普通高中课程标准实验教科书

数学 2（必修）

SHUXUE

教师教学用书

湖北教育出版社数学教材编写组 编著

（鄂）新登字 02 号

责任编辑 张 琴
装帧设计 牛 红

普通高中课程标准实验教科书
数学 2（必修）
教师教学用书
湖北教育出版社数学教材编写组 编著
*
湖北教育出版社出版
（武汉市青年路 277 号 邮编：430015）
网址：http://www.hbedup.com
新华书店发行
湖北恒泰印务有限公司印刷
（430223・武汉市江夏庙山开发区汤逊湖工业园）
*
787 毫米×1092 毫米 16 开本 4.25 印张 100 000 字
2005 年 12 月第 1 版 2005 年 12 月第 1 次印刷
ISBN 7—5351—4345—8/G・3617
定价：6.80 元
如印刷、装订影响阅读，承印厂为你调换

ISBN 7-5351-4345-8
9 787535 143457

说　　明

为了配合湖北教育出版社出版的《高级中学课程标准实验教科书·数学》的教学实践，我们编写了这套教师用书.

编写教师用书的目的在于，为教师选取素材提供资源，为设计教学提供参考，也为教师处理教学问题提供服务，帮助老师们在充分考虑数学学科特点和高中生心理特点的前提下，运用多种教学方法和手段，实现课程目标.

编写教师用书的目的也在于，与老师们沟通，呈现我们将课程标准转化为教材的心路历程；交流编写意图，特别是在贯彻基本理念、处理某些矛盾时的所思所为，从而对教科书的指导思想和主要特点形成共识，促使教师创造性地使用教材.

编写教师用书的目的还在于，以教科书为载体，从教学的基本问题出发，和老师们一起，共同领会课程标准的基本精神，立足于以人为本，发展和完善人的高度，构建现代理念下的课堂教学.

本套教师用书一般以教科书的章为单元编写，每章由教育价值、教学目标、教材结构、课时分配、内容分析、相关资源、评价建议和习题解答八部分构成.

教育价值：是课程目标在本章的具体化，也是课程设计中确定本章为教学内容的理由.

教学目标：是本章要达到的基本目标，它比课程标准中《内容与要求》要具体些.

教材结构：主要介绍三个方面：知识如何定位，教材怎样展开，有何特点.

课时分配：对每一小节所需的教学课时数作了大致的估计.

内容分析：一般按章头语、各大节逐次展开. 每大节包括三个项目：内容概述及基本要求、重难点分析和教学建议. 其中教学建议是主体，阐述教学中应该强调什么，注意什么，例题的功能及其处理. 除此之外，还涉及到旁批、交流话题、信息技术链接及教科书中课件符号标识处的教学思考等.

相关资源：在于展示本章内容的知识背景，为教学提供素材，包括重要结论的推理、证明与拓展.

评价建议：回答评价什么，如何评价等问题，并提供必要的参考案例.

习题解答：不仅包括练习、习题、复习题等基本题型的参考答案，还就《阅读与讨论》中的讨论题、《思考与实践》中的问题给出了可供参考的解决方案.

我们希望通过上述栏目的设置，既有助于解决教学设计、教学实施中的主要问题，满足教学的基本需要，又能拓展教师的视野，提升数学教学的境界.

诚然，有些想法虽然很好，却是我们力所不及的. 比如评价建议，又比如教学目标中的情感目标，如何落实和实践还有待于我们共同去研究和探索

我们的课程改革，从理念、内容到实施，与过去相比都有较大的变化. 要实现课程改革的目标，教师是关键. 教师不仅是课程的实施者，而且也是课程研究、建设和资源开发的重要力量. 我们殷切地希望各位老师能为这套教师用书建言，更为教科书的完善献力，使它们更加有利于教师创造性地进行教学，更加有利于学生主动地学习和发展.

本套教师用书由湖北教育出版社数学教材编写组编写，主编齐民友，副主编裴光亚，徐学文，郭熙汉. 本册主要编者是常绪珠，刘运新.

目　　录

第1章　立体几何初步

一、教育价值

本章从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形，再以长方体为载体，直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系. 这种从感性逐步上升到理性的认知过程与学习活动，符合认识新事物的规律. 有助于发展学生把握空间与图形的能力，使学生更好地认识和理解人类生存的空间；有助于发展学生的直觉能力，培养学生的创新精神；有助于发展学生推理论证能力、合情推理能力、运用图形语言表述与交流能力.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)在观察实物模型及大量图形的基础上，认识空间几何体的结构特征，并能应用这些特征描述现实生活中简单物体的结构.

(2)掌握斜二测画直观图的方法. 通过观察平行投影、中心投影以及几何直观图，了解平面上表示空间图形的不同方法；能画出简单几何体的三视图；能识别三视图所表示的立体模型；会使用材料(如纸板、橡皮泥)制作模型；会用斜二测画法画出它们的直观图.

(3)掌握平面的基本性质，会画图表示平面.

(4)借助长方体模型，直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系.

(5)了解空间两条直线的位置关系，能画出空间两条直线的各种位置关系的图形；通过异面直线的判定，进一步熟悉反证法.

(6)了解空间直线和平面的位置关系，能画出空间直线和平面的各种位置关系的图形；掌握直线和平面平行的判定定理和性质定理；掌握直线和平面垂直的判定定理和性质定理.

(7)了解两个平面的位置关系，能画出两个平面的各种位置关系；掌握两个平面平行的判定定理和性质定理；掌握两个平面垂直的判定定理和性质定理.

(8)会用数学符号表示点、线、面的各种位置关系和性质.

(9)了解柱、锥、台、球的概念及表面积与体积的计算公式或计算方法.

(10)通过本章教学，培养和发展学生的直觉思维能力，合情推理与逻辑论证能力、空间想象能力、运用图形语言与符号语言表达与交流能力.

2. 过程与方法

立体几何的学习是以现实三维空间为背景，让学生经历“直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算”四个层次的认知过程.

(1)经历直观感知、操作确认，建立柱、锥、台、球的基本概念，抽象出这些空间几何体的基本属性.

(2)经历直观感知、操作确认，直观地认识和理解空间点、线、面的位置关系，抽象出点、线、

面位置关系的定义，了解平面的基本性质.

(3)经历直观感知、操作确认，归纳直线与平面、平面与平面平行或垂直的判定定理和性质定理.

在学生亲身经历了直观感知与操作确认的过程之后，才能对所学几何知识形成更深刻的印象，为下一步的思辨论证、度量计算打下坚实的基础.

3. 情感、态度与价值观

从对空间几何体的整体观察入手，认识空间图形，再以长方体为载体，认识和理解空间点、线、面的位置关系. 这种将几何知识生活化地体现出来的方式，能使学生产生亲近感，能进一步提高学生的学习兴趣；而且大量知识的获取是学生们亲身经历了直观感知、操作确认的结果，这样就能增强学生的成就感，使他们摒弃对几何学习的畏惧心理，进一步提高学生的学习信心.

通过自主探索、动手实践、合作交流等形式多样的学习活动有助于发挥学生学习的主动性，并能让学生切身体验数学发现与创造历程. 进一步激发他们的学习热情，调动他们学习的积极性，发展他们的创新精神；贴近生活的实例引入. 学生参与的实习作业与实践活动，能使学生认识到立体几何与我们生存空间的关联，从中体验到立体几何的应用价值，能进一步发展他们的几何应用意识.

三、教材结构

本章知识定位在"培养和发展学生的空间想象能力、推理论证能力、运用图形语言进行交流的能力以及几何直观能力"上. 因此，本章内容的设计遵循从整体到局部、具体到抽象的原则，能过"直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算"四种方法认识和理解空间图形及其性质.

在章头语中，以我们生活的现实空间为背景，用两个实例阐述了本章内容的意义与价值. 本章共分三节：

1.1 节(空间几何体)　借助丰富的实物模型或计算机软件所呈现的空间几何体，通过对这些模型的整体观察，帮助学生认识其结构特征，运用这些特征描述现实生活中的一些简单物体的结构. 学习在平面上用斜二测画法画出空间几何体的直观图；巩固和提高义务教育阶段有关三视图的学习和理解，帮助学生通过观察平行投影与中心投影画出的视图与直观图，了解平面上表示空间图形的不同方法.

1.2 节(空间直线与平面)　从现实生活中所常见的平面的实例抽象出平面的概念. 并通过生活中一些常见的现象，使学生能直观地感知并确认平面的基本性质，了解一些可以作为推理依据的公理和定理. 在此基础上，以长方体为载体，直观地认识空间点、线、面的位置关系，抽象出空间点、线、面位置关系的定义. 以这些定义、公理、定理为出发点，通过实例直观感知、操作确认、思辨论证，认识和理解空间中线面平行和垂直的有关性质和判定.

1.3 节(棱柱、棱锥、棱台、球的表面积和体积)　在学生已具备了一定的立体几何知识之后，再回到空间几何体中重新审视、观察棱柱、棱锥的几何性质. 抽象出棱柱和棱锥的定义. 并通过实验操作，确认柱、锥、台、球的体积计算公式和表面积的计算公式.

四、课时分配

本章共 18 个课时，具体分配如下(仅供参考)：

1.1　空间几何体

1.1.1　多面体和旋转体　　约 1 课时

五、内容分析

章头语

根据学生已有的生活经验及常见的大量的空间问题中，列举两个实例，并以此为线索，阐述立体几何的内容以及学习立体几何的意义. 让学生明确自己学习的任务与作用、目的与要求. 从而滋生出学习立体几何的欲望和兴趣.

1.1　空间几何体

1. 内容概述及基本要求

本节从学生已经学习过的长方体、正方体、直棱柱、圆柱、圆锥和球这些空间几何体出发，把学生的视线从这些抽象的几何体引入到与我们生活密切相关的空间物体上来，如金字塔、救灾帐篷、矿物结晶、蒙古包、足球以及微观世界里的分子结构等. 这些几何体大致分为两类：一类是由平面多边形围成的，如长方体、正方体、棱柱等. 它们统称为多面体；另一类则不完全是由平面多边形围成的，有些面是曲面. 如圆柱、圆锥、球，它们的曲面都是由一些线段或半圆绕轴旋转而得到的，我们称之为旋转体.

能在平面上画出反映空间几何体的几何特征的图形，是我们研究空间几何体所必需的技能. 本节介绍了用斜二测画法画直观图的方法，介绍了常用的投影方法以及用三视图表示物体的方法.

用斜二测法画直棱柱的直观图包括两个主要步骤：

(1)画水平放置的平面多边形(即直棱柱的底面)；

(2)画直棱柱的侧棱和上底面.

平行投影与中心投影能够在平面上反映出空间几何体的某些特征与数量关系，在义务教育阶段学习的三视图就是用投影原理画出的. 教材通过一个奖杯的三视图画出它的直观图的例子，巩固和提高对义务教育阶段所学的三视图的理解，学会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

在本节的学习中，学生要通过观察大量的空间实物认识空间图形的结构特征，理解并掌握多面体与旋转体的概念；了解视图与三视图的概念，会用斜二测画法画直观图，学会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

2. 重难点分析

本节的重点：是认识空间几何体的结构特征，了解多面体与旋转体的定义及符号表示；会用斜二测法画直观图；会在三视图、直观图和实物之间进行转换.

本节的难点：空间概念的初步形成和三视图与实物之间的转换.

3. 教学建议

以往的立体几何课程与教学特别注重形式化，新的课程标准则强调知识发生、发展的过程和实际应用. 因此，在教学中，教师应突出几何的本质，引导学生经历直观感知、操作确认、思辨论证、度量计算等探索与研究几何的过程.

在本节教学中，要尽可能多地向学生展示空间几何体模型，利用多媒体等现代教学手段演示大量空间几何体图形，供学生观察、研究. 在他们充分经历了直观感知的基础上，确认多面体的共同属性，抽象出多面体的定义；同样利用实物或多媒体演示旋转体的形成过程，感知并确认旋转体的共同属性，抽象出旋转体的定义.

在学生观察空间图形的同时，教师要适时地指导他们利用牙签、橡皮泥、纸板等制作各种几何模型. 让他们在自制模型的过程中，亲身经历图形与实物间的转换，加深感性认识，建立空间概念，提高把握空间和图形的能力、几何直观能力及空间想象能力.

在讲正六棱柱直观图的画法时，关键是画好处于水平位置的底面的直观图. 教学时，需要学生随着老师的示范一起作图，然后再独立地另作一图. 巩固学习成果. 同时要向学生说明平面上表示空间图形的方式是多样的，可以借助平行投影和中心投影画出的视图与直观图，让学生观察. 还要引导学生回顾义务教育阶段学习的三视图也是一种方法. 教材中通过一个奖杯的三视图画出其直观图，一方面巩固所学的三视图，另一方面要求学生学会在三视图、直观图和实物之间相互转换.（奖杯顶上的球并非主体，而用斜二测画法画球的直观图不仅困难，而且所画的球很难看，因而奖杯上的球的直观图的画法进行了模糊处理，并未严格按斜二测法画图.）

图形语言和符号语言是进行数学表达与交流的重要工具，从一开始就要严格要求和规范. 逐步培养学生运用符号语言和图形语言表达和交流的能力.

1.2 空间直线与平面

1. 内容概述及基本要求

平面是现实世界存在着的客观事物的数学抽象. 教材通过桌面、墙面、平静的水面这些具备平面形象的实物去想象几何中理想的平面概念. 平面和点、直线一样是几何中不定义的原始概念，在理论上，平面的性质由公理 1～公理 3 反映，这些公理成为本章的理论基础，是进一步推理的出发点和依据.

公理 1 是直线与平面位置关系的基础，它给出了直线在平面内的定义；它利用直线的“直”刻画了平面的“平”；它利用直线的无限延伸性描述了平面的无限伸展性.

公理 2 从点与平面的相互关系上突出了确定平面条件的点的个数与位置. 即一点或二点不能确定平面，三点共线也不能确定平面，四点不一定共面，只有“三个点”且“不共线”时才能确定一个平面. 公理 2 及它的 3 个推论给出了确定平面的方法和途径，是今后判定共面问题和作图的重要依据.

公理 3 是两个平面位置关系的基础，它揭示了两个平面相交的重要特征：两个平面相交，则它们交点的集合一定是一条直线；它提供了确定两个平面交线的方法：两个平面的交线一定是经过已知交点的直线.

3 个公理及 3 个推论还隐含着点、线、面三个基本概念的相互表示，即“直线”是由“点”组成的，“平面”是由“直线”组成的. 正是点、线、面的这种相互表示，使我们能引入集合的符号来表示点、线、面的位置关系. 把直线、平面都看成点的集合，于是点 P 在直线 l 上记作 $P\in l$；直线 l 在平面 α 内记作 $l\subsetneqq\alpha$；平面 α 与平面 β 相交于直线 l 记作 $\alpha\cap\beta=l$. 在读法上仍用几何语言，即“$P\in\alpha$”读作“点 P 在平面 α 内”. 要注意的是直线 a 与直线 b 相交于点 A 时，记作 $a\cap b=A$，而不是记作 $a\cap b=\{A\}$，这点与集合符号略有不同.

借助长方体模型，观察其棱与棱、棱与面、面与面的关系，感知并确认两条直线有平行、相交、异面三种位置关系；直线与平面有直线在平面内、与平面相交和与平面平行三种位置关系；两个平面有相交和平行两种位置关系. 同时掌握这些位置关系的图形画法与符号表示. 注意画两条异面直线时，要有平面衬托才有立体感.

公理 4(平行直线传递性质)与等角定理及其推论是平面几何中的定理和性质在立体几何中的推广. 但是并非所有关于平面图形适用的结论对于立体图形仍然适用. 对此可用反例解释、提醒学生：一般说，要把关于平面图形的结论推广到立体图形上，必须经过证明.

公理 4 与等角定理及其推论揭示了两条直线平行或相交所成的锐角(或直角)在空间中任意平移变换下保持不变的性质，这个不变性既是确立两条异面直线所成角的依据，也是以后研究空间其他角的理论基础. 此性质还为我们提供了一个研究角的重要方法——平行移动法.

关于异面直线的判定，是把它作为共面的反面，用反证法来判断的. 异面直线的概念不能误解为：“分别位于两个不同平面内的两条直线”，而应理解为：“经过这两条直线无法作出一个平面”.

公理 4 用数学符号表示为

$$\left.\begin{array}{l}a/\!/c\\ b/\!/c\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b.$$

等角定理用数学符号表示为

$$\left.\begin{array}{l}AB/\!/A'B'\\ AC/\!/A'C'\end{array}\right\}\Longrightarrow \angle BAC=\angle B'A'C'\text{或}\angle BAC=180^\circ-\angle B'A'C'.$$

直线和平面平行的判定是由两条直线的平行来实现的. 这个定理用符号表示为

$$\left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ b\subseteq\alpha\\ a\nsubseteq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/\alpha.$$

直线和平面平行的性质定理是由线面平行推出两直线平行，它也可以作为两直线平行的判定方法. 这个定理的符号表示为

$$\left.\begin{array}{l}a/\!/\alpha\text{ 且 }\alpha\subseteq\beta\\ \alpha\cap\beta=b\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b.$$

直线和平面垂直是线面相交关系中的特殊情况，章头语所举的第一个例子已经引出了直线和平面垂直的概念. 1.2.5 小节对线面垂直现象进一步观察，挖掘其中的本质属性，抽象出平面和直线垂直的定义.

根据线面垂直的定义来判断线面垂直，在应用上有一定的困难，但定义中所包含的性质则

是我们经常应用的，即

$$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\b\subseteq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp b.$$

直线和平面垂直的判定是由两直线垂直来实现的，这个判定定理用符号表示即为

$$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\a\cap b=A\\a\perp c,b\perp c\end{array}\right\}\Longrightarrow c\perp\alpha.$$

1.2.5 小节例 1 的结论是判定线面垂直的另一个常用的命题.

直线和平面垂直的性质定理是例 1 所述命题的逆命题，这两个互逆命题用符号表示即为

若 $a\perp\alpha$ 且 $a/\!/b$，则 $b\perp\alpha$. $\Longleftrightarrow$ 若 $a\perp\alpha$ 且 $b\perp\alpha$，则 $a/\!/b$.

两个平面平行的判定是由直线和平面平行实现的，用符号表示这个定理即是

$$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha,b\subset\alpha\\a\cap b=A\\a/\!/\beta,b/\!/\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha/\!/\beta.$$

根据平行的两个平面没有公共点这一特征，我们很容易得出如下命题：

$$\left.\begin{array}{l}a\subseteq\alpha\\\alpha/\!/\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha/\!/\beta.$$

它被用来判定线面平行.

两个平面平行的性质定理为我们提供了两直线平行的判定方法，用符号表示即是

$$\left.\begin{array}{l}\alpha/\!/\beta\\\alpha\cap\gamma=a\\\beta\cap\gamma=b\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b.$$

注意到 1.2.6 小节例 1 与例 2 的结论也是互逆的命题，它们常常分别用来断定两个平面平行与直线和平面垂直.用符号表示即是：

若 $a\perp\alpha$. 且 $a\perp\beta$，则 $\alpha/\!/\beta$. $\Longleftrightarrow$ 若 $a\perp\alpha$ 且 $\alpha/\!/\beta$ 且 $a\perp\beta$.

教材中引入二面角的概念是为两个平面垂直的定义作铺垫的.两个平面垂直就是它们的二面角为直二面角.

两个平面垂直的判定除了用定义外，还有判定定理，这个判定定理是以直线与平面垂直为基础的，用符号表示即是

$$\left.\begin{array}{l}a\perp\alpha\\a\subset\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha\perp\beta.$$

两个平面垂直的性质定理是推导直线与平面垂直的一个定理，体现了两种垂直关系之间的密切联系，其符号表示即为

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta,\alpha\cap\beta=l\\a\subset\alpha\\a\perp l\end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp\beta.$$

本节是本章的核心内容，必须要遵循直观感知、操作确认和思辨论证的方法.让学生参与到这些知识的发生、发展与应用的全过程.

数学语言是在数学思维中发生和发展的，又是数学思维不可缺少的工具.在学习中，应要求学生把用文字语言表述的公理、定理、推论转化为图形与符号语言，提高其运用数学语言表

达和交流的能力.

2. 重难点分析

本节的重点:直线、平面之间的位置关系;平面的基本性质(公理 1、2、3);平行传递性质(公理 4);等角定理;直线与平面、平面与平面的平行与垂直的四个判定定理和四个性质定理.

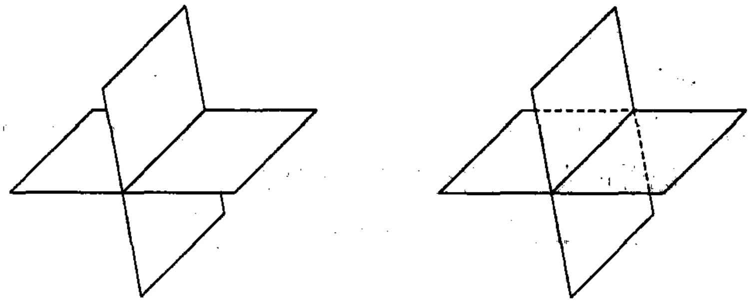
本节的难点:在直观感知中发现、抽象和归纳平面的基本性质.各种位置关系的判定与性质;把文字语言表述的公理、定理与推论转化为符号语言,画出表示各种位置关系的直观图形;运用公理、定理和推论进行逻辑推理.

3. 教学建议

在平面概念的教学中,要引导学生观察具有平面形象的实物,如桌面、黑板面、平静的水面等等,从中感知平面的概念.类比直线的无限延伸性指出平面的无限伸展性,这样有助于学生的理解.

