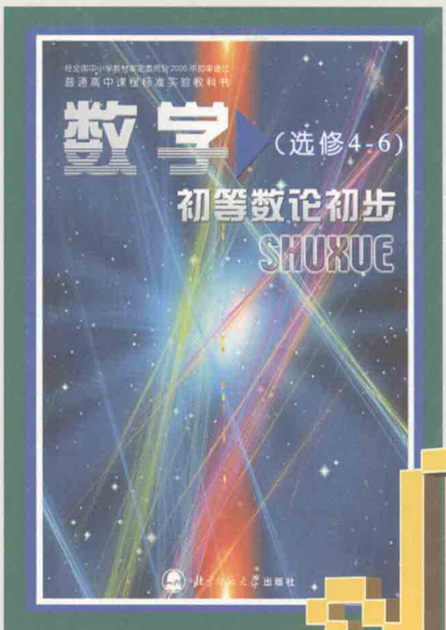
普通高中课程标准实验教科书

数学 （选修4-6）

初等数论初步
教师教学用书

SHUXUE

JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU



北京师范大学出版社

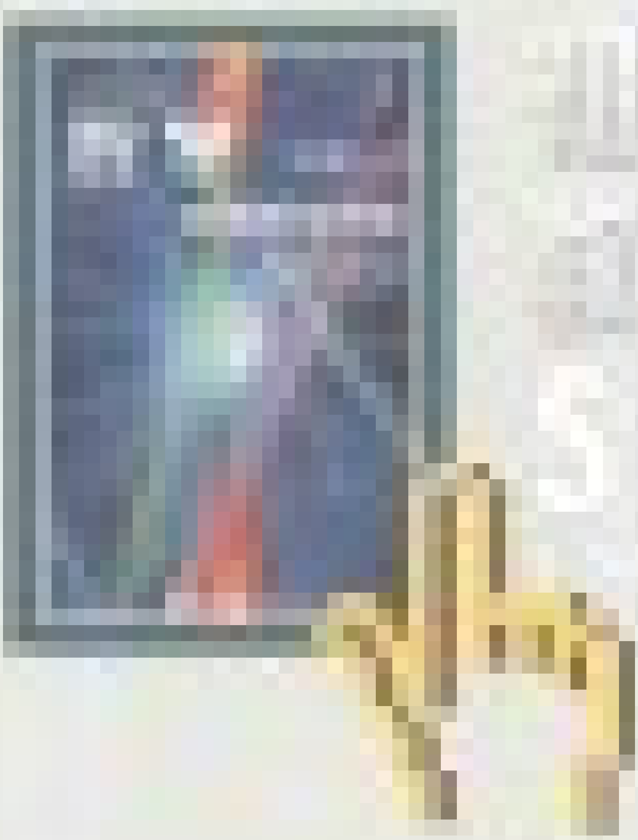
责任编辑／王永会　焦继红
美术编辑／高　霞

普通高中课程标准实验教科书

数学▼选修 4-6　初等数论初步　教师教学用书

http://www.bnup.com.cn

ISBN 7-303-07795-2
9 787303 077953 >
ISBN 7-303-07795-2/G・6021
定价：6.00 元



SHUXUE

普通高中课程标准实验教科书

数学（选修4-6）

初等数论初步

教师教学用书

SHUXUE

JIAOSHI JIAOXUE YONGSHU

主　编　张饴慈　梁力平

北京师范大学出版社

·北京·

市场营销部电话 010－58808015 58804236
教材发展部电话 010－58802126
教材服务部电话 010－58802873 58802710
邮 购 科 电 话 010－58808083
传 真 010－58806196 58808994
编 辑 部 电 话 010－58809014
电 子 邮 箱 shuxue3@bnup.com.cn

北京师范大学出版社出版发行
（北京新街口外大街 19 号 邮政编码：100875）
http://www.bnup.com.cn
出版人：赖德胜
北京新丰印刷厂印刷 全国新华书店经销
开本：210 mm×297 mm 印张：3 字数：65 千字
2005 年 10 月第 1 版 2006 年 1 月第 2 次印刷
定价：6.00 元

前　　言

本书是北京师范大学出版社2005年7月出版的《普通高中课程标准实验教科书·初等数论初步(选修4-6)》的配套教师用书,其内容是介绍本册教科书的教学目的、编写意图与特色,教学内容及课时安排建议、教学建议、评价建议、课程资源参考,同时还提供了本册教科书各章节练习、习题、复习题的参考答案或提示,供执教教师在教学中参考使用。

本书由张饴慈、梁力平、王肖玉、高阳、尚云编写,全书由严士健、张饴慈和王尚志统稿审定,希望各执教教师、教研员能在教学实践中继续不断总结,不断创新,用自己的勤奋和智慧来充实、完善这本教学参考书,使得课程改革的基本理念和《普通高中数学课程标准(实验)》所设定的课程目标得以真正落实。

编　者

2005年8月

目　录

概　述 …………………………………………………… (1)

第一章　带余除法与数的进位制 ……………………………… (10)

§1　整除与带余除法 …………………………………………… (11)

§2　二进制 ………………………………………………………… (13)

第二章　可约性 ………………………………………………… (16)

§1　素数与合数 …………………………………………………… (17)

§2　最大公因数与辗转相除法 …………………………………… (19)

§3　算术基本定理及其应用 ……………………………………… (21)

§4　不定方程 ……………………………………………………… (21)

第三章　同　余 ………………………………………………… (23)

§1　同余及其应用 ………………………………………………… (24)

§2　欧拉定理 ……………………………………………………… (26)

§3　同余方程(组) ………………………………………………… (27)

练习、习题、复习题参考答案或提示 ………………………… (32)

概　述

数论是研究整数性质的一门学科，初等数论与算术有着极密切的联系，可以说是算术的继续. 使用初等数论的方法，可以解决算术中以及高中代数课程中某些较难的问题. 对数论中一些比较抽象比较难的知识，本书先举出大量具体实例，让学生对抽象的概念有一个直观的模型，再抽象概括，给出一般的定义，使学生既学到了数论的知识，又学到了学习数论的基本方法.

一、内容介绍

全书共分为三章：第一章　带余除法与数的进位制；第二章　可约性；第三章　同余.

带余除法可以说是初等数论的基础，教科书首先详细介绍了整除和带余除法，使学生首先认识和掌握初等数论的基础知识和初等数论证明中最重要、最基本、最常用的工具. 同样作为起始知识，教科书也介绍了数的进制表示. 可以说，第一章的知识是基础，它可以帮助学生把小学的算术知识上升到一个理论高度. 在第一章的基础上，教科书逐渐引出初等数论的一些重要的基础知识：素数、最大公因数、辗转相除法、算术基本定理、同余、欧拉定理、孙子定理. 使得学生对于初等数论有一个初步的、全面的认识.

初等数论的知识比较抽象，知识点比较多，掌握这些内容需要做一定量的练习，因此教科书对每节内容配备了相应的例题、练习题、习题，每章内容配备了复习题，其中习题、复习题分为 A 组、B 组，题目从易到难.

另外，还可以通过“阅读材料”，让学生拓展思维开阔视野；通过“课题学习”，让学生主动探究学习的能力；通过“信息技术应用”，让学生从应用信息技术的角度来认识这门古老而又崭新的学科.

二、教学目标

1. 知识技能

通过本教科书的学习，掌握整除、素数、最大公因数、同余、剩余类等概念，熟练使用带余除法、辗转相除法、弃九法等初等数论的基本工具和方法，理解和掌握初等数论的重要定理：算术基本定理、欧拉定理、费马小定理、孙子定理等，并具有把这些基本知识应用于实际的能力.

因为初等数论的特点是抽象、难懂，所以本教科书一个最大的特点是合理地使用图、表和具体实例等方法，利用数学中从特殊到一般的数学思想，把抽象的知识直观地表示出来，使学生很容易地走进初等数论的世界，并激发学生学习的信心和热情.

2. 过程方法

通过背景知识的给出，通过经历、体验和实践探索过程，通过数学思想方法的渗透，使学生

能够体会过程的重要性，并在过程中学习知识，同时领会一定的数学思想并能熟练使用一些数学方法.

3. 情感态度价值观

教育的根本目的是育人. 通过对本教科书的学习，使得学生对数学学习有了更深刻的感受. 在学习中，提高学生对数学学习的兴趣，培养学生探索未知的好奇心和坚忍不拔的毅力，培养学生锲而不舍追求科学真理的科学态度和习惯.

三、编写说明

教科书的编写，努力体现《普通高中数学课程标准(实验)》的基本理念和基本要求，在《普通高中数学课程标准(实验)》的基本框架下，结合初等数论知识的特点，教科书的编写尽量创设情境，从问题引入，从实例出发，本着把抽象的知识直观化的基本思想，引导学生分析探索基础知识，提倡独立思考以及和同伴思考交流相结合，在此基础上抽象概括、明晰概念和性质，其间穿插了一定数量的"信息技术应用"和"阅读材料"，最后安排了"课题学习".

从编写理念的角度，可以反映在以下几个方面：

1. 突出学生是主体

我们知道教育的对象是学生. 对本教科书来说，面对的对象是高一的学生，教科书在编写的过程中充分考虑到了这些学生群体的特点：在小学、初中时就已经接触了一些初等数论的知识；这些知识容易激发他们深入探索的求知欲；已经具有了一定的理性思维能力；掌握了一些数学思想，但在理解和推理方面还有一些欠缺，等等. 因此，在内容的安排上，教科书使用了直观和理性推导相结合等手法，使学生更容易接受，并有助于发扬他们的探索精神. 另一方面，教师的作用也不可忽略，教师是教学的主导，在教学内容的思考和安排、教学的组织和管理、教学的后续发展上，教师是起决定作用的. 从这一点来说，教师的责任和任务更加重大.

2. 落实"双基"

基础教育是素质教育，目标是通过学生的基础知识的学习培养学生的基本能力，这是学生个体的需要，也是国家和社会的需要. 因此，培养学生的"双基"能力是教学的主要任务之一. 所以在教学中，应适当地安排练习有助于深入思考和探究的问题.

3. 注重提高数学思维能力

在基本的能力中，数学又肩负着培养学生数学思维能力的任务. 数学是伴随着人类社会发展的一门重要的自然科学，数学思维能力是观察问题、解决问题的一个必需的能力. 因此在数学教学中要充分培养学生的思维能力. 初等数论在培养想象能力、推理能力、逻辑思维能力等方面起到了重要的作用. 教科书在安排上充分考虑到数论的这个特点，对相关内容进行了精心的选择.

4. 注重培养学生提出问题、探索知识和解决实际问题的能力

学习了知识、提高了能力，最终还是要回到实践中去服务于实践，这也是教育的目的、数学的本质和意义. 教科书从创设情境、提出问题出发，引导学生思考探索问题的本质和解决问题

的方案. 在这个过程中，提倡学生和教师、学生和学生之间的互动、交流. 教师应引导学生在问题情境中提出问题、探索问题和解决问题.

5. 强调发展学生的数学应用意识

通过探索和解决问题，引导学生进一步思索数学的本质，培养学生的数学应用意识. 使学生认识到：数学不仅仅是简单的演算习题，数学不是脱离实际的没有实际意义的抽象的符号，学习了教科书中的知识并不等于学到了数学. 因此教师一定要充分强调数学的应用本质，在教学中发展学生的这种意识和能力.

6. 体现数学文化价值

数学是人类思想文化的一个重要组成部分. 当今社会越来越多的人认识到数学的重要性. 数学的发展和人类历史的发展是紧密联系、息息相关的. 为体现这一点，教科书利用阅读材料、课题学习等形式向学生逐渐展示了数学的文化特点.

7. 强调本质，注意适度形式化

因为有了基本的教学思想、基本的教学理念，那么教学方法就等于是一个实现手段问题了. 因为初等数论的特点是抽象、难懂，所以本教科书一个最大的特点就是合理地使用图、表和具体实例等方法，并利用数学中从特殊到一般的数学思想，把抽象的知识直观地表示出来. 使学生很容易地走进初等数论的世界，并激发学生学习的信心和热情. 从教科书的内容安排就可以充分体会到这个思想.

8. 注重现代信息技术与课程的整合

我们现在已进入信息社会，计算机的普及使得我们的学习方式发生了革命性的变化. 接受并充分地利用信息技术这个强有力的工具，可以使我们的学习插上腾飞的翅膀，更有利于我们对数学本质的理解. 如何使现代信息技术与我们的课程达到较深层次的整合，是新形势下的一个新课题.

四、教学建议

教师对于初等数论应有深入的学习和思考，在教授的过程中要注重培养学生深入学习、勤于思考的好习惯，培养大胆突破、勇于探索的精神，在这个过程中教师应在一个新的高度对学生进行适度的引导.

1. 如何使用好教科书

教科书是非常重要的教学资源，使用好教科书具有非常重要的意义. 教师应该理解教科书所设计的知识结构；应该掌握本专题最基本的概念和思想，例如，整除、素数、同余等；应该了解学生学习本专题的难点，例如，同余性质的证明、同余方程组求解(大衍求一术).

本教科书是根据《普通高中数学课程标准(实验)》(以下简称新《课标》)的精神，把初等数论中的主要部分经过精心编排整合而写成的. 有些知识点做了详细的介绍，有些知识点并没有做深入的展开. 过分烦琐和技巧性过强的训练不作为重点，通过归纳、演绎、类比、联想等思想方法的渗透，使学生对数学有本质的、整体的认识.

2. 如何开发课程资源

教科书是重要的资源，但不是唯一的资源，教师要学会开发课程资源，要鼓励学生开发资源.

3. 把学生当成学习的主人

改变教与学的方式，是高中课程标准的基本理念. 在教学中，应注意以下几个方面：在教学中注意激发学生的兴趣、挖掘学生的潜能，让学生在学习的过程中提出问题、主动探索、寻找答案，并注意独立思考和合作交流相结合. 素质教育强调群体教育，同样强调个体教育. 教师应注意“差异”教学，使学生人人得到必需的教学. 教师提倡学生从多角度、多方位思考问题，打开学生的思路.

