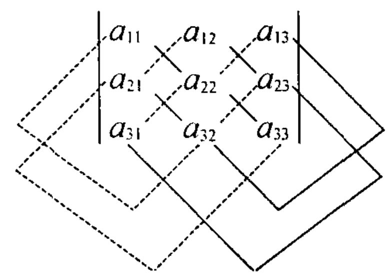

图 2-1

七、评价建议

1. 给定变换和一个比较规则的图形,能否画出变换后的图形.

2. 能否熟练掌握教材中所列出的几种变换的矩阵,给定点的坐标能否准确地求出象点的坐标.

3. 能否了解向量的线性组合和线性变换的含意,能否了解变换的复合及逆变换的含意.

4. 能否准确地写出复合变换及逆变换的矩阵,能否迅速判断矩阵是否可逆.

八、习题和复习题解答

习题 2.1

1. (1)先用画图工具画出如教材例 2 中图 2—3(1) 花朵的半瓣,作关于 l_0 的对称变换并复制原图,画出花朵的一瓣.

(2)将(1)中所得的一瓣花绕点 O 旋转 30°并复制这瓣花,画出花朵的两瓣.

(3)在(2)的基础上,将(1)中的一瓣花绕点 O 旋转 60°,再复制这瓣花,画出花朵的三瓣.

(4)将(3)中花的三瓣绕点 O 旋转 90°,再复制原图,画出花朵的六瓣.

(5)将(4)中花的六瓣绕点 O 旋转 π,再复制原图,便完整画出十二瓣花.

方案中:(1)作了一次关于 l_0 的对称变换.(2)作了一次绕点 O 旋转角为 30°的旋转变换.(3)作了一次绕点 O 旋转角为 60°的旋转变换.(4) 作了一次绕点 O 旋转角为 90°的旋转变换.(5)作了一次绕点 O 旋转角为 π 的旋转变换.共五次变换.

2. (略)

3. 改变第 2 题中伸压变换与切变变换的顺序,所得结果与第 2 题的结果不一样.

习题 2.2.1

1. 旋转变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos30° & -\sin30°\\ \sin30° & \cos30°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

设 P'点的坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$，即点 $P(3,-1)$在 $\mathscr{A}$下的象点为$\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2},\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. 反射变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos120^\circ & \sin120^\circ\\ \sin120^\circ & -\cos120^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

设 P'点的坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{1}{2}+\sqrt{3}\end{pmatrix}$，即点 $P(2,-1)$在 $\mathscr{B}$ 下的象点 P'的坐标为$\left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right)$.

3. 因为 Ox 轴到反射变换的轴的角为 0，所以反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos0 & \sin0\\ \sin0 & -\cos0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

4. 因为 Ox 轴到反射变换的轴的角为 90°，所以反射 $\mathscr{B}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos\pi & \sin\pi\\ \sin\pi & -\cos\pi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5. 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos90^\circ & -\sin90^\circ\\ \sin90^\circ & \cos90^\circ\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是绕点 O 逆时针方向旋转 90°的旋转变换的矩阵. 因为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos0 & \sin0\\ \sin0 & -\cos0\end{pmatrix}$，所以 $\boldsymbol{B}$ 是以 Ox 轴为轴的反射变换的矩阵.

习题 2.2.2

1. 设点 $P(x,y)$在伸压变换 $\mathscr{A}$下的象点为 $P'(x',y')$，则

$$x'=4x,y'=y,\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

因此伸压变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

设点 $P(x,y)$在伸压变换 $\mathscr{B}$ 下的象点为 $P''(x'',y'')$，则

$$x''=\frac{1}{4}x,y''=y,\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix},$$

因此伸压变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. 设点 $P(x,y)$在 $\mathscr{A}$下的象点为 $P'(x',y')$，则 $x'=\frac{1}{2}x, y'=3y$，$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，因此 $\mathscr{A}$的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&3\end{bmatrix}$.

设点 $P(x,y)$在 $\mathscr{B}$下的象点为 $P''(x'',y'')$，则 $x''=2x, y''=\frac{1}{3}y$，$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，因此 $\mathscr{B}$的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2&0\\0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

3. 垂直投影变换 $\mathscr{A}$的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos^2 60^\circ & \sin60^\circ\cos60^\circ\\ \sin60^\circ\cos60^\circ & \sin^2 60^\circ\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}$.

设点 P'的坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}&\frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\\-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，即点 $P(2,-1)$在 $\mathscr{A}$下的象点 P'的坐标为$\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4},-\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

4. 切变变换 $\mathscr{A}$的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\tan45^\circ\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$.

设点 P'的坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$，即点 $P(2,-1)$在 $\mathscr{A}$下的象点 P'的坐标为$(3,-1)$.

5. 切变变换 $\mathscr{A}$的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\tan(-30^\circ)\\0&1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&1\end{bmatrix}$.

设点 P'坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\-3\end{bmatrix}$，即 $P(1,-3)$在 $\mathscr{A}$下的象点是$(1-\sqrt{3},-3)$.

6. 因为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\\\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2&\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\frac{\pi}{4}&\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\\\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}&\sin^2\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 是到直线 l(Ox 轴到直线 l 的角为$\frac{\pi}{4}$)的垂直投影变换 $\mathscr{A}$的矩阵.

因为 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}\\0&1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\tan\alpha\\0&1\end{pmatrix}$，其中 $\alpha=\arctan\left(\frac{-1}{2}\right)$，所以 $\boldsymbol{B}$ 是切变角为$\arctan\left(-\frac{1}{2}\right)$

的切变变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵.

$\boldsymbol{C}$ 是对原点的伸缩比为 5 的伸缩变换 $\boldsymbol{C}$ 的矩阵.