讲平面的表示法时,应说明所画的平行四边形只是平面的部分,必要时可以将它伸展出去,这和平面几何中画短线表示直线是一样的道理.有时根据需要也可以用其他平面图形(如三角形、梯形、圆)表示平面.

画两个相交平面时.要强调必须画出交线,被遮挡部分可以不画或画虚线(如图 1-1).



(1) (2)

图 1-1

以点为元素,直线、平面都是点的集合,用点集认识几何图形,是数学发展的结果,是深入研究几何所必要的.几何中许多符号的规定都是基于将图形视为点集,在介绍有关符号的使用时,结合前面所学的集合知识讲一讲符号来源的背景,可以帮助学生正确使用符号.

平面的基本性质(即教科书中公理 1、公理 2、公理 3)是研究立体几何的理论基础,必须要求学生很好地掌握.在教学时,要努力创设情境.教材中每个公理的导出都有实例作铺垫,教师也可以从学生生活经验出发再挖掘一些实例.通过实例并结合一些直观教具,引导学生观察、思考.从而得到平面的基本性质.在这个过程中,还可以适当提问启发学生的思维.

公理 1 的引入:

提问 1:直线 a 上有一个点在平面 α 内,直线 a 是否全部落在平面 α 内?

提问 2:直线 a 上有两个点在平面 α 内,直线 a 是否全部落在平面 α 内?

公理 2 的引入:

提问 1:经过空间一个已知点可能有几个平面?

提问 2:经过空间两个已知点可能有几个平面? 经过共线的三个点可能有几个平面?

提问 3:经过空间不在同一直线上的三个点可能有几个平面?

公理 3 的引入:

提问 1:两条相交直线可能有几个公共点?

提问 2：一条直线与一个平面可能有几个公共点？

提问 3：两个平面会不会只有一个公共点？

利用平面的基本性质判定共面问题是学生必须掌握的基本技能，1. 2. 1 小节中的例 1 就是共面的判定问题. 其基本方法是首先由某些元素确定一个平面，然后再证明其余元素在这个平面内.

与共面问题相呼应的是共线问题. 1. 2. 1 小节中的例 2 是共线的判定. 其基本方法是判定这些点是两个平面的公共点. 因而这些点都在两个平面的交线上.

异面直线的出现，使两条直线的位置关系从平面拓广到了空间. 根据空间中两直线公共点的情况，辨析空间两条直线位置关系，是研究空间问题的基础. 直线与平面、平面与平面的位置关系都是根据其公共点的情况来辨析的. 在教学中，要以长方体为载体，让学生观察分析，在直观感知的基础上，去发现空间中各种位置关系的本质属性，抽象出它们的定义. 同时，还要掌握各种不同位置关系的符号表示、图形画法，初步形成用符号语言及图形语言表达与交流的能力.

教材一开始就利用长方体中棱与棱、棱与面、面与面的各种不同位置关系设问，引导学生观察与思考，教学中要用好这些问题，帮助学生建立空间概念.

画好空间直观图，对于分析、理解空间问题非常重要. 在线面位置关系的图形画法教学中，教师必须严格示范，让学生掌握各种图形画法要领，并对学生的画图规范进行严格要求. 必要时，还可以画出一些不符合作图要求的图形给学生看，让他们领悟画图的要领. 如图 1-2(b)，异面直线没有平面作衬托，是否还有异面直线的立体感？图 1-2(d) 中平行平面只把两组对边画平行. 另外两组不平行，是否还有平行平面的立体感？

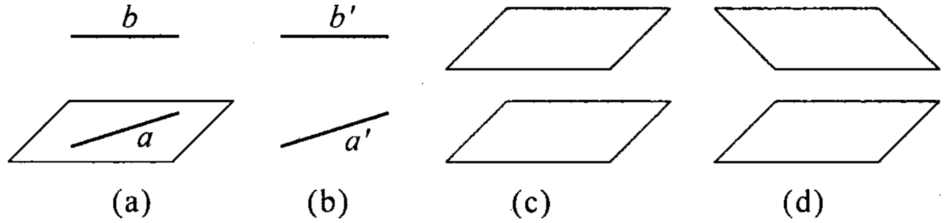


图 1-2

在平行线的传递公理和等角定理的教学中，应回顾平面几何中相应的命题，提出问题：这些在平面几何中成立的命题在立体几何中还成立吗？

对于平行线的传递公理，可以引导学生观察教室墙面与墙面的交线，也可以把一张长方形的纸对折几次，观察比较折痕间的位置关系，从中归纳出这个公理.

对于等角定理，可以把一个角在空间中平行移动，观察移动后的角的两边与平移前角的两边对应的位置关系，提出猜想，再回顾平面几何中证明这个定理的一般思路：由两个角构造两个全等三角形来证明这两个角相等，从而启发学生探究这个定理的证明方法.

要向学生交待清楚：并不是所有平面图形中成立的结论都可以推广到立体图形中. 例如在平面图形中，“垂直于同一条直线的两条直线平行”这个定理在立体图形中就不正确. 因此，平面图形中的结论要推广到立体图形中，必须给出严格证明.

有了以上的公理、定理和推论作为推理的依据，就要开始要求学生进行逻辑推理训练. 在提高学生的直观能力的同时，培养和提高他们的逻辑推理能力. 教材 1. 2. 3 小节的例 1 在本质上是利用公理 4 证明两条直线平行，例 2 是运用反证法证明异面直线. 反证法证题时要注意两点：其一是原命题的结论的反面是什么？倘若其反面有多种情况，应全部列出，不要遗漏，这是关键的一步. 其二是在假设“原命题的反面成立”的前提下，结合已知条件进行推导，断言这个

假设不正确.因为用反证法证题,逻辑思维要求较高,学生在刚开始接触时会感到比较困难,在教学中,应配合示例叙述证明问题的思路,从中归纳出证题步骤,使学生感到有规律可循.再通过适当训练,逐步做到表述正确,层次清晰.

直线与平面、平面与平面的平行、垂直等内容,份量较重,包括判定定理和性质定理共8个定理以及定理的应用.在教学中,既要考虑“定义”、“判定”、“性质”的内在联系,注意体现知识的系统性,又要考虑这些内容在结构形式上的相似性和在认识方式上的一致性(即都要通过让学生经历直观感知、操作确认的认知过程,再归纳出它们的判定与性质等定理).因此,从一开始就要注意对学生的学习能力与思想方法的培养,为后继学习打好基础.

在“直线与平面平行”的判定定理教学中,除了教材中所给的实例外,还可以再多举一些例子,如教室的门在开合过程中,装锁的那扇门的边沿为什么保持与墙面平行?从对实例的观察、思考和分析中,挖掘线面平行的本质属性,归纳出判定定理.然后再要求学生结合自己的生活经验,举例对这个判定定理加以印证.

在直线与平面平行的性质定理的教学中,可以先提出问题:如果直线 a//平面 α,则 α 内任一条直线与 a 有没有公共点? α 内的直线与 a 有怎样的位置关系?然后通过观察实例,直观地意识到平面 α 内的直线与直线 a 一定存在平行关系(也一定存在异面关系).至此再问:怎样才能在 α 内得到 a 的平行线?学生们可以联想到“平行线共面”这一命题,掌握一种在 α 内寻求 a 的平行线的方法:经过 a 的平面 β 与 α 相交,其交线即为 a 的平行线.并从这一过程中归纳出直线与平面平行的性质定理.

1.2.4 小节的例 1 是线面平行的判定定理的运用.可以起到熟悉定理,学会运用定理推理论证的作用;还可以进一步提高用符号语言表述与交流的能力.接下来例 2 是实验操作题,准确操作的过程隐含着逻辑推理,教学中不能忽视了其中的逻辑推理的价值.

在直线和平面垂直的定义的教学中,从给人们以线面垂直感觉的旗杆出发,思考旗杆为什么会留给人们这种垂直感觉?这是因为不论太阳从什么角度照射,旗杆始终与它在地面上的影子垂直.从这一现象中可以进一步推理:旗杆与地面上任一条直线都垂直.这就是直线与平面垂直的本质特征.抓住了这一特征,直线和平面垂直的定义就很自然地产生了.

在讲直线和平面垂直的判定定理时,先从观察直线与平面内的直线垂直开始,提出问题:直线与平面内的一条直线垂直,能判定这条直线与平面垂直吗?直线与平面内的两条或更多直线垂直.能判定直线和平面垂直吗?不能判定的原因何在?如果 α 内不平行的两条直线与 α 外的直线垂直,能判定这个平面与这条直线垂直吗?在这些问题的引导下,再观察一些实例,教材中引用的实例是注射点滴的简易吊瓶架子,若能多举一些实例更好.通过观察实例,思考问题,逐渐归纳直线和平面垂直的判定定理.

1.2.5 小节的例 1 是用直线与平面垂直的定义判定线面垂直.其中蕴含了数学中证明无限个元素具有某种属性的方法.即从中任取一个,只需证明其具有这种属性即可.例 1 的结论本身也可以作为判定线面垂直的依据.

性质定理与例 1 所证的命题关系极大,可以从例 1 的结论引申,并结合观察教室的墙面之间的交线都与地面垂直、这些交线互相平行.直立的电线杆都与水平地面垂直、这些电线杆互相平行等事实归纳直线和平面垂直的性质定理.性质定理的证明用的是反证法,可以让学生进一步熟悉和体会数学中的反证思想,这对于刚刚学习了用反证法证题的学生是有好处的.

1.2.5 小节的例 2 是线面平行与垂直的综合应用问题,这个结论是今后定义平行的直线与平面间的距离的基础.

两个平面平行的判定定理的探索，可以从两个平面平行的基本属性中寻找判定条件. 如果两个平面平行，那么其中一个平面内的所有直线一定与另一平面无公共点，即这些直线与另一平面平行. 反之，如果一个平面内的所有直线与另一平面平行，可推断两个平面平行. 但是实际上难以对一个平面内的所有直线逐一考虑，这与线面垂直的情况很类似. 于是类比直线与平面垂直的判定定理的探求过程，思考如下问题：通过一个平面内的一条直线、两条直线或更多直线与另一平面平行，能判定两个平面平行吗？如果一个平面内有两条相交直线与另一平面平行，能判定这两个平面平行吗？再结合一些实例观察思考，即可得到两个平面平行的判定定理.

两个平面平行的性质定理涉及三个平面(其中一个与另两个平行平面相交)和两条交线，并由两个平面平行得出两条交线平行. 需要向学生指出：两个平面平行时，分别在两个平面内的两条直线不一定平行，它们可能是异面直线，也可能是平行直线.

1.2.6 小节的例 1 可以用来判定两个平面平行，它可与定理“垂直于同一平面的两直线平行”联系起来记忆. 例 2 提供了线面垂直的一种判定方法，也可以作为两个平面平行的一个性质. 它可与定理“一个平面垂直于两条平行线中的一条直线，那么它也垂直于另一条直线”联系起来记忆.

讲完本小节后，可以把两条直线平行、直线与平面平行、两个平面平行的情况进行比较，使学生的知识系统化.

二面角的引入是为引入两个平面垂直的定义服务的，教学中只要求学生了解即可，不必拓宽加深.

两个平面垂直是两个平面相交的特例，在日常生活中，两个平面垂直的例子大量存在，教学时可以结合实例. 加深对概念的理解.

画两个平面垂直、其要领是把竖直平面的一组对边画成与水平平面的横边垂直.

两个平面垂直的判定定理，教材是通过门在开合过程中始终与地平面垂直这一事实挖掘的条件. 教学时，教师还可以与学生共同举一些生活中的实例进行考证，归纳出判定定理.

教材 1.2.7 小节中的例 1，为两个平面垂直的性质定理的提出与证明埋下了伏笔，在讲性质定理时，对例 1 要善加利用.

两个平面垂直的判定定理和性质定理，前者是由线面垂直导出面面垂直，后者是由面面垂直而得线面垂直. 这一方面说明两种垂直之间有密切联系，另一方面说明了两者可以互相转化. 在解决有关问题时，经常用到这种转化.

1.2.7 小节的例 2 证明的是直线与平面的一种结合关系(直线在平面内). 使用了同一法证明. 即为了证明 $a\subsetneqq\alpha$，先作出 $b\subsetneqq\alpha$，然后证明 a、b 是同一条直线. 这种证法只要求学生理解其思路，不必安排较多的用同一法证明的练习题.

在讲完本小节后，可以把两条直线垂直、直线与平面垂直、两个平面垂直这三种垂直情况进行比较，使学生的知识系统化.

1.3　棱柱、棱锥、棱台、球的表面积和体积

1. 内容概述及基本要求

从对空间图形的整体观察入手，在经历了“直观感知、操作确认、思辨论证”的认知过程之后，学生们已经具备了一定的立体几何知识. 本节利用学生已有的知识，再回归到空间几何体中，对棱柱、棱锥、棱台等常用立体图形给出严格定义. 通过实验方法，确认柱、锥、台、球的表面积与体积计算公式或方法.

2. 重难点分析

本节的重点：了解棱柱、棱锥、棱台的定义；通过实验了解棱柱、棱锥、棱台与球的表面积和体积的计算公式及计算方法.

本节的难点：应用表面积与体积计算公式或方法解决有关实际问题.

3. 教学建议

在本节教学中，要让学生观察棱柱、棱锥、棱台的模型、分析、归纳其本质特征，抽象出棱柱、棱锥、棱台的定义，对其中某些小概念的规定的合理性还可以给出证明. 例如棱柱与棱台的高，学生的概念一直是含糊的，现在可以证明教材中所述高的规定是合理的.

1.3.2 小节中的例 1，一方面向学生说明了表面积的一般求法——即逐个求每个面的面积，再将每个面的面积相加，另一方面又展示了棱柱侧面可以展开成一个平面图形后再求其面积，也就是对一些特殊图形可以寻求简化计算的办法.

棱柱、棱锥、球的体积公式是学生们早就熟悉的，在教学时只需通过实验的方法向学生说明公式的合理性. 具体地讲，把一叠 8 开纸放成直棱柱与斜棱柱两种形状说明棱柱的体积只与底面积和高有关；用棱锥容器装满沙子（或水）倒入与它等底等高的棱柱容器内，说明棱锥体积是和它等底等高棱柱体积的三分之一；用排水量推测球的体积公式. 教学时，除教材中介绍的这些方法，教师还可以再补充一些实验方法对公式加于验证. 1.3.3 小节中的例 2 是对上述公式的简单应用. 教学时教师还要注意训练学生利用所学知识解决实际生活中所遇到的有关问题.

在本章教学中，有条件的学校应在教学过程中，恰当运用现代信息技术展示空间图形，为学生掌握和理解空间图形的几何性质（包括证明）提供形象支持，从而提高学生几何直观能力. 教材中标识的鼠标符号，表示此处有教材编写组向教师们提供的相应的教学课件. 教师在教学中也可以根据情况自己制作一些课件.

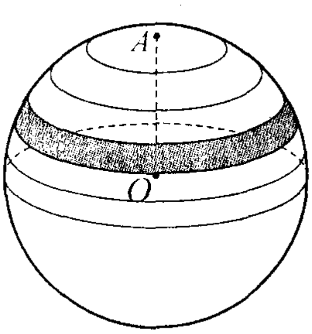
阅读与讨论：球的表面积公式的探索

上一节中所学的柱、锥、台、球的表面积与体积公式，都是用实验的方法得到的，这些公式有没有严格的逻辑证明呢？这里以球的表面积公式的推导向学生说明了几何中的面积与体积公式是可以证明的.

通过球的表面积公式的推导，本阅读材料还向学生们渗透了一个（对学生来说）崭新的数学思想方法——微积分思想.

课后的讨论题，可以作为有兴趣的同学在教师指导下的研究性课题. 下面给出其解答，供教师们指导学生时参考.

用过球心的平面截球 O，球被截面分成大小相等的两个半球，截面⊙O（包含它内部的点）为所得半球的底面.



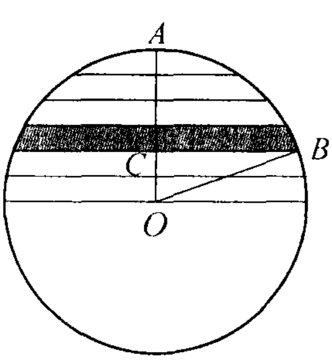


图 1-3

如图 1-3(b)，把球的垂直于底面的半径 OA n 等分，过这些分点，用一组平行于底面的平面把半球切割成 n 层，每一层都是近似于圆柱形状的“小圆片”. 这些“小圆片”的体积之和就是半球的体积.

由于“小圆片”近似于圆柱形状，所以它的体积也近似于圆柱的体积，这样的圆柱的高是“小圆片”的厚度$\frac{R}{n}$，底面是“小圆片”的下底面. 由勾股定理可得第 i 层(由下向上数)“小圆片”的下底面半径

$$r_i=\sqrt{R^2-\left[\frac{R}{n}(i-1)\right]^2},i=1,2,3,\cdots,n.$$

于是，第 i 层“小圆片”的体积

$$V_i\approx\pi r_i^2\cdot\frac{R}{n}=\frac{\pi R^3}{n}\left[1-\left(\frac{i-1}{n}\right)^2\right],i=1,2,3,\cdots,n.$$

半球的体积

$$\begin{aligned}V_{半球}&=V_1+V_2+\cdots+V_i\\&\approx\frac{\pi R^3}{n}\left\{1+(1-\frac{1^2}{n^2})+(1-\frac{2^2}{n^2})+\cdots+\left[1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right]\right\}\\&=\frac{\pi R^3}{n}\left[n-\frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^2}\right]\\&=\frac{\pi R^3}{n}\left[n-\frac{(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)}{6n^2}\right]\\&=\pi R^3\left[1-\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\right]\\&=\pi R^3\left[1-\frac{(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})}{6}\right]\end{aligned}$$

容易看出，当所分层数不断增加，也就是 n 不断变大时，上式所述半球体积的精确度越高. 如果 n 变到无穷大，即可得出 $V_{半球}$ 的准确值. 因为当 n 变到无穷大时，$\frac{1}{n}\to 0$，所以

$$V_{半球}=\pi R^3(1-\frac{1\times 2}{6})=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

于是得球的体积公式为

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

六、相关资源

1. 画法几何简介

本章教材中出现的三视图、用斜二测画法画的直观图、平行投影与中心投影图都是研究在二维图形中表达三维空间的几何形状及定位问题的最基本图形，都是以投影原理为基础的图示方法，这些均属画法几何的范畴.

(1)轴测投影

用平行投影法把物体连同直角坐标系一起投影到投影面上所得的投影图，叫做轴测投影图(简称轴测图)，这种投影画法称为轴测投影法. 如图 1-4 所示即是用平行投影法把一个机械零件和坐标轴投影到投影面 α 上. 在 α 上的投影叫做这个物体的轴测投影，坐标轴的投影叫做

轴测轴，轴测轴之间的夹角叫做轴间角，平面 α 叫做轴测投影面. 由图 1-4 可知，轴测图就是空间物体的直观图. 我们约定，空间坐标轴记作 o_0x_0，o_0y_0，o_0z_0，轴测轴记作 ox，oy，oz.

按轴测投影法，把物体投射到投影面以后，原来平行的线段仍保持平行，并且平行线段的投影的长度与物体实际长度的比不变，我们把这个比值叫做变形系数. 即

$$变形系数=\frac{线段的投影长度}{线段的实际长度}.$$

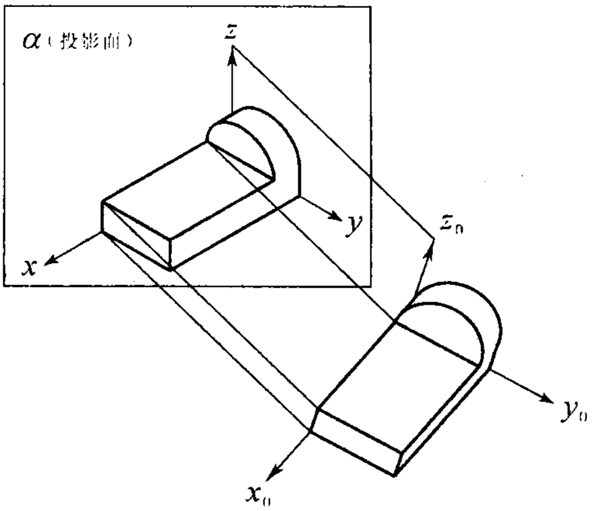


图 1-4

因为实物上平行的线段，它们的变形系数都是相等的，所以定出 ox，oy，oz 轴上的变形系数后，就容易画出直观图.（注意：不平行线段的变形系数一般是不同的.）

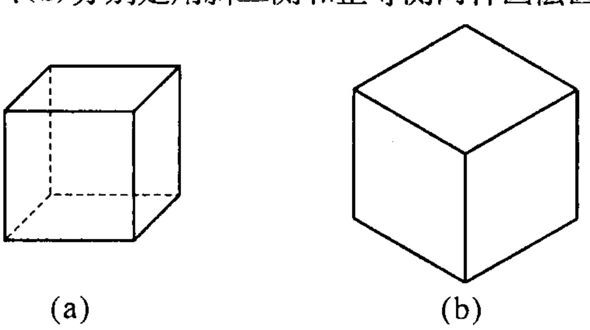
利用轴测投影画空间物体直观图，最常见最简单的就是斜二轴测投影（简称斜二测）和正等轴测投影（简称正等测）.