4. 实施“有疑教学”及“探索教学”

教师在教学过程中，应提倡学生主动创新的意识，也要提倡学生敢于质疑的意识. 不要唯教师所教的为唯一答案，要敢于提出疑问、敢于从反面从不同的角度思考、敢于打破常规，在争论和探讨中还原真理的本质.

5. 强调应用，突出培养学生提出、分析和解决问题的能力

数学来源于实践、服务于实践，数学的一个重要作用就是它的广泛应用.

新《课标》要求强化知识的应用意识，这也是教育改革的重要任务之一. 在学习的过程中，要充分强调和体会数学与实际问题的区别和联系，在提出问题和解决问题的过程中提高学生的实践能力和创造能力. 同时要强调：数学虽然来源于实际问题，但它是一种合理的近似和猜测，教师应合理地、适时地引导学生做深入的思考.

6. 培养学生“数学思想”及“数学文化”的意识

数学本身具有其独特的“人文”性，数学有其独特的美，数学有其内在的逻辑规律，等等，这些形成了数学自己独有的思想和文化体系，学生在学习的过程中应逐步培养自己的数学修养.

7. 强调与信息化技术的整合意识

信息化技术是一项服务于社会的、符合社会发展的非常有力的工具，正确地运用信息技术，把它合理地应用到所学的数学知识上来，既能起到深刻理解知识本质的作用，又能开拓学生的思路，灵活地运用所学知识进行创新应用，这是符合社会信息化发展的一项有益的措施.

五、评价意识

1. 注重学生的发展

评价的作用应当有利于学生的发展，对于学生的发展有正确的导向作用. 好的评价应能激发学生的学习热情，鼓励学生的创造性，激发学生主动创新、注重应用的意识，等等，使学生形成良好的科学品质.

2. 注重培养学生的过程性评价

过程和结果具有辩证关系，过去的评价体系相对来说更注重结果，新《课标》的改革更注重学生的过程评价，因为它更能体现学生的参与态度、与他人合作的情况和成长过程.

3. 使用多元尺度

过去的评价体系注重用统一的标准来决定一切，忽略了个体的发展特点. 好的评价体系应能考虑学生的差异性，不仅能评价出学生的理性思维水平，还能评价出学生的各项能力的差异，并且应该把定量评价与定性评价相结合，最终促进学生的发展，提高学生的能力.

4. 评价的目的是激励学生发展

倡导把教师的评价和学生的评价结合起来，把学生自我评价与他人的评价结合起来. 数学的教学评价应该是数学教师和社会各方面的综合评价，这样才能更公平地反映出一个学生的真实的水平.

阅读材料：

“中国有一千个陈景润就了不得”

这曾是一个举世震惊的奇迹：屈居于六平方米小屋的陈景润，借一盏昏暗的煤油灯，伏在床板上，用一枝笔，耗去了几麻袋的草稿纸，居然攻克了世界著名数学难题“哥德巴赫猜想”中的(1+2)，创造了距摘取这颗数论皇冠上的明珠(1+1)只是一步之遥的辉煌，被国际数学界誉为“陈氏定理”. 他开拓了数论研究中一个崭新的时代. 他那瘦弱的身影，几乎凝聚了全世界所有数学家关注倾慕的目光. 自负的日本人，对有着五千年文明史的中国，称道两位数学奇才：一位是祖冲之，一位便是陈景润. 他们由衷地在这两位中华俊杰面前顶礼膜拜.

陈景润，由新中国培养起来的第一代数学家，堪称时代的楷模，世纪的丰碑. 这位数学巨星，尽管已于 1996 年 3 月离开了我们，然而，他研究哥德巴赫猜想和其他数论问题的成就，至今，仍然在世界上遥遥领先. 世界级的数学大师、美国学者阿·威尔(A. Weil)曾这样称赞他：“陈景润的每一项工作，都好像是在喜马拉雅山山巅上行走.”陈景润于 1978 年和 1982 年两次收到国际数学家大会请他作 45 分钟报告的邀请. 这是中国人的自豪和骄傲. 他所取得的成绩，他所赢得的殊荣，为千千万万的知识分子树起了一面不凋的旗帜，辉映三山五岳，召唤着亿万的青少年奋发向前.

小时候的陈景润并不因为家境优于乡间的普通百姓而有什么特殊，他同样和农家的孩子一起玩儿，这种从少年时代培育起来的纯朴真挚的感情，一直贯穿在他生命的全程. 以至到他去世时，赴京参加悼念活动的胪雷乡亲，皆是极为普通的村民. 他的性格内向，是天然的禀赋，而较为优越的家境和良好的教育，则为他内向的性格提供了最好的庇护. 他在家中排行老三，上面有一个哥哥和姐姐，他们喜欢这个不大吭声的弟弟. 当时，他们最爱玩的儿童游戏，就是捉迷藏. 陈景润爱看书，床头上放了不少他喜欢读的书. 游戏当然也是有诱惑力的. 不过，陈景润捉迷藏的时候，方式有点特别，他往往拿着一本书，藏在一个别人不易发现的角落或桌子底下，一边津津有味地看书，一边等待别人来“捉”他. 看着看着，他忘记了别人，而别人也忘记他了. 爱书成癖，书中仿佛有着一个永远也无法穷尽的迷人天地，这种痴迷，深深地影响并改变了他的人生.

他对书迷得太深，上课是全神贯注的，微微地张着嘴巴，思绪随着老师的话语缓缓流动，心

无旁骛.在诸多功课之中,他最喜欢数学,高中的数学老师除了首次给他们讲过“哥德巴赫猜想”的沈元老师外,还有陈老师、何老师,他们都是学识渊博且要求很严的老师.讲课时,学生不敢有任何超越规范的举动,鸦雀无声.循循善诱的老师指点迷津,传道解惑,一丝不苟.课后,布置的习题很多,可以选做,而陈景润每一次总是把习题全部做完.

在班上,陈景润并不是成绩最冒尖的学生.因为他对学习有自己的主见,他不是单纯地跟在老师的屁股后面跑,也不盲目地追求甚至迷信卷面上的分数.他身体虽然瘦弱,但记忆力却十分惊人.他从不满足于读懂,而是把书本上许多极不易记的数理化概念、公式、定理、定律背得滚瓜烂熟,并一一化入自己的脑海里,要使用时,犹如囊中取物,手到擒来.他的背书本领,在学校曾成为佳话.一位化学教师曾经要学生背一本书,许多同学都认为很困难,陈景润却笑着说:“这一点很容易,多花点工夫就可以背下来.”果然,过了不久,他真的当着老师和同学的面,把这本书琅琅地背出来了.强烈的求知欲望,使他形成独特的学习方法,他总是把老师讲的基本知识读得滚瓜烂熟,布置的作业全部做得工工整整,然后大量地阅读有关的课外书籍,向更高的知识领域进军,仿佛是攀登一座风光绮丽的山峰,他尽量站在最高的地方,鸟瞰美不胜收的佳景,品味、领略它的最动人之处.应当感谢英华中学图书馆,历经沧桑之变,至今仍保留着陈景润在这里念高中时的借书卡,他念的是中学课程,而借阅的图书却有:大学丛书《微积分学》、大学丛书《达夫物理学》、哈佛大学讲义《高等代数引论》《郝克士大代数学》《密尔根盖尔物理学》《实用力学》等,这些都是比较高深的科学专著.从借书卡上还可以看出,像《微积分学》一书,他还先后借了两次.可见他是认真做了钻研的.一个中学生,学好本身的课程之余,大胆地闯入气象万千的大学殿堂,在那里津津有味地俯拾珍奇,他毫无自惭形秽之色,敞开心灵,吮吸着知识的乳汁,滴滴甘甜,尽入胸中.陈景润日后的辉煌,就是从中学时代开始扎扎实实地奠定坚实基础的.

陈景润崇敬老师,别看他平时沉默寡言,但向老师请教,毫不羞涩和胆怯.学问学问,很多知识是问出来的.陈景润的勤学好问,在英华是颇有点名气的.他的求教方式很有趣,看到老师外出,或者老师从高中部到初中部去,他就紧追上去,和老师一起走一段路,一边走,一边问问题.小径浓荫如泼,偶尔,也有斑驳的阳光,纷纷扬扬地洒落下来,那师生并行的剪影,悄然剪断了岁月的苦涩和艰辛,幻成一幅永恒的写意画,装点着英华的一片好风景.

老师是照亮学生前行的烛光,而陈景润把这生命之火虔诚地融入自己的求学之旅,高中最后教他数学的是陈老师,近半个世纪过去了,这位德高望重的老教师还清晰地记得,当年的陈景润不仅向他请教初等数学,而且经常向他请教高等数学的有关问题,向他借阅日本学者写的《微分学问题详解》《集合论初论》等.高楼万丈起于平地,中小学是基础.陈景润正是遵循着这一科学的规律,扎扎实实地学好中学课程,并充分发扬主动学习的精神,在打好坚实基础的前提下,涉猎更高层次的领域,终于成为举世闻名的数学家.

数字是平凡的,有谁不知道那几乎伸手可触的1,2,3,…等符号呢?数字又是神奇的,当由这些貌似平凡的数字编织在一起的时候,其千变万化的奥妙,是浩瀚的大海,无垠的长天,是穷尽一生也无法全部破译的整个世界.在数论中,有两个基本的概念,小学三年级的学生就接

触过了，一是偶数，凡是能被 2 整除的正整数，就叫“偶数”，如 2，4，6，…；其余的 1，3，5，…就叫“奇数”. 二是素数，除了 1 与它自身以外，不能被其他正整数整除的这种数，就叫“素数”，最初的素数有 2，3，5，7，11，…等. 另外的正整数，就是除 1 与它自身外，还能被别的正整数整除，这种数叫作“合数”，最初的合数有 4，6，8，9，10，…等. 就是这些看去很普通的东西，却蕴藏着极为玄妙的天机. 拭去岁月的烟云，展现在人们面前的，是一代代智慧非凡的数学家乃至大师们精妙绝伦的探索之功.

1742 年，德国著名的数学家哥德巴赫(Gold Bach，1690—1764)发现了一个奇妙的数学现象：每一个大偶数都可以写成两个素数的和. 例如 10，可以写成 7＋3. 什么原因呢？却无法证明，他自己也无法证明它，于是，就写信给当时意大利赫赫有名的大数学家欧拉，请他帮忙证明，欧拉穷尽一生的劳作，最终也没有成功. 这道难题，吸引了成千上万的数学家，200 多年过去了，仍然仅是一个“猜想”. 云遮雾障，横断巫山，遥看层峦叠嶂无数，流泉飞瀑之声依稀可闻，可谓是“引无数英雄竞折腰”. 自然科学的皇后是数学，数学的皇冠是数论，而哥德巴赫猜想则是皇冠上那颗华光四射的明珠.

早在中学，陈景润就开始涉猎大学课程，如今进了大学，他怎肯轻易罢休. 时间，被他分解成一个个已是无法切开的小单元，而他把这一切全用于如饥似渴的学习中了. 说来让人难以置信，身居厦大，抬头便可以透过海光岚影看到楚楚动人的世界级风景区鼓浪屿，而陈景润却一次也没有去过. 近在咫尺的南国名寺南普陀，一派金碧辉煌，晨钟暮鼓，他也极少涉足，更莫提花花绿绿的厦门市区了. 他的生活节俭到令人难以想象的程度，每月只用 3～4 元钱的伙食费，同学们常看到他只用馒头就咸菜充饥. 厦门海鲜多，当时价格也相当便宜，他为了节省，很少挑选这些较好的菜肴. 其时，建南大礼堂未建设，学校的东膳厅，每逢周末放电影，门票只需 5 分钱，三年大学生活，陈景润一次电影也没看过. 为了节省衣服，他洗衣服也舍不得用力去搓，往往只是在水里泡一泡，抖一抖就提起来，晒干，再穿在身上. 耐得住清贫，是一种可贵的品格，正如方志敏烈士在《清贫》一文中所写的那样：“清贫，正是革命者战胜许多困难的地方.”解放初期，陈景润的家境，因为父亲没有工作，而显得有些窘迫，但陈景润的节俭并非完全是经济原因. 20 世纪 80 年代他成名之后，经济条件很不错了，他依然如此，一架小型的收录机，学英语用，也是向数学所借的. 到美国、英国讲学，对方付了一笔颇丰的讲学金，他也只用很少一部分，大部分积累起来献给了国家. 他不愿意把过多时间和精力放在生活上，觉得愈简单愈好. 至今，陈景润的姐姐仍保留着陈景润念大学时用的那个破旧的小藤箱. 箱内，一双穿透了的万里鞋和几件破旧的衣服，默默地向世人昭示着这一段耐人回味的岁月.

陈景润把所有的精力都用在学习上了. 他读书有一套自己暗中制定的“高标准”，每天，他除了完成老师布置的作业外，自己还要根据学习的课程完成一批作业题，少则几十道，多则上百道. 每到傍晚，夕阳映红大海时分，逢到潮汛，海滨上一片欢声笑语，人们前去游泳，尽情领略大自然美好的馈赠. 而陈景润却是穿着那双露出脚趾的万里鞋，前往老师的住处送作业，请老师予以修改、指教. 婆娑的木麻黄已经成林，柔情依依的相思树，更是消融了无数流逝的岁月，一代数学奇才陈景润，却是捏着时间的秒表，为人们留下了永恒的记忆.

攀登科学的高峰是不容易的，那是一步一步踏踏实实的跋涉，是以青春热血甚至宝贵的生命为代价的悲壮的拼搏. 陈景润的身体瘦弱，脸色苍白，带着明显的病容，他害怕看病耽搁时间，结果生了病也不去看. 实在坚持不住了，就躺在床上，一边看书，一边算是静养.