$\boxed{\text{习题 2.3}}$

1. $3\boldsymbol{u}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix},-2\boldsymbol{v}=-2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix},3\boldsymbol{u}-2\boldsymbol{v}=3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}.$

2. 旋转变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$

$$\mathscr{A}(\boldsymbol{i})=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{j})=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$$

$$3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix},\mathscr{A}(3\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j})=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-2\sqrt{2}\\ 5\sqrt{2}\end{bmatrix}.$$

3. (1) $\mathscr{A}(\boldsymbol{i})=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\mathscr{A}(\boldsymbol{j})=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}.$

(2) $3\mathscr{A}(\boldsymbol{u})-2\mathscr{A}(\boldsymbol{v})=3\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}.$

(3) $-3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=-3\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix},$

$$\mathscr{A}(-3\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}.$$

$\boxed{\text{习题 2.4}}$

1. $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{2} & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},$

$\mathscr{B}\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -1 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$

2. 旋转变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos45^\circ & -\sin45^\circ\\ \sin45^\circ & \cos45^\circ\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix},$

切变变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -\tan30^\circ\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix},$

$\mathscr{AB}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}\end{pmatrix}$,

$\mathscr{BA}$ 的矩阵 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-\sqrt{6}+3\sqrt{2}}{6} & -\frac{\sqrt{6}-3\sqrt{2}}{6}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$.

3. 旋转变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$,

$\mathscr{A}^2$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

习题 2.5

1. 设 $\mathscr{B}$ 是旋转角为 $-45°$ 的旋转变换. 因为 $\mathscr{AB}$ 和 $\mathscr{BA}$ 都是恒等变换,所以,旋转角为 $-45°$ 的旋转变换 $\mathscr{B}$ 是 $\mathscr{A}$ 的逆变换.

2. (1) $\mathscr{AB}$ 是先作旋转变换 $\mathscr{B}$,再作旋转变换 $\mathscr{A}$ 的变换,它们的复合是旋转角为 $\beta+\alpha$ 的旋转变换;$\mathscr{BA}$ 是先作旋转变换 $\mathscr{A}$,再作旋转变换 $\mathscr{B}$ 的变换,它们的复合是旋转角为 $\alpha+\beta$ 的旋转变换. P 在 $\mathscr{AB}$ 和 $\mathscr{BA}$ 下的象点 P' 和 P'' 重合,旋转变换 $\mathscr{AB}=\mathscr{BA}$.

(2) $\mathscr{AB}$ 是可逆变换,$\mathscr{AB}$ 的逆变换是旋转角为 $-(\alpha+\beta)$ 的旋转变换.

3. 因为 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 12 & 7\end{pmatrix}\neq\boldsymbol{E}$,所以 $\boldsymbol{A}$ 不是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵.

习题 2.6

1. 因为 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & 3\end{vmatrix}=7\neq0$, $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵,$\boldsymbol{B}$ 不是可逆矩阵.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{7} & -\frac{2}{7}\\ \frac{2}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}.$$

2. (1) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=1$, $|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1 & -3\\ 4 & -5\end{vmatrix}=7$.

(2) 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq0$, $|\boldsymbol{B}|\neq0$,所以 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵.

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-5 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{7} & \frac{3}{7}\\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7}\end{pmatrix}.$$

3. 因为$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\4 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -5\\19 & -22\end{pmatrix}$，$|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}4 & -5\\19 & -22\end{vmatrix}=7\neq 0$，所以$\boldsymbol{AB}$是可逆矩阵.

$$(\boldsymbol{AB})^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-22 & 5\\-19 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{22}{7} & \frac{5}{7}\\-\frac{19}{7} & \frac{4}{7}\end{pmatrix}.$$

复习题

1. 与$\boldsymbol{A}$对应的变换是旋转角为θ的旋转变换；与$\boldsymbol{B}$对应的变换是切变角为α的切变变换；与$\boldsymbol{C}$对应的变换是以直线l为轴的反射变换，Ox轴到直线l的角为$\frac{\theta}{2}$.

2. Ox轴到Ox轴的角为0，变换$\mathscr{A}$的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos^2 0 & \sin 0\cos 0\\\sin 0\cos 0 & \sin^2 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$Ox$轴到$Oy$轴的角为$90°$，变换$\mathscr{B}$的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos^2 90° & \sin 90°\cos 90°\\\sin 90°\cos 90° & \sin^2 90°\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

3. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^2 & \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} & \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 60° & \sin 60°\cos 60°\\\sin 60°\cos 60° & \sin^2 60°\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$是到直线$l$的垂直投影变换的矩阵，$Ox$轴到$l$的角为$60°$.

$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$是伸缩比为3的伸缩变换的矩阵.

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\\sin\frac{\pi}{3} & -\cos\frac{\pi}{3}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}$是以$l$为轴的反射变换的矩阵，$Ox$轴到$l$的角是$\frac{\pi}{6}$.

$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 0 & \sin 0\\\sin 0 & -\cos 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{M}$是以$Ox$轴为轴的反射变换的矩阵.

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\tan(-45°)\\0 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}$是切变角为$-45°$的切变变换的矩阵.

$\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}$是把平面上所有点都变为原点的变换(称为零变换)的矩阵.

4. (1)设P'点的坐标为(x',y')，则$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14\\3\end{pmatrix}$，点$P$在线性变换$\mathscr{A}$下的象点$P'$的坐标为$(14,3)$.

(2)设P''点的坐标为(x'',y'')，则$\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix}$，点$P$在线性变换$\mathscr{B}$下的象点$P''$的坐标为$(0,-6)$.

5. $\mathscr{A}^2$的矩阵是$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$

$\mathscr{A}^5$的矩阵是$\boldsymbol{A}^5=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}^2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}.$

$\mathscr{A}^6$的矩阵是$\boldsymbol{A}^6=\boldsymbol{A}^5\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}.$

6. 旋转变换$\mathscr{A}$的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$，伸压变换$\mathscr{B}$的矩阵为$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$.