①斜二轴测投影

选择轴测投影面 α 平行于坐标平面 $x_0o_0z_0$，投影线与投影面斜交，这种投影称为正面斜轴测图，其特点是 ox 与 oz 轴上的变形系数均为 1，且平行于该坐标面的图形的轴测投影反映实形. 我们适当调整射线与投影面的角度，使 oy 轴上的变形系数为 0.5，且与 ox，oz 轴的轴间角为 45°，得到的投影称为斜二轴测投影，简称斜二测. 这就是教材上所讲的直观图的画法.

②正等轴测投影

选择轴测投影面与坐标轴斜交，投影线与投影面垂直，这种投影称为正轴测投影. 我们适当调整坐标轴与投影面的角度，使三个坐标轴与投影面成等角，所得的投影称为正等轴测投影，其特点是轴间角均为 120°，轴测轴上的变形系数都相等（约为 0.82）. 实际画图时，为了方便起见，我们采用简化系数 $k=1$ 来画. 这样画出的图形比实际投影图成比例稍有放大，并不妨碍它的直观性. 图 1-5 中(a)、(b)分别是用斜二测和正等测两种画法画的同一正方体的直观图.



(a) 斜二轴测投影　　(b) 正等轴测投影

图 1-5

画直观图时，应根据要求，选择一种画法，不能两种画法混用.

(2)透视投影

用中心投影法将物体投射到投影面的图形称为透视投影，也称透视图，简称透视.

透视图和轴测图都是用单面投影. 不同之处在于轴测图是用于平行投影画出，而透视图是用中心投影法画出.

与正投影比较，透视图有一个很明显的特点，就是物体距离观察者越近，所得透视投影越

大；反之，距离越远则投影越小. 就象一个人站在铁路上顺着铁道向远处看，会觉得原本等宽的两道铁轨越来越窄. 这种近大远小的现象就是透视现象，它是我们视觉映象的一种特性.

用中心投影法画透视图时，实物上原本平行的线条，在透视图中不再平行，而是越远越靠拢，直至交于一点(这个点称为灭点). 图 1-6 就是一个用中心透影法画出的正方体的透视图.

透视图直观性很好，立体感很强，符合人们的视角映象，但手工作图较繁琐，度量性极差. 因此，透视图广泛被用于工艺美术及宣传广告图样. 在土建工程以及大型设备中，也常用透视图作辅助图样.

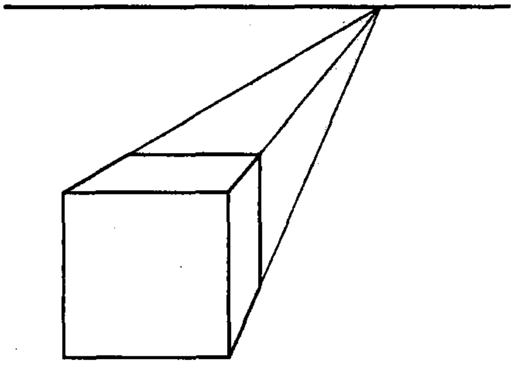


图 1-6

随着计算机图形学的发展，透视图均由计算机显示与绘制，其使用领域将会日益广泛.

2. 相关判定定理的证明

《普通高中数学课程标准》对有关线面平行、垂直的教学，只要求对其中的性质定理给予证明，对相应的判定定理只要求直观感知，操作确认，其证明将在选修系列 2 中用向量的方法给出. 在这里，我们用几何法对这些判定定理加以论证，仅供教师参考.

(1)直线和平面平行的判定定理：如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行.

已知：$a\not\subseteq\alpha$，$b\subseteq\alpha$，$a/\!/b$(如图 1-7).

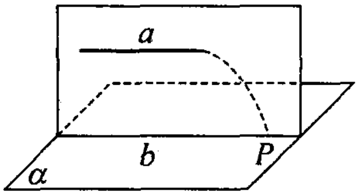


图 1-7

求证：$a/\!/\alpha$.

证明：因为 $a/\!/b$，所以经过 a，b 确定一个平面 β.

因为 $a\not\subseteq\alpha$，而 $a\subseteq\beta$，所以 α、β 是两个不同的平面.

因为 $b\subseteq\alpha$，且 $b\subseteq\beta$. 所以 $\alpha\cap\beta=b$.

下面用反证法证明 a 与 α 没有公共点.

假设 a 与 α 有公共点 P. 则 $P\in\alpha\cap\beta=b$. 即点 P 是 a、b 的公共点，这与 $a/\!/b$ 矛盾.

所以 $a/\!/\alpha$.

(2)直线和平面垂直的判定定理：如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

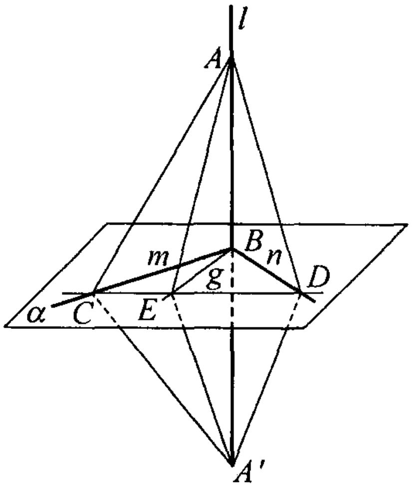


图 1-8

已知：$m\subseteq\alpha$，$n\subseteq\alpha$，$m\cap n=B$，$l\perp m$，$l\perp n$.

求证：$l\perp\alpha$.

证明：设 g 是平面 α 内的任一直线.

①当 l、g 都通过点 B 时(如图 1-8)，在 l 上点 B 的两侧分别取点 A、A'，使 $AB=A'B$，则由已知条件可推出 m、n 都是线 AA' 的垂直平分线.

如果 g 与 m(或 n)重合，那么根据已知 $l\perp m$(或 $l\perp n$)，可以推出 $l\perp g$.

如果 g 与 m、n 都不重合，那么在 α 内作一直线 CD，与直线 m、n、g 分别交于 C、D、E，并连接 AC、$A'C$、AD、$A'D$、AE、$A'E$.

因为 $AC=A'C$，$AD=A'D$，$CD=CD$.

所以 $\triangle ACD\cong\triangle A'CD$，得 $\angle ACE=\angle A'CE$.

进而有 $\triangle ACE\cong\triangle A'CE$，得 $AE=A'E$.

所以 g 是 AA' 的垂直平分线. 于是 $l\perp g$.

②当 l、g 不都通过 B 时，过点 B 作 l'、g'. 使 $l'//l$. $g'//g$.

同理可证：$l'\perp g'$，因而 $l\perp g$.

综上所述. 无论 l、g 是否通过 B. 总有：$l\perp g$，由于 g 是 α 内任一条直线，因而得：$l\perp\alpha$.

(3)两个平面平行的判定定理：如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

已知：$a\subseteq\alpha$，$b\subseteq\alpha$，$a\cap b=P$，$a//\beta$，$b//\beta$.

求证：$\alpha//\beta$.

证明：用反证法证明(如图 1-9).

假设 $\alpha\cap\beta=c$.

因为 $a//\beta$，$a\subseteq\alpha$. 所以 $a//c$.

同理 $b//c$.

所以 $a//b$.

这与题设 $a\cap b=P$ 矛盾.

所以 $\alpha//\beta$.

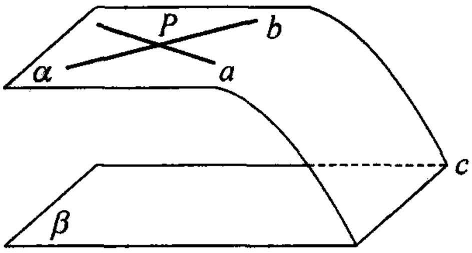


图 1-9

(4)两个平面垂直的判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

已知：$AB\perp\beta$，$AB\subseteq\alpha$. (如图 1-10)

求证：$\alpha\perp\beta$.

证明：设 $\alpha\cap\beta=CD$，则由 $AB\subseteq\alpha$，知 AB、CD 共面.

因为 $AB\perp\beta$，$CD\subseteq\beta$，所以 $AB\perp CD$，垂足为 B.

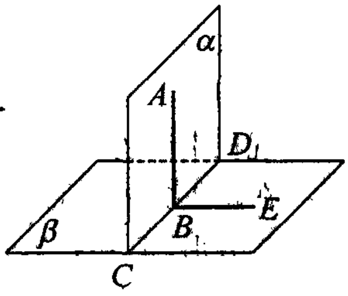


图 1-10

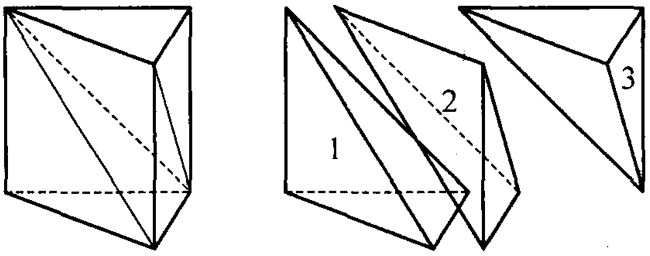
在平面 β 内过点 B 作 $BE\perp CD$. 则 $\angle ABE$ 是二面角 α-CD-β 的平面角. 又 $AB\perp BE$，即二面角 α-CD-β 是直二面角.

所以 $\alpha\perp\beta$.

3. 祖暅原理与祖暅求积法

祖暅(音 gèng)是祖冲之的儿子，祖氏父子都是我国古代著名数学家与天文学家. 祖暅原理的原文是“幂势既同，则积不容异”. “幂”是截面积，“势”是几何体的高，意思是两个同高几何体，如果与底等距离的截面积总相等，那么几何体的体积相等.

根据这一原理，我们知道：底面积相等且高相等的两个柱体体积相等；底面积与高都相等的两个锥体体积相等. 柱体体积可以通过长方体的体积公式推出：$V_{柱体}=S_{底}\cdot h$. 至于锥体的体积，因为三棱锥是由一个三棱柱按如图 1-11 所示分割成三个体积相等的三棱锥而得，因此三棱锥体积是三棱柱体积的三分之一，于是推广得：任意一个锥体体积都是一个底面积和高与之都相等的相应的柱体体积的三分之一. 即锥体的体积公式是：$V_{锥体}=\frac{1}{3}S_{底}\cdot h$.



(a)　　(b)

图 1-11

祖暅推导球体体积公式的方法非常巧妙. 为了便于理解,我们用现代术语介绍如下:

作一个几何体 v_1(如图 1-12):它的底面 $OABC$ 是一边长为 r 的正方形,高 $OD=r$ 且 $OD\perp$ 底面 AC,$\overset{\frown}{DRC}$ 和 $\overset{\frown}{DPA}$ 都是以 O 为圆心,r 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$,且平行于底的任意平面与几何体的截面都是正方形. 记其中一个截面正方形为 $SPQR$,设其边长为 a,$OS=h$. 连接 OR,则有:

$$S_{截面}=a^2=r^2-h^2.$$

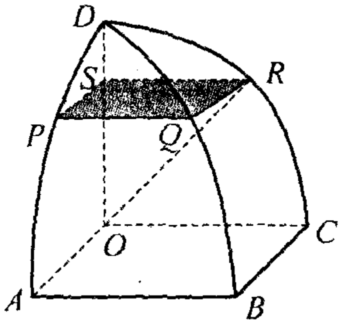


图 1-12

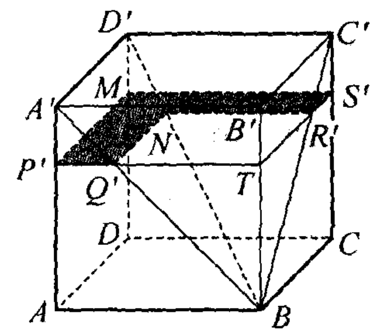


图 1-13

另取一个边长为 r 的正方体 v_2(如图 1-13). 连 BA'、BD'、BC',得一四棱锥 $B\text{-}A'B'C'D'$,记作 v_3. 所以 v_2-v_3 即为正方体 BD' 挖去四棱锥 $B\text{-}A'B'C'D'$ 后剩下的几何体.

现在来证明 $V_1=V_2-V_3$. (V_1,V_2,V_3 记为 v_1,v_2,v_3 的体积.)

在距正方体底面 h 处用一平行于正方体底面的平面去截正方体,则它截正方体 v_2 截面显然是正方形,记为 $P'TS'M$,且 $S_{P'TS'M}=r^2$. 它截四棱锥 v_3 的截面也是正方形,记为 $Q'TR'N$. 由于 $Q'T=TB=h$,故 $S_{Q'TR'N}=h^2$.

于是两正方形面积差即为曲尺形 $P'Q'NR'S'M$ 的面积. 即 $S_{P'Q'NR'S'M}=r^2-h^2$.

比较一下 v_1 与 v_2-v_3 在等高处的截面,发现在任意的高 h 处,它们的截面面积都是 r^2-h^2. 因此它们的体积相等. 即

$$V_1=V_2-V_3.$$

再看以 r 为半径的球. 取它的 $\frac{1}{8}$(即第一卦限)作为 v_4(如图 1-14). 设它的体积为 V_4,在高 h 处的截面面积是以 a 为半径的圆的 $\frac{1}{4}$.

即 $$S_{C''EF}=\frac{\pi}{4}a^2=\frac{\pi}{4}(r^2-h^2).$$

v_4 与 v_1 比较,v_1 在距底面 h 高处的截面面积是 r^2-h^2. 则 V_4 与 V_1 之比应等于截面积之比,有

$$\frac{V_4}{V_1}=\frac{\frac{\pi}{4}(r^2-h^2)}{r^2-h^2}=\frac{\pi}{4}.$$

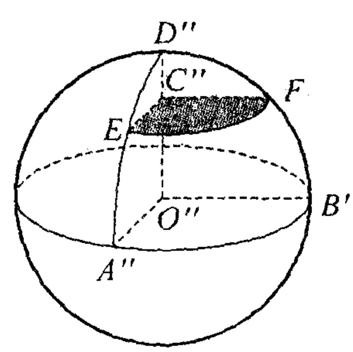


图 1-14

于是 $$V_4=\frac{\pi}{4}V_1=\frac{\pi}{4}(V_2-V_3)=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{3}r^3.$$

这样,整个球的体积

$$V_{球}=8V_4=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

这是何等巧妙、简明而且完美的论证啊!

七、评价建议

1. 学习过程的评价

从对空间物体的整体观察入手，让学生经历直观感知、操作确认的过程，认知空间图形的结构与性质，这一过程主要依赖于学生的生活经验，容易体现学生对数学学习的态度和情感. 要关注学生是否积极主动参与到数学学习的活动之中，是否愿意与他人交流学习体会、合作探究数学问题. 注重评价学生参与数学活动时表现出来的热情、自信、勤奋努力与刻苦钻研的学习态度以及克服困难、坚持不懈的毅力.

2. 知识与技能的评价

要关注学生是否能正确理解教材中所涉及的概念、公理、定理、性质与运算，能否运用数学语言准确表达与交流，要注重评价学生运用所学知识分析问题与解决问题的能力.

3. 能力评价

关注学生在几何探究与数学建模活动中所表现出来的活跃的思维，关注他们是否善于发现和提出问题，并以积极的态度解决问题. 注重评价学生的直觉能力、空间想象能力以及逻辑推理能力.

4. 关注学生成长过程，采用形式多样的评价方式

对于学生的整个学习过程的评价要有记录，既可采用传统的笔试评价方式，也可以通过学生互评，教师综合评价意见. 要尽可能挖掘学生在学习过程中闪耀的亮点，给予鼓励. 要通过合理的评价体系，增强学生学习数学的兴趣和学好数学的自信心，提高学习的积极性.

八、习题解答

练习（第 9 页）

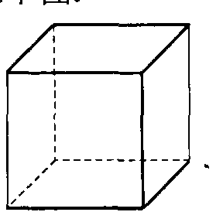
1. 一个多面体至少有 4 个面.

2. 正方体有 6 个面，12 条棱，4 条对角线，8 个顶点.　　3.（略）

4. 直角梯形以它的直角腰所在直线为轴旋转一周所形成的图形是圆台，其侧面展开图是一个扇环.

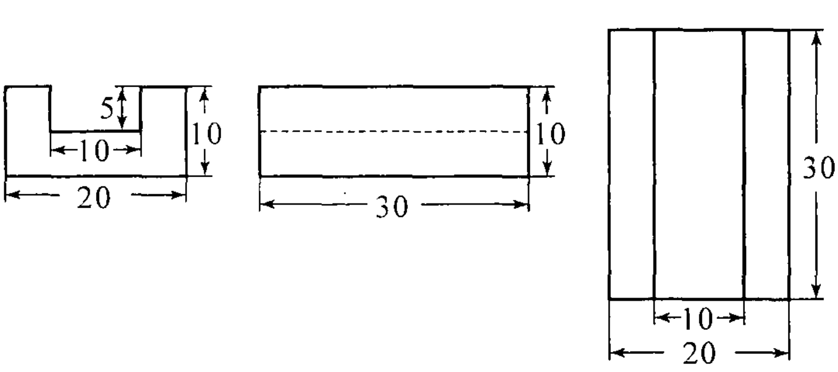
练习（第 14 页）

1. 如下图.



（第 1 题图）

2. 如下图.

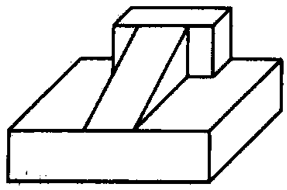


（第 2 题图）

3.（略）

习题 1.1

1. 如下页图所示.　　2.（略）



（第 1 题图）

练习（第 18 页）

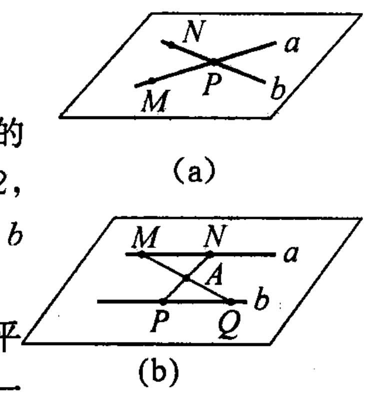
1. 推论 2：经过两条相交直线，有且只有一个平面.

已知：$a\cap b=P$（如右图）.

求证：过直线 a、b，有且只有一个平面.

证明：在直线 a 上任取异于 P 的点 M，在直线 b 上任取异于 P 的点 N，于是有 $P\in a, M\in a, N\notin a$，即 P、M、N 三点不共线. 由公理 2，P、M、N 三点确定一个平面 α. 因为 $P\in\alpha, M\in\alpha$，所以 $a\subsetneqq\alpha$. 同理可知 $b\subsetneqq\alpha$，即平面 α 是经过直线 a、b 的.

因为 P、M 在直线 a 上，P、N 在直线 b 上，所以经过直线 a、b 的平面必经过 P、M、N 三点. 又根据公理 2，经过 P、M、N 的平面只有一个，故经过直线 a 和 b 的平面只有一个.



（第 1 题图）

推论 3：经过两条平行直线有且只有一个平面.

已知：$a/\!/b$（如右图）.

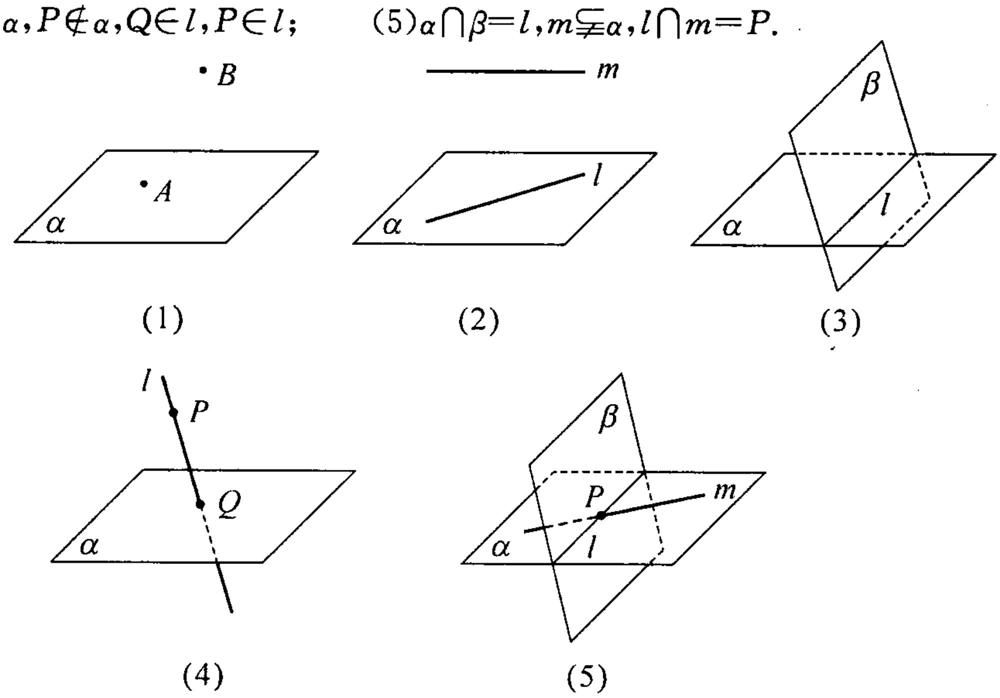
求证：过直线 a、b 有且只有一个平面.

证明：由平行线定义知：a、b 必同在某一平面内，记为 α. 在 a 上任取两点 M、N，在 b 上任取两点 P、Q，令 $MQ\cap PN=A$. 由推论 2 知经过 MQ，PN 的平面有且只有一个，记为 α. 则 M、N、P、Q 均属于 α. 所以 $MN\subsetneqq\alpha$，$PQ\subsetneqq\alpha$. 所以经过两平行直线 a，b 有且只有一个平面.

2. (1) $\in,\in,\in$；　(2) $\in,\in,\in,\in$；　(3) $\notin,\notin,\in$；　(4) B_1B，B_1C_1.