他准备了一个手电筒，那是夜晚读书用的，当时厦大虽然没有熄灯制度，但他也担心影响别人休息，到了深夜，就在被窝中拧亮手电读书. 这种特殊的读书方式和习惯，一直延续到他在北京中关村工作时期."文革"大劫，陈景润被揪到"牛棚"中，备受凌辱折磨. 有一回，到处找不到陈景润，人们以为他逃跑了，四处搜寻，皆不见踪影. 后来，才发现他就在"牛棚"中的一卷被窝里，瘦小的他躺在被窝中拧着手电看书. 一烛亮光如豆，居然照耀着他大半生的跋涉征途. 清冷也罢，寂寞也罢，只有他能够独自真正地品出其中的甘苦和绵长了.

他学习真正到了忘我的程度. 厦门的天气多变，有一回，从食堂回来，一阵海风，忽然吹来了一片雨幕，同学们见状都飞跑起来，只有他独自漫步着，在雨帘中依然是那么地沉稳自在. 他的同班同学杨锡安惊奇地问："你不淋雨么?"他才恍然大悟，说道，他根本没有感觉到下雨，他的心绪全部沉湎到一片书海中去了. 一个人痴迷到如此，便必然引起众人的注目，像中学生起绰号一样，他的同学同样毫不客气地称他是"爱因斯坦". 当然，此时的陈景润和以提出相对论改写了一个时代科学史的爱因斯坦难以相提并论，但他那种近似拗相公的执著，那种嗜书如命的忘我精神，却是一脉相承的，每一个成功的科学家，几乎都要经过这段"炼狱"式的旅程.

陈景润的同乡、校友、知交，中国科学院数学所的林群院士，对于陈景润的成功有一段异常精辟的见解："科学好比登山，有的人登上一座山，浏览峰顶的风光，就满足而归了. 而陈景润却不一样，他同样登山，倘若上山有十条小径，他每一条小径都要去爬一次. 他重视的不全是结果，而是贵在过程. 直到把上山的所有的路全摸透了，他才会感到满足. 功底、基础就是这样一步一个脚印建立起来的."大学生时代的陈景润，日日解题不息，并且乐在其中，原因便在于此.

陈景润的全部生命，几乎都消融在夜以继日的读书之中. 他担心夜晚开灯读书太迟，会影响别人的休息，于是，做了一个巨大的黑色的大灯罩，罩着灯，也罩住了在灯下苦读的陈景润. 当时，厦大处于前线，学校彻夜有武装民兵巡逻，警惕性极高的民兵发现这一异常的情况，曾持枪前去看个究竟，待终于了解其中缘由之后，才放心地离开了. 对于读书的方法，陈景润在后来成名之后，在一篇文章中有一段十分精彩的自白：

我读书不只满足于读懂，而是要把读懂的东西背得滚瓜烂熟，熟能生巧嘛！我国著名的文学家鲁迅先生把他搞文学创作的经验总结成四句话："静观默察，烂熟于心，凝思结想，然后一挥而就."当时我走的就是这样一条路子，真是所见略同！当时我能把数、理、化的许多概念、公式、定理，一一装在自己的脑海里，随时拈来应用.

不得不佩服陈景润脚踏实地而又不乏机智的做学问本事，居然能把鲁迅先生从事文学创作的神思之功，融入数学王国的艰辛跋涉之旅. 他在资料室工作期间，读过多少书，很难计算，也无法计算. 知识的积累，需要有一个循序渐进的过程，科学高峰的攀登，更需要打下坚实而深厚的功底. 神游知识的海洋，阅尽浪花、鸥鸟、飞帆、礁石，才能有幸真正领略大海的浩瀚和神秘. 冰冻三尺，非一日之寒，陈景润在这一段时间的刻苦修炼，是奋飞前夕关键性的一搏.

要把书读到滚瓜烂熟，是需要付出沉重的劳动的，尤其是数学方面的书，没有情节、故事，没有押韵以及情感氛围，抽象的数学符号，编织着深奥、玄妙的特殊世界. 只有痴迷其中的陈景润，才能听到鸣泉如诉如泣，才能看到月华如水，才能看到兀立的群峰闪烁着幽远、深邃的异彩.

不少数学著作又大又厚，携带十分不便，陈景润就把它一页页拆开来，随时带在身上，走到哪里读到哪里. 这位可爱的“书痴”奇怪的读书方法，曾引起了一场小小的误会：数学系的老师时常看到陈景润拿着一页页散开的书在苦读，以为他把资料室的书拆掉了. 后来，经过查实，陈景润拆的书全是自己的，对于公家的书，他惜之如金，从不去拆. 公私分明，数学家的逻辑同样毫不含糊.

马克思有过一段脍炙人口的格言：“在科学上没有平坦的大道，只有不畏劳苦沿着陡峭山路攀登的人，才有希望达到光辉的顶点. ”陈景润正是如此.

沈世豪. 陈景润. 厦门：厦门大学出版社，1997

第一章　带余除法与数的进位制

一、教学目标

1. 理解整除、因数和倍数的概念，认识整除的性质.

2. 通过实例，经历带余除法的过程，掌握带余除法.

3. 了解二进制和十进制两种计数方式，能进行二进制和十进制的互化.

在对上述内容进行教学中，要让学生很好地理解数学思想. 有意识地培养学生提出问题、分析问题、解决问题的能力，表达交流的能力和数学逻辑推理的能力. 要让学生在学习的过程中体会数学美，提高学生的兴趣，树立学好数学的信心.

二、编写意图与特色

1. 整除是初等数论的一个基本内容，它是对整数除法运算的一个总结. 相对来说这部分知识学生很容易接受，但是也容易忽略对它的深入思考. 因此，教材对这部分内容进行多方位、多角度的深入引导. 对于一般的学生，要求他们掌握整除的基本性质；对于学有余力的学生，可以通过问题的启发，促使他们探索出更多的性质，并能加以论证.

2. 带余除法是初等数论的证明中最重要、最基本、最直接的工具，余数是学生非常熟悉的东西，教科书从余数出发，通过数轴引出带余除法，并给予理论上的证明. 本教科书提供了一个较为简洁直观的证明.

3. 作为对带余除法的一个深刻的理解和应用，就是引入了整数分类的概念. 这样安排既能使学生充分理解带余除法的本质，又把对自然数的奇偶分类上升到一个理论的高度. 这些为后面的同余分类奠定了基础.

4. 在日常生活中，数的进位制有很多种. 通过实例，使学生了解到存在不同的计数方式. 在电子计算机中数是用二进制表示的. 因为我们最常用的、最熟悉的就是十进制了，所以，在学习二进制时，从十进制的角度介绍二进制，通过它们的区别和联系来引入和研究二进制，使得学生更易于接受. 在研究的过程中，用直观的图解来加深对于二进制理论的理解和认识. 作为对二进制的加深理解和进位制的全面认识，教科书中还设置了阅读材料：进位制.

5. 数论的知识相对来说抽象、知识点多，因此要很好地理解和掌握数论的知识就必须做适量的练习. 教科书安排了适量的例题、习题，并遵循了从易到难、从直观到抽象的原则，教师在安排时可以灵活掌握.

三、教学内容及课时安排建议

本章教学时间约需 4 课时，具体分配如下：

§1　整除与带余除法　2课时

　　1.1　整除

　　1.2　带余除法

§2　二进制　1课时

课题学习　1课时

四、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

教师在教学过程中应注重学生提出问题、解决问题、勤于思考、积极创新的学习过程，并在过程中注重独立思考、独立解决问题及与他人合作的团队精神.

2. 重视运用整除性质解决问题的过程

整除理论是数论的基础，虽然学生在小学时已经接触过，但是理论上的认识还不足，本章是数论的起始章节，教师应该从开始就引导学生用整除理论来思考问题，有意识地用整除的性质来解决问题，真正提高数论的理论水平和解决问题的能力.

3. 重视知识的系统归纳的学习方法

数论的知识比较零碎，随着学习的深入，学生容易对知识发生混淆、理解不清，所以从本章节开始教师应注意培养学生系统归纳的能力，注重探究知识的内在联系和本质，提高分析问题的能力.

§1　整除与带余除法

一、教学目标

1. 理解整除、因数和倍数的概念，认识整除的性质.
2. 通过实例，经历带余除法的过程，掌握带余除法.

二、设计思路

1. 作为初等数论的开始，本节首先介绍了学生比较熟悉的整除的概念和性质. 作为初等数论的一个基本内容，它既是对整数除法运算的一个总结，也是数论理论的基础. 虽然这部分知识，学生比较容易理解和掌握，但是，也容易忽略对它的深入思考. 因此，教材对这部分内容进行多方位、多角度的引导. 教师要引导学生掌握整除的概念和基本性质；对于学有余力的学生，可以通过问题的启发，促使他们探索出更多的性质，并能加以论证.

2. 带余除法在证明初等数论的性质和定理中占有非常重要的地位，它是数论中最重要、最基本、最直接的工具. 教科书从学生非常熟悉的余数出发，通过数轴引出带余除法，并给出了

一个较为简洁直观的证明. 教师一定要让学生认识到带余除法在初等数论中的重要地位.

3. 教科书引入整数分类的概念,作为对带余除法的一个深刻的理解和应用. 但应该指出,整数还有许多其他分类方法.

例如:

按性质符号整数可分为正整数、零和负整数;

按因子个数整数可分为 1、素数和合数.

这样安排教学内容,既能使学生充分理解整除和带余除法的本质,又把对整数的分类上升到一个新的理论的高度,同时为学习后面的同余分类奠定了基础.

三、教学建议

1. 本节的重点是整除和带余除法的概念. 在对这两个概念的充分理解基础上,可以很容易推导出它们的性质,并能灵活地加以应用. 在教学中,教师可以从概念的不同角度出发,设计不同的练习,在此基础上,加深学生对这两个概念的理解.

2. 整除性质的证明和带余除法的证明是本节的难点. 对于数论中的性质和定理,要使学生能够理解它们的证明,掌握证明的方法,并进行多方位的应用实践.

3. 整除性质的证明关键是掌握整除的定义,并反复使用定义.

例如,在证明性质 2 时,由于 $a|c$(按照定义)存在整数 p,使得

$$c=pa,$$

因此

$$cb=pab,$$

故(按照定义)$ab|bc$.

4. 在介绍带余除法时,教师应当先举例子,再抽象概括.

在证明带余除法时,一定要画出数轴,如书第 2 页图 1-1.

在数轴上介绍自然数 q 的性质:对于任何一个自然数 a,都存在自然数 q,使得 $qb<a<(q+1)b$. 把这个结果显示在数轴上. 并根据图形,搞清楚 r 和 q 的关系.

唯一性的证明有一定的难度,教师可先通过具体例子,让学生感受只有在条件 $0\leqslant r<q$ 下,才有唯一性,在此基础上,给出证明.

5. 在作业和练习中,注意培养学生推理的逻辑性和严密性. 数论的性质的证明对于培养学生的数学思维具有很好的作用,希望教师能引导学生给予足够的重视.

6. 带余除法和整数的分类起了相辅相成的作用. 在这里教师可以从不同的角度设计不同的题型,使学生对整数的分类有一个初步的认识,为下面学习同余打下一个良好的基础.

四、补充材料

对于整除,教科书介绍了基本的性质,下面进一步给出整除的几个性质和应用,教师可以在教学时参考.

1. 设 $a>0$. 任一整数被 a 除后所得的最小非负余数是且仅是 $0,1,2,\cdots,a-1$ 这 a 个数中的一个.

这是带余除法的直接推论.

2. 特殊的整数或特殊的整数列被一个固定的正整数 a 除后所得的最小非负余数会有更特殊的性质,这一点在初等数论的论证中非常重要. 下面给出一些实例,请有能力的学生自己验证.

(1)两个 $4k+3$ 形式的数的乘积一定是 $4k+1$ 形式的数;

(2)x^2 被 4 除后所得的非负最小余数只可能是 0,1;

(3)x^2 被 3 除后所得的非负最小余数只可能是 0,1.

3. 如果 a,b 是两个整数,且 $a|b$,则

$$(-a)|b,\ a|(-b),(-a)|(-b),|a|\,|\,|b|.$$

4. 如果 a,b 都是整数,且 $|a|<|b|$,$|b|\,|\,|a|$,则有 $a=0$.

§2 二进制

一、教学目标

1. 通过具体实例,了解十进制和二进制是两种常用的计数方式.

2. 掌握二进制表示整数的方法和意义.

3. 通过实例,体会二进制与十进制的互化,并掌握二进制与十进制互化的方法.

4. 了解三进制等其他计数方式,进一步加深对进位制的理解.

二、设计思路

1. 在日常生活中,数的进位制有很多种.

例如:

十分为一角,十角为一元,是十进制;

一年等于十二个月,是十二进制;

一时等于六十分,一分等于六十秒,是六十进制,等等.

教科书从我们最常用、最熟悉的十进制入手,讨论了十进制是如何表示数的,了解了在十进制中表示数的符号(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9)和位数. 在此基础上,引出二进制的表示方法.

2. 从具体的实例出发,给出十进制与二进制互化的方法.

3. 为了加深对于进位制的认识,在本节后,教科书给出一个关于三进制的“课题学习”和一个关于进位制的阅读材料.

4. 了解二进制在计算机中的应用.

三、教学建议

1. 强调“数”与“数的表示符号”是有区别的.

例如，我们知道，三、叁、three、Ⅲ和 3 都是表示同样的意思，都是用来描述 3 个物体的数量. 可见表示物体数量的“数”和表示这个“数”的符号是两个不同的概念.

2. 用十进制表示数时，需要清楚两点：一是位数，如个位、十位等；二是每一个位数上的符号如 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

在早期的计数法中，只有符号没有位数.