$\mathscr{A}\mathscr{B}$的矩阵为$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\alpha&-\sin\alpha\\3\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$，

$\mathscr{B}\mathscr{A}$的矩阵为$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha&-\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos\alpha&-3\sin\alpha\\\sin\alpha&\cos\alpha\end{pmatrix}$.

因为当$\sin\alpha\neq0$时，矩阵$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，所以，当$\mathscr{A}$的旋转角$\alpha\neq k\pi$时，$\mathscr{A}\mathscr{B}\neq\mathscr{B}\mathscr{A}$.

7. 因为$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4\neq0$，$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}=1\neq0$，$|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}=0$，

所以$\mathscr{A}$，$\mathscr{B}$是可逆变换，$\mathscr{C}$不是可逆变换.

$\mathscr{A}$的逆变换的矩阵是$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\mathscr{B}$的逆变换的矩阵是$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

8. (1)设P'，Q'，R'，S'的坐标分别为(x'_1,y'_1)，(x'_2,y'_2)，(x'_3,y'_3)，(x'_4,y'_4)则

$$\begin{bmatrix}x'_1\\y'_1\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix},\ \begin{bmatrix}x'_2\\y'_2\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x'_3\\y'_3\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\end{pmatrix},\ \begin{bmatrix}x'_4\\y'_4\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},$$

因此P，Q，R，S在$\mathscr{A}$下的象点的坐标分别是$P'(7,2)$，$Q'(3,2)$，$R'(-3,-1)$，$S'(1,-1)$.

(2)连接$P'Q'$，$Q'R'$，$R'S'$，$S'P'$得到的图形是一个平行四边形.

(3)设O'，M'的坐标分别为(x'_5,y'_5)，(x'_6,y'_6)，则

$$\begin{bmatrix}x'_5\\y'_5\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}x'_6\\y'_6\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$$

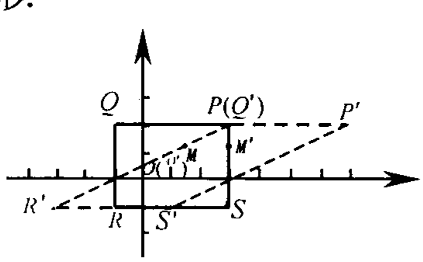

图 2-2

因此O，M在$\mathscr{A}$下的象点的坐标分别为$O'(0,0)$，$M'(3,1)$.

9. (1)点P绕点O旋转$\frac{\pi}{2}$得到点P_1，点Q绕点O旋转$\frac{\pi}{2}$后得到点Q_1，点R绕点O旋转$\frac{\pi}{2}$后得到R_1，三角形$P_1Q_1R_1$是PQR经过旋转变换$\mathscr{A}$所得的图形.

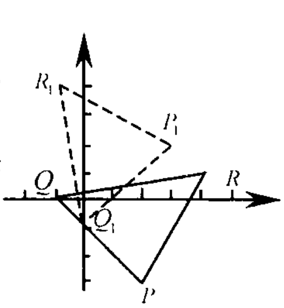

图 2-3

(2)设P'，Q'，R'的坐标分别为(x'_1,y'_1)，(x'_2,y'_2)，(x'_3,y'_3)，则

$$\begin{pmatrix}x'_1\\y'_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos90^\circ & -\sin90^\circ\\ \sin90^\circ & \cos90^\circ\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}x'_2\\y'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x'_3\\y'_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}.$$

因此 P,Q,R 在 $\mathscr{A}$ 下象点的坐标是 $P'(3,2),Q'(0,-1),R'(-1,4)$.

(3) 三角形 $P'Q'R'$ 与(1)中画出的三角形 $P_1Q_1R_1$ 完全重合.

10. (1) 反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$,

反射变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos90^\circ & \sin90^\circ\\ \sin90^\circ & -\cos90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$,

变换 $\mathscr{AB}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$,

变换 $\mathscr{BA}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$.

(2) 反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}$, $\mathscr{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\cos2\beta & \sin2\beta\\ \sin2\beta & -\cos2\beta\end{pmatrix}$,

$\mathscr{AB}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2\beta & \sin2\beta\\ \sin2\beta & -\cos2\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos2\alpha\cos2\beta+\sin2\alpha\sin2\beta & \cos2\alpha\sin2\beta-\sin2\alpha\cos2\beta\\ \sin2\alpha\cos2\beta-\cos2\alpha\sin2\beta & \sin2\alpha\sin2\beta+\cos2\alpha\cos2\beta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(2\alpha-2\beta) & -\sin(2\alpha-2\beta)\\ \sin(2\alpha-2\beta) & \cos(2\alpha-2\beta)\end{pmatrix},$$

$\mathscr{BA}$ 的矩阵为

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}\cos2\beta & \sin2\beta\\ \sin2\beta & -\cos2\beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(2\beta-2\alpha) & -\sin(2\beta-2\alpha)\\ \sin(2\beta-2\alpha) & \cos(2\beta-2\alpha)\end{pmatrix}.$$

11. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{vmatrix}=-2,|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}-4 & 4\\3 & -5\end{vmatrix}=8$,

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16 & 28\\21 & 37\end{pmatrix},|\boldsymbol{A}^2|=4,$$

$$A^3=\begin{pmatrix}16 & 28\\ 21 & 37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}116 & 204\\ 153 & 269\end{pmatrix},\ |A^3|=-8.$$

(1) $AB=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 4\\ 3 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -12\\ 3 & -13\end{pmatrix}$, $|AB|=-16$, $|AB|=|A|\cdot|B|$.

(2) $|A^2|=4=|A|^2$,

(3) $|A^3|=-8=|A|^3$.

第 3 章　二元一次方程组与矩阵

一、教育价值

方程和方程组是刻画现实世界的一种有效模型. 本章用矩阵来求解方程组，并且通过解方程组来求一个点在变换下的原象点. 矩阵、变换、线性方程组在这一章有机地联系起来. 一方面学生能体会到数学方法的神奇与奥妙，另一方面也能感受到这些虽然“深奥”的知识自己也是能掌握的，从而激发他们学习数学的兴趣.