3. (1) $A\in\alpha, B\notin\alpha$；　(2) $l\subsetneqq\alpha, m\not\subset\alpha$；　(3) $\alpha\cap\beta=l$；

(4) $Q\in\alpha, P\notin\alpha, Q\in l, P\in l$；　(5) $\alpha\cap\beta=l, m\subsetneqq\alpha, l\cap m=P$.

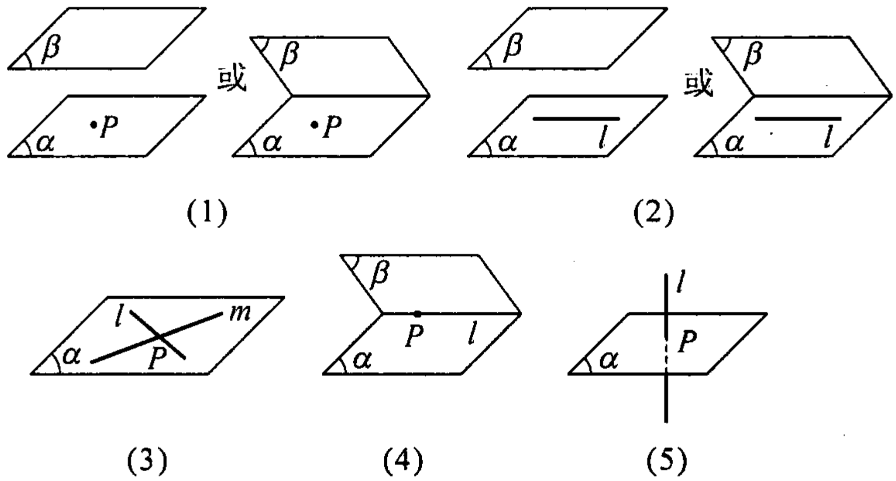


（第 3 题图）

4. (略)

习题 1.2.1

1. 三条腿. 由公理 2 可知,不在同一直线上的三点确定一个平面.
2. 分别用两根细绳连结相对两条腿的底端,看两绳是否相交.
3. (1)$\in$,$\notin$; (2)$\subsetneqq$,$\not\subset$; (3)AC,平面 ABC,平面 BCD.
4. (1)$P\in\alpha$,$P\notin\beta$; (2)$l\subsetneqq\alpha$,$l\not\subset\beta$; (3)$l\cap m=P$;
(4)$\alpha\cap\beta=l$,$P\in l$; (5)$P\in\alpha$,$P\in l$,$l\not\subset\alpha$.

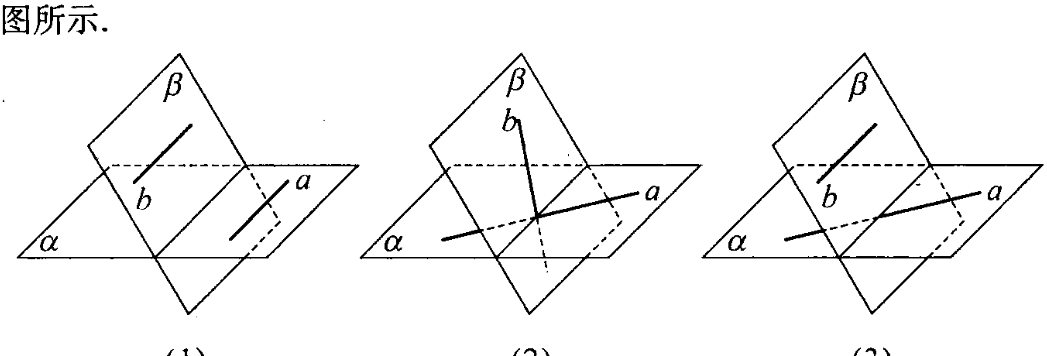


(第 4 题图)

5. (1)C; (2)B; (3)D.
6. 不可能. 若有 3 个点共线,则由公理 2 的推论 1 可知,这 4 点共面.
7. 三角形一定是平面图形,由公理 1 和公理 2 易知;四边形不一定是平面图形,梯形一定是平面图形.
8. 有且仅有一个公共点. 由条件知,它们有一公共点,下面说明公共点的唯一性. 假设此直线与平面有两个或两个以上的公共点,由公理 1 可知,直线上所有的点都在平面内,这与条件矛盾.
9. 在同一平面内. 由公理 2 的推论 3 可知,两平行直线确定一个平面. 由公理 1 可知,第三条直线在此平面内.
10. 在同一平面内. 由公理 2 的推论 1 可知,直线和直线外一点确定一个平面. 由公理 1 可知,另 3 条直线均在此平面内.

练习(第 21 页)

1. 如图所示.



(第 1 题图)

2. (略)

习题 1.2.2

1. (1)D；　(2)D.

2. (1)AB、BC、A_1B_1、B_1C_1；　(2)平面 ABB_1A_1、平面 BCC_1B_1；

(3)平面 $ABCD$、平面 $A_1B_1C_1D_1$；　(4)平面 ADD_1A_1、平面 CDD_1C_1；

(5)平面 BCC_1B_1；　(6)平面 ABB_1A_1、平面 $A_1B_1C_1D_1$、平面 C_1CDD_1、平面 $ABCD$.

练习(第 24 页)

1. 由公理 4 可知.

2. 证明：

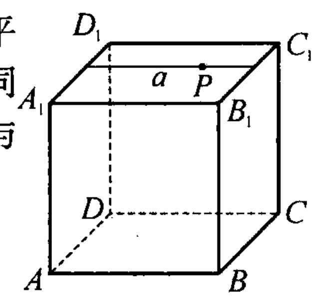
$$\left.\begin{array}{l} EF/\!/BC \Longrightarrow EF/\!/\text{平面 } BCD \\ FG/\!/CD \Longrightarrow FG/\!/\text{平面 } BCD \\ EF\cap FG=F \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{平面 } EFG/\!/\text{平面 } BCD.$$

练习(第 25 页)

1. (1)不一定，它们可能相交，可能异面.

(2)有三种可能的位置关系：相交、平行、异面.

2. 证明：假设 BC_1 与 AC 共面，设为 α，则 $BC_1 \subsetneqq \alpha$，$C\in\alpha$. 而 $BC_1 \subsetneqq$ 平面 BC_1，$C\in$ 平面 BC_1，所以由公理 2 的推论 1 知，平面 BC_1 与平面 α 是同一个平面. 因为 $A\in\alpha$，所以 $A\in BC_1$，产生矛盾. 故假设不成立，即 BC_1 与 AC 是异面直线.



(第 3 题图)

3. 在平面 A_1C_1 内，过 P 作直线 $a/\!/C_1D_1$，由公理 4 可知，$a/\!/CD$.

习题 1.2.3

1. (1)C；　(2)D；　(3)C.

2. (1)√；　(2)×.

3. (1)α；　(2)8；　(3)2.

4. 证明：连结 E_1E、F_1F.

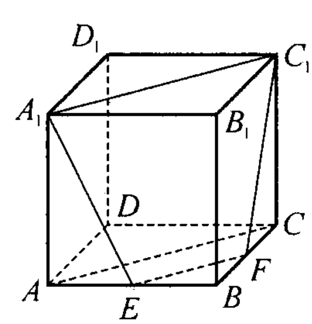
$AE \underline{/\!/} A_1E_1 \Longrightarrow$ 四边形 AEE_1A_1 为平行四边形 $\Longrightarrow E_1E \underline{/\!/} A_1A$，同理可得 $F_1F \underline{/\!/} A_1A$. 所以 $E_1E \underline{/\!/} F_1F$. 从而四边形 E_1EFF_1 为平行四边形，故 $EF \underline{/\!/} E_1F_1$.

5. 证明：假设 b 与 c 不是异面直线，则有 b 与 c 平行或相交，因为 $b\cap c=\phi$，故 $b/\!/c$. 又因为 $c/\!/a$，所以 $a/\!/b$. 这与题设矛盾. 故假设不成立，即 b、c 异面.

6. AC、BD 一定异面. 假设 AC、BD 共面 α，则由 $A\in\alpha$，$B\in\alpha$，知 $AB \subsetneqq \alpha$. 同理有 $CD \subsetneqq \alpha$，即 AB、CD 共面 α，与题设矛盾.

练习(第 28 页)

1. 连结 A_1E、EF、FC_1、C_1A_1，四边形 A_1EFC_1 即为所求.(如右图所示.)



(第 1 题图)

下证 $C_1\in$ 平面 A_1EF.

连结 AC，由 $AE=EB$，$BF=FC$，知 $EF/\!/AC$. 又 $AC/\!/A_1C_1$，知 $EF/\!/A_1C_1$，故 $C_1\in$ 平面 A_1EF.

2. $a/\!/c$，$b/\!/c$. 下证 $a/\!/c$($b/\!/c$ 同理).

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\parallel b\\ a\not\subseteq\alpha\\ b\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow a\parallel\alpha\\ \qquad\qquad a\subsetneqq r\\ \qquad\qquad \alpha\cap r=c\end{array}\right\}\Longrightarrow a\parallel c.$$

习题 1.2.4

1. (1)×；　(2)×；　(3)×；　(4)√.

2. 证明：$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}CG=GD\\ CF=FB\end{array}\right\}\Longrightarrow FG\parallel BD\\ \qquad\qquad FG\subsetneqq\text{平面 }EFG\\ \qquad\qquad BD\not\subseteq\text{平面 }EFG\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{平面 }EFG\parallel BD.$

同理可证，平面 $EFG\parallel AC$.

3. 在 a 上任取一点 P，过 P 作 $b'\parallel b$，则由 a、b' 确定的平面即为所求平面 α.

4. 证明：连结 CD.

$AC\parallel BD\Longrightarrow AC$、$BD$ 确定一个平面 β.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}C\in\beta\\ D\in\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow CD\subsetneqq\beta\\ \left.\begin{array}{l}C\in\alpha\\ D\in\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow CD\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha\cap\beta=CD\\ \qquad\qquad\qquad A\in\beta,B\in\beta\Longrightarrow AB\subsetneqq\beta\\ \qquad\qquad\qquad AB\parallel\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}AB\parallel CD\\ AC\parallel BD\end{array}\right\}\Longrightarrow AC=BD.$$

5. 证明：

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\beta\cap\gamma=AB\Longrightarrow AB\subsetneqq\beta\\ \alpha\cap\beta=CD\\ AB\parallel\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow AB\parallel CD\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{同理 }AB\parallel EF\end{array}\right\}\Longrightarrow CD\parallel EF.$$

6. 证明：假设 b 不与 α 相交，则有 $b\parallel\alpha$ 或 $b\subsetneqq\alpha$.

若 $b\subsetneqq\alpha$，由 $a\parallel b$，得 $a\parallel\alpha$，或 $a\subsetneqq\alpha$，皆与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾；

若 $b\parallel\alpha$，过 b 作平面 β，使 $\beta\cap\alpha=c$，则 $b\parallel c$. 由 $a\parallel b$，得 $a\parallel c$. 因为 $c\subsetneqq\alpha$，所以有 $a\parallel\alpha$，或 $a\subsetneqq\alpha$，皆与 $a\cap\alpha=A$ 矛盾.

综上可知，假设不成立.

故 b 与 α 相交.

练习(第 31 页)

1. (1)√；　(2)×；　(3)√；　(4)√.

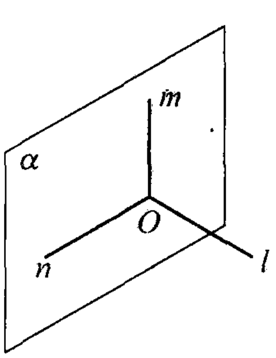
2. 已知：m,n,l 交于一点 O，$m\perp n$，$n\perp l$，$l\perp m$.

求证：l 与 m、n 所在的平面垂直.

证明：$m\perp n=O\Longrightarrow m$、$n$ 确定一个平面.

令 m、n 确定的平面为 α，则

$$\left.\begin{array}{l}m\subsetneqq\alpha\\ n\subsetneqq\alpha\\ m\cap n=O\\ l\perp m\\ l\perp n\end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp\alpha.$$



(第 2 题图)

3. 在旗杆顶点 C 处系两根 10m 长的绳子，拉紧绳子并把它们的两个下端固定在地面上 A、B 两点（与旗杆脚 O 不在同一直线上）. 如果测得 $AO=BO=6\text{m}$，则旗杆就和地面垂直.

$$AO=6,CO=8,AC=10 \Longrightarrow AO^2+CO^2=AC^2 \Longrightarrow AO\perp CO.$$

$$\left.\begin{array}{l} AO\perp CO,\text{同理 } BO\perp CO \\ AO\text{ 与 }BO\text{ 不共线且交于点 }O \end{array}\right\} \Longrightarrow CO\perp\text{地平面 } ABO.$$

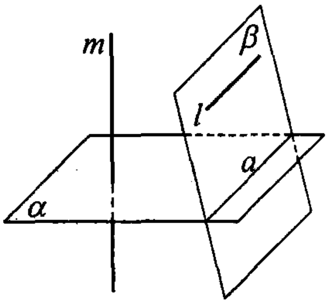
4. 垂线段最短. 连结 QR，可知 $PQ\perp QR$，在 $\mathrm{Rt}\triangle PQR$ 中，$PQ<PR$，可得结论.

5. 让横杠的两条“腿”垂直于地面且等高即可.

习题 1.2.5

1. 证明：过直线 l 作平面 β，使 $\beta\cap\alpha=a$，则

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} l/\!/\alpha \\ l\subsetneqq\beta \\ \beta\cap\alpha=a \end{array}\right\} \Longrightarrow l/\!/a \\ \left.\begin{array}{l} m\perp\alpha \\ a\subsetneqq\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow m\perp a \end{array}\right\} \Longrightarrow l\perp m.$$



（第 1 题图）

2. $AD\perp\alpha$，证明如下.

$$\left.\begin{array}{l} BD\subsetneqq\alpha,AD\perp BD \\ CD\subsetneqq\alpha,AD\perp CD \\ BD\cap CD=D \end{array}\right\} \Longrightarrow AD\perp\alpha.$$

3. $AB\perp CD$，证明如下.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{r} \alpha\cap\beta=AB\Longrightarrow AB\subsetneqq\alpha \\ PC\perp\alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow PC\perp AB \\ \text{同理 } PD\perp AB \\ PC\cap PD=P \end{array}\right\} \Longrightarrow AB\perp\text{面 } PCD \\ CD\subsetneqq\text{面 } PCD \end{array}\right\} \Longrightarrow AB\perp CD.$$

4. $$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} BC\perp AB \\ BD\perp AB \\ BC\cap BD=B \end{array}\right\} \Longrightarrow AB\perp\text{平面 } BCD\Longrightarrow AB\perp\alpha \\ BE\subsetneqq\alpha \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow AB\perp BE\Longrightarrow\triangle ABE\text{ 为直角三角形.}$$

所以，$AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{74}(\text{cm})$.

5. 连结 C_1E，在平面 A_1C_1 内，过 E 作直线 $l\perp C_1E$，则直线 l 即为所求.

练习（第 34 页）

1. (1)×；　(2)×；　(3)√；　(4)√.

2. 平面 $ABC/\!/$平面 $A_1B_1C_1$，证明如下.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle1+\angle2=180^\circ\Longrightarrow AC/\!/A_1C_1 \\ A_1C_1\subsetneqq\text{平面 } A_1B_1C_1 \\ AC\nsubseteq\text{平面 } A_1B_1C_1 \end{array}\right\} \Longrightarrow AC/\!/\text{平面 } A_1B_1C_1 \\ \text{同理 } BC/\!/\text{平面 } A_1B_1C_1 \\ AC\cap BC=C \\ AC\subsetneqq\text{平面 } ABC \\ BC\subsetneqq\text{平面 } ABC \end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\text{平面 } ABC/\!/\text{平面 } A_1B_1C_1.$$

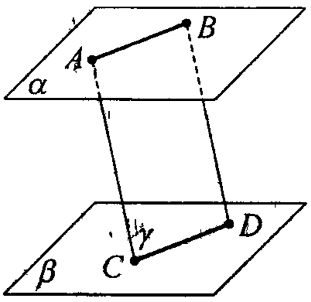
3. 已知：$\alpha/\!/\beta, A\in\alpha, B\in\alpha, C\in\beta, D\in\beta, AC/\!/BD$.

求证：$AC=BD$.

证明：连结 AB、CD.

$AC/\!/BD\Longrightarrow AC$、$BD$ 确定一个平面 γ.

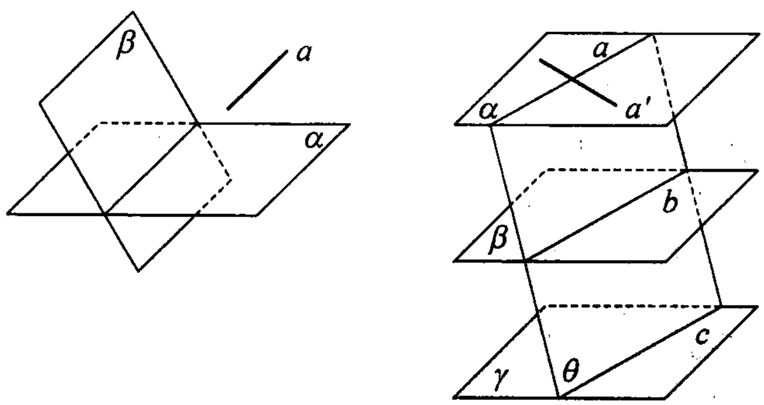
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}A\in\alpha,B\in\alpha\\ A\in\gamma,B\in\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha\cap\gamma=AB\\ \text{同理 }\beta\cap\gamma=CD\\ \alpha/\!/\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}AB/\!/CD\\ AC/\!/BD\end{array}\right\}\Longrightarrow AC=BD.$$



（第 3 题图）

习题 1.2.6

1. (1)假. 反例如图(1)所示：$\alpha/\!/a, \beta/\!/a$，但 $\alpha\not/\!/\beta$.



(1) (2)

（第 1 题图）

(2)真. 证明如下.

已知：$\alpha/\!/\gamma, \beta/\!/\gamma$.

求证：$\alpha/\!/\beta$.

证明：设 a, a' 为 α 内的两相交直线. 过 a 作平面 θ，设 $\theta\cap\beta=b, \theta\cap\gamma=c$.（如图(2)所示.）

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\theta\cap\alpha=a\\ \theta\cap\gamma=c\\ \alpha/\!/\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/c\\ \text{同理 } b/\!/c\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b\\ b\subsetneqq\beta\\ a\subsetneqq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/\beta\\ \text{同理 }a'/\!/\beta\\ a\text{ 与 }a'\text{ 相交}\\ a\in\alpha,a'\in\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha/\!/\beta.$$

2. (1)证明：

$$\left.\begin{array}{l}AA'\mathrel{\underline{/\!/}}BB'\Longrightarrow\text{四边形 }ABB'A'\text{ 为平行四边形}\Longrightarrow AB/\!/A'B'\\ A'B'\subsetneqq\text{平面 }A'B'C'\\ AB\not\subset\text{平面 }A'B'C'\end{array}\right\}\Longrightarrow AB/\!/\text{平面 }A'B'C'.$$

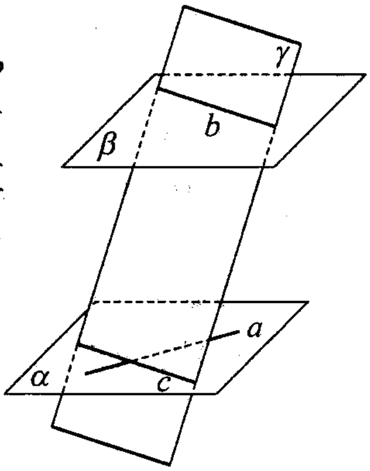
同理有 $BC/\!/$平面 $A'B'C'$，从而

$$\left.\begin{array}{l}AB/\!/\text{平面 }A'B'C'\\ BC/\!/\text{平面 }A'B'C\\ AB\cap BC=B\\ AB\subsetneqq\text{平面 }ABC\\ BC\subsetneqq\text{平面 }ABC\end{array}\right\}\Longrightarrow\text{平面 }ABC/\!/\text{平面 }A'B'C'.$$

(2) $\left.\begin{array}{l}OA=OA'\\ OB=OB'\end{array}\right\}\Longrightarrow AB\mathrel{\underline{\parallel}}A'B'$.

余下证明过程同(1).

3. 有且仅有一个. 设平面 α 外有一点为 P,作 $PH\perp\alpha$ 于 H. 过 P 作平面 β,使 $\beta\perp PH$,则 α、β 都垂直于 PH,所以 $\beta/\!/\alpha$. 这是存在性,下证唯一性. 设 $P\in\gamma,\gamma/\!/\alpha$,则由例 2 结论,知 $PH\perp\gamma$,而过 P 点垂直于 PH 的平面仅有一个,这就说明了与 α 平行的平面的唯一性.



(第 4 题图)

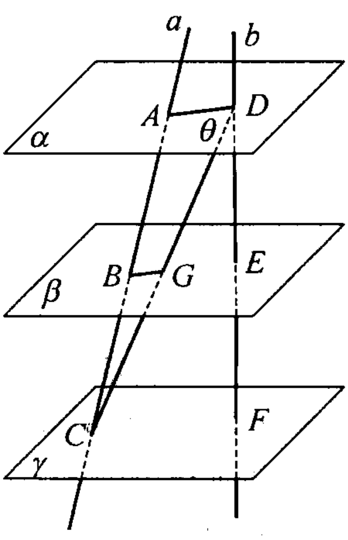
4. 证明:过 b 作平面 γ,设 $\gamma\cap\alpha=c$,先证 a 与 c 相交.