例如，罗马数字：Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ，Ⅸ，Ⅹ，Ⅺ，Ⅻ等. 在没有位数只有符号的数字系统中，进行大数的四则运算是十分困难的. 从中可以体会出引入位数的重要作用.

3. 教师应指导学生了解二进制和十进制的区别(符号和位数上的区别).

4. 教师应通过具体实例，使学生掌握二进制与十进制的互化，特别要掌握连除. 在此基础上，学有余力的同学可以掌握一般的转换.

5. 二进制的表示方法是本节的一个重点内容. 单纯从十进制的表示方法引出二进制的表示方法，学生是比较容易接受的，但是在知道这个方法并且使用了这个方法后，学生容易迷惑，对于为什么这么用产生疑问. 在这里，可以在引出二进制的表示方法之后，多讲一些二进制的意义和实际应用，便于学生理解和使用. 比如计算机内部的数是采用二进制表示的. 事实上，在计算机出现以前，除了少数数学家以外，确实没有人考虑二进制，随着计算机的出现和科学技术的发展，二进制的作用越来越显著了.

6. 要让学生了解二进制的优点和缺点.

四、补充材料

1. 在电子计算机中采用二进制，是因为二进制具有以下优点：

(1) 因为二进制数只有 0,1 两个数字符号，十进制数有 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 十个数字符号，而电子计算机识别十个符号相对较难，在电子计算机内只能用物理元件的不同稳定状态来表示这些不同符号. 因此，对于一个十进制数就需要一个具有十种不同稳定状态的物理元件，而对于一个二进制数只需要一个具有两种不同稳定状态的物理元件即可. 显然在自然世界里，后一种物理元件是较普遍存在的，也就是说容易实现的. 例如，电灯的“亮”与“暗”和开关的“接通”与“断开”都是电灯和开关的两种不同的稳定状态，如果用“亮”或“接通”表示 1，则“暗”或“断开”表示 0，所以用电灯或开关就可以表示一个二进制数.

(2) 采用二进制数，可以用较少的物理元件表示较多的数，所以采用二进制可以节省设备而使电子计算机的结构比较简单，也有利于工作可靠性的提高.

2. 需要重视关于十进制和二进制的转化原理. 由于计算机的数是采用二进制的，因此在计算时，首先需要把运算的十进制数转化成二进制数，然后再把计算结果转化成十进制数显示出来.

3. 二进制的加减乘除运算法则如下：

加法法则

$$(0)_2+(0)_2=(0)_2,$$
$$(0)_2+(1)_2=(1)_2,$$
$$(1)_2+(0)_2=(1)_2,$$
$$(1)_2+(1)_2=(10)_2;$$

乘法法则

$$(0)_2\times(0)_2=(0)_2,$$
$$(0)_2\times(1)_2=(0)_2,$$
$$(1)_2\times(0)_2=(0)_2,$$
$$(1)_2\times(1)_2=(1)_2.$$

减法运算是加法运算的逆运算，如果“$0-1$”可以借位，注意从上位借来的“1”应该是$(1)_2+(1)_2$. 在计算机中使用一种比较简化的方法：补数法.

关于补数法，我们来看一个十进制的实例：$12-7=12+$(7 的补数)$3-10=5$. 一般情况这个法则对于二进制同样适用. 这个法则的关键是求出补数.

补数的求法：

对于十进制，因为 $10-7=3$，所以 7 的补数是 3；因为 $100-89=11$，所以 89 的补数是 11. 一般情况，如果 a 是一个正整数，而 n 是一个非负整数，并有 $10^n<a<10^{n+1}$，那么 a 的补数是 $10^{n+1}-a$.

对于二进制，因为$(10)_2-(1)_2=(1)_2$，所以 $(1)_2$ 的补数是$(1)_2$；因为$(100)_2-(10)_2=(10)_2$，所以 $(10)_2$ 的补数是$(10)_2$；而$(100)_2-(11)_2=(1)_2$，所以 $(11)_2$ 的补数是$(1)_2$. 一般情况，如果 $n\geqslant 3$，$(a_1a_2\cdots a_n)_2$ 是一个二进制数，那么$(a_1a_2\cdots a_n)_2$ 的补数是$(100\cdots 0)_2-(a_1a_2\cdots a_n)_2$，其中$(100\cdots 0)_2$ 是由一个 1 和 n 个 0 构成的. 下面给出一个二进制下求补数的简便方法.

(1)若 $a_n=1$，除 a_n 不变，其他位上的数字是 0 的变为 1，是 1 的变为 0，所得到的二进制数即为$(a_1a_2\cdots a_n)_2$ 的补数.

(2)若 $a_n=0$，把$(a_1a_2\cdots a_n)_2$ 中的数字从右往左看，在出现 1 以前所有的 0 及第一次出现的 1 都不变，然后其他位上的数字是 0 的变为 1，是 1 的变为 0. 这样所得的二进制数即为$(a_1a_2\cdots a_n)_2$的补数.

例：求$(1101)_2-(1011)_2$ 的值.

解：$(1101)_2-(1011)_2=(1101)_2+(101)_2-(10000)_2=(10)_2$.

二进制的除法运算首先是比较两个数的大小，然后再利用减法运算来求商.

第二章　可约性

一、教学目标

1. 理解素数与合数的概念.

2. 了解判断素数的方法——"筛法".

3. 掌握"素数的个数是无穷多的",并会证明.

4. 通过实例,经历辗转相除法的过程,掌握辗转相除法.

5. 掌握算术基本定理,理解算术基本定理唯一性的证明.

6. 探索公因数和公倍数的性质,并利用算术基本定理推导最小公倍数的性质.

7. 理解互素的概念,了解素数与互素的区别.

8. 不定方程是数论中的一个十分重要的课题,本章通过实例理解一次不定方程的模型及求解.

通过这一章的学习,要让学生对一些重要的数学思想有较好的认识,特别是"从特殊到一般"的归纳思想和反证法的思想.有意识地培养学生提出问题、分析问题、解决问题的能力,表达、交流的能力,培养数学逻辑推理的能力.要让学生初步认识初等数论的简单应用,培养学生学习的耐心和信心.

二、编写意图与特色

如果说第一章是一座大楼的地基的话,那么从本章本节开始,我们就开始构建一间间房屋了.所以本节的内容既具有一定的独立性,又和数论中其他的理论有着千丝万缕的联系.因此,教师既要指导学生全面地掌握这些知识,又要指出这些知识和数论中其他的理论有哪些联系.

1. 引进了素数的概念,讨论了素数的最简单性质,素数理论是数论中最有趣味的一个分支.有许多猜想和性质,都是先由经验得到,再由数学家证明的,但也有某些猜想(如歌德巴赫猜想)到现在还没有被证明.

2. 提出了最大公约数的概念,给出利用辗转相除法寻找最大公约数的方法.辗转相除法即 Euclid 算法,它是带余除法的发展,利用它可以给出寻找最大公约数的方法.

3. 研究素数的性质是数论的核心问题之一,对于素数与合数的关系我们介绍了著名的算术基本定理.通过定理唯一性的证明,使学生初步认识到在初等数论中如何利用基本概念证明问题.

4. 在数论中,不定方程是很重要的内容.教科书中给出了一次不定方程的模型,并给出了利用辗转相除法求解一次不定方程.

5. 本章内容环环相扣，在数论中有着非常重要的地位. 数论的证明方法往往蕴含着重要的数学思想和数学方法. 教科书给出了一些性质和定理的证明，并配备了一定量的例题和习题，以加深对一些基本概念的理解.

三、教学内容及课时安排建议

本章教学时间约需 6 课时，具体分配如下：

§1 素数与合数		2 课时
	1.1 素数的判别	
	1.2 素数的个数	
§2 最大公因数与辗转相除法		1 课时
§3 算术基本定理及其应用		2 课时
	3.1 算术基本定理	
	3.2 最小公倍数与算术基本定理的应用	
§4 不定方程		1 课时

四、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价

本章以第一章为基础，是数论中重要的一部分知识. 只是掌握结论，并不能很好地理解知识的本质含义. 所以，要重视研究知识的产生过程，并在这个过程中培养逻辑推理能力和解决实际问题的能力，从而达到切实掌握这部分知识的目的.

2. 重视从特殊到一般的数学思想和推导方法

数论的理论与方法一般比较抽象. 在解决问题的过程中，应重视逐层深入、从特殊到一般的思想和方法.

§1 素数与合数

一、教学目标

1. 从实例入手，理解素数和合数的概念.
2. 理解判断素数的方法——“筛法”，并会用该方法判断一个数是否是素数.
3. 理解并会证明定理：素数的个数是无穷多的.

二、设计思路

1. 素数的理论在初等数论中非常重要，教科书给出了关于素数的最基本的几个性质和

算法.

2. 对于判断素数的方法——“筛法”，本教科书给出了直观简单的证明. 教师应指导学生理解并熟练地使用“筛法”来判断一个数是否为素数.

3. 对于“素数有无穷多个”定理的证明，对学生来说有一定的难度，主要难在反证法思想的理解. 希望引导学生体会反证法的证明思想.

三、教学建议

素数理论在数论中是一个非常重要且有趣的理论. 它的很多定理是先由经验得到，然后再给出证明的，也有很多猜想是到现在还未解决的，比如著名的歌德巴赫猜想. 素数理论在数论研究中占有相当重要的地位. 教师可以从这些角度把素数的重要性提出来，这样不仅可以提高学生对这部分知识的兴趣，还能挖掘青少年的求知欲和探索精神. 这种动力对科学研究来说是非常重要的.

1. 素数是数论中最重要的概念，教师应当使学生掌握它的定义和特点. 并在此基础上，掌握合数的定义和特点. 强调 1 即不是素数也不是合数.

2. 如何判断一个数是否是素数是一件特别重要的事，教师应当向学生强调寻找素数的重要性.

本节介绍了判断素数的一个基本方法——“筛法”. 找 a 以内的素数其本质就是筛掉 1 和所有 a 以内的合数，在操作时只筛掉$\sqrt{a}$以内的素数的倍数就可以了. 教师应指导学生掌握怎么筛和为什么这么筛. 教师应当指导学生充分理解教科书中的例 2.

3. 要让学生了解判断一个大的数，例如，一个 200 位的数，是否是素数，在实际操作中还是一件十分困难的事情. 现在有一个重要的密码体制(公开密钥体制)就是依赖这一事实. 这是素数理论在实际中的一个重要应用.

4. 要让学生掌握“素数有无穷多个”这个重要结果. 这个定理是用反证法证明的. 反证法是一个非常重要的证明方法. 希望通过对这个问题的证明，让学生更好地体会反证法，掌握反证法的证明方法.

四、补充材料

1. 孪生素数

相邻两个素数的差是 2 的成对的素数，如 3,5;5,7 等叫作孪生素数. 孪生素数到底有多少对，是有有限对呢还是有无穷多对呢，到现在还没有解决.

2. 哥德巴赫猜想

观察

$$6=3+3,\qquad 8=3+5,\qquad 10=5+5,\qquad 12=5+7\text{ 等}.$$

可能有结论：凡大于 4 的偶数都可以写成两个奇素数的和，这就是著名的哥德巴赫猜想.

一般数学家认为哥德巴赫猜想成立的可能性很大，这方面我国科学家华罗庚、王元、潘承

洞、丁夏畦、尹文霖、陈景润等科学家都作过许多有益的工作.

3. 梅森数

考虑形如 2^p-1 的数(其中 p 为素数)是否为素数的问题,在 1644 年梅森提出了当 p 是下列 11 个素数之一,即

$$p=2,3,5,7,13,17,19,31,67,127,257$$

时,2^p-1 是素数. 梅森本人证明了前 7 个数,2^p-1 是素数,欧拉于 1772 年证明了第 8 个数 $2^{31}-1$也是素数,而第 9 个数 $2^{67}-1$ 直到 1903 年才由美国科学家科尔给出否定解答. 1930 年美国数学家 D. H. 莱默验证了 $2^{257}-1$ 是合数 . 由于梅森在这个问题上的贡献,人们把形如2^p-1的数叫作梅森数.

是否存在无数个梅森数是素数,是数论中的一个难题.

§2　最大公因数与辗转相除法

一、教学目标

1. 通过实例,经历利用辗转相除法求两个整数的最大公因数的过程,并能够熟练使用辗转相除法求两个整数的最大公因数.

2. 理解互素的概念,了解互素和素数的区别.

3. 能利用辗转相除法证明:若 a 能整除 bc,且 a,b 互素,则 a 能整除 c.

二、设计思路

1. 在带余除法的基础上,容易得到辗转相除法. 辗转相除法不仅可以求出两个整数的最大公因数,还可以推导出最大公因数的性质. 但是辗转相除法的推导相对来说较烦琐,所以,教科书从具体实例出发,体会运用辗转相除法求最大公因数的思想. 从式子 $n=kp+r(0\leqslant r<p)$ 可以得到$(n,p)=(p,\ r)$,这样把求两个较大的数(n 和 p)的公因数的问题变成求两个较小的数(p 和 r)的公因数的问题. 要指导学生理解这一转换的思想. 在介绍完具体实例的基础上,再得到一般情况下的推导. 在这里教师要引导学生体会从特殊到一般的数学思想.

2. 辗转相除法的推导很烦琐,使用起来也不太容易记忆,针对这个问题,教科书给出直观的图解来形象地理解,然后利用练习来加强理解.

3. 辗转相除法在数论中非常重要,教科书为了体现这一点,一方面给出了利用它来求两个整数的最大公因数,另一方面利用它来证明了最大公因数的一个性质.