二、教学目标

1. 知识目标

(1)当 $\boldsymbol{A}$ 是二阶可逆矩阵时，会解 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 的二元一次方程组.

(2)不解方程组能判别方程组是否有解.

2. 能力目标

给定点的坐标，能通过解方程组求点在变换下的原象点的坐标.

3. 情感目标

使学生体会矩阵的又一个应用以及矩阵、变换、解二元一次方程组之间的联系.

三、教材结构

章头语指出方程和方程组是刻画现实世界的数学模型，当二元一次方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，方程组的求解公式与一元一次方程 $ax=b(a\neq0)$ 求解公式类似，但是方程组与一元一次方程又有着本质区别. 通过本章的学习使学生认识到用矩阵解二元一次方程组是在以前所学二元一次方程组基础上的深化. 本章共分两节：

3.1 节　讨论二元一次方程组的系数矩阵可逆时的求解公式，并讨论方程组有解的条件.

3.2 节　给定线性变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及点的坐标，利用解方程组求原象点的坐标.

四、课时分配

本章共 2 课时，具体分配如下：(仅供参考)

3.1　二元一次方程组的矩阵解法	约 1 课时
3.2　线性变换的原象	约 1 课时

五、内容分析

1. 内容概述及基本要求

3.1 节　介绍矩阵方法解二元一次方程组，并讨论方程组是否有解. 要求学生能熟练地求解方程组或判断方程组是否有解.

3.2 节　从第二章求点在变换下的象点的问题出发，提出反问题：如何求点 P' 在变换下的原象点？将问题归结为解方程组. 要求学生理解求原象点方法的原理，并熟练地进行计算.

2. 重难点分析

本章的重点是用矩阵方法解二元一次方程组，求原象点的坐标.

难点是二元一次方程组有解的判别.

3. 教学建议

(1)当方程组的系数矩阵可逆时，方程组 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$ 的解是 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}b_1\\b_2\end{bmatrix}$，能否熟练准确地计算 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 和作矩阵乘法是解题的关键. 教学时要求学生能熟练、准确地进行矩阵乘法运算和求逆矩阵.

(2)用消元法推导求解公式时，出现 $|\boldsymbol{A}|x=|\boldsymbol{A}_1|$，$|\boldsymbol{A}|y=|\boldsymbol{A}_2|$，当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，方程组有唯一解 $x=\dfrac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$，$y=\dfrac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}$；当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，方程组无解或有无穷多解. 要让学生明白，对于无解方程组，能确定其无解就完成了对它的求解.

(3)如果学生理解了“求点在某线性变换下的原象点可归结为解二元一次方程组”，计算就比较容易了，因此要重视 3.2 节例 1 前的分析.

六、相关资源

1. n 元线性方程组

由 m 个方程组成的 n 元一次方程组（称为 n 元线性方程组）的一般形式是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}\qquad (*)$$

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$，$x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$，方程组（$*$）用矩阵表示为 $\boldsymbol{A}x=b$.

如果 $m=n$，$\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$x=\boldsymbol{A}^{-1}b$. 令

$$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\b_n&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\ |\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&b_n&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\cdots,\ |\boldsymbol{A}_n|=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,n-1}&b_1\\a_{21}&\cdots&a_{2,n-1}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&\cdots&a_{n,n-1}&b_n\end{vmatrix},$$

则解的公式为 $x_1=\dfrac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}$，$x_2=\dfrac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}$，$\cdots$，$x_n=\dfrac{|\boldsymbol{A}_n|}{|\boldsymbol{A}|}$. 当 $m\neq n$，或当 $m=n$ 但 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，可以通

过讨论 $\boldsymbol{A}, b$ 之间的关系判别线性方程组是否有解.

2. 在三维空间中也可以用解线性方程组的方法求一个点在某个线性变换下的原象点. 应该注意的是:对于可逆线性变换,一个点的原象点是唯一的,如果 $\boldsymbol{A}$ 不是可逆变换,有的点可能有无穷多个原象点,有的点可能没有原象点.

例如:设 l 是过原点的直线,Ox 轴到直线 l 的角为$\frac{\pi}{4}$,$\mathscr{A}$是到直线 l 的正投影变换,$\mathscr{A}$的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \cos^2\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\ \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} & \sin^2\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

给定点 $P'(1,1)$,P'点在直线 l 上. 过点 $P'(1,1)$与 l 垂直的直线上的所有点在 $\mathscr{A}$下的象点都是 P'. 另一方面,二元一次方程组$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$有无穷多解$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+k \\ 1-k \end{pmatrix}$,坐标是$(1+k,1-k)$($k$ 为任意常数)的点的象点都是 P'. 点 $Q'(1,-1)$不在直线 l 上,由此它不是平面上任何一点在 $\mathscr{A}$下的象. 二元一次方程组$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$无解.

七、评价建议

1. 能否熟练用矩阵解二元一次方程组或判别其是否有解.
2. 能否理解矩阵、变换与二元一次方程组的联系,能否用解方程组的方法求原象点.

八、习题和复习题解答

习题 3.1

1. 行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=11$,$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}=11$,$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}=11$,方程组的解是 $x=\frac{|\boldsymbol{A}_1|}{|\boldsymbol{A}|}=1$,$y=\frac{|\boldsymbol{A}_2|}{|\boldsymbol{A}|}=1$.

2. 行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 10 \end{vmatrix}=0$,$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 15 & 10 \end{vmatrix}=0$,$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 15 \end{vmatrix}=0$,方程组有无穷多解,它们是$\begin{cases} x=k, \\ y=\frac{3}{2}-\frac{k}{2} \end{cases}$,其中 k 是任意数.

3. 因为行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}=0$,$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}\neq 0$,所以方程组无解.

4. (1) 因为行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\neq 0$,所以方程组有唯一解.

(2) 因为行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{vmatrix}\neq 0$，所以方程组无解.