假设 a 与 c 不相交,则由 a、c 共面 α,知 $a/\!/c$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}b/\!/\alpha\\ b\subsetneqq\gamma\\ \gamma\cap\alpha=c\end{array}\right\}\Longrightarrow b/\!/c\\ \qquad\qquad\qquad\quad a/\!/c\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b,$$

这与 a、b 异面矛盾,故 a、c 相交.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}c/\!/b\\ b\subsetneqq\beta\\ c\not\subseteq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow c/\!/\beta\\ \qquad\qquad\quad a/\!/\beta\\ \qquad\qquad\quad a\subsetneqq\alpha,c\subsetneqq\alpha\\ \qquad\qquad\quad a、c\text{ 相交}\end{array}\right\}\Longrightarrow\alpha/\!/\beta.$$



(第 5 题图)

5. $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$,证明如下.

连结 CD,设 $CD\cap\beta=G$. 连结 BG、AD.

$CA\cap CD=C\Longrightarrow CA$、$CD$ 确定一个平面 θ.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\theta\cap\alpha=AD\\ \theta\cap\beta=BG\\ \alpha/\!/\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow AD/\!/BG\Longrightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DG}{GC}\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\text{同理}\dfrac{DE}{EF}=\dfrac{DG}{GC}\end{array}\right\}\Longrightarrow\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}.$$

练习(第 38 页)

1. (略)

2. 依据线面垂直的判定定理,及面面垂直的判定定理.

3. 证明:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ AB\subsetneqq\alpha\\ AB\perp l\end{array}\right\}\Longrightarrow AB\perp\beta\\ \qquad\qquad\qquad DE\subsetneqq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow AB\perp DE\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad BC\perp DE\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad AB\cap BC=B\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}DE\perp\text{平面 }ABC\\ AC\subsetneqq\text{平面 }ABC\end{array}\right\}\Longrightarrow AC\perp DE.$$

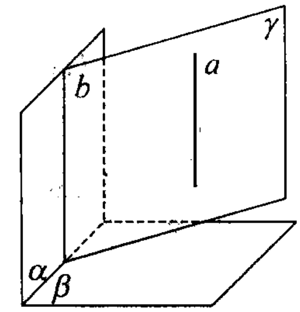
习题 1.2.7

1. (1)垂直.

已知:$a\perp\beta,\alpha/\!/a$

求证:$\alpha\perp\beta$.

证明：过 a 作平面 γ 交 α 于 b，则



（第 1 题图）

$$\left.\begin{array}{l} a/\!/\alpha \\ a\subsetneqq\gamma \\ \gamma\cap\alpha=b\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ a\perp\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}b\perp\beta\\ b\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow a\perp\beta.$$

(2)直线在平面内或平行于平面.

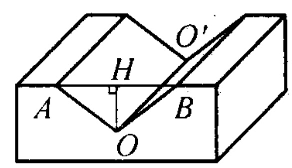
已知：$\alpha\perp\beta$，$a\perp\beta$.

求证：$a\subsetneqq\alpha$ 或 $a/\!/\alpha$.

证明：假设 a 与 α 相交，设 $a\cap\alpha=A$，过 A 作直线 $a'\perp\beta$，则由例 2 的结论知 $a'\subsetneqq\alpha$. 而 $a\not\subseteq\alpha$，$a\perp\beta$，这就是说过空间一点 A 有两条直线 a、a' 垂直于 β，这与过空间一点的平面的垂线的唯一性矛盾. 故假设不成立，命题得证.

(3)这两个平面可能相交，也可能不相交. 如果相交，交线与第三平面垂直.

2. 如图，在 $\triangle AOB$ 中，作 $OH\perp AB$，则由两个平面垂直的性质定理，可知 OH 垂直于上底面，故 OH 的长度即为切削深度.



（第 2 题图）

$$\left.\begin{array}{l}OA\perp OO'\\ OB\perp OO'\end{array}\right\}\Longrightarrow \angle AOB \text{ 即为 V 形二面角的一个平面角.}$$

所以 $\angle AOB=90^\circ$.

又知 $OA=OB=40(\text{mm})$，所以

$$OH=40\times\frac{\sqrt{2}}{2}=20\sqrt{2}(\text{mm}).$$

故切削深度为 $20\sqrt{2}$mm.

3. (1)见 31 页练习第 2 题.

(2)已知：α、β、γ 两两垂直，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$.

求证：a、b、c 两两垂直.

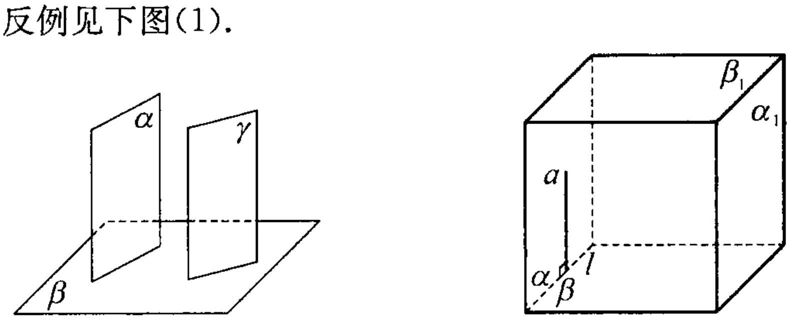
证明：过 a 上一点 A 作 $a'\perp\gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\gamma\\ A\in\alpha\\ A\in a'\\ a'\perp\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}a'\subsetneqq\alpha\\ \text{同理 } a'\subsetneqq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=a'\\ \alpha\cap\beta=a\end{array}\right\}\Longrightarrow a\text{、}a'\text{ 重合.}$$

所以 $a\perp\gamma$，而 $b\subsetneqq\gamma$，$c\subsetneqq\gamma$，所以 $a\perp b$，$a\perp c$，同理可证 $b\perp c$.

所以 a、b、c 两两垂直.

4. (1)不正确，反例见下图(1).



(1) (2)

（第 4 题图）

(2)正确,证明如下(如上图(2)):

设 $\alpha\cap\beta=l$,在 α 内作 $a\perp l$,则

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta\\ \alpha\cap\beta=l\\ a\subsetneq\alpha\\ a\perp l\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\perp\beta\\ \beta/\!/\beta_1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}a\perp\beta_1\\ a\subsetneq\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha\perp\beta_1\\ \alpha/\!/\alpha_1\end{array}\right\}\Rightarrow\alpha_1\perp\beta_1.$$

练习(第 41 页)

1. (略)
2. 底面:$A'B'C'D'$、$ABCD$;侧面:$AA'B'B$、$BB'C'C$、$CC'D'D$、$DD'A'A$;
侧棱:AA'、BB'、CC'、DD';对角线:$A'C$、$B'D$、$C'A$、$D'B$.
3. 截棱柱所得截面与底面全等,截棱锥所得截面与底面相似.

练习(第 44 页)

1. 此三棱台的侧面是三个全等的等腰梯形,上底为 8,下底为 18,腰长为 13,所以高为
$h=\sqrt{13^2-\left(\dfrac{18-8}{2}\right)^2}=12$,所以侧面积为

$$S_{侧}=3\times\frac{1}{2}[(8+18)\times12]=468(\text{cm}^2).$$

2. $S_{表}=4\pi R^2\approx5.096\times10^8(\text{km}^2)$.
3. 解:设水箱底面两边长为 x、y 高为 z,其表面积为 S,则

$$\begin{aligned}S&=xy+2xz+2yz\\&\geqslant3\sqrt[3]{xy\cdot2xz\cdot2yz}&&\text{(根据均值不等式)}\\&=3\sqrt[3]{4(xyz)^2}\\&=3\sqrt[3]{4\times4^2}&&(xyz=4)\\&=12.\end{aligned}$$

所以 $S\geqslant12$,取"="的条件为:$\begin{cases}xy=2xz,\\2xz=2yz,\\xyz=4.\end{cases}$

解得 $x=y=2$,$z=1$.

所以 $S_{\min}=12(\text{m}^2)$,应选择 2×6.1 规格的钢板.

习题 1.3

1. (略)
2. 解:水渠的几何模型为一柱体,其体积

$$V=sh=\frac{1}{2}(1.8+0.8)\times0.6\times1.5\times10^3=1170(\text{m}^3).$$

所需人工为:1170÷2=585(人次)

3. 解:设三条侧棱长分别为 x、y、z,且

$$\frac{1}{2}xy=6,\ \frac{1}{2}yz=4,\ \frac{1}{2}zx=3.$$

因为三个侧面互相垂直,所以三条侧棱互相垂直,所以

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}xy\times z=\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{6}\sqrt{xy\cdot yz\cdot zx}=4(\text{m}^3).$$

4. 解：设$\odot O_1$、$\odot O_2$ 半径分别为 r_1、r_2.

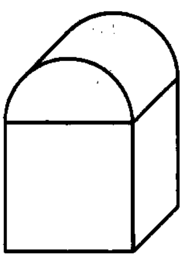
由 $V_1=125V_2$，得$\frac{4}{3}\pi r_1^3=125\times\frac{4}{3}\pi r_2^3$.

所以 $r_2^3=\frac{1}{125}\cdot r_1^3=8$，求得 $r_2=2$.

所以 $S_2=4\pi r_2^2=16\pi(\text{cm}^2)$.

复习题（A 组）

1. 如右图.



（第 1 题图）

2. (1)不正确，例如教室墙角三条棱交于一点，但并不共面.

(2)不正确，例如三棱镜的三条棱所在直线相互平行，但并不共面.

(3)正确. 证明如下：

$l_1\cap l_2=P\Longrightarrow l_1$、$l_2$ 确定一个平面 α.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}Q\in l_2\\ l_2\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow Q\in\alpha\\ \text{同理 } S\in\alpha\\ Q\in l_3\\ S\in l_3\end{array}\right\}\Longrightarrow l_3\subsetneqq\alpha.$$

所以，l_1、l_2、l_3 共面 α.

3. (1)在一个平面内，经过一条直线外一点有且仅有一条直线与这条直线垂直，在空间则有无数条.

(2)都是有且仅有一条.

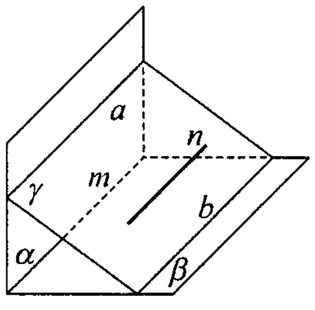
4. 空调室外机是一长方体，这样做的目的是检测这个长方体的底面是否水平放置的. 因为安装时可确保底面上与墙面垂直的直线与水平面平行，如果水准仪水泡居中，则底面上有另一方向的直线与水平面平行. 因而底面水平.

5. 与另一条直线平行或另一条直线也在此平面内.

6. 证明：过 n 作平面 γ，使 $\gamma\cap\alpha=a$，$\gamma\cap\beta=b$，则

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}n/\!/\alpha\\ n\subsetneqq\gamma\\ \gamma\cap\alpha=a\end{array}\right\}\Longrightarrow n/\!/a\\ \qquad\qquad\quad\ \text{同理 } n/\!/b\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a\subsetneqq\alpha\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad b\not\subseteq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}b/\!/\alpha\\ b\subsetneqq\beta\\ \beta\cap\alpha=m\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Longrightarrow b/\!/m\\ \qquad n/\!/b\end{array}\right\}\Longrightarrow m/\!/n.$$



（第 6 题图）

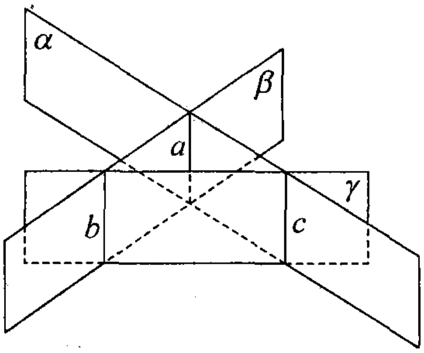
7. 已知：三平面 α、β、γ，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\gamma\cap\alpha=c$.

求证：a、b、c 交于一点或 $a/\!/b/\!/c$.

证明：

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\cap\beta=a\Longrightarrow a\subsetneqq\beta\\ \beta\cap\gamma=b\Longrightarrow b\subsetneqq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b \text{ 或 } a、b \text{ 相交}.$$

(1)若 $a/\!/b$,则如图所示:



（第 7 题图）

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a/\!/b\\ b\subsetneqq\gamma\\ a\not\subseteq\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/\gamma\\ \qquad\quad a\subsetneqq\alpha\\ \qquad\quad \alpha\cap\gamma=c\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}a/\!/c\\ a/\!/b\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/b/\!/c.$$

(2)若 a、b 相交,设 $a\cap b=M$,则

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}M\in a\\ a\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow M\in\alpha\\ \qquad\quad \text{同理 } M\in\gamma\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}M\in(\alpha\cap\gamma)\\ \alpha\cap\gamma=c\end{array}\right\}\Longrightarrow M\in C.$$

所以 a、b、c 交于同一点 M.

综上可知,命题得证.

8. 设此长方体交于一点的三条棱长分别为 a、b、c,则由勾股定理,求得截面三角形三边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$,$\sqrt{b^2+c^2}$,$\sqrt{c^2+a^2}$,设长为 $\sqrt{a^2+b^2}$ 与 $\sqrt{b^2+c^2}$ 的两边的夹角为 α,则

$$\cos\alpha=\frac{(\sqrt{a^2+b^2})^2+(\sqrt{b^2+c^2})^2-(\sqrt{c^2+a^2})^2}{2\cdot\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{b^2+c^2}}=\frac{2b^2}{2\sqrt{(a^2+b^2)(b^2+c^2)}}>0.$$

所以 α 为锐角,同理可证其他两角亦为锐角,故命题得证.

9. 设正方体棱长为 a,等边圆柱高为 $2h$,球半径为 R,三者体积均为 V,则

$$\left.\begin{array}{l}a^3=V\Longrightarrow a=\sqrt[3]{V}\Longrightarrow S_1=6a^2=\sqrt[3]{216V^2}\\ \pi h^2\cdot 2h=V\Longrightarrow h=\sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}\Longrightarrow S_2=6\pi h^2=\sqrt[3]{54\pi V^2}\\ \dfrac{4}{3}\pi R^3=V\Longrightarrow R=\sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}\Longrightarrow S_3=4\pi R^2=\sqrt[3]{36\pi V^2}\end{array}\right\}$$

$$\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\dfrac{S_1}{S_2}=\sqrt[3]{\dfrac{216}{54\pi}}=\sqrt[3]{\dfrac{4}{\pi}}>1\Longrightarrow S_1>S_2\\ \dfrac{S_2}{S_3}=\sqrt[3]{\dfrac{54\pi}{36\pi}}=\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}}>1\Longrightarrow S_2>S_3\end{array}\right\}\Longrightarrow S_1>S_2>S_3.$$

所以 $S_1>S_2>S_3$.

复习题(B 组)

1. (略)

2. 已知:点 P,直线 l.

求证:过 P 且垂直于 l 的直线都在同一平面内.

证明:过 P 且垂直于 l 的平面有且仅有一个,设为 α. 设直线 a 为满足条件的一条直线,即 $P\in a$,$a\perp l$. 在 α 内过 P 任作一条异于 a 的直线 b,则

$$a\cap b=P\Longrightarrow a\text{、}b\text{ 确定一个平面 }\beta.$$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}l\perp\alpha\\ b\subsetneqq\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp b\\ \qquad\quad l\perp a\\ \qquad\quad a\cap b=P\\ \qquad\quad a\subsetneqq\beta\\ \qquad\quad b\subsetneqq\beta\end{array}\right\}\Longrightarrow l\perp\beta.$$

这样，过 P 点有两个平面 α、β 与 l 垂直，故 α、β 重合，即由 $a\subsetneqq\beta$，可知 $a\subsetneqq\alpha$，又因为 a 具有任意性，故命题得证.

3. 连结 OA、OB，设 $\angle AOB=\theta$，则 $OA=R\cos\theta$，$AB=R\sin\theta$，

所以 $$S_{\text{圆柱侧}}=2\pi\cdot OA\cdot AB=2\cdot\pi R\cos\theta\cdot R\sin\theta=\pi R^2\cdot\sin 2\theta \leqslant \pi R^2$$

取“=”的条件为 $\sin 2\theta=1$，即 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

故此内接圆柱侧面积的最大值为 πR^2.

4. 证明：

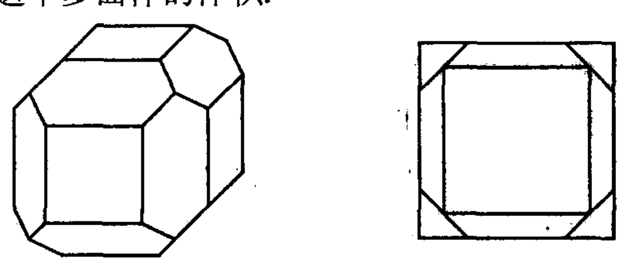
$DA\cap DB=D\Longrightarrow DA$、$DB$ 确定一个平面 ABD.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}a\subsetneqq\text{平面 }ABD\\ \text{平面 }ABD\cap\alpha=EH\\ a/\!/\alpha\end{array}\right\}\Longrightarrow a/\!/EH\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \text{同理 }a/\!/FG\end{array}\right\}\Longrightarrow \left.\begin{array}{l}EH/\!/FG\\ \text{同理 }EF/\!/HG\end{array}\right\}$$

$\Longrightarrow$ 四边形 $EFGH$ 是平行四边形.

思考与实践

1. 提示：立体几何问题：将棱长为 $4a$ 的正方体的棱分为 4 等份，在 $\frac{1}{4}$ 处截去各棱角得一个多面体(如下左图). 求这个多面体的体积.



(第 1 题图)

与之类比的平面几何问题：将边长为 $4a$ 的正方形的边分为 4 等份，在 $\frac{1}{4}$ 处截去四个角得一个八边形(如上右图)，求这个八边形的面积.

2. 提示：每层楼地面与小孔所连的直线垂直.

第 2 章　平面解析几何初步

一、教育价值

解析几何学是伴随着人类文明的进步而发展起来的. 跨过了中世纪的漫漫长夜，世界进入文艺复兴时期，笛卡儿发现用代数方法可以研究图形的几何性质，于是划时代地创立了解析几何与坐标几何，使得用数量标志几何位置成为可能.

解析几何的本质是用代数方法研究图形的几何性质，它沟通了代数与几何之间的联系，体现了数形结合的重要数学思想.《标准》要求学生在“解析几何初步”的学习中，经历将几何问题代数化、处理代数问题、分析代数结果的几何含义的解析几何问题的几个过程. 这部分内容的学习有助于学生认识数学分支之间的内在联系，体会数形结合思想，形成正确的数学观.

二、教学目标

1. 知识与能力

(1)理解直线的倾斜角和斜率的概念.

(2)掌握直线方程的几种形式，并能根据条件熟练地求出直线的方程.

(3)掌握两条直线平行或垂直的条件，会求两直线的交点坐标.

(4)掌握两点间的距离公式、点到直线的距离公式，会求两条平行直线间的距离.

(5)掌握圆的标准方程和一般方程.

(6)能根据给定直线、圆的方程，判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

(7)能用直线和圆的方程解决一些简单的问题.

(8)了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置.

(9)掌握空间两点间的距离公式.

2. 过程与方法

(1)在平面直角坐标系中，结合具体图形，探索确定直线位置的几何要素.

(2)从学生熟知的一次函数、方位角等出发，经历用代数方法刻画直线斜率的过程，体会坐标法的思想及历史起源.

(3)经历探索直线方程的几种形式的建立过程，体验用代数语言描述几何要素及其关系的方法.

(4)经历探索两点间距离公式、点到直线距离公式的过程. 体会用代数方法刻画几何问题的思想.

(5)回顾确定圆的几何要素，探索并建立圆的标准方程和一般方程.

(6)在“平面解析几何初步”的教学与学习过程中，帮助学生经历如下过程：首先将几何问题代数化，用代数语言描述几何要素及其关系，进而将几何问题转化为代数问题；处理代数问题；分析代数结构的几何含义，最终解决几何问题.

3. 情感、态度与价值观

(1)通过学生熟知的具体图形探索确定直线位置的几何要素，使学生感受到数学与实际生活的紧密联系，消除数学的陌生感，增强数学的亲和力，激发学生学习数学的积极性.

(2)体会直线的斜截式方程与一次函数的关系，加强高中数学与初中数学的联系，消除学生的畏难情绪，激发他们进一步探索的欲望.

(3)通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性，使学生认识“数学来源于生活，同时又服务于生活”，培养学生学习研究数学的热情.

(4)通过不断地用代数方法处理几何问题的方法，使学生体会并喜欢“数形结合”这一重要思想方法.

三、教材结构

直线和圆都是常见的简单几何图形，在实际生活和生产实践中有广泛的应用. 初中几何对直线和圆的基本性质作了比较系统的研究，初中代数研究了一次函数的图象和性质，圆的有关性质，锐角三角函数，直线和圆的方程的内容要用上述知识作为基础. 因此本章定位为初中平面直角坐标系中二次函数和圆的继续，它属于解析几何学的基础知识，既是进一步学习圆锥曲线以及其他曲线方程的基础，又是学习导数等内容的基础，并学会在实际问题中初步应用.

为此，首先在章头语中通过学生熟知的一次函数、二次函数等，指出解析几何学研究的基本问题及优越性，并指出本章所要研究的问题和基本方法，激发学生的求知欲.