三、教学建议

1. 辗转相除法是数论中的重要方法. 本节的内容主要分为辗转相除法的引入、推导和应

用. 为了加强对辗转相除法的引入的认识，教师可以加强对问题的情境的设问. 通过提问，引出最大公因数概念，然后利用带余除法探索公因数的性质. 在这个基础上，引出一个求两个整数的最大公因数的方法——辗转相除法. 帮助学生理解辗转相除法. 体会运用辗转相除法求最大公因数的思想——把求两个较大的数的公因数变成求两个较小的数的公因数的思想，进一步体会带余除法的思想. 仿照这个实例可以推出一般情况下的两个整数的最大公因数. 引导学生掌握这种探索数学问题的思想方法.

2. 为了更好地让学生掌握辗转相除法，可以让学生多做一些练习.

3. 互素的概念是数论中另外一个重要的概念，要求学生能够区分素数和互素的概念，素数是一个数本身的特征，互素是两个数相互的关系. 教师应通过大量实例来明确这两个概念的区别和联系. 并强调互素的两个数并不一定都是素数，比如 8 和 9 互素但是它们都是合数.

4. 教科书中的定理 3“对于任意不全为零的两个正整数 a,b，必存在整数 s,t，使得

$$(a,b)=sa+tb.$$

特别地，当 a,b 互素时，必存在整数 s,t，使得 $sa+tb=1$”非常重要，学生应能理解用辗转相除法证明这个定理的过程. 可指导学有余力的学生掌握这个定理的证明.

四、补充材料

1. 注意带余除法在证明最大公因数的性质和辗转相除法中的重要作用.

2. 最大公因数的应用.

例 1 一块瓷砖，长 135 cm，宽 105 cm，如果把它分割成相同大小的正方形，并且没有剩余，那么正方形的边长最大为多少?

提示:这实际是求 135 和 105 的最大公因数，容易求得边长为 15 cm.

例 2 有三根木棍长度分别为 135 cm，243 cm 和 558 cm. 如果把它们截成相等的小段并且没有剩余，而且截成的小段要达到最长，那么求每小段长以及共可以截成多少段.

提示:本题也是一个求最大公因数的问题，易求的每小段长为 9 cm，共可以截成 104 段.

3. 对于互素，我们给出一个很有用的判断互素的方法:

如果存在整数 $x_1,x_2,\cdots,x_k$，使得

$$a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_kx_k=1,$$

则 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是互素的.

§3 算术基本定理及其应用

一、教学目标

1. 掌握算术基本定理，了解算术基本定理唯一性的证明.

2. 探索公因数和公倍数的性质，并利用算术基本定理推导最小公倍数的性质.

二、设计思路

1. 教材遵循从特殊到一般的原则，通过具体实例帮助学生理解算术基本定理的存在，然后通过实例引出算术基本定理的唯一性证明.

2. 学习了公因数，自然会想到公倍数的概念. 教科书给出公倍数的概念，并利用算术基本定理来推导公倍数的性质. 这可以作为算术基本定理的一个应用.

三、教学建议

1. 教师可以首先让学生回忆分解素因数的知识，对算术基本定理有一个直观的认识，理解算术基本定理. 并通过实例使学生理解分解的唯一性，在此基础上，通过实例给出算术基本定理的唯一性证明.

2. 建议教师从实例出发，先给出公倍数的概念，再利用算术基本定理推导公倍数的性质. 推导时，首先引导学生写出两个整数的素因数分解式，然后引导学生自己写出这两个整数的最大公因数和最小公倍数，再观察最大公因数和最小公倍数之间的关系，很容易得出定理 5. 最后引导学生总结这种思考问题探索问题的过程和方法.

四、补充材料

算术基本定理的结论看来很明显，为什么还要证明呢？教科书还作了深入的讨论，是否有必要呢？教师可以指导有兴趣的同学参看潘承洞和潘承彪合著的《初等代数数论》(山东大学出版社，1992)，或其他有关代数数论基础的教材.

§4 不定方程

一、教学目标

1. 通过实例理解一次不定方程的模型.

2. 掌握一次不定方程有解的条件，会利用辗转相除法求解一次不定方程.

3. 尝试写出算法程序框图，在条件允许的情况下，可上机实现.

二、设计思路

1. 不定方程是一个常见但又非常重要的数学模型，在数论中占有非常重要的地位. 为了突出这一点，教科书从学生非常熟悉的百鸡问题入手引出一次不定方程的模型.

2. 教科书按照以下过程，给出一次不定方程的整数解：首先按照整数的性质判断一次不定方程是否有整数解；若有整数解，按照辗转相除法求出它的一组整数解(特解).

3. 通过一次不定方程的特解可以求出它的全部整数解，这主要利用了非齐次方程和齐次方程的内在关系，再结合整除和互素的性质得到的.

三、教学建议

1. 一次不定方程是一个非常重要的数学模型. 教师可以从不同角度举出实例来加深对这个模型的认识.

2. 对于一次不定方程的整数解的存在性问题，教师可以首先让学生利用试值法来探索，然后利用整除理论来判断其是否有解.

3. 如果一次不定方程有整数解，要求学生掌握利用辗转相除法求出它的一个解.

4. 如何表示一次不定方程的全部整数解是本节的一个基本问题. 教师应当让学生着重理解以下几个方面：

(1)首先教师应通过实例帮助学生理解对于非齐次方程来说，它的任意两个解的差一定是这个非齐次方程诱导出的齐次方程的解.

(2)在此基础上，帮助学生理解要想给出非齐次方程的所有解，需要做两件事情：一个是求出这个非齐次方程诱导出的齐次方程的通解，另一个是要求出非齐次方程的一个特解.

(3)非齐次方程的通解为，这个非齐次方程诱导出的齐次方程的通解，加上非齐次方程的一个特解. 在这个过程中求齐次方程的通解是一个难点.

5. 将求解非齐次方程的问题转换到求解齐次方程的方法，是一个非常重要的思想方法. 教师应该引导学生重视这个非常重要的转换方法.

6. 求齐次方程的通解是本节的难点，教师应通过大量的实例让学生理解齐次方程的通解公式.

四、补充材料

本节解决了二元一次不定方程的求解问题，对于三元一次不定方程的求解可以把三元一次不定方程转化为二元一次不定方程，利用本节的方法求出三元一次不定方程的全部解.

第三章　同　　余

一、教学目标

1. 理解同余和剩余类的概念及意义.

2. 探索同余的性质.

3. 探索剩余类的运算性质(加法和乘法),并且理解它的实际意义.体会剩余类运算与传统的数的运算的异同(会出现零因子).

4. 了解十进制表示的整数的整除判别法,探索整数能被 3,9,11,7 等整除的判别法.会利用弃九法检查整数加法、乘法计算中的错误.

5. 通过实例(如韩信点兵),理解一次同余方程组模型.

6. 理解大衍求一术和孙子定理的证明,并能够运用它们解一些简单的同余方程组.

7. 理解欧拉定理及其证明,理解欧拉定理的推论——费马小定理.

8. 了解数论在密码中的应用——公开密钥.

通过这一章的学习,让学生对数学上的一些重要思想有所认识.例如,同余分类的思想,运算的思想,在新的运算对象下(同余类)的运算规律;在孙子定理的证明中"大衍求一术"思想.有意识地培养学生提出问题、分析问题、解决问题的能力,表达交流的能力,培养学生通过运算进行逻辑推理的能力.让学生体会数论在实际中的应用,了解中国古代数学家为数学发展作出的贡献.帮助学生树立学好数学的信心,使他们能在遇到困难时,发扬坚忍不拔、克服困难的精神.

二、编写意图与特色

1. 本章在前两章的基础上进一步学习有关初等数论的一些基本概念和基本技能,进而学习和掌握有关数论的一些著名定理:欧拉定理、费马小定理和孙子定理等,使我们所学的知识得到一次升华.

2. 同余理论是本章的核心内容,教科书通过图解等方式尽量把内容直观化、简单化,使得学生容易接受,这是学习抽象问题的基本方法.

3. 弃九法是同余理论的一个简单应用,是一个有效的方法.教师应通过具体实例,帮助学生验证这种方法,激发学生学习数学的兴趣,产生探索的动力.

4. 欧拉定理、费马小定理和孙子定理都是初等数论中非常重要的定理.如何引导学生理解这些定理和这些定理的证明?教科书通过实例、图表、简化形式等方式,给出定理的来龙去脉,使得学生容易理解.学会应用这些定理,是学习这些定理必不可少的环节.例如,教科书通

过求解同余方程组和解决一些实际问题，加深对孙子定理的理解；教科书配备了适量的例题、习题，希望通过习题的演练达到对知识的深入理解、熟练使用.

三、教学内容及课时安排建议

本章教学时间约需 9 课时，具体分配如下：

§1　同余及其应用	3 课时
1.1　同余	
1.2　同余的性质	
1.3　整除的判断——弃九法	
§2　欧拉定理	2 课时
2.1　剩余类	
2.2　欧拉定理·费马小定理	
§3　同余方程(组)	2 课时
3.1　同余方程(组)	
3.2　孙子定理	
复习小结	2 课时

四、评价建议

1. 重视对学生数学学习过程的评价.
2. 重视运用所学知识解决实际问题的能力的评价.
3. 重视知识的系统归纳的学习方法.

§1　同余及其应用

一、教学目标

1. 理解同余的概念及意义.
2. 探索并掌握同余的性质.
3. 了解十进制表示的整数的整除判别法，探索整数能被 3，9，11，7 等整除的判别法.
4. 会利用弃九法检查整数加法、乘法计算中的错误.

二、设计思路

1. 同余理论是本专题的核心内容. 本节关于同余的概念和基本性质是同余理论的基础，因此非常重要.

2. 对于同余概念的理解，通过直观的方式使得学生易于接受，再通过例题和练习等方式来加深理解. 教科书给出了同余的基本性质，并通过对某些性质的证明，给出了证明这类问题的思想方法.

3. 整数的整除判别法是学生在小学算术中就已经接触过的，它是同余理论的应用. 教科书从最熟悉的整数被 3 整除的判断入手，讨论了在解决这类问题中如何使用同余的性质. 在此基础上，再逐渐引出整数被 9，11 整除的判断. 如何寻求一个整数能被 13 整除的方法？教科书把它作为学生自己动手实践的问题. 这里要注意，整数整除的判断可能有多种方法，要提倡学生从同余的角度来理解和解释.

4. 弃九法很神奇，但是它也有一定的局限性，教科书对这种方法进行了讨论.

三、教学建议

1. 同余是数论中一个最重要的概念. 建议教师通过具体实例使学生建立同余的概念. 在日常生活中，我们所要注意的常常不是某些整数，而是这些数用某一固定的数去除所得的余数. 例如，我们问现在是几点，就是用 24 去除某一个总的时数所得的余数；还比如问现在是星期几，等等. 这类问题，在生活中常常有同样的意义. 这样，就在数学中产生了同余的概念. 这个概念可以说大大丰富了数学的内容.

2. 建议教师通过具体实例使学生能够利用同余的概念对整数进行分类.

3. 教师应用实例、类比等手法，深入浅出地介绍同余的概念和性质. “同余”按其词意来说，就是“余数相同”，同余式和带余除法本质上是相同的. 同余式的符号在讨论整除问题中，比整除符号及除法算式更方便、更有效，能起到旧有符号起不到的作用. 为了学会应用这一新的符号，就要理解好它的基本性质，通过大量练习熟悉这一符号. 这里还要注意“同余”和“相等”“同余式”和“等式”的区别和联系.

4. 同余理论有着广泛的应用. 要求学生通过实例体会弃九法和整除的判断，并掌握弃九法和整除的判断.

5. 要引导学生对这部分内容多问“为什么”，勤动手多练习，这样才能做到知识的融会贯通，并且能够熟练解决实际问题.

四、补充材料

1. 任何一个平方数被 9 除所得余数，只需考虑 $9k$，$9k\pm1$，$9k\pm2$，$9k\pm3$，$9k\pm4$ 被 9 除所得余数，可知答案为 0，1，4，7.

2. 同余的性质还有类似：若 $a+b\equiv c\pmod m$，则 $a\equiv c-b\pmod m$；

若 $ak\equiv bk\pmod{mk}$，且其中 k 为正整数，则 $a\equiv b\pmod m$；

若 $a\equiv b\pmod m$，正整数 $d\mid m$，则 $a\equiv b\pmod d$；

……

3. 因为 $1\,000\equiv-1\pmod{13}$，所以，设正整数 $n=a_n\times1\,000^n+a_{n-1}\times1\,000^{n-1}+\cdots+a_0$（其

中 $0\leqslant a_i<1\ 000$)，则 $13\mid a$ 的充要条件是 $13\mid(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$.

§2　欧拉定理

一、教学目标

1. 探索剩余类的运算性质(加法和乘法)，并且理解它的实际意义. 体会剩余类运算与传统的数的运算的异同(会出现零因子).

2. 理解欧拉定理及其证明，理解费马小定理是欧拉定理的一个推论.

3. 通过阅读材料，初步了解数论在密码中的应用——公开密钥.

二、设计思路

1. 本节的内容比较抽象，教科书使用直观的表现方法来解释这些抽象的概念和定理. 着重使用了从特殊到一般的方法，从具体数入手，逐渐引出一般结论.

2. 教科书用类比的手法给出了剩余类的运算特点，鼓励学生探索以下问题：剩余类的加法和乘法的运算性质；剩余类运算与整数运算的异同. 这样可以使学生对于剩余类的本质特征有一个深刻的认识.

3. 教科书介绍了简化剩余系的概念，并利用它证明了欧拉定理，并把费马小定理作为欧拉定理的推论.

三、教学建议

1. 从同余的角度对整数进行分类，并理解剩余类的概念. 教师应指导学生深刻体会整体和代表之间的关系.

2. 教师应通过具体实例使学生理解剩余类的运算，以及它与同余运算的关系. 体会剩余类运算与传统的整数运算的异同.

3. 在剩余类的基础上给出了几个相关概念：完全剩余系、与模 m 互素的剩余类、简化剩余系. 这些概念比较抽象，教师应通过具体实例让学生感受这些概念，并在此基础上给出它们的概念. 教师还可以通过图表、类比练习等方式来加深对这些概念的本质认识.