习题 3.2

1. 设点P'的原象点P的坐标为(x,y)，则$\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -2\end{pmatrix}$. 由于

$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}4 & 7\\ -2 & 4\end{vmatrix}=30$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=-8$，解方程组得 $x=30$，$y=-8$. 即点P'的原象点P的坐标为$(30,-8)$.

2. 切变变换$\mathscr{A}$的矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 设$P$点的坐标为$(x,y)$，则$\begin{bmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 4\end{pmatrix}$.

$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}2 & -\frac{\sqrt{3}}{3}\\ 4 & 1\end{vmatrix}=\frac{10}{3}$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{vmatrix}=4$，解方程组得 $x=2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$，$y=4$，即点P'的原象点P的坐标为$\left(2+\frac{4\sqrt{3}}{3},4\right)$.

3. 设点(x',y')在$\mathscr{A}$下有原象点(x,y)，则$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}$. 而$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}\neq 0$，方程组$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$无解，因此$P'(3,1)$在变换$\mathscr{A}$下没有原象点.

行列式$\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 8 & -4\end{vmatrix}=0$，$\begin{vmatrix}1 & -4\\ -2 & 8\end{vmatrix}=0$，因此$Q'(-4,8)$在变换$\mathscr{A}$下有无穷多个原象点.

复习题

1. 行列式$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-3$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-9$，所以方程组的解为$x=1$，$y=3$.

2. (1) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=1$，方程组有解，并且只有一个解.

(2) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{vmatrix}=0$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{vmatrix}=0$，方程组有无穷多个解.

(3) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=0$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 7 & 2\end{vmatrix}\neq 0$，方程组无解.

3. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0$，$\boldsymbol{A}$是可逆矩阵，并且$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}$，因此

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\left[\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -2 & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

4. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\0 & 2\end{vmatrix}=6\neq0$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AX})=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2\\6 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\3 & \frac{5}{2}\end{pmatrix}.$$

5. $|\boldsymbol{A}|=6\neq0$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{XA})\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 2\\6 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{6}\\0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3} & \frac{1}{3}\\2 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

6. $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=a\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3b\\2b\end{pmatrix}$，由 $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 得二元一次方程组 $\begin{cases}2a+3b=1,\\a+2b=0.\end{cases}$ 由于 $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{vmatrix}=1$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix}=2$，$|\boldsymbol{A}_2|=\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 0\end{vmatrix}=-1$，方程组有解 $a=2$，$b=-1$. 即当 $a=2$，$b=-1$ 时有 $a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

7. 假定 $\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$，则有 $\begin{pmatrix}2a\\-a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2b\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，即 $\begin{cases}2a-2b=1,\\-a+b=0.\end{cases}$

$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2 & -2\\-1 & 1\end{vmatrix}=0$，$|\boldsymbol{A}_1|=\begin{vmatrix}1 & -2\\0 & 1\end{vmatrix}\neq0$，方程组无解，因此 $\boldsymbol{w}$ 不能表示为 $\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{u}+b\boldsymbol{v}$.

8. 旋转变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，切变变换 $\mathscr{B}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}$.

设 P 和 P'' 的坐标分别为 $P(x,y)$，$P''(x'',y'')$，则 $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$，由于 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\sqrt{3}\\2-\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

又 $\begin{pmatrix}x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$，因而点 P 的坐标是 $(1+2\sqrt{3},2-\sqrt{3})$，P'' 的坐标是 $(-2,4)$.

9. 设 P 和 P' 的坐标分别为 $P(x,y)$，$P'(x',y')$，则 $\begin{pmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，并且 $\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，因此

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}.$$

因此$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix},\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ -9\end{pmatrix},$$

即点 P 的坐标是 $P(5,-9)$，点 P' 的坐标是 $P'(2,-3)$.

10. $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}=6\neq0$，$\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，因此

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 6 & 5 & 0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}.$$

第 4 章　特征值和特征向量

一、教育价值

特征值、特征向量是与线性变换、矩阵有关的重要概念，本章通过几个简化了的数学模型说明特征值、特征向量在实际问题中的应用价值，使学生既学到数学知识，又初步了解它们的应用.

二、教学目标

1. 知识目标

(1)理解特征值、特征向量的概念以及它们的几何意义.

(2)会求矩阵的特征值和特征向量.

2. 能力目标

能解释一些简化了的数学模型中的特征值、特征向量的实际意义.

3. 情感目标

感受抽象的数学概念和结论在实际问题中的应用.

三、教材结构

章头语以第 2 章阅读材料中概率向量 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}\frac{14}{23}\\ \frac{5}{23}\\ \frac{4}{23}\end{bmatrix}$ 的特殊性质“$\mathscr{A}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}$”为例，指出存在满足 $\mathscr{A}(\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{u}$ 的向量 $\boldsymbol{u}$. 本章共分两节：

4.1 节　以工业发展与环境污染为例引入特征值、特征向量的概念，并以反射变换、旋转变换为例说明特征值与特征向量的几何意义.

4.2 节　由线性变换与矩阵的关系及线性变换特征值、特征向量的概念给出矩阵的特征值、特征向量的概念，并介绍特征值、特征向量的求法.

四、课时分配

本章共 3 课时，具体分配如下：(仅供参考)

4.1　线性变换的特征值和特征向量	约 1 课时
4.2　矩阵的特征值和特征向量	约 2 课时

五、内容分析

1. 内容概述及基本要求

4.1 节　通过工业发展与环境污染的问题引入概念，要求学生理解线性变换的特征值、特征向量的含意.

4.2 节　由线性变换与矩阵的关系引入矩阵的特征值、特征向量的概念，给出特征值、特征向量的求法，要求学生能熟练地计算矩阵和线性变换的特征值和特征向量，理解它们在实际问题中的意义.

2. 重难点分析

本章重点和难点是特征值、特征向量的概念及它们在实际问题中的意义.