本章共分四节.

2.1 节(直线的方程)　包括直线的倾斜角和斜率、直线的方程、两直线的位置关系、平面直角坐标系中的距离公式四个小节.

为了建立直线的方程，首先引入直线的倾斜角和斜率的概念，导出经过两点的直线的斜率公式. 然后，利用经过两点的斜率公式，推导出直线方程的点斜式；再利用点斜式，推导出直线方程的两点式；给出以上两种直线方程的应用，并顺势介绍直线方程的斜截式、截距式. 通过对直线方程斜截式及特殊直线的研究，介绍了直线方程的一般式. 接着，研究判定平面直角坐标系中两条直线平行和垂直的条件、两条直线的交点与两条直线方程的关系、平面直角坐标系中两点的距离公式、点到直线的距离公式等问题.

本节设计了信息技术链接，通过它研究斜率与倾斜角的关系，进一步帮助学生理解斜率与倾斜角的概念. 阅读与讨论部分介绍了坐标几何小史，用以拓宽学生知识.

2.2 节(圆)　包括圆的方程、直线与圆的位置关系、圆与圆的位置关系三个小节.

圆是学生熟悉的曲线，初中几何中已学习过圆的性质，这里只是用解析法研究它的方程和它与其他图形的位置关系等的一些应用，而不是用解析法讨论它的性质.

2.3 节(直线与圆的方程的简单应用)　本节直线和圆的方程的简单应用. 通过本节让学生明确直线和圆的方程在生产和生活实际中有着广泛的应用，同时本节也是对前面两节的复习与小结.

2.4 节(空间直角坐标系)　主要介绍空间直角坐标系的概念和探究空间直角坐标系中两点的距离公式. 通过实际应用，让学生明确建立空间直角坐标系的必要性.

本章最后安排了一个数学探究课题——直线系方程. 通过直线系方程的探究，让学生体验直线系方程的优越性，更深入地理解直线方程及方程中各参数的含义. 初步领会类比、归纳的思想方法. 进一步体会用代数方法研究几何问题的思想.

总之，本章的特点是通过生产和生活实际引入数学概念，了解这些概念引入的必要性. 然后通过探究的方式逐步地展开教材内容，并借助于信息技术及学生的自主探究，进一步理解和加深概念，体现“教学来源于生活，又服务于生活”. 提高学生学习数学的积极性.

四、课时分配

本章共 18 个课时，具体分配如下(仅供参考)：

2.1 直线的方程	
2.1.1 直线的倾斜角和斜率	约 2 课时
2.1.2 直线的方程	约 3 课时
2.1.3 两直线的位置关系	约 2 课时
2.1.4 平面直角坐标系中的距离公式	约 1 课时
2.2 圆	
2.2.1 圆的方程	约 2 课时
2.2.2 直线与圆的位置关系	约 2 课时
2.2.3 圆与圆的位置关系	约 1 课时
2.3 直线与圆的方程的简单应用	约 2 课时
2.4 空间直角坐标系	约 2 课时
数学探究	约 1 课时

五、内容分析

章头语

根据建构主义原理，从学生熟知知识——初中的一次函数、二次函数的图象入手，指出几何图形与函数(也可看作是关于 x、y 的方程)之间的联系. 并对学生熟悉的几种曲线(直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线)提出问题，从而引出解析几何所要研究的问题及研究的基本方法.

在教学中应注意通过已有知识、章头图等实际例子让学生明确学习“平面解析几何初步”这一章的基本任务、基本方法，以及这些内容在实际生活中的作用，激发学生学习的兴趣.

2.1 直线的方程

2.1.1 直线的倾斜角和斜率

1. 内容概述及基本要求

学生已经知道两点可以确定一条直线. 本小节用一个学生熟知的海船航行时相对于某一点位置的确定问题，引出确定直线还可以以一点和一个角来确定，从而引出直线的倾斜角的定义. 再通过一次函数的图象(一条直线)的倾斜角与 k 的关系，给出斜率的概念及由倾斜角计算斜率的方法. 最后由学生所学锐角三角函数的定义，推导出平面直角坐标系中过某两点的直线的斜率公式.

通过本小节学习，学生应达到如下要求：

(1)理解直线的倾斜角和斜率的概念.

(2)掌握平面直角坐标系中过两点的直线的斜率的计算公式，会求过两点的直线的斜率和倾斜角，会用直线的倾斜角(斜率)讨论直线的斜率(倾斜角).

(3)探索确定直线位置的几何要素，经历用代数方法刻画直线倾斜程度的过程，初步体会用代数方法处理几何问题的思想方法.

2. 重难点分析

本小节的重点：直线的倾斜角和斜率的概念，过两点的直线的斜率公式.

本小节的难点：直线的斜率概念和过两点的直线的斜率公式的建立.

3. 教学建议

教学中，建立倾斜角的概念、除了教材所列举的海船航行的例子外，还可以由学生举出一些生活中的实例. 如在足球场上某处射门，当球的飞行线路近似地看作一条直线时，要射入门框内，还要考虑球飞行线路与底线所成的角等. 这些直线反映了一条直线对另一条直线的倾斜程度，这样可让学生较自然地理解倾斜角的概念.

直线的倾斜角是分两种情况定义的：第一种是对于与 x 轴相交的直线给出的；第二种是当直线与 x 轴平行或重合时给出的. 教学中要讲清楚倾斜角的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$，并说明这样定义倾斜角可以使平面内任何一条直线都有唯一的倾斜角. 倾斜角的大小确定了，直线的方向也就确定了.

直线的倾斜角反映了直线对 x 轴的倾斜程度. 一次函数的图象是一条直线，k 的大小也反映了直线对 x 轴的倾斜程度. 教学中应让学生复习锐角三角函数，分析 k 与倾斜角的关系，从而引出直线的斜率的概念. 这样学生对斜率就没有陌生感.

给出直线的斜率的定义后，应说明斜率是一个数值. 讲清直线的倾斜角从 $0°$ 变化到 $180°$（不包括 $180°$）时，它的斜率的变化情况. 并提醒学生注意，当 $\alpha=90°$ 时，直线没有斜率.

由于学生只有锐角三角函数作为基础，因此推导过两点的直线的斜率公式时，要注意引导学生对倾斜角为锐角和钝角进行分类，借助图形把钝角的三角函数转化为锐角三角函数来求.

给出斜率公式后，应向学生指出：(1)斜率公式与两点的顺序无关，但两点的纵坐标和横坐标在公式中的前后顺序必须一致；(2)斜率公式表明，直线对 x 轴的倾斜程度，可以通过直线上任意两点的坐标表示，而不需求出直线的倾斜角，因而使用比较方便；(3)斜率公式是研究直线方程的各种形式的基础，必须熟记，并且要会灵活运用；(4)当 $x_1=x_2$，$(y_1\neq y_2)$，即直线垂直于 x 轴时，直线没有斜率.

本小节安排了三个例题.

例 1 的目的是使学生在理解倾斜角概念的基础上，通过图形写出所给直线的倾斜角. 并结合斜率的定义，求出直线的斜率. 以巩固直线倾斜角和斜率的定义.

例 2 的目的是使学生学会使用过两点的直线的斜率公式.

例 3 的目的一是让学生初步体会直线斜率与倾斜角的简单应用，二是学习由直线斜率的范围如何求倾斜角的范围，进一步了解直线斜率随倾斜角变化而变化的规律.

本小节还安排了三个知识性旁批，由于关于角的概念与三角函数的知识准备不足，为让学生理解概念，教学时应作适当的交待和讲解；另安排了二个思考性旁批，它可以让学生更深入思考有关概念，提高学生能力；最后还安排了一个信息技术链接，通过电脑演示，可使学生更深入形象地了解直线的斜率随倾斜角变化而变化的规律.

教材还通过习题第 3 题说明：可以利用过同一点的两条直线的斜率相等证明三点共线. 其他练习题与习题和例题类似，目标与例题相同. 要求学生理解直线的倾斜角与斜率的概念，并会求直线的倾斜角和斜率，应用直线的倾斜角（斜率）的范围求斜率（倾斜角）的范围.

2.1.2 直线的方程

1. 内容概述及基本要求

本小节从一次函数的解析式与其图象的关系的研究出发，给出了直线的方程和方程的直线的概念，继而根据过直线上两点的斜率公式，推导出直线方程的点斜式；由直线方程的点斜式，再推导出直线方程的两点式，作为直线方程的点斜式与两点式的应用，又给出了直线方程的斜截式和截距式.直线方程的这几种形式都是关于 x、y 的二元一次方程，通过分析，最后给出了直线方程的一般式.在直线方程的几种形式中，点斜式、两点式给出了根据常见的条件求直线方程的方法和途径，而斜截式、截距式以及一般式则常被用来进一步讨论直线的有关问题.

通过学习本小节，学生应达到如下要求：

(1)了解直线的方程、方程的直线的概念.

(2)掌握直线的方程的点斜式、两点式和直线方程的一般式，并能熟练地求出直线的方程.

(3)经历探索直线方程几种形式的建立过程，体验代数语言描述几何要素及其关系的方法.

(4)体会斜截式与一次函数的关系.进一步体会“数形结合”的思想.

2. 重难点分析

本小节的重点：直线方程的几种形式.

本小节的难点：直线方程的几种形式的应用.

3. 教学建议

为了求直线的方程，教材首先分析了一次函数的解析式，它也是关于 x、y 的二元一次方程.通过分析方程的解与直线之间的关系，让学生了解直线的方程和方程的直线的概念，并进一步明确所谓求直线方程，就是求直线上任意一点的横坐标 x 与纵坐标 y 之间的一个关系方程，从而初步体会求直线方程的过程与方法.

在探求直线方程的点斜式时，要使学生明确：(1)建立点斜式方程的主要依据是，经过直线上一个定点与这条直线上的任意一点所确定的直线的斜率都等于 k.(2)由斜率公式得到直线上任意不同于 P_0 的一点 $P(x,y)$满足了方程 $k=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$后，还不能把它称为此直线的方程，因为此方程表示的图形是直线挖去了点 P_0 的部分.把此方程化为 $y-y_0=k(x-x_0)$后，直线上任一点(含 P_0)的坐标才满足此方程.因此后者才表示整条直线.(3)因为直线的点斜式方程是由直线上一定点与直线的斜率来确定的，所以当直线的斜率不存在时，不能应用此形式求直线方程，这时直线的方程是 $x=x_0$.

本小节安排了六个例题.

例 1 是直线方程的点斜式的直接应用，同时又给出直线方程的截距式，教学时要引导学生自己写出直线方程，并讲清截距的概念，指出：(1)b 是直线在 y 轴上(而不是 x 轴)的截距；(2)截距与距离是两个不同的概念；(3)应用直线方程截距式的条件是直线的斜率存在；(4)初中的一次函数与直线方程的截距式的区别与联系：当 $k\neq0$ 时斜截式方程就是一次函数的表示形式，并由此让学生明确初中一次函数解析式中 k 与 b 的几何意义.

例 1、例 2 是直线方程点斜式的直接应用.通过此例，使学生学会直线方程点斜式的应用.

给出直线上两点，若直线斜率存在，就可以由直线方程的点斜式写出直线的方程，教材正是由直线方程的点斜式推导出直线方程的两点式.为了方程形式优美，便于记忆，方程写成了③的形式，因此此时除斜率存在即 $x_1\neq x_2$ 外，还要附加 $y_1\neq y_2$，即直线斜率不为 0 的条件.所

以 $x_1=x_2$ 或 $y_1=y_2$ 时，不能应用直线方程的两点式，这一点应让学生明确. 但若把分式形式化为整式形式，即 $(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$，就可取消上面的限制条件了. 还应要学生明确方程③虽为分式形式，但它表示了过点 $P_1(x_1,y_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2)$ 的直线，即直线上任一点都满足此方程，满足此方程的点的坐标都在此直线上. 这点是与推导直线方程点斜式时 $k=\frac{y-y_1}{x-x_1}$ 这一分式形式不同之处.

例 3 是直线方程的截距式，它是直线方程的两点式的直接应用. 教学时，可启发学生自己完成，讲解此例时，可对学生进行数学美的教育，并指出，由于由方程可直接看出直线所过 x 轴和 y 轴上的点，所以用截距式画直线比较方便.

直线方程的几种特殊形式都是关于 x、y 的二元一次方程，那么直线方程与二元一次方程到底是一个什么关系呢？教学中，要引导学生从两方面探究. 一方面，任何一条直线 l 都能用一个二元一次方程来表示，注意分倾斜角 $\alpha=90°$ 和 $\alpha\neq90°$ 讨论，因几何形式方程都不能解决 $\alpha=90°$ 时求方程的问题；另一方面分 $B=0$ 和 $B\neq0$ 引导学生探究. 二元一次方程 $Ax+By+C=0$ 都表示一条直线，从而引出直线方程的一般式，教学中，注意引导学生自主探究完成. 从此两方面探究，也为“曲线与方程”的概念打下基础.

例 3、例 4 是直线方程两点式的直接应用. 通过此例，使学生学会直线方程两点式的应用.

例 5 是直线方程几种形式的互化，在讨论直线的有关问题时，常常需要把直线不同类型的方程化成同一类方程，所以，要学会直线方程的互化. 常见的互相转化有：直线方程的点斜式、斜截式、两点式化为一般式，一般式化为斜截式.

例 6 是直线方程的简单实际应用. 直线方程在生产和生活实际中应用广泛，通过此例教学，使学生初步体会直线方程的应用.

本小节安排了三个思考性旁批，它可以让学生不仅从代数形式上明确直线方程几种形式所适合的条件，而且从几何图形上也能明确不能应用这些形式方程求直线方程的直线相对于 x 轴（或 y 轴）的位置关系，以更进一步理解直线方程的几种形式；二个数学文化渗透性旁批，由此对学生进行数学美的教育，美不仅存在于生活中，在数学中也无处不在.

2.1.3 两直线的位置关系

1. 内容概述及基本要求

初中学习了应用几何方法判定两直线的位置关系，建立直线方程后，我们可以利用直线方程即利用代数方法来判定两直线的位置关系. 本小节首先利用“两条直线被第三条直线所截，若同位角相等，则两直线平行”及两直线平行的性质定理，推导出了两条直线平行的充要条件. 接着通过观察两直线垂直时，它们斜率的关系，总结出两直线垂直的充要条件. 最后，指出两条直线的交点与两条直线的方程的解之间的联系.

通过本小节学习，学生应达到如下要求：

(1)熟练掌握两条直线平行和垂直的判定方法.

(2)会求两条直线的交点坐标.

(3)体会通过实例观察、分析，归纳的思想.

(4)体会用代数方法研究几何问题的过程，欣赏用解析法判定的优越性.

2. 重难点分析

本小节的重点：两条直线平行与垂直的充要条件，两条直线的交点与两条直线方程之间的关系.

本小节的难点：两条直线垂直的充要条件的寻求.

3. 教学建议

两条直线若都与 x 轴相交，则倾斜角就是一对同位角. 教学中，首先复习初中两条直线平行的判定与性质，并让学生明确这一点. 然后由学生猜想两条直线平行时其斜率之间的关系，并探讨证明方法.

由于三角函数知识准备不足，因此两条直线垂直的充要条件在这里不能完成推导. 教学中，通过观察几条倾斜角为特殊角的直线垂直时斜率之间的关系，猜想两条直线垂直时其斜率所应满足的条件. 再通过几对倾斜角为非特殊角的直线垂直时，用计算器验证所得结论是否成立. 然后归纳出两条直线垂直的条件，并向学生指出，此条件现在可以直接应用，其证明待三角函数学完后再完成，不能让学生误解为这样不完全归纳出的结论可直接应用. 关于这一结论的证明见后面的相关资源.

在上述给出的两个结论中，要注意：我们是首先假定了两条直线的斜率存在，有斜截式方程. 平行的判定中，一定要注意 $b_1 \neq b_2$ 的条件，否则两直线可能重合. 当两直线的斜率至少一个不存在时，直线垂直于 x 轴，它们的关系很容易判定.

在同一平面内两条直线有三种位置关系：相交、平行、重合. 相应的由直线方程组成的二元一次方程组的解有三种情况：有唯一解、无解、有无数多个解. 通过复习直线方程的概念，使学生理解这种形与数之间的联系.

本小节安排了四个例题.

例 1 是两条直线平行的充要条件的直接应用. 通过此例，教会学生使用这一条件. 同时通过此例还可启发学生思考探索：两条直线平行时其一般式方程系数有什么关系？从而得出结论：与直线 $Ax+By+C=0$ 平行的直线方程可表示为 $Ax+By+M=0$.

例 2 是两条直线垂直的充要条件的直接应用，通过此例，应教会学生使用这一条件，同时启发学生思考探讨：两直线垂直时其一般式方程的系数有什么关系？从而得出结论：与直线 $Ax+By+C=0$ 垂直的直线的方程可表示为 $Bx-Ay+M=0$.

例 3 的目的是教会学生如何应用直线的方程求交点，并对直线方程作一复习.

有些实际问题可转化为两直线交点问题. 如最短路径问题，供需平衡问题等. 例 4 的目的是让学生初步体会数学在实际生活中的运用. 当然本题也可直接由初中相似形解得.

本小节还安排了三个思考性旁批. 讨论直线平行和垂直的条件时，应用的是直线的斜截式方程. 但平时直线方程给的大多是一般式，当然可以把一般式化成斜截式方程(如果斜率存在)来讨论，那么不化方程，能否给出一般式方程中系数的关系来判断其位置关系呢？这是学生很自然容易想到或要问到的问题. 通过此旁批可激发学有余力的同学进行数学探索的热情，以及从解决数学问题中获得乐趣及成就感.

2.1.4 平面直角坐标系中的距离公式

1. 内容分析及基本要求

本小节从上节饮水问题出发，推出探求两点间的距离公式的必要性，并探讨出了两点间的距离公式；接着利用“等积法”的思想，推导出了点到直线的距离公式. 它们的应用以例题方式给出了线段的中点公式，以及两条平行直线间的距离公式.

通过学习本小节，使学生达到如下要求：

(1)掌握两点间的距离公式.

(2)掌握点到直线的距离公式.

(3)了解线段的中点公式,会求两平行直线间的距离.

(4)经历探求两点间的距离公式、点到直线的距离公式的过程,进一步体会用代数方法研究几何问题的思想.

2. 重难点分析

本小节的重点:两点间的距离公式,点到直线的距离公式.

本小节的难点:点到直线距离公式的推导.

3. 教学建议

两点间的距离公式,点到直线的距离公式是研究某些问题的重要工具. 教学中,推导两点间的距离公式时,首先要让学生明确,平行于 x 轴(y 轴)的直线上两点距离的求法. 这样学生就很容易得出这一公式了.

点到直线的距离的概念初中已经建立,推导点到直线的距离,学生很容易想到求出垂足 Q 的坐标,再应用两点间的距离推出,此时应给学生指出,这种方法虽然可行,但求点 Q 的坐标非常繁琐,从而启发学生寻求新的证法. 这时可以设置一些问题引导,如我们知道平行于坐标轴的直线上两点,无论其坐标的表达式多繁琐,但其两点的距离很易求,即为横坐标(或纵坐标)差的绝对值,从而提出问题. 我们能否把它转化为 x 轴(y 轴)平行的线段长度的计算并问题呢? 从而引出"等积法"的思想.

公式给出后应让学生注意. 用公式时,直线方程一定要化成一般式.

这个公式的证明方法很多,将在后面的相关资源中再给出几种证法,供参考.

本小节安排了三个例题.

例 1 是两点间距离公式的直接应用,同时也给出了线段的中点公式,后面可直接使用.

例 2 是点到直线距离公式的应用,通过此例还应使学生进一步明确一般方程中 A 或 B 中有一个为零,公式仍然成立.

例 3 的目的不仅在于点到直线距离公式的应用,还要求学生了解两条平行直线间距离的求法,并通过此例给出了两平行线间的距离公式,注意当 x,y 的系数相同时才有此公式.

阅读与讨论

本节简单介绍坐标几何(即解析几何)的历史,坐标几何是代数与几何相结合的一门新的数学分支. 本节介绍了坐标几何产生的简介背景、奠基人及简单经历过程,让学生了解坐标几何思想的形成,体会形数结合思想产生过程及优越性,激发有潜力学生研究数学的兴趣和探索精神. 要进一步了解坐标几何历史,可上网查询或到图书馆查阅有关书籍.

2.2 圆

2.2.1 圆的方程

1. 内容概述及基本要求

本小节直接通过圆的定义介绍了圆的标准方程,圆的一般方程,并通过例题给出了圆的方程的求法. 通过本小节学习,应使学生达到如下要求:

(1)掌握圆的标准方程,会根据圆心坐标、半径熟练地写出圆的标准方程,从圆的标准方程熟练地求出它的圆心和半径.

(2)掌握圆的一般方程,掌握圆的一般方程的特色,学会圆的一般方程与标准方程的互化.

(3)经历求圆方程的过程,掌握待定系数法求圆方程的方法.

2. 重难点分析

本小节的重点：圆的标准方程、圆的一般方程.

本小节的难点：二元二次方程为圆的一般方程的条件的探寻. 圆的性质初中已作研究，因此学生学习本节，不会感到太大的困难.

3. 教学建议

圆是学生非常熟悉的曲线. 本小节首先直接根据圆的定义，推导出圆的标准方程. 教学中要学生明确标准方程的特征：左边完全平方式中 x，y 的系数为 1，x，y 与数之间是减号连接；右边为正数，是半径的平方. 还要明确圆的标准方程中含有三个参数，因此必须具备三个独立的条件，才能确定圆. 确定了 a、b、r 可直接写出方程，若不能直接确定 a、b、r 可根据条件应用待定系数法解决. 还要注意，解决圆的有关问题时，不要忘记了圆的有关几何性质.