4. 欧拉定理和费马小定理是数论中两个著名的定理，教师可以详细地介绍定理的来龙去脉和实际应用，使学生对这些定理有一个全面的认识.

四、补充材料

简化剩余系

如果 $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(m)}$ 是模 m 的一个简化剩余系，则对于任意 $1\leqslant i\neq j\leqslant\varphi(m)$，一定有

$m \nmid (a_i - a_j)$，由于 $(a, m)=1$，所以，$m \nmid (a_i - a_j)a$，也即 $aa_i \not\equiv aa_j \pmod{m}$，同时，显然有 $(aa_i, m)=1$，$(aa_j, m)=1$. 所以，$aa_1, aa_2, \cdots, aa_{\varphi(m)}$ 也是模 m 的一个简化剩余系.

§3　同余方程(组)

一、教学目标

1. 通过实例(如韩信点兵)，理解并掌握一次同余方程组模型.

2. 通过实例，经历大衍求一术(孙子定理)的证明过程，并了解大衍求一术(孙子定理)的证明思想. 能够运用它们解决一些简单的同余方程组和实际问题.

二、设计思路

1. 求解同余方程(组)是同余理论的重要内容. 运用类比的方法，借助于方程的概念，教科书给出了同余方程(组)的解的概念.

2. 教科书先讨论同余方程的求解问题. 并给出了利用不定方程来求同余方程解的方法.

3. 对于求解同余方程组问题，教科书介绍了我国古代数学家给出的一个很好的方法——大衍求一术，我们也把它称之为孙子定理. 教科书通过具体实例，详细地介绍了大衍求一术的解决问题的过程. 在此基础上，进行了概括总结.

三、教学建议

1. 同余方程(组)是和实际联系非常密切的数学模型，也是初等数论的重要内容，教师应根据具体实例，给出同余方程(组)及其解的概念.

2. 教师应通过具体实例，帮助学生认识可以利用不定方程来求解一次同余方程. 并通过不定方程的理论，使学生掌握一次同余方程有解的充要条件.

3. 同余方程组求解的过程——大衍求一术是本节的重点和难点，教科书由浅入深地讲解了大衍求一术的求解思想，继而给出了定理的证明. 大衍求一术的求解思想比较抽象，教师可以引导学生从特殊到一般，利用具体的数进行推导来理解一般的表达，从而达到对解法的深刻理解. 教师应当着重讲解下面这个例题：

例　求 3 除余 2，5 除余 3，7 除余 4 的最小自然数.

解　第一步，找被 3 除余 1，能被 5，7 整除的数 M_1.

根据同余方程的思想，M_1 应满足以下同余方程：

$$35x \equiv 1 \pmod{3}.$$

由于 35 和 3 互素，所以这个同余方程的解一定存在.

实际上，可以从 35，2×35，3×35，…中，用尝试的方法找出满足被 3 除余 1 的最小数，$M_1=70$.

同样地，找被 5 除余 1，能被 3，7 整除的数，$M_2=21$，

找被 7 除余 1，能被 3，5 整除的数，$M_3=15$.

第二步，找被 3 除余 2，能被 5，7 整除的数.

根据同余的性质，$2M_1$ 就是一个满足这个条件的数.

同样地，找被 5 除余 3，能被 3，7 整除的数，其为 $3M_2$，

找被 7 除余 4，能被 3，5 整除的数，其为 $4M_3$.

第三步，找同时满足：3 除余 2；5 除余 3；7 除余 4 这 3 个条件的数 M.

根据同余的性质，$M=2M_1+3M_2+4M_3=263$，

$M=263$ 就是一个满足这些条件的数.

第四步，找同时满足：3 除余 2；5 除余 3；7 除余 4 这 3 个条件的最小自然数.

通过从 263 中减去 $3\times5\times7=105$ 的倍数，我们就可以得到满足上述条件的最小自然数，即，$263-2\times105=53$.

4. 教师可指导学有余力的同学，了解大衍求一术的思想方法的一般性——拉格朗日差值.

5. 关于解同余方程组的问题，我国古代有极好的研究成果. 这里教师可以向学生进行爱国主义教育，同时可以激发学生的爱国热情和学习动力.

四、补充材料

中国剩余定理

在我国古代劳动人民中，长期流传着“隔墙算”“剪管术”“秦王暗点兵”等数学游戏. 有一首“孙子歌”，甚至远渡重洋，传入日本：

“三人同行七十稀，五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月，除百零五便得知.”

这些饶有趣味的数学游戏，以各种不同的形式介绍世界闻名的“孙子问题”的解法，通俗地反映了中国古代数学的一项卓越成就.

“孙子问题”在现代数论中是一个一次同余问题，它最早出现在我国公元 4 世纪的数学著作《孙子算经》中.《孙子算经》卷下“物不知数”题说：有物不知其数，三个一数余二，五个一数余三，七个一数又余二，问该物总数几何？显然，这相当于求不定方程组

$$N=3x+2,N=5y+3,N=7z+2$$

的正整数解 N，或用现代数论符号表示，等价于求解下列的一次同余组：

$$N\equiv2(\mathrm{mod}\ 3)\equiv3(\mathrm{mod}\ 5)\equiv2(\mathrm{mod}\ 7)$$

《孙子算经》所给答案是 $N=23$. 由于孙子问题数据比较简单，这个答案通过试算也可以得到. 但是《孙子算经》并不是这样做的. “物不知数”题的术文指出解题的方法：三三数之，取数七十，与余数二相乘；五五数之，取数二十一，与余数三相乘；七七数之，取数十五，与余数二相乘. 将诸乘积相加，然后减去一百零五的倍数. 列成算式就是：

$$N=70\times2+21\times3+15\times2-2\times105.$$

这里 105 是模数 3，5，7 的最小公倍数，容易看出，《孙子算经》给出的是符合条件的最小正整数. 对于一般余数的情形，《孙子算经》术文指出，只要把上述算法中的余数 2，3，2 分别换成新的余数就行了. 以 R_1，R_2，R_3 表示这些余数，那么《孙子算经》相当于给出公式

$$N=70\times R_1+21\times R_2+15\times R_3-P\times105(P\text{ 是整数}).$$

孙子算法的关键，在于 70，21 和 15 这 3 个数的确定. 后来流传的《孙子歌》中所说“七十稀”“廿一枝”和“正半月”，就是暗指这 3 个关键的数字.《孙子算经》没有说明这 3 个数的来历. 实际上，它们具有如下特性：

$$70=2\times\frac{3\times5\times7}{3}\equiv1(\bmod 3),$$

$$21=1\times\frac{3\times5\times7}{5}\equiv1(\bmod 5),$$

$$15=1\times\frac{3\times5\times7}{7}\equiv1(\bmod 7).$$

也就是说，这 3 个数可以从最小公倍数 $M=3\times5\times7=105$ 中各约去模数 3，5，7 后，再分别乘整数 2，1，1 而得到. 假令 $k_1=2$，$k_2=1$，$k_3=1$，那么整数 $k_i(i=1,2,3)$的选取使所得到的 3 个数 70，21，15 被相应模数相除的时候余数都是 1. 由此出发，立即可以推出，在余数 R_1，R_2，R_3 的情况下

$$R_1\times k_1\times\frac{M}{3}=R_1\times2\times\frac{3\times5\times7}{3}\equiv R_1(\bmod 3),$$

$$R_2\times k_2\times\frac{M}{5}=R_2\times1\times\frac{3\times5\times7}{5}\equiv R_2(\bmod 5),$$

$$R_3\times k_3\times\frac{M}{7}=R_3\times1\times\frac{3\times5\times7}{7}\equiv R_3(\bmod 7).$$

综合以上 3 式又可得到

$$\begin{aligned}&R_1\times2\times\frac{3\times5\times7}{3}+R_2\times1\times\frac{3\times5\times7}{5}+R_3\times1\times\frac{3\times5\times7}{7}\\&\equiv R_1(\bmod 3)\\&\equiv R_2(\bmod 5)\\&\equiv R_3(\bmod 7).\end{aligned}$$

因为 $M=3\times5\times7$ 可被它的任一因子整除，于是又有：

$$\begin{aligned}&R_1\times2\times\frac{3\times5\times7}{3}+R_2\times1\times\frac{3\times5\times7}{5}+R_3\times1\times\frac{3\times5\times7}{7}-PM\\&\equiv R_1(\bmod 3)\end{aligned}$$

$\equiv R_2 \pmod 5$

$\equiv R_3 \pmod 7$.

这里的 P 是整数. 这就证明了《孙子算经》的公式. 应用上述推理，可以完全类似地把孙子算法推广到一般情形：设有一数 N，分别被两两互素的几个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 相除得余数 R_1，$R_2, \cdots, R_n$，即

$$N \equiv R_i \pmod{a_i} \quad (i=1,2,\cdots,n),$$

只需求出一组数 K_i，使满足

$$k_i \frac{M}{a_i} \equiv 1 \pmod{a_i} (i=1,2,\cdots,n),$$

那么适合已给一次同余组的最小正数解是

$$N=\left(R_1 k_1 \frac{M}{a_1}+R_2 k_2 \frac{M}{a_2}+R_3 k_3 \frac{M}{a_3}+\cdots+R_n k_n \frac{M}{a_n}\right).$$

这就是现代数论中著名的剩余定理. 如上所说，它的基本形式已经包含在《孙子算经》"物不知数"题的解法之中. 不过《孙子算经》没有明确地表述出这个一般的定理.

孙子算法出现在公元 4 世纪的中国算书中，这并不是偶然的. 我国古代天文历法资料表明，一次同余问题的研究，明显地受到天文、历法需要的推动，特别是和古代历法中所谓"上元积年"的计算密切相关. 大家知道，一部历法，需要规定一个起算时间，我国古代历算家把这个起点叫作"历元"或"上元"，并且把从历元到编历年所累积的时间叫作"上元积年". 上元积年的推算需要求解一组一次同余方程式. 以公元 3 世纪三国时期魏国施行的《景初历》为例，这部历法规定以冬至、朔旦(朔日子夜)和甲子日零时会合的时刻作为历元. 设 a 是一回归年日数，b 是一朔望月日数，当年冬至距甲子日零时是 R_1，离平朔时刻是 R_2 日，那么《景初历》上元积年数 N 就是同余组

$$aN \equiv R_1 \pmod{60} \equiv R_2 \pmod{b}$$

的解. 到了南北朝时期，祖冲之《大明历》(公元 462 年)更要求历元必须同时是甲子年的开始，天"日月合璧""五星联珠"(就是日、月、五大行星处在同一方位)，月亮又恰好行经它的近地点和升交点. 这样的条件下推算上元积年，就相当于要求解十个同余式了. 天文历法数据一般又都十分庞杂，所以，在《孙子算经》成书前后的魏晋南北朝时期，我国的天文历算家无疑已经能够求解形式比《孙子算经》"物不知数"题复杂得多的一次同余式，因而必定掌握了按一定程序计算一次同余式的方法.《孙子算经》以例题的形式总结、反映了这一事实. 以后天文历算家长期沿用孙子算法推算上元积年，这中间肯定会引起更加深入的探讨. 到公元 13 世纪，大数学家秦九韶集前法之大成，终于在一次同余式的研究上获得了超越前人的辉煌成果.

秦九韶，字道古，生活于南宋时期，自幼喜好数学，经过长期积累和苦心钻研，于公元 1247 年写成《数书九章》. 这部中世纪的数学杰作，在许多方面都有创造，其中求解一次同余组的"大衍求一术"和求高次方程数值解的"正负开方术"，更是具有世界意义的成就.

这里主要介绍秦九韶对一次同余论的伟大贡献.

秦九韶在《数书九章》中明确地系统地叙述了求解一次同余组的一般计算步骤. 秦九韶的

方法，正是前述的剩余定理. 我们知道，剩余定理把一般的一次同余问题归结为满足条件 $k_i \frac{M}{a_i} (\mathrm{mod}\ a_i)$ 的一组数 k_i 的选定. 秦九韶给这些数起名叫“乘率”，并且在《数书九章》卷一“大衍总术”中详载了计算乘率的方法——“大衍求一术”.

在秦九韶那个时代，计算仍然使用算筹. 秦九韶在一个小方盘上，右上布置奇数 g，右下布置定数 a，左上置 1(他称它为“天元 1”)，然后在右行上下交互以少降多，所得商数和左上(或下)相乘并入左下(或上)，直到右上方出现 1 为止.

秦九韶在《数书九章》中采集了大量例题，如“古历会积”“积尺寻源”“推计土功”“程行计地”，等等，广泛应用大衍求一术来解决历法、工程、赋役和军旅等实际问题. 在这些实际问题中，模数 a_i 并不总是两两互素的整数. 秦九韶区分了“元数”(a_i 是整数)、“收数”(a_i 是小数)、“通数”(a_i 是分数)等不同情形，并且对每种情形都给出了处理方法. “大衍总术”把“收数”和“通数”化成“元数”的情形来计算，而对于元数不两两互素的情形，给出了可靠的程序，适当选取那些元数的因子作定数而把问题归结为两两互素的情形. 所有这些系统的理论，周密的考虑，即使以今天的眼光看来也很不简单，充分显示出秦九韶高超的数学水平和计算技巧.

秦九韶小时曾跟随他父亲到南宋京城杭州，向太史局(主管天文历法的机构)的官员学习天文历法，“大衍求一术”很可能就是他总结天文历法计算上元积年方法的结果. 但是“大衍求一术”似乎没有为他同时代的人所充分理解. 明中叶以后几乎失传. 一直到清代“大衍求一术”又重新被发掘出来，引起了许多学者(张敦仁、李锐、骆腾风、黄宗宪等)的兴趣. 他们对“大衍求一术”进行了解释、改进和简化，其中黄宗宪《求一术通解》对模数非两两互素的情形给出了更加简明的方法，但是时代已是晚清.