3. 教学建议

(1)通过具体例子给出变换的特征值、特征向量的概念及其存在性. 强调特征向量是非零向量以及它的几何意义.

(2)注意矩阵的特征值、特征向量与变换的特征值、特征向量的关系，矩阵的特征值、特征向量是有具体的计算方法的，从而变换的特征值和特征向量也可以计算.

(3)通过液态、气态共存与相互转化的例子，第 2 章阅读材料中概率向量的例子以及本章开头的工业发展与环境污染等实例了解特征值、特征向量在实际问题中的意义.

六、相关资源

1. 三阶矩阵的特征值和特征向量

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$是一个三阶矩阵，行列式$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$叫矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式，$\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的根是$\boldsymbol{A}$ 的特征值. 特征多项式

$$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & k-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & k-a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=k^3-(a_{11}+a_{22}+a_{33})k^2+\left[\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right]k-|\boldsymbol{A}|.$$

设 k_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，三元一次方程组

$$\begin{pmatrix} k_0-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & k_0-a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & k_0-a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

的非零解是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值k_0 的特征向量.

如果三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有三个不同的特征值k_1,k_2,k_3，则$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=(k-k_1)(k-k_2)(k-k_3)$，于是有 $k_1+k_2+k_3=a_{11}+a_{22}+a_{33}$，$k_1\cdot k_2\cdot k_3=|\boldsymbol{A}|$.

设$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于k_1,k_2,k_3 的特征向量，令 $\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{T}$ 是

可逆矩阵，并且 $T^{-1}AT=\begin{pmatrix}k_1&0&0\\0&k_2&0\\0&0&k_3\end{pmatrix}$. 由于 $T^{-1}A^nT=(T^{-1}AT)(T^{-1}AT)\cdots(T^{-1}AT)=(T^{-1}AT)^n$. 那么，$T^{-1}A^nT=\begin{pmatrix}k_1^n&0&0\\0&k_2^n&0\\0&0&k_3^n\end{pmatrix}$，所以 k_1^n,k_2^n,k_3^n 是 A^n 的特征值，$\begin{pmatrix}x_1\\y_1\\z_1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_2\\y_2\\z_2\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}x_3\\y_3\\z_3\end{pmatrix}$ 是 A^n 的分别属于 k_1^n,k_2^n,k_3^n 的特征向量.

2. n 阶矩阵的特征多项式

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，行列式 $|kE-A|$ 叫矩阵 A 的特征多项式.

$|kE-A|=k^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})k^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$，因此 A 的特征值 k_1，$k_2,\cdots,k_n$ 有性质：

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn},\ k_1k_2\cdots k_n=|A|.$$

七、评价建议

1. 能否熟练求矩阵和线性变换的特征值和特征向量.
2. 能否理解变换的特征值和特征向量的几何意义与实际意义.

八、习题和复习题解答

习题 4.1

1. $\mathscr{A}$ 是旋转角为 α 的旋转变换，那么向量 u 到向量 $\mathscr{A}(u)$ 的角为 α. 若 $\alpha\neq k\pi,k\in Z$，$\mathscr{A}(u)$ 与 u 不能共线.

2. $\mathscr{A}$ 是以直线 l 为轴的反射变换，根据本书的约定(P. 33) l 是过原点的直线，如果向量 u 的终点不在直线 l 上，则 u 不在直线 l 上，u 与 $\mathscr{A}(u)$ 关于直线 l 对称，因此 $\mathscr{A}(u)$ 与 (u) 不能共线.

3. $\mathscr{A}$ 是伸缩倍数为 3 的伸压变换，那么，向量 $\mathscr{A}(u)$ 与 u 的方向相同，并且 $\mathscr{A}(u)$ 的长是 u 的长的 3 倍，即 $\mathscr{A}(u)=3u$，$\mathscr{A}(u)$ 与 u 共线，$\mathscr{A}$ 的特征值是 3.

习题 4.2

1. $|kE-A|=\begin{vmatrix}k-1&-1\\-4&k-1\end{vmatrix}=(k-3)(k+1)$，解得 $k=3$ 和 $k=-1$. A 的特征值为 3 和 -1.

对于 $k=3$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}3-1&-1\\-4&3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}2&-1\\-4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ 是矩阵 A 的属于特征值 3 的一个特征向量.

对于 $k=-1$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}-1-1&-1\\-4&-1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}-2&-1\\-4&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，

得一个非零解$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量.

2. 投影变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵是 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos^2\frac{\pi}{4} & \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\\ \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} & \sin^2\frac{\pi}{4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & k-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=k(k-1)$，解得 $k=0,k=1$. $\mathscr{A}$ 的特征值为 0 和 1.

对于 $k=0$，解二元一次方程组$\begin{bmatrix}0-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 0-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是正投影变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 0 的一个特征向量.

对于 $k=1$，解二元一次方程组$\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$是正投影变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

3. $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-3 & 2\\ 4 & k-1\end{vmatrix}=(k-5)(k+1)$，解得 $k=5$ 和 $k=-1$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 5 和 -1.

对于 $k=5$，解二元一次方程组$\begin{pmatrix}5-3 & 2\\ 4 & 5-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零向量$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的一个特征向量.

对于 $k=-1$，解二元一次方程组$\begin{pmatrix}-1-3 & 2\\ 4 & -1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}-4 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零向量$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$，因此$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量.

4. 伸压变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$.

$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-2 & 0\\ 0 & k-3\end{vmatrix}=(k-2)(k-3)$，解得 $k=2$ 和 $k=3$. $\mathscr{A}$ 的特征值为 2 和 3.

对于 $k=2$，解二元一次方程组$\begin{pmatrix}2-2 & 0\\ 0 & 2-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 2 的一个特征向量.

对于 $k=3$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}3-2 & 0\\ 0 & 3-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 3 的一个特征向量.

复习题

1. (1) $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k+5 & -2\\ -2 & k+5\end{vmatrix}=(k+3)(k+7)$，得 $k=-3$，$k=-7$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值是 -3 和 -7.