任何一个圆的方程都可以写成下面形式：

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0.$$

学生会很自然地问具有这种形式的方程是否一定表示圆？

为回答上述问题，教学中可分两步走：第一步，先写出三个具体的二元二次方程. 它们分别可以表示一个圆、一个点、不表示任何图形，让学生有一个感性认识，并总结出研究的方法——配方. 第二步，探求方程 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的条件.

完成以上两步后给出圆的一般方程的概念. 指出其圆心是 $\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$，半径为 $\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$. 强调，当 $D^2+E^2-4F>0$ 时方程才叫圆的一般方程. 进一步比较方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \quad ①$$

和圆的一般方程

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0 \quad ②$$

的系数，启发学生归纳出以下结论.

当二元二次方程①具有条件

(1) x^2 和 y^2 系数相同且不等于 0，即 $A=C\neq0$；

(2) 没有 xy 项，即 $B=0$；

(3) $D^2+E^2-4AF>0$

时，它才表示圆.

同标准方程一样，圆的一般方程中也含有三个参变数，因此必须具备三个独立条件，才能确定一个圆.

本小节安排了五个例题.

例 1 的目的是让学生明确点与圆的位置关系，及如何应用圆的方程来讨论点与圆的位置关系.

例 2、例 3 的目的是让学生学会写圆的标准方程. 求圆的标准方程的关键是确定圆的圆心坐标和圆的半径，这两个例题从不同角度，给出确定了圆的圆心或半径的方法. 注意解题中，圆的几何性质的应用.

例 4 的目的是让学生学会待定系数法求圆的一般方程的方法. 待定系数法是解析几何中，甚至整个数学中非常重要的方法，要学会熟练应用.

方程 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

是圆的方程的两种基本形式. 求圆的方程时，要合理地选择方程的形式，以能更方便、更简捷地求出圆的方程. 例 5 的目的就在于此. 题目中给出了两点，设圆的一般方程用待定系数法求 D、E、F 可完成；设圆的圆心坐标，用标准方程也可以完成. 但后者略显简单一些. 教学中要向学生指出这一点.

本小节还给出了一个说明性旁批和一个思考性旁批，通过对 $D^2+E^2-4F\leqslant 0$ 方程能否表示一个几何图形的思考，可使学生更进一步地掌握圆的一般方程的概念，更进一步加深对条件 $D^2+E^2-4F>0$ 的理解，教学时要注意引导学生思考.

2.2.2　直线和圆的位置关系

1. 内容概述及基本要求

本小节先介绍初中平面几何中判断直线与圆位置关系的方法，然后引出利用直线方程与圆的方程判断直线与圆位置关系的方法. 通过本小节教学，也是对直线方程与圆的方程一轮复习.

通过本小节学习，应使学生达到如下要求：

(1)能根据直线与圆的方程，判断直线与圆的位置关系.

(2)能应用直线与圆的位置关系，求有关直线或圆的方程.

(3)经历用代数方法讨论直线与圆位置关系这一几何问题，进一步体会数形结合的思想.

2. 重难点分析

本小节的重点：直线与圆的位置关系的讨论和应用.

本小节的难点：直线与圆的位置关系的应用.

3. 教学建议

直线与圆的位置关系学生在初中已会判定，前提是要知道圆心到直线的距离与半径的大小. 在这里结论与初中虽然一样，但有了直线方程和圆的方程之后，我们就可以应用点到直线的距离公式求圆心到直线的距离，利用圆的方程求圆的半径，这一点是与平面几何不同的，应向学生讲清楚.

直线和圆的关系还可以用纯代数方法进行研究. 教学时，应让学生初步体会这一解析几何讨论直线与曲线位置关系的通法，即联立直线与圆的方程，通过消元转化为关于 x(或 y)的一元二次方程，借助根与系数的判别式来完成.

在讨论直线与圆相切时，不要忘了过切点的半径与切线垂直. 讨论直线与圆相交问题时，不要忘了弦长的一半、弦心距，半径的长三者构成一直角三角形三边等等这些几何性质的应用，它可以优化解题过程，减少繁锁的计算.

本小节安排了五个例题.

例 1 的目的是使学生掌握直线与圆位置关系的判断，并会用方程求交点坐标. 例题解法是用方程根的判别式来完成的，教学时，可安排学生用另外一种方法加以判定，以巩固两种判定方法.

例 2 的目的是要学生掌握圆的切线方程的求法，并给出了过圆心在原点的圆上一点 $M(x_0,y_0)$的切线方程. 本例的解法是先设切线的斜率为 k，过切点的半径 OM 的斜率为 k_1，再用 $k=-\dfrac{1}{k_1}$求出过点 $M_0(x_0,y_0)$的切线方程. 这是为了便于学生掌握解题的一般思路，但在教学中同时还要注意解题的严谨性. 因此对一般情况进行讨论后，还要看一下特殊情况. 本例可作

公式使用.本例还可以有以下解法,供参考.

解法 2 设 $P(x,y)$ 是切线上的任意一点,根据勾股定理,得 $OM^2+MP^2=OP^2$. 所以

$$r^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=x^2+y^2.$$

由于 $$x_0^2+y_0^2=r^2.$$

把方程整理可得

$$x_0x+y_0y=r^2.$$

例 3 的目的是给出直线切线的更一般的求法——待定系数法.求待定的系数时,除教材所给方法外,还可以联立所设直线方程与圆的方程消去一个未知数变成关于 x(或 y)的一元二次方程,用 $\Delta=0$ 求得,但此法计算较繁.教学时,要向学生指出这一方法,并引导学生合理地选取方法.通过本例教学,还要使学生更进一步明确,过一点用斜率设方程时,要考虑斜率不存在的直线是否满足条件,不能遗忘.

例 4 的目的是使学生学会圆的弦长的求法以及弦所在直线方程的求解.教学时,要引导学生复习锐角三角函数,把弦长转化为与 x 轴(或 y 轴)平行的线段的长度的求法.引导学生复习圆的几何性质,充分利用圆的几何性质把几何特征转化为代数关系,从而求出方程.

例 5 是直线与圆位置关系的一般讨论,这是一种通法,适合其他的直线与曲线位置关系的讨论.教学时,要讲清楚化归的思想方法,教会学生学会灵活运用所学知识分析问题,解决问题,提高综合应用所学知识的能力.

本小节安排了三个思考性旁批,这些旁批对提高学生思维的严谨性很有好处.教学时,要引导学生思考.

2.2.3 圆与圆的位置关系

1. 内容概述及基本要求

本小节介绍了圆与圆的位置关系的判定方法,并通过几个例题给出了应用,并研究了公共弦,公切线等有关问题.

通过本小节教学,应达到如下要求:

(1)掌握圆与圆的位置关系的判定方法,会用给定的圆方程判定圆与圆的位置关系.

(2)了解公共弦长,所在直线方程,公切线方程的求法.

(3)通过本小节学习,进一步复习直线方程与圆的方程的有关内容.

2. 重难点分析

本小节的重点:圆与圆的位置关系的判定.

本小节的难点:圆与圆的位置关系判定的应用.

3. 教学建议

圆与圆的位置关系初中已经给出,教学中只需复习就可以得到.但要使学生注意,现在的半径和圆心距,可通过圆的方程求得.

本小节安排了三个例题.

例 1 的目的是使学生掌握利用圆的方程讨论圆的位置关系的方法.

例 2 的目的是使学生了解圆的公切线的求法.求圆的公切线时,待定的系数 b 不仅要满足圆 c_1 的圆心到此直线的距离等于半径 r_1,同时还要满足圆 c_2 的圆心到此直线的距离等于半径 r_2.

例 3 的目的是讨论两圆相交时,公共弦的有关问题.方程②—方程①所得方程③实际上是两圆相交公共弦所在直线方程,这一点可向学生说明,但需指出前提:必须两圆相交才有此结论.

2.3 直线和圆的方程的简单应用

1. 内容概述及基本要求

直线和圆的方程有着广泛的应用，本节主要是通过两个实例，学习其在生产和生活实际中的应用.通过本节学习，使学习达到以下要求：

(1)能用直线方程解决一些简单问题.

(2)能用圆的方程解决一些简单的问题.

(3)复习直线与圆的方程.

(4)让学生完整体验解析几何研究问题的过程.

2. 重难点分析

本节重难点：直线方程与圆的方程的简单应用.

3. 教学建议

本节首先指出直线和圆在生产和生活实际中的有关应用，并给出了两个例题.

例 1 是一个生活游戏问题，在这一游戏中存在着数学道理.解决此问题的方法叫做解析法.解析法解题的一般步骤是：

(1)建立适当的直角坐标系；

(2)引入适应的参数设某些点的坐标，再求出另外一些点的坐标；

(3)通过有关公式，把要证(或要求)的几何问题转化为代数运算；

(4)通过代数运算的结论，给出结果.

例 2 也是解析法解题，并进一步复习直线与圆、直线与直线的位置关系等内容.

本节是对前面所学直线与圆有关知识的一个综合应用.教学时，要注意对前面知识的复习与小结.通过本节教学还要让学生了解数学建模的方法，本节两例，均是数学建模方法的培养.

2.4 空间解析几何

1. 内容概述及基本要求

飞机飞行时，其位置的确定，空间中，长方体顶点位置的确定等问题仅两个参数是无法解决的，因此有必要引入空间直角坐标系.本节介绍了空间直角坐标系的概念，并推导出空间直角坐标系内两点间的距离公式，并就此给出了应用.

通过本小节教学，要使学生达到如下目标：

(1)通过具体情境，感受建立空间直角坐标系的必要性.

(2)了解空间直角坐标系，会用空间直角坐标系刻画点的位置.

(3)通过表示特殊长方体(所有棱分别与坐标轴平行)顶点的坐标，探索并得出空间两点间的距离公式，并能应用此公式解决一些简单问题.

2. 重难点分析

本节的重难点：空间直角坐标系的有关概念和空间两点间的距离公式.

3. 教学建议

教材中，以飞机在空中飞行，所处位置的确定为实例，引出了建立空间直角坐标系的必要性.教学中，还可以启发学生举出类似的更多的实例，让学生感受建立空间直角坐标系的必要性.

在讲解空间直角坐标系的建立的必要性和建立空间直角坐标系的概念过程中要注意与平

面直角坐标系进行比较.

画空间直角坐标系时要注意 x 轴、y 轴、z 轴的顺序以免出错. 三个坐标轴两两相交可确定三个平面称为坐标平面，这三个坐标平面把空间分成了八个部分，要引导学生搞清在各个坐标轴和各个坐标平面内点的坐标的特点，还要明确点在八个部分中每一部分点的符号特点，以便能准确地写出点的坐标或由坐标说出点的位置.

推导空间两点的距离公式时，要分清有关点和线在 xoy 平面内的射影，从而准确地得出公式.

本节安排了两个例题.

例 1 的目的是使学生了解空间直角坐标系，会由有关条件写出点的坐标，同时会由坐标找出点所在的位置.

例 2 是空间两点距离公式的直接应用.

本节在练习的第 2 题和习题的第 1 题，给出了寻求对称点的问题，通过此两题，使学生更进一步了解空间直角坐标系.

数学探究

为使学生更进一步理解直线方程，在此设置了一个数学探究. 教学中，首先介绍直线系方程的概念. 实际上，我们前面求方程，待定斜率 k 所设的方程，待定截距 b 所设的方程就是一些直线系方程. 在此进一步引导学生探究过两条直线交点的直线系方程的表达形式. 探究时，要注意所设五个问题之间的联系，以便能准确地得出结果.

通过本节学习，还应让学生体验进行数学探究的常用方法，让学生自己学会设置问题进行探究.

六、相关资源

1. 两条直线的垂直条件的证明

证法 1 设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别是 k_1 和 k_2，倾斜角分别是 α_1 和 α_2，如图 2-1，则

$$\alpha_2=\alpha_1+90^\circ(\text{或 } \alpha_1=\alpha_2+90^\circ).$$

所以 $\tan\alpha_2=\tan(\alpha_1+90^\circ)=-\cot\alpha_1=-\dfrac{1}{\tan\alpha_1}$.

因此，$\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2=-1$，即 $k_1\cdot k_2=-1$.

反过来，若 $k_1k_2=-1$，即 $\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2=-1$.

①$\tan\alpha_1>0$，$\tan\alpha_2<0$，则 $\alpha_1\in(0^\circ,90^\circ)$，$\alpha_2\in(90^\circ,180^\circ)$，于是

$$\tan\alpha_1=-\frac{1}{\tan\alpha_2}=-\cot\alpha_2=\tan(90^\circ+\alpha_2)\Longrightarrow\alpha_1=90^\circ+\alpha_2$$

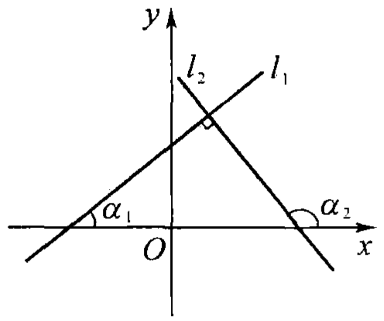


图 2-1

$\Longrightarrow l_1\perp l_2$.

②$\tan\alpha_1<0$，$\tan\alpha_2>0$，同理也有 $l_1\perp l_2$.

所以，两条直线垂直，则它们的斜率 k_1，k_2 满足：$k_1\cdot k_2=-1$；反过来，如果两条直线的斜率 k_1k_2 满足：$k_1\cdot k_2=-1$，那么这两条直线互相垂直.

证法 2 设直线 l_1 和 l_2 的斜率分别是 k_1 和 k_2，则直线 l_1 有方向向量 $\boldsymbol{a}=(1,k_1)$，直线 l_2 有方向向量 $\boldsymbol{b}=(1,k_2)$. 根据平面向量的有关知识

$$l_1\perp l_2\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\Longleftrightarrow1\times1+k_1\times k_2=0,$$

即 $l_1 \perp l_2 \Longleftrightarrow k_1 k_2 = -1$.

2. 点到直线的距离公式的其他证法

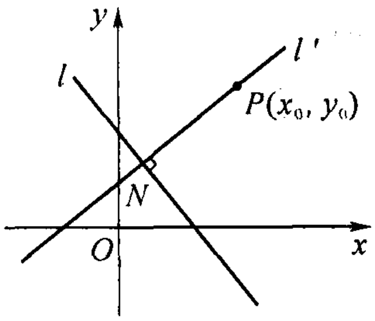


图 2-2

证法 2 如图 2-2,过 P 点向直线 l 引垂线 l',垂足为 $N(x'_0, y'_0)$,则直线 l' 的方程是 $B(x-x_0)-A(y-y_0)=0$.
因为点 N 在直线 l 上,所以有 $Ax'_0+By'_0+C=0$.

由 $\begin{cases} Ax'_0+By'_0+C=0, \\ B(x'_0-x_0)-A(y'_0-y_0)=0, \end{cases}$

得 $\begin{cases} A(x'_0-x_0)+B(y'_0-y_0)=-Ax_0+By_0+C, \\ B(x'_0-x_0)-A(y'_0-y_0)=0. \end{cases}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x'_0-x_0=-\dfrac{A}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C), \\ y'_0-y_0=-\dfrac{B}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C). \end{cases}$$

所以

$$d=\sqrt{(x'_0-x_0)^2+(y'_0-y_0)^2}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

证法 3 设 $P_1(x_1, y_1)$,$P_2(x_2, y_2)$是直线 l 上的任意两点,则

$$\begin{cases} Ax_1+By_1+C=0, \\ Ax_2+By_2+C=0. \end{cases}$$

两式左右两边分别相减,得

$$A(x_1-x_2)+B(y_1-y_2)=0.$$

取向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$,由向量数量积知识,知上式表示

$$\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P_2}=0.$$

所以 $\boldsymbol{n}=(A,B)$是与直线 l 垂直的向量.

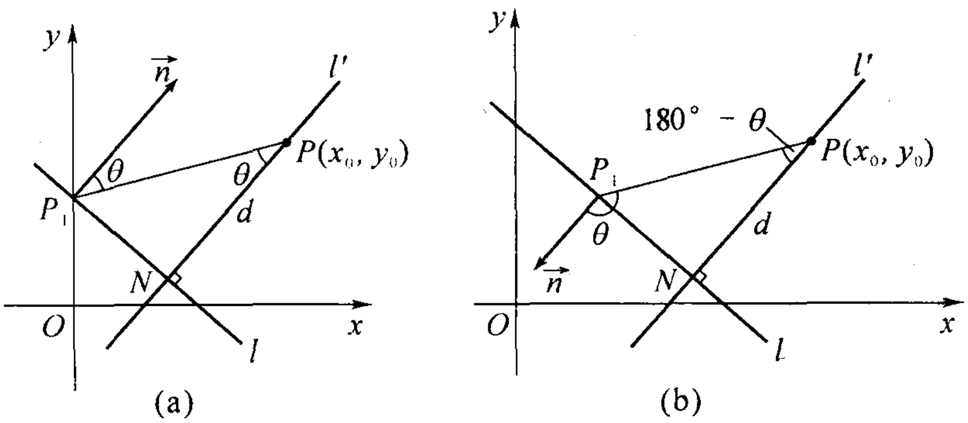


图 2-3

当 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{P_1P}$的夹角 θ 为锐角时(如图 2-3(a)),

$$d=|\overrightarrow{P_1P}|\cos\theta.$$

当 $\boldsymbol{n}$ 与$\overrightarrow{P_1P}$的夹角 θ 为钝角时(如图 2-3(b)),$d=|\overrightarrow{P_1P}|\cos(180^\circ-\theta)=-|\overrightarrow{P_1P}|\cos\theta=|\overrightarrow{P_1P}||\cos\theta|$,

所以都有 $d=|P_1P||\cos\theta|$.

因为 $\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P}=|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{P_1P}|\cos\theta$,

$$\overrightarrow{P_1P}=(x_0-x_1, y_1-y_0),$$

所以 $\quad \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+By_1).$

又 P_1 在 l 上，所以

$$Ax_1+By_1+C=0\Longrightarrow-(Ax_1+By_1)=C.$$

所以 $\quad \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P}=Ax_0+By_0+C.$

因此

$$d=\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{P_1P}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

3. 点关于直线对称的点的求法

已知直线 l:$Ax+By+C=0$，点 $P(x_0,y_0)$在直线 l 外，求点 P 关于 l 的对称点的坐标.

解法 1 设点 P 关于 l 的对称点 P'的坐标是(x'_0,y'_0)，则有

$$\begin{cases}B(x'_0-x_0)-A(y'_0-y_0)=0,\\ \dfrac{y'_0-y_0}{x'_0-x_0}\cdot(-\dfrac{B}{A})=-1.\end{cases}$$

解这个方程组得，

$$\begin{cases}x'_0-x_0=-\dfrac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},\\ y'_0-y_0=-\dfrac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}.\end{cases}$$

所以点 P'的坐标是

$$(x_0-\frac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}, y_0-\frac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}).$$

解法 2 设所求点为 $P'(x'_0,y'_0)$. $\overrightarrow{PP'}$的方向向量即直线 l 的法向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$，所以直线 PP'的方程为

$$\begin{cases}x=x_0+At,\\ y=y_0+Bt.\end{cases}$$

设 M 为直线 PP'与直线 l 的交点，对应的参数为 t_M，则有

$$A(x_0+At_M)+B(y_0+Bt_M)+C=0.$$

解得

$$t_M=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}.$$

设 P'对应的参数为 t'_p，由参数 t 的几何意义知

$$t'_p=2t_M=-\frac{2(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

所以 $\quad \begin{cases}x'_0=x+At_{p'}=x_0-\dfrac{2A(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}},\\ y'_0=y_0+Bt_{p'}=y_0-\dfrac{2B(Ax_0+By_0+C)}{\sqrt{A^2+B^2}}.\end{cases}$

即得点 P'的坐标.

特别地，点 $P(x_0,y_0)$关于直线 $y=x+b$ 的对称点是 $P_1(y_0-b,x_0+b)$；关于直线 $y=-x+b$ 的对称点是 $P_2(b-y_0,b-x_0)$.

4. 二元一次不等式表示的平面区域

我们知道，在平面直角坐标系中，以二元一次方程 $x+y-1=0$ 的解为坐标的点的集合

$\{(x,y)\mid x+y-1=0\}$

是经过(0,1)和(1,0)的一条直线 l(如图 2-4). 那么，以二元一次不等式 $x+y-1>0$ 的解为坐标的点的集合

$A=\{(x,y)\mid x+y-1>0\}$

是什么图形呢?

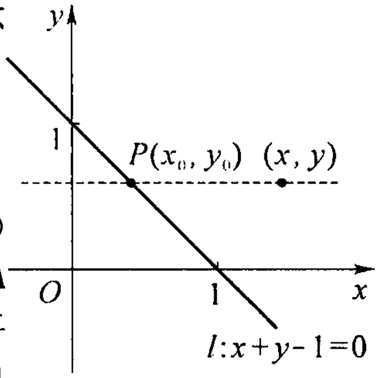


图 2-4

在平面直角坐标系中，所有点被直线 l 分为三类：(1)在 l 上；(2)在 l 的右上方的平面区域；(3)在 l 的左下方的平面区域. 取集合 A 中的点(1,1)、(1,2)、(2,2)等，我们发现这些点都在 l 的右上方的平面区域. 而点(0,0)(−1,−1)等不属于 A，它们满足不等式 $x+y-1<0$，这些点都在 l 的左下方的平面区域.