从《孙子算经》“物不知数”题到秦九韶的“大衍求一术”，我国古代数学家对一次同余式的研究，不仅在中国数学史上而且在世界数学史上都占有光荣的地位. 在欧洲，最早接触一次同余式的，是和秦九韶同时代的意大利数学家斐波那契(1170—1250)，他在《算法之书》中给出了两个一次同余问题，但是没有一般的算法. 整个水平没有超过《孙子算经》. 直到 18，19 世纪，大数学家欧拉(1707—1783)于公元 1801 年对一般一次同余式进行了详细研究，才重新获得和秦九韶“大衍求一术”相同的定理，并且对模数两两互素的情形，给出了严格证明. 欧拉和高斯事先并不知道中国人的工作. 公元 1852 年英国传教士伟烈亚力(1815—1887)发表《中国科学摘记》，介绍了《孙子算经》“物不知数”题和秦九韶的解法，引起了欧洲学者的重视. 1876 年，德国马蒂生(1830—1906)首先指出孙子问题的解法和高斯方法一致，当时德国著名数学史家康托(1829—1920)看到马蒂生的文章以后，高度评价了“大衍求一术”，并且称赞发现这一方法的中国数学家是“最幸运的天才”. 直到今天，“大衍求一术”仍然引起西方数学史家浓厚的研究兴趣. 如 1973 年，美国出版的一部数学史专著《十三世纪的中国数学》中，系统介绍了中国学者在一次同余论方面的成就，作者力勃雷希(比利时人)在评论秦九韶的贡献的时候说道：“秦九韶在不定分析方面的著作时代颇早，考虑到这一点，我们就会看到，萨顿称秦九韶为‘他那个民族、他那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一’，是毫不夸张的.”

印度学者对一次同余论也有过重要贡献. 从公元 6 世纪到 12 世纪，他们发展了一种称为

“库塔卡”的算法，用来求解和一次同余式等价的不定方程组.“库塔卡”法出现在孙子算法之后，印度数学家婆罗门芨多(7 世纪)、摩柯吠罗(9 世纪)等人的著作中，都有和“物不知数”题相同的一次同余问题. 这当然不是要借此断言“库塔卡”法一定受到了孙子算法的影响，但是有人(如万海依等)硬说中国的“大衍求一术”来源于“库塔卡”，就是毫无根据的妄说了. 万海依居然把中国算法中数码从左到右横写作为“大衍求一术”受印度影响的重要根据. 大家知道，中国古代至迟从春秋战国时期就开始使用算筹记数，我们今天还可以从现存的公元前 3 世纪的货币上看到这种从左到右的记数方法. 由此可见，万海依的论点多么荒唐可笑. 中国古代数学家对一次同余论的研究有明显的独创性和继承性，“大衍求一术”在世界数学史上的崇高地位是毋容置疑的，正因为这样，在西方数学史著作中，一直公正地称求解一次同余方程(组)的剩余定理为“中国剩余定理”.

练习、习题、复习题参考答案或提示

P4 习题 1—1

1. (1)$\nmid$; (2)$|$; (3)$|$.

2. 略

3. 因为 $12=2\times5+2$，所以 $q=2,r=2$；

又 $-13=-3\times5+2$，$q=-3,r=2$；

又 $15=3\times5+0$，故 $q=3,r=0$；

$-3=-1\times5+2$，所以 $q=-1,r=2$.

4. 分成 7 类：$7n,7n+1,7n+2,7n+3,7n+4,7n+5,7n+6$.

5. 提示：可按 $n=2k,n=2k+1$ 分类讨论.

6. 提示：可按 $n=6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k+4,6k+5$ 分类讨论.

7. 提示：

(1)当 x,y 均为奇数时，设 $x=2k+1,y=2m+1(k,m\in\mathbf{Z})$，则

$x^2-y^2-2=4(k^2+k-m^2-m)-2$，所以，$4\nmid(x^2-y^2-2)$；

(2)当 x,y 均为偶数时，设 $x=2k,y=2m(k,m\in\mathbf{Z})$，则

$x^2-y^2-2=4(k^2-m^2)-2$，所以，$4\nmid(x^2-y^2-2)$；

(3)当 x,y 分别为一个奇数，一个偶数，不妨设 x 为奇数，y 为偶数，则可设 $x=2k+1,y=2m(k,m\in\mathbf{Z})$，故 $x^2-y^2-2=4(k^2+k-m^2)-1$，所以，$4\nmid(x^2-y^2-2)$；

综上，因为 $4\nmid(x^2-y^2-2)$，所以，$8\nmid(x^2-y^2-2)$.

P7 习题 1—2

A 组

1. $0=(0)_2$，$1=(1)_2$，$2=(10)_2$，$3=(11)_2$，$4=(100)_2$，$5=(101)_2$，$6=(110)_2$，

$7=(111)_2$, $8=(1000)_2$, $9=(1001)_2$.

2. (1) $1024=(10000000000)_2$;

(2) $341=(101010101)_2$;

(3) $255=(11111111)_2$.

3. (1) $(11110)_2=30$;　(2) $(1010110)_2=86$.

B组

证明：对正整数 n 必有唯一的 $k\geqslant 0$，使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$. 由带余除法知，必有唯一的 q_0，a_0，满足 $n=2q_0+a_0$，$0\leqslant a_0\leqslant 1$.

若 $k=0$，则必有 $n=1$，$q_0=0$，$a_0=1$，所以结论成立.

设结论对 $k=m\geqslant 0$ 成立，那么，当 $k=m+1$ 时，上式中的 q_0 必满足 $2^m\leqslant q_0<2^{m+1}$.

由假设知

$$q_0=r_m 2^m+\cdots+r_0,$$

其中 $0\leqslant r_i\leqslant 1(0\leqslant i\leqslant m-1)$，$r_m=1$，因而有

$$n=r_m 2^{m+1}+\cdots+r_0\times 2+a_0,$$

即结论对 $m+1$ 也成立.

P11 复习题一

A组

1. 提示：$a|b$，$c|d$，则存在整数 m，n，使得：$b=ma$，$d=nc$，所以，$bd=(mn)ac$，故 $ac|bd$.

2. 提示：$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$.

3. 提示：可按照 $n=6k$，$6k+1$，$6k+2$，$6k+3$，$6k+4$，$6k+5$ 分类代入.

4. (1) $38=(100110)_2$;

(2) $2\,008=(11111011000)_2$;

(3) $2^{2^2}+1=(10001)_2$;

(4) $m=1$ 时，$4^{2m}+2^m+1=(10011)_2$，$m=2$ 时，$4^{2m}+2^m+1=(100000101)_2$.

5. $f(2)=(101101)_2$.

6. $5+3=8$ 用二进制表示为 $(101)_2+(11)_2=(1000)_2$.

由此猜想二进制的加法法则为：

$$(0)_2+(0)_2=(0)_2,$$
$$(0)_2+(1)_2=(1)_2,$$
$$(1)_2+(0)_2=(1)_2,$$
$$(1)_2+(1)_2=(10)_2.$$

7. 提示：对 b 和 $a-d$ 用定理 1 证明即可.

当 b 是偶数时，$d=-\frac{|b|}{2}$；

当 b 是奇数时，$d=-\frac{(|b|-1)}{2}$.

B 组

1. 提示：因为 $a|c$ 且 $b|c$，所以，存在整数 m,n，使得 $c=ma=nb$，又因为 $1=as+bt$，所以，$c=cas+cbt=(nb)as+(ma)bt=ab(ns+mt)$，所以，$ab|c$.

2. 提示：因为 $3|n$ 且 $7|n$，又 $1=7\times1-3\times2$，利用第 1 题即可得到结论.

3. (1)提示：由题可设 $n=2k+1,k\in\mathbf{Z}$，代入即可；

(2)提示：按照 $n=6k,6k+1,6k+2,6k+3,6k+4,6k+5$ 分类，即可知道：只有 $n=6k+1,6k+5$ 符合要求，代入即可获得证明.

P15 习题 2—1

1. (1)素数； (2)$391=17\times23$； (3)素数； (4)素数.

2. 利用筛法，101～200 内所有的素数为：

101，103，107，109，113，127，131，137，139，149，151，157，163，167，173，179，181，191，193，197，199.

P19 练习

1. (1)$1\,927=4\times386+383$，则$(1\,927,386)=(383,386)$，

$386=1\times383+3$，则$(383,386)=(383,3)$，

$383=127\times3+2$，则$(3,383)=(3,2)$，

故$(1\,927,386)=1$.

(2)$1\,234=5\times243+19$，则$(1\,234,243)=(243,19)$，

$243=12\times19+15$，则 $(243,19)=(19,15)$，

故$(1\,234,243)=1$；

2. (1)$(1\,234,324)=(324,262)=(262,62)=(62,14)=(14,6)=2$；

(2)$(205,25)=(25,5)=5$.

P21 习题 2—2

A 组

1. 提示：反证法. 若不然，设$(n,n+1)=d>1$，则 $d|n$ 且 $d|n+1$，故 $d|1$，矛盾.

2. (1)$(360,1\,970)=(360,170)=(170,20)=(20,10)=10$；

(2)$(30,365)=(30,5)=5$；

(3)$(530\,145,165\,186)=(165\,186,34\,587)=(34\,587,26\,838)$

$=(26\,838,7\,749)=(7\,749,3\,591)=(3\,591,567)$

$=(567,189)=189$；

(4)$(81\,719,33\,649)=(33\,649,14\,421)=(14\,421,4\,807)=4\,807$.

3. 定理 3 的特例，其逆命题是成立的.

该命题可叙述为：若存在整数 s,t，使得 $as+bt=1$，则一定有 a,b 互素.

证明如下：因为$(a,b)|a$，$(a,b)|b$，所以，$(a,b)|as+bt$. 即$(a,b)|1$. 所以，$(a,b)=1$.

但对于定理 3 来说，其逆命题为：$as+bt$ 为 a,b 的最大公约数. 这显然是不正确的，因为对于不同的整数 $s,t,as+bt$ 的值可能不同，而 (a,b) 是唯一的. 事实上，(a,b) 等于所有形如 $as+bt$ 的数中最小的正整数(其中 $s,t\in \mathbf{Z}$).

4. 提示：根据抽象概括得 $(a^n, b^n)=(a,b)^n\left(\left(\frac{a}{(a,b)}\right)^n,\left(\frac{b}{(a,b)}\right)^n\right)$，又因为 $\left(\left(\frac{a}{(a,b)}\right),\left(\frac{b}{(a,b)}\right)\right)=1$，所以，$\left(\left(\frac{a}{(a,b)}\right)^n,\left(\frac{b}{(a,b)}\right)^n\right)=1$，得证.

5. $b=cq+r$，$(b,c)=(c,r)$，$ab=acq+ar$，因此 $(ab,ac)=(ac,ar)=a(c,r)=a(b,c)$.

B 组

证明：$(c,b)=(c(a,b),b)=((ac,bc),b)=(ac,bc,b)=(ac,b)$.

P23 练习

1. (1) $120=2^3\times 3\times 5$；

(2) $365=5\times 73$；

(3) $2\ 008=2^3\times 251$.

2. 与 10 000 互素的四位数的个数为 3 600.

3. $\varphi(6)=2$；

$\varphi(11)=10$.

P25 习题 2—3

A 组

1. (1) 8；(2) 400.

2. (1) $(48,84)=12$，$[48,84]=336$；

(2) $(360,810)=90$，$[360,810]=3\ 240$；

(3) $(1\ 260,3\ 150)=630$，$[1\ 260,3\ 150]=6\ 300$.

3. (1) $16\ 500=2^2\times 3\times 5^3\times 11$；

(2) $1\ 452\ 990=5\times 2\times 3\times 11\times 7\times 17\times 37$；

(3) $9\ 828=2^2\times 3^3\times 7\times 13$.

4. (1) $391=17\times 23$，

$493=17\times 29$，

$(391,493)=17$，

$[391,493]=11\ 339$；

(2) $209=11\times 19$，

$665=5\times 7\times 19$，

$(209,665)=19$，

$[209,665]=7\ 315$；

(3) $1\ 834=2\times 7\times 131$，

$30\ 261=3\times 7\times 11\times 131$，

$(1\ 834, 30\ 261)=917$,

$[1\ 834, 30\ 261]=60\ 522$.

5. $(54, 48)=6$,

每个小组的人数最多是 6 人,这时,甲班分成 9 个小组,乙班分成 8 个小组.

6. $[10, 15, 18]=90$,

参加团体操表演的最少需要 90 人.

B 组

1. 提示:设这个有理数根为$\frac{m}{n}$,其中 $m, n\in \mathbf{Z}$. 若 $m=0$,则$\frac{m}{n}$为整数;若 $m\neq 0$,令$(m, n)=1$. 将 $x=\frac{m}{n}$代入方程,得到:$\left(\frac{m}{n}\right)^3+a\left(\frac{m}{n}\right)^2+b\left(\frac{m}{n}\right)+c=0$,两边同乘 n^3 得到:$m^3=-cn^3-bmn^2-am^2n=n(-cn^2-bmn-am^2)$,所以,$n\mid m^3$,又$(m, n)=1$,所以,只有 $n=\pm 1$,此时,$\frac{m}{n}$为整数.

2. $1\ 200=2^4\times 3\times 5^2$,设 m 为 1 200 的一个正约数,则一定有 $m=2^r\times 3^t\times 5^k$,其中 r 可取 0 或 1 或 2 或 3 或 4,s 可取 0 或 1,k 可取 0 或 1 或 2,所以 1 200 的所有正约数的个数为$(4+1)\times(1+1)\times(2+1)=30$ 个.

P32 练习

1. (1)$x_0=-2, y_0=2$;

(2)$(2, 4)=2\nmid 5$,所以无整数解;

(3)$x_0=4, y_0=2$;

(4)$(12, 20)=4\nmid 21$,所以无整数解;

(5)$x_0=24, y_0=-11$;

(6)$x_0=-11, y_0=-16$.