对于 $k=-3$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}-3+5 & -2\\ -2 & -3+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -3 的一个特征向量.

对于 $k=-7$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}-7+5 & -2\\ -2 & -7+5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -7 的一个特征向量.

(2) $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-3 & -4\\ 1 & k+1\end{vmatrix}=(k-1)^2$，解得 $k=1$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1.

对于 $k=1$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}1-3 & -4\\ 1 & 1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

2. $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k & -1\\ -1 & k\end{vmatrix}=k^2-1=(k+1)(k-1)$，得 $k=-1$ 和 $k=1$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 和 1.

对于 $k=-1$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量.

对于 $k=1$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

3. $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-1 & 2\\ 2 & k-1\end{vmatrix}=(k-3)(k+1)$，得 $k=3$ 和 $k=-1$，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值为 3 和 -1.

对于 $k=3$，解二元一次方程组 $\begin{pmatrix}3-1 & 2\\ 2 & 3-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即 $\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$ 是线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 3 的一个特征向量.

对于 $k=-1$，解二元一次方程组$\begin{pmatrix}-1-1 & 2\\ 2 & -1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即$\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$是线性变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值-1 的一个特征向量.

4. (1) 反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos90^\circ & \sin90^\circ\\ \sin90^\circ & -\cos90^\circ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

(2) $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k & -1\\ -1 & k\end{vmatrix}=(k+1)(k-1)$. 由第 2 题可知，反射变换的特征值为$-1$ 和 1，并且 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$是反射变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值-1 的特征向量，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

5. (1) 反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos60^\circ & \sin60^\circ\\ \sin60^\circ & -\cos60^\circ\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

(2) $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & k+\frac{1}{2}\end{vmatrix}=k^2-1=(k+1)(k-1)$，解得 $k=-1$ 和 $k=1$，线性变换 $\mathscr{A}$ 的特征值为-1 和 1.

对于 $k=-1$，解二元一次方程组$\begin{bmatrix}-1-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -1+\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即$\begin{bmatrix}-\frac{3}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{u}=\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{bmatrix}$是变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值-1 的一个特征向量.

对于 $k=1$，解二元一次方程组$\begin{bmatrix}1-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1+\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，即$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$，得一个非零解$\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{v}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$是变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

6. 反射变换 $\mathscr{A}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\cos2\alpha & \sin2\alpha\\ \sin2\alpha & -\cos2\alpha\end{pmatrix}$，

$$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}k-\cos2\alpha & -\sin2\alpha\\ -\sin2\alpha & k+\cos2\alpha\end{vmatrix}=k^2-1=(k+1)(k-1),$$

解得 $k=-1$ 和 $k=1$，反射变换 $\mathscr{A}$ 的特征值是-1 和 1.

对于 $k=-1$，解方程组 $\begin{pmatrix} -1-\cos2\alpha & -\sin2\alpha \\ -\sin2\alpha & -1+\cos2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，当 $\alpha\neq\frac{2k+1}{2}\pi$ 时得一个非零解 $\begin{pmatrix} \sin2\alpha \\ -1-\cos2\alpha \end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} \sin2\alpha \\ -1-\cos2\alpha \end{pmatrix}$ 是变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量，当 $\alpha=\frac{2k+1}{2}\pi$ 时，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量.

对于 $k=1$，解方程组 $\begin{pmatrix} 1-\cos2\alpha & -\sin2\alpha \\ -\sin2\alpha & 1+\cos2\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，当 $\alpha\neq k\pi$ 时得一个非零解 $\begin{pmatrix} \sin2\alpha \\ 1-\cos2\alpha \end{pmatrix}$，因此 $\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} \sin2\alpha \\ 1-\cos2\alpha \end{pmatrix}$ 是变换 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量，当 $\alpha=k\pi$ 时，$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 是 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 1 的一个特征向量.

7. $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}^2+2\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}+4\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix} 43 & -40 \\ -24 & 27 \end{pmatrix}$，

$$|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix} k-43 & 40 \\ 24 & k-27 \end{vmatrix}=k^2-70k+201=(k-3)(k-67),$$

解得 $k=3$ 和 $k=67$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 的特征值是 3 和 67.

对于 $k=3$，解方程组 $\begin{pmatrix} -40 & 40 \\ 24 & -24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 的属于特征值 3 的一个特征向量.

对于 $k=67$，解方程组 $\begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 24 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$ 的属于特征值 67 的一个特征向量.

8. (1) $|k\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} k-2 & -3 \\ -3 & k-2 \end{vmatrix}=(k+1)(k-5)$，得 $k=-1$ 和 $k=5$，$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1 和 5.

对于 $k=-1$，解方程组 $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -1 的一个特征向量.

对于 $k=5$，解方程组 $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得一个非零解 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，因此 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 5 的一个特征向量.

(2) 设 $\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 k 的特征向量，则

$$\boldsymbol{Au}=k\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{Au})=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{u})=k\boldsymbol{Au}=k^2\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}(k^2\boldsymbol{u})=k^2(\boldsymbol{Au})=k^3\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{A}^6\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^3(\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}^3(k^3\boldsymbol{u})=k^3\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{u}=k^3\cdot k^3\boldsymbol{u}=k^6\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{A}^9\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^3(\boldsymbol{A}^6\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}^3(k^6\boldsymbol{u})=k^6(\boldsymbol{A}^3\boldsymbol{u})=k^9\boldsymbol{u},$$
$$\boldsymbol{A}^{10}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^9\boldsymbol{u})=\boldsymbol{A}(k^9\boldsymbol{u})=k^9(\boldsymbol{Au})=k^{10}\boldsymbol{u}.$$

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 -1，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{10}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=(-1)^{10}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

对于 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 5，$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=5^{10}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}5^{10}\\5^{10}\end{bmatrix}$.