由此我们猜想，对直线 l 右上方的任意点(x,y)，$x+y-1>0$ 成立；对直线 l 左下方的任意点(x,y)，$x+y-1<0$ 成立. 下面证明这个事实.

在直线 $l: x+y-1=0$ 上任取一点 $P(x_0,y_0)$，过点 P 作垂直于 y 轴的直线 $y=y_0$，在此直线上点 P 右侧的任意一点(x,y)(如图 2-4)，都有

$x>x_0, y=y_0.$

所以 $x+y>x_0+y_0$.

于是 $x+y-1>x_0+y_0-1=0$.

所以 $x+y-1>0$.

因为点 $P(x_0,y_0)$是 l 上的任意点，所以，对于直线 $l: x+y-1=0$ 右上方的任意点(x,y)，$x+y-1>0$ 都成立. 同理，对于直线 $l: x+y-1=0$ 左下方的任意点(x,y)，$x+y-1<0$ 都成立.

所以在平面直角坐标系中，以二元一次不等式 $x+y-1>0$ 的解为坐标的点的集合

$\{(x,y)\mid x+y-1>0\}$

是直线 $x+y-1=0$ 右上方的平面区域(如图 2-5). 集合

$\{(x,y)\mid x+y-1<0\}$

表示的点集是直线 $x+y-1=0$ 左下方的平面区域.

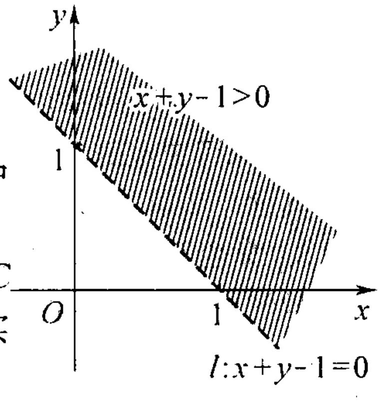


图 2-5

一般地，二元一次不等式 $Ax+By+C>0$ 在平面直角坐标系中表示 $Ax+By+C=0$ 某一侧所有点组成的平面区域.

把直线画成虚线以表示区域不包括边界直线. 若画 $Ax+By+C\geqslant 0$ 表示的平面区域时，此区域包括边界直线，则把边界直线画成实线.

为确定所表示的是哪一侧，只需在此直线的某一侧取一个特殊点(x_0,y_0)，以 Ax_0+By_0+C 的正负情况便可判断 $Ax+By+C>0$ 表示这一直线哪一侧的平面区域. 特别地当 $C\neq 0$ 时，常取原点为特殊点. 由此就可解释为什么点到直线距离公式中 Ax_0+By_0+C 要加绝对值符号.

七、评价建议

1. 学生学习过程的评价

通过对学生课堂观察及课后练习的查阅等学习过程的了解，作出评价. 此评价可制作一个

观察检核表来完成，每节内容给一个考核表作好记载，样表如下.

内容:2.1.1 直线的倾斜角　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　学生姓名＿＿＿＿＿

<table>
<tr><th>观察项目</th><th>因素</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>说明</th></tr>
<tr><td rowspan="4">知识与技能</td><td>倾斜角的概念</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="4">1＝真正理解与掌握
2＝初步掌握
3＝参与了有关活动</td></tr>
<tr><td>斜率的概念</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>斜率的公式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>实际应用</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="5">过程与方法</td><td>探索确定直线位置的几何要素</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="3">1＝认真
2＝一般
3＝不认真</td></tr>
<tr><td>探索斜率公式</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>搜集斜率描述的实际例子</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>思维的条理性</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">1＝强
2＝一般
3＝不强</td></tr>
<tr><td>思维的独创性</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">情感、态度价值观</td><td>作业</td><td></td><td></td><td></td><td rowspan="2">1＝积极
2＝一般
3＝不积极</td></tr>
<tr><td>与人合作交流</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

其他各节可类似地制定表格，以对学生整个学习过程进行全面跟踪，以便评价.

建议要求学生培养记数学日记的习惯，对每天所学内容进行整理小结和反思. 以便更好地掌握所学内容.

2. 学生基础知识、基本技能的理解的评价

对学生基础知识、基本技能理解的评价除传统的测验性评价外，建议对相关内容设置一些开放性任务，以了解学生对双基的理解程度.

以 2.1.1 节为例设置几个问题.

(1)搜集由一点和一个角确定直线的实例.

(2)讨论直线的斜率随直线倾斜角变化而变化的规律.

(3)仿照例 3 再举出一些斜率应用问题的实际(可参照教材 P95 思考与实践 1).

(4)课后在电脑上验证斜率与倾斜角的关系等等.

其他小节可类似地设置问题.

3. 学生发现问题和解决问题能力的评价

教学中要鼓励学生大胆地提出置疑，敢于问问题，以此对学生进行观察. 另外也可通过调查、实验或布置开放性任务对学生进行测评. 本章在旁批中设置了多个思考性开放问题，这些都是评价学生发现问题和解决问题的好素材. 另外还可根据所学内容及时地设置问题以对学生能力进行评价，以调整教学内容和方式、方法.

另外还可通过阅读材料对学生进行阅读能力的测评；利用数学探索对学生进行数学创新能力的测评；通过直线方程，圆方程的建立过程，2.4 节应用问题的解答过程，对学生进行数学建模能力的评价.

通过对学生全面评价，给学生以评价反馈. 以提高学生学习的目的性和成就感，增强学生学习的主动性.

八、习题解答

练习(第 52 页)

1. 直线 l_2 的倾斜角为 $\alpha_2=90°+60°=150°$，因此其斜率为 $k=\tan\alpha_2=\tan 150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. 在图(1)中，直线 AB 与直线 DC 的倾斜角都是 $30°$，斜率都是$\frac{\sqrt{3}}{3}$；直线 BC 与直线 AD 的倾斜角都是 $120°$，斜率都是$-\sqrt{3}$.

在图(2)中，直线 AB 与直线 DC 的倾斜角都是 $150°$，斜率都是$-\frac{\sqrt{3}}{3}$；直线 AD 与直线 BC 的倾斜角都是 $60°$，斜率都是$\sqrt{3}$.

练习(第 54 页)

1. (1)斜率不存在，倾斜角 $\alpha=90°$；　(2)斜率 $k=-\sqrt{3}$，倾斜角 $\alpha=120°$；

(3)斜率 $k=2$，倾斜角 $\alpha=63°26'$；　(4)斜率 $k=-\frac{3}{5}$，倾斜角 $\alpha=149°2'$.

2. (1)$\alpha=0°$；　(2)$\alpha=90°$；　(3)$\alpha=45°$.

习题 2.1.1

1. (1)$k=\sqrt{3}$；　(2)$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(3)$k=\tan 88°=28.6$；　(4)$k=\tan 130°=-1.19$.

2. 直线 AB 的斜率 $k_1=4$，倾斜角是 $75°58'$；

直线 BC 的斜率是 $k_2=\frac{1}{2}$，倾斜角是 $26°34'$；

直线 CD 的斜率是 $k_3=-4$，倾斜角是 $104°2'$；

直线 DA 的斜率是 $k_4=\frac{1}{4}$，倾斜角是 $14°2'$.

3. 因为 A、B、C 三点共线，所以 $K_{AB}=K_{AC}$. 即$\frac{-3-4}{m-2}=\frac{2-4}{4-2}$，解之得 $m=9$.

4. 作图可知：$k\in[k_{PB},+\infty)\cup(-\infty,k_{PA}]$，而 $k_{PA}=\frac{-2-3}{0-(-2)}=-\frac{5}{2}$，$k_{PB}=\frac{-2-2}{0-3}=\frac{4}{3}$，因此 $k\in(-\infty,-\frac{5}{2}]\cup[\frac{4}{3},+\infty)$.

5. 设 $|AB|=t$，则 $A(8,6)$，$B(8+t,6)$，$C(12+t,0)$，因此有

$k_{OA}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$，$k_{AB}=\frac{6-6}{8+t-8}=0$，$k_{BC}=\frac{0-6}{(12+t)-(8+t)}=-\frac{3}{2}$.

练习(第 57 页)

1. (1)$y-5=4\cdot[x-(-2)]$；　(2)$y-1=\sqrt{2}(x-2)$；

(3)$k=\sqrt{3}$，$y-2=\sqrt{3}(x+\sqrt{2})$；　(4)$k=0$，$y-3=0$；

(5)$k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y+2=-\frac{\sqrt{3}}{3}(x-4)$.　(图形略.)

2. (1)$1, 45°$;　(2)$-\frac{\sqrt{3}}{3}, 150°$;　(3)$-2, -2$;　(4)$0, -2$;　(5)$90°$.

3. (1)由直线方程的斜截式得：$y=-2x-2$，即 $2x+y+2=0$；

(2)由直线方程的点斜式得：$y-0=2(x+2)$，即 $2x-y+4=0$.

练习(第 59 页)

1. (1)$\frac{y-(-3)}{1-(-3)}=\frac{x-0}{2-0}$，即 $y=2x-3$；　(2)$\frac{y-0}{-5-0}=\frac{x-0}{-4-0}$，即 $y=\frac{5}{4}x$.

2. 过点 A、B 的直线方程是：$\frac{y-3}{7-3}=\frac{x-1}{5-1}$，即 $x-y+2=0$. 因为点 $P(a,12)$在直线 AB 上，所以 $a-12+2=0$，故 $a=10$.

3. (1)直线方程为：$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$，即 $3x+2y-6=0$；

(2)直线方程为：$\frac{x}{-5}+\frac{y}{6}=1$，即 $6x-5y+30=0$.　(图形略.)

练习(第 61 页)

1. (1)$y+2=-\frac{1}{2}(x-8)$，即 $x+2y-4=0$；　(2)$y=2$，即 $y-2=0$；

(3)$x=-1$，即 $x+1=0$；　(4)$\frac{y+4}{-2+4}=\frac{x-5}{3-5}$，即 $x+y-1=0$.

(5)$\frac{2x}{3}+\frac{y}{-3}=1$，即 $2x-y-3=0$.

2. (1)D；　(2)C.

3. (1)$A\neq0$ 且 $B\neq0$；　(2)$C=0$ 且 $A^2+B^2\neq0$；　(3)$B=0$ 且 $AC\neq0$；

(4)$B=C=0$ 且 $A\neq0$.

习题 2.1.2

1. (1)$y+2=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-8)$，即$\sqrt{3}x-2y-8\sqrt{3}-4=0$；　(2)$y=-4x+7$；

(3)$x=-2$；　(4)$y=2$；　(5)$\frac{y+2}{8+2}=\frac{x-4}{-1-4}$，即 $2x+y-6=0$；

(6)因直线与 y 轴夹角是 $45°$，所以直线的倾斜角为 $45°$或 $135°$，即 $k=1$ 或 -1. 故所求直线方程为：$y=x-6$ 或 $y=-x-6$.

2. 直线 l 过点$(2,0)$，斜率为$-\frac{\sqrt{3}}{3}$，故直线倾斜角是 $150°$. 由题意知直线 l'的倾斜角是 $120°$，故 l'的斜率是$k'=\tan120°=-\sqrt{3}$，l'的方程是：$y=-\sqrt{3}(x-2)$，即$\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$.

3. AB 所在直线方程为：$\frac{y-5}{-2-5}=\frac{x-0}{1-0}$，即 $7x+y-5=0$；BC 所在直线方程为：$\frac{y+2}{4+2}=\frac{x-1}{-6-1}$，即 $6x+7y+8=0$；AC 所在直线方程为：$\frac{y-5}{4-5}=\frac{x-0}{-6-0}$，即 $x-6y+30=0$.

4. 当截距为 0 时，所求直线方程为：$y=\frac{2}{3}x$；当截距不为 0 时，设所求方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}=1$，将点 P 坐标代入求得 $a=5$，所以$\frac{x}{5}+\frac{y}{5}=1$，即 $x+y=5$. 综上所述，所求直线方程为：$y=\frac{3}{2}x$

或 $x+y-5=0$.

5. 因为正方形边长为 4，所以正方形对角线长为 $4\sqrt{2}$，由题意知四个顶点坐标分别是：$A(2\sqrt{2},0)$，$B(0,2\sqrt{2})$，$C(-2\sqrt{2},0)$，$D(0,-2\sqrt{2})$. 由此得：直线 AB 的方程是：$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=1$，即 $x+y-2\sqrt{2}=0$；直线 BC 的方程是：$\frac{x}{-2\sqrt{2}}+\frac{y}{2\sqrt{2}}=1$，即 $x-y+2\sqrt{2}=0$；直线 CD 的方程是：$\frac{x}{-2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2\sqrt{2}}=1$，即 $x+y+2\sqrt{2}=0$；直线 AD 的方程是：$\frac{x}{2\sqrt{2}}+\frac{y}{-2\sqrt{2}}=1$，即 $x-y-2\sqrt{2}=0$.

对称轴是 x 轴，y 轴及一、三象限，二、四象限的角平分线，其直线方程分别是：$y=0$，$x=0$，$y=x$，$y=-x$.

6. 直线 AB 的方程是：$\frac{y-3}{7-3}=\frac{x-1}{5-1}$. 即 $x-y+2=0$. 把点 $C(10,12)$ 代入方程左边得：$10-12+2=0$，即点 C 坐标满足方程，所以 A、B、C 三点共线.

7. 由题意知 l 在两坐标轴上截距的绝对值相等，设为 a. 则 $\frac{1}{2}a^2=18$，故 $a=\pm 6$. 因此所求直线方程是：$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}=1$，或 $\frac{x}{6}+\frac{y}{-6}=1$，或 $\frac{x}{-6}+\frac{y}{6}=1$，或 $\frac{x}{-6}+\frac{y}{-6}=1$. 即 $x+y-6=0$，或 $x-y-6=0$，或 $x-y+6=0$，或 $x+y+6=0$.

8. 由题意知点 P 坐标是 $(20,10)$，小路 AC 所在直线的斜率是 $k=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$，其方程是：$y-10=\sqrt{3}(x-20)$，即 $\sqrt{3}x-y+10-20\sqrt{3}=0$. 小路 BD 所在直线的斜率是 $k=\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，其方程是：$y-10=-\sqrt{3}(x-20)$，即 $\sqrt{3}x+y-10-20\sqrt{3}=0$.

练习(第 64 页)

1. (1)两直线平行；　(2)两直线垂直；　(3)两直线既不平行也不垂直；
(4)两直线垂直；　(5)两直线平行.

2. (1)直线 $2x+y-5=0$ 的斜率是 -2，故所求直线的斜率也是 -2. 由直线方程的点斜式得所求直线方程是：$y-3=-2(x-2)$，即 $2x+y-7=0$.

(2)直线 $x-y-2=0$ 的斜率是 1，故所求直线的斜率是 -1. 由直线方程的点斜式得所求直线方程是：$y-3=-1\cdot(x-2)$，即 $x+y-5=0$.

(3)(1)当 $C_1\neq C_2$ 时，$l_1 /\!/ l_2$；　(2)$l_1\perp l_2$.

练习(第 66 页)

1. (1)解方程组 $\begin{cases}2x-y=7,\\4x+2y=1,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=\frac{15}{8},\\y=-\frac{13}{4}.\end{cases}$ 故 l_1 与 l_2 相交，其交点坐标是 $(\frac{15}{8},-\frac{13}{4})$.

(2)$k_1=\frac{1}{3}$，$b_1=\frac{2}{3}$；$k_2=\frac{1}{3}$，$b_2=\frac{2}{3}$. 因为 $k_1=k_2$ 且 $b_1=b_2$，所以 l_1 与 l_2 重合.

(3)$k_1=1-\sqrt{2}$，$b_1=3$；$k_2=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1-\sqrt{2}$，$b_2=2$. 因为 $k_1=k_2$ 且 $b_1\neq b_2$，所以 $l_1 /\!/ l_2$.

2. 把 $M(2,-1)$ 代入 l_1，l_2 的方程中得 $\begin{cases}2a-b+1=0,\\4-1-a=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=7.\end{cases}$

3. 解方程组$\begin{cases}2x-y+4=0,\\x-y+5=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=1,\\y=6,\end{cases}$即交点为(1,6). 直线 $x-2y=0$ 的斜率是$\frac{1}{2}$,故所求直线的斜率是-2,因此所求直线的方程是:$y-6=-2(x-1)$,即 $2x+y-8=0$.

习题 2.1.3

1. (1)两直线平行; (2)两直线平行; (3)两直线垂直; (4)两直线垂直.

2. (1)所求直线的斜率是 $k=\frac{2-(-5)}{1-(-1)}=\frac{7}{2}$,由直线方程的点斜式得所求直线的方程是:$y+3=\frac{7}{2}(x-2)$,即 $7x-2y-20=0$.

(2)直线 $2x+y-5=0$ 的斜率是-2,所以所求直线的斜率是$\frac{1}{2}$,所求直线的方程是:$y=\frac{1}{2}(x-3)$,即 $x-2y-3=0$.

3. BC 边所在直线的斜率是 $k=\frac{1-(-1)}{2-(-1)}=\frac{2}{3}$,故 BC 边上的高所在直线的斜率是$-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}$. 又该直线过点 $A(1,3)$,因此所求直线方程是:$y-3=-\frac{3}{2}(x-1)$,即 $3x+2y-9=0$.

4. (1)解方程组$\begin{cases}2x-3y+10=0,\\3x+4y-2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-2,\\y=2.\end{cases}$即交点坐标是$(-2,2)$. 直线$3x-2y+4=0$的斜率是$\frac{3}{2}$. 故所求直线的斜率是$-\frac{2}{3}$. 因此所求直线的方程是:$y-2=-\frac{2}{3}(x+2)$,即 $2x+3y-2=0$.

(2)解方程组$\begin{cases}2x+y-8=0,\\x+2y+1=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{17}{3},\\y=-\frac{10}{3}.\end{cases}$即交点坐标为$(\frac{17}{3},-\frac{10}{3})$. 直线 $4x-3y-7=0$ 的斜率是$\frac{4}{3}$,故所求直线的斜率是$\frac{4}{3}$. 因此所求直线的方程是:$y+\frac{10}{3}=\frac{4}{3}(x-\frac{17}{3})$,即 $12x-9y-98=0$.

5. 直线 $2x+3y-m=0$ 与 y 轴交点是$(0,\frac{m}{3})$. 它应在直线 $x-my+12=0$ 上,所以有:$-\frac{m^2}{3}+12=0$. 故 $m=\pm 6$.

6. 供需平衡点即为需求线与供给线的交点. 解方程组$\begin{cases}5P+Q-50=0,\\6P-Q+17=0,\end{cases}$得$\begin{cases}P=3,\\Q=35.\end{cases}$因此所求市场的供需平衡点是(3,35),即原价为 3 元/千克,产量为 35 吨时供需平衡.

练习(第 69 页)

1. (1)$2\sqrt{5}$; (2)4.

2. (1)0,即点在直线上; (2)$\frac{2}{5}$.

3. (1)$2\sqrt{13}$; (2)$6x+8y=7$ 可化为 $3x+4y-\frac{7}{2}=0$,故 $d=\frac{|-\frac{7}{2}-0|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{7}{10}$.

习题 2.1.4

1. 直线 BC 的方程是：$\frac{y-6}{-2-6}=\frac{x+5}{-4+5}$，即 $8x+y+34=0$. 点 A 到直线 BC 的距离 $d=\frac{|8\times1+3+34|}{\sqrt{8^2+1}}=\frac{45}{\sqrt{65}}$，又 $|BC|=\sqrt{(-5+4)^2+(6+2)^2}=\sqrt{65}$. 所以 $\triangle ABC$ 的面积是 $S=\frac{1}{2}|BC|d=\frac{45}{2}=22\frac{1}{2}$.

2. $\frac{2}{13}\sqrt{13}$.

3. 设点 P 的坐标是 $(x,5-3x)$，则有 $\frac{|x-(5-3x)-1|}{\sqrt{2}}=2$，故 $x=\frac{3+\sqrt{2}}{2}$ 或 $x=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$，故点 P 坐标是 $(\frac{3+\sqrt{2}}{2},\frac{1-3\sqrt{2}}{2})$，$(\frac{3-\sqrt{2}}{2},\frac{1+3\sqrt{2}}{2})$.

4. 解方程组 $\begin{cases}x+2y-7=0,\\5x-y-13=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$ 即 $M(3,2)$. 因 M 为 BC 中点，由中点公式得 C 点坐标是 $(1,3)$，直线 AB 的斜率是 $k_{AB}=\frac{1-(-3)}{5-2}=\frac{4}{3}$，因此 CD 所在直线斜率是 $k=-\frac{1}{k_{AB}}=-\frac{3}{4}$，直线 CD 的方程是：$y-3=-\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x+4y-15=0$.

5. 两质点相遇即两质点同时到达两直线的交点处. 解方程组 $\begin{cases}y=x,\\4x-3y-8=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=8,\\y=8,\end{cases}$ 即两直线交点坐标是 $Q(8,8)$. 质点 M 到达 Q 点行驶距离是：$\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2}$，所花时间是：$t_1=\frac{8\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=4$(秒)；质点 N 到达 Q 点行驶的距离是：$\sqrt{(8-2)^2+(8-0)^2}=10$，所花时间是：$t_2=\frac{10}{2.5}=4$(秒). $t_1=t_2$，故两质点能相遇.

讨论题(第 72 页)

除上网查询外，还可到图书馆去查阅相关文献资料，了解解析几何产生与发展的历程. 继而写一篇认识，与同学交流探讨.

练习(第 74 页)

1. (1)圆心 $(-2,-3)$，半径为 $\sqrt{5}$；　(2)圆心为 $(1,-1)$，半径为 $|m|$；

(3)圆心是 $(0,-a)$，半径为 $\sqrt{