P36 习题 2—4

A 组

1. (1)$x_0=5, y_0=1$,

所以 $x=5-5m, y=1+3m, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

(2)$x_0=-5, y_0=-6$,

所以 $x=-5-20m, y=-6+17m, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

(3)$x_0=25, y_0=2$,所以 $x=25-19m, y=2+7m, m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

2. $x_0=11, y_0=7$.

3. 有 3 种取法:5 个 1 分,4 个 2 分,1 个 5 分;8 个 1 分,0 个 2 分,2 个 5 分;2 个 1 分,8 个 2 分,0 个 5 分.

4. 这个两位数为 15 或 24.

B 组　略.

P37 复习题二

A 组

1. 全为素数.

2. (1)不成立,如 $a=b=1,c=2$;

(2)不成立,如 b,c 中有一个为 0;

(3)不成立,如 $d=4,a=4,b=2$;

(4)成立;

(5)不成立,如 $d=5,a=2$;

(6)成立.

3. $(21n+4,14n+3)=(7n+1,14n+3)=(7n+1,1)=1$.

4. $(198,252)=18$,

$18=-5\times198+4\times252$.

5. 如:6,15,10.

6. $(n!+1,(n+1)!+1)=(n!+1,-n)=(1,-n)=1$.

7. $(n-1,n^2+n+1)=(n-1,2n+1)=(n-1,3)$.

当 $n=3k+1$ 时,最大公因数为 3;

当 $n=3k$ 时,最大公因数为 1;

当 $n=3k-1$ 时,最大公因数为 1.

8. 不超过 20 的素数有 2,3,4,7,11,13,17,19,

$20!=2^{18}\times3^8\times5^4\times7^2\times11\times13\times17\times19$.

9. $180=2^2\times3^2\times5$,正的奇约数有 3,5,9,15,45 五个.

10. $x=-1-731m,y=4+907m,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

11. (1)$x=4-7m,y=3+5m,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

(2)$x=3-3m,y=34+7m,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

12. $x=71-110m,y=22+63m,m=0,\pm1,\pm2,\cdots$

B组

1. 提示:若不然,存在正整数 $1<s<m$,使得 $s\mid m$,则 s 必为 $2,3,\cdots,m-1$ 中的一个,即 $s\mid(m-1)!$,所以,又由 $s\mid m,m\mid(m-1)!+1$,可得 $s\mid(m-1)!+1$.

故 $s\mid((m-1)!,(m-1)!+1)$,而 $((m-1)!,(m-1)!+1)=1$,所以,只有 $s=1$,矛盾.

2. 提示:若 $m<n$,则 $(2^{2^m}+1)\mid(2^{2^n}-1)$,而 $(2^{2^n}-1,2^{2^n}+1)=(2^{2^n}-1,2)=1$,所以,若 $d\mid F_n$ 且 $d>1$,则一定有 $d\nmid F_m$.

由此,不妨设 F_m 的一个素约数为 d_m,则当 $m\neq n$ 时,$d_m\neq d_n$,由于 F_m 有无穷多个,所以,素约数 d_m 也有无穷多个.

P40 练习

1. 8 月 26 日是星期日.

2. 2 h 之前是 7 点;过 13 h 之后是 22 点;28 h 之后是 13 点.

P42 练习

1. 提示:利用性质 5 证明或者如下证明.

因为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$，所以，$m\mid(a-b)$，又 $(a-b)\mid(a^n-b^n)$，所以，$m\mid(a^n-b^n)$，所以，$a^n\equiv b^n(\mathrm{mod}\ m)$.

2. 最后一位数是 7；最后两位数是 67.

P45 练习

1. 因为 12，123，12 345 的各位数字的和均能被 3 整除，根据整数被 3 整除的特点知 12，123，12 345；而 1 234 的各位数字的和不能被 3 整除，所以 1 234 不能被 3 整除.

2. 因为 $1\ 000\equiv-1(\mathrm{mod}\ 7)$，所以，设正整数 $n=a_n\times1\ 000^n+a_{n-1}\times1\ 000^{n-1}+\cdots+a_0$，(其中 $0\leqslant a_i<1\ 000$)，则 $7\mid a$ 的充要条件是 $7\mid(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$.

P46 习题 3—1

A 组

1. 提示：

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2},$$

而 n^2 被 10 除的余数可能为以下几种情况：

$n^2\equiv1(\mathrm{mod}\ 10)$，$n^2\equiv4(\mathrm{mod}\ 10)$，$n^2\equiv5(\mathrm{mod}\ 10)$，$n^2\equiv6(\mathrm{mod}\ 10)$，$n^2\equiv9(\mathrm{mod}\ 10)$，易得 $\frac{n^2+n}{2}$ 的最后一位数不会出现 2，4，7，9.

2. 设此数为 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$，即

$$\begin{aligned}&a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0\\=&a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2\times100+a_1a_0\\=&a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2\times4\times25+a_1a_0,\end{aligned}$$

故若其末两位数 a_1a_0 是 4(或 25)的倍数，则此 n 位数 $a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1a_0$ 为 4(或 25)的倍数.

3. $9\mid9+2+x+y+4+2+7$，

所以 $9\mid x+y+6$，

因为 $0\leqslant x,y\leqslant9$，

所以 $6=0+0+6\leqslant x+y+6\leqslant9+9+6=24$，

所以 $x+y+6$ 是 9 的倍数又界于 6 与 24 之间，

所以 $x+y+6=9$ 或 $x+y+6=18$，

又因为 $92xy427$ 为 11 的倍数，

所以 $11\mid[(9+x+4+7)-(2+y+2)]$，

所以 $11\mid5+x-y$，

因为 $0\leqslant x,y\leqslant9$，

所以 $-4=5+0-9\leqslant5+x-y\leqslant5+9-0=14$.

所以 $5+x-y$ 是 11 的倍数又界于 -4 与 14 之间，

所以 $5+x-y=0$ 或 $5+x-y=11$，

易得 $x=9$，$y=3$.

即此数为 9 293 427.

4. 提示：若 $7|(a-2b)$，则存在整数 k 使得 $a-2b=7k$，故 $a=7k+2b$，所以，$n=10a+b=70k+20b+b=7(10k+3b)$，所以，$7|n$.

5. (1)正确； (2)错误； (3)正确； (4)正确.

B组

1. $4k, 4k+1, (k\in\mathbf{Z})$.

2. 同 A 组第 4 题.

3. 提示：通过观察 $5, 5^2, 5^3, \cdots$ 被 7 除后的余数找出规律.

P49 练习

1. 余数可能为 0，1，4，7.

因为 $n\equiv0 \pmod 9$，$n\equiv1 \pmod 9$，$n\equiv2 \pmod 9$，$n\equiv3 \pmod 9$，$n\equiv4 \pmod 9$，$n\equiv5 \pmod 9$，$n\equiv6 \pmod 9$，$n\equiv7 \pmod 9$，$n\equiv8 \pmod 9$，

所以 $n^2\equiv0 \pmod 9$，$n^2\equiv1 \pmod 9$，$n^2\equiv4 \pmod 9$，$n^2\equiv7 \pmod 9$.

2. 原式$=(8\times2) \pmod 7=16 \pmod 7=2 \pmod 7$.

P51 练习

1. 16.

2. 提示：利用费马小定理.

P55 习题 3—2

A组

1. 全体偶数满足 $x\equiv0 \pmod 2$；全体奇数可按模 12 分成 6 类：

$12k+1, 12k+3, 12k+5, 12k+7, 12k+9, 12k+11, (k=0, \pm1, \cdots)$

其中 $12k+3, 12k+9$ 满足 $x\equiv0 \pmod 3$，

$12k+1, 12k+5$ 满足 $x\equiv1 \pmod 4$，

$12k+7, 12k+11$ 分别满足 $x\equiv7 \pmod{12}$ 和 $x\equiv5 \pmod 6$.

2. 最后 3 位数字为 049.

3. 7.

4. 提示：利用欧拉定理可得末位数字为 3.

5. $5\,460=4\times3\times5\times7\times13$，所以，若正整数 a, b 与 5 460 互素，则 a, b 与 4，3，5，7，13 均互素.

首先由 a, b 均与 4 互素，且 $\varphi(4)=2$ 可知：$a^2\equiv1\equiv b^2 \pmod 4$，所以 $a^{12}\equiv b^{12} \pmod 4$；

其次，由于 3，5，7，13 均为素数，根据费马小定理可得：

$a^2\equiv b^2 \pmod 3$，所以，$a^{12}\equiv b^{12} \pmod 3$；

$a^4\equiv b^4 \pmod 5$，所以，$a^{12}\equiv b^{12} \pmod 5$；

$a^6\equiv b^6 \pmod 7$，所以，$a^{12}\equiv b^{12} \pmod 7$；

$a^{12}\equiv b^{12} \pmod{13}$；

也即 4,3,5,7,13 均能整除 $a^{12}-b^{12}$,又由于这 5 个数互素,所以,5 460 | $(a^{12}-b^{12})$,即 $a^{12}-b^{12}\equiv 0 \pmod{5\ 460}$.

B组

1. 根据费马小定理:$a^n\equiv 1 \pmod{n+1}$,$b^n\equiv 1 \pmod{n+1}$,所以,$a^n\equiv b^n \pmod{n+1}$,即$(n+1) \mid (a^n-b^n)$.

2. $a^{2^3}=a^8$. 设 $a=7m+a_1$,其中 m 和 a_1 都是非负整数且 $a_1\leqslant 6$. 当 $a_1=0$ 时,有 $7\mid a$,而得到$7\mid a^8$. 故 a^8 天后还是星期天. 现在我们假定 $1\leqslant a_1\leqslant 6$,由 $a=7m+a_1$ 得到 $a\equiv a_1 \pmod 7$,因此有 $a^8\equiv a_1^8 \pmod 7$. 由于 a_1 是一个不大于 6 的正整数,故有$(a_1,7)=1$. 因为 7 为一个素数,所以 $a_1^6\equiv 1 \pmod 7$. 因此,$a_1^8\equiv a_1^2 \pmod 7$. 由下表可知,当 $a_1=1$ 或 6 时,a^8 天后是星期一;当 $a_1=2$ 或 5 时,a^8 天后是星期四;当 $a_1=3$ 或 4 时,a^8 天后是星期二.

a_1	1	2	3	4	5	6
a^2	1	4	9	16	25	36
余数	1	4	2	2	4	1
星期	星期一	星期四	星期二	星期二	星期四	星期一

3. 提示:若不然,则存在素数 $p\neq 3$,使得 $8p^2+1$ 也为素数,则由费马小定理可知:$p^2\equiv 1 \pmod 3$,且$(8p^2+1)^2\equiv 1 \pmod 3$.

但当 $p^2\equiv 1 \pmod 3$时,$(8p^2+1)^2\equiv 64+16+1 \pmod 3\equiv 0 \pmod 3$,矛盾.

P58 练习

1. (1)$x_0=6$,$y_0=1$;

(2)因为$(4,12)=4\nmid 2$,所以无解.

2. $x=2$ 不是同余方程的解,$x=1$ 是同余方程的解.

P61 练习

1. 59.

2. $x\equiv 37 \pmod{105}$.

P62 习题 3—3

A组

1. $x\equiv 153 \pmod{35}$.

2. (1)$x_0=4$,$y_0=1$;

(2)$x_0=4$,$y_0=9$.

3. $x\equiv 265 \pmod{42}$.

4. $x\equiv 394 \pmod{1\ 155}$.

5. $x\equiv 9\ 714 \pmod{2\ 431}$,故所求四位数为 2 421.

B组

1. 提示:化为同解方程组的问题. 满足要求的 4 个相邻的整数有无穷多组,它们是

$29\ 348+44\ 100t, 29\ 349+44\ 100t,\ 29\ 350+44\ 100t,\ 29\ 351+44\ 100t,$

$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$

最小的这样的 4 个相邻正整数是：29 348，29 349，29 350，29 351.

2. $x\equiv -29 \pmod{120}$.

P63 复习题三

1. $6\equiv 2 \pmod 4$，$10\equiv 6 \pmod 4$，而 $60\equiv 0 \pmod 4$.

2. 1 234，8 467，3 864，13 467 不能同时被 7 和 13 整除；728 能同时被 7 和 13 整除.

3. (1)正确；(2)错误；(3)错误；(4)正确.

4. (1)3mod 11；(2)0mod 13；(3)0mod 14.

5. $\varphi(18)=6, \varphi(22)=10, \varphi(23)=22, \varphi(40)=16, \varphi(43)=42$.

6. (1)有解. $x_0=-2, y_0=1$；

   (2)无解；

   (3)有解. $x_0=-8, y_0=-2$.

7. (1)$x\equiv 1\ 160 \pmod{273}$；

   (2)$x\equiv 25\ 626 \pmod{7\ 735}$.

8. 满足所有条件的所有正整数为：

905，1 906，2 907，3 908，4 909，5 910，6 911，7 912，8 913，9 914.

{
  "filename": "MTI3OTUzMzQuemlw",
  "filename_decoded": "12795334.zip",
  "filesize": 5092511,
  "md5": "9595061acc8f4b06b4bddf50afc97ccb",
  "header_md5": "aa554a4a39edac5be85070c3f5933fb1",
  "sha1": "1bbe3112ff64d76fb08036a5e96f6311b7ce2856",
  "sha256": "79b6be6aea9b6b2af4361facb08a452227561a1d1fb77a7235e632aebd796d49",
  "crc32": 3038072982,
  "zip_password": "52gv",
  "uncompressed_size": 5977112,
  "pdg_dir_name": "12795334",
  "pdg_main_pages_found": 41,
  "pdg_main_pages_max": 41,
  "total_pages": 48,
  "total_pixels": 373451852,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}