$\boxed{\text{思考与实践}}$（约 1 课时）

1. 矩阵、变换以及线性方程组都是非常重要的数学工具，三者之间联系紧密. 学生在学习以后系统地回顾本专题所学的知识是非常有必要的.

2. 本专题在介绍有关知识的过程中尽量从具体的实例出发逐渐引入抽象概念，并注重抽象概念的几何意义和实例背景. 一方面由感性认识提升到抽象概念，减少学生学习中的困难；另一方面也培养学生的学习能力和实践能力. 因此，应该要求学生从现实生产、生活中收集有关的素材，以检查学生掌握知识的情况，提高学生的实践能力.

3. 矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{N}=\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$是二阶消法矩阵，$\boldsymbol{M}$ 是将单位矩阵第二行的 m 倍加到第一行得到的矩阵，也是将单位矩阵第一列的 m 倍加到第二列得到的矩阵；$\boldsymbol{N}$ 是将单位矩阵第一行的 n 倍加到第二行得到的矩阵，也是将单位矩阵第二列的 n 倍加到第一列得到的矩阵.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第二行的 m 倍加到第一行，即 $\boldsymbol{MA}=\begin{pmatrix}a+mc&b+md\\c&d\end{pmatrix}$，将这种行的初等变换记为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{(1)+m(2)}\begin{pmatrix}a+mc&b+md\\c&d\end{pmatrix}$. 在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘矩阵 $\boldsymbol{M}$ 相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第一列的 m 倍加到第二列，即 $\boldsymbol{AM}=\begin{pmatrix}a&b+ma\\c&d+mc\end{pmatrix}$，这种初等变换记为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[(2)+m(1)]{}\begin{pmatrix}a&b+ma\\c&d+mc\end{pmatrix}$. 在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘矩阵 $\boldsymbol{N}$，相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第一行的 n 倍加到第二行，即 $\boldsymbol{NA}=\begin{pmatrix}a&b\\c+na&d+nb\end{pmatrix}$，这种初等变换记为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow{(2)+n(1)}\begin{pmatrix}a&b\\c+na&d+nb\end{pmatrix}$. 在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘矩阵 $\boldsymbol{N}$ 相当于将 $\boldsymbol{A}$ 的第二列的 n 倍加到第一列，即 $\boldsymbol{AN}=\begin{pmatrix}a+nb&b\\c+nd&d\end{pmatrix}$，这种初等变换记为 $\boldsymbol{A}\xrightarrow[(1)+n(2)]{}\begin{pmatrix}a+nb&b\\c+nd&d\end{pmatrix}$.

一般地，在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘初等矩阵 $\boldsymbol{P}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作一次与 $\boldsymbol{P}$ 相同的行的初等变换；在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘初等矩阵 $\boldsymbol{Q}$，相当于对 $\boldsymbol{A}$ 作一次与 $\boldsymbol{Q}$ 相同的列的初等变换.

初等矩阵都是可逆矩阵，若干个初等矩阵的乘积仍然是可逆矩阵.

欲将矩阵$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$分解为形如$\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$的矩阵的乘积（注意$\begin{pmatrix}1&m\\0&1\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1&0\\n&1\end{pmatrix}$都是消法矩阵），可以先将 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$经过消法变换化为单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，于是存在一系列消法矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 使得 $\boldsymbol{P}_s\cdots\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\cdots\boldsymbol{Q}_t=\boldsymbol{E}$. 即

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_2^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_s^{-1}\boldsymbol{Q}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{Q}_1^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}.$$

$\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2\cdots,\boldsymbol{P}_s,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\cdots,\boldsymbol{Q}_t$ 是消法矩阵，则 $\boldsymbol{P}_1^{-1},\boldsymbol{P}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{P}_s^{-1},\boldsymbol{Q}_1^{-1},\boldsymbol{Q}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{Q}_t^{-1}$ 也是消法

矩阵，于是 $\boldsymbol{A}$ 分解为一系列消法矩阵的乘积. 当 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$时，对 $\boldsymbol{A}$ 作消法变换，

$$\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)-2(1)}\begin{pmatrix}3&4\\-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{(1)+2(2)}\begin{pmatrix}1&2\\-1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow[(2)-2(1)]{}\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{(2)+(1)}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Q}_1=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$，以上作消法变换的过程用矩阵的乘积表示为 $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{P}_2^{-1}\boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{Q}_1^{-1}$. 其中

$$\boldsymbol{P}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&-2\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{Q}_1^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}.$$

注意：$\boldsymbol{A}$ 的这种分解与对 $\boldsymbol{A}$ 作的消法变换有关，因此分解不是唯一的.

{
  "filename": "MTI3NjcwNTFf5pWw5a2mNC0y55+p5b2i5LiO5Y+Y5o2i5pWZ5biI5pWZ5a2m55So5Lmm6YCJ5L+uLnppcA==",
  "filename_decoded": "12767051_\u6570\u5b664-2\u77e9\u5f62\u4e0e\u53d8\u6362\u6559\u5e08\u6559\u5b66\u7528\u4e66\u9009\u4fee.zip",
  "filesize": 3234138,
  "md5": "bdaddbdf810d3a4f3291d0191ab1c31a",
  "header_md5": "84b4d003bda871805855e7e4a4783014",
  "sha1": "58d17e120825b0a62aa312201435aed6e31e7764",
  "sha256": "a70e4e555c5ea00f236dba822db65eade02c1272bf4017074d178410238413d2",
  "crc32": 3508318712,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 3213326,
  "pdg_dir_name": "12767051_\u2569\u00b2\u2564\u00ba4-2\u255b\u256a\u2568\u256c\u2559\u03b4\u2592\u03a3\u2557\u2557\u255c\u2560\u2569\u00aa\u255c\u2560\u2564\u00ba\u2559\u251c\u2569\u0398\u2564\u00ed\u2568\u2590",
  "pdg_main_pages_found": 40,
  "pdg_main_pages_max": 40,
  "total_pages": 45,
  "total_pixels": 274165373,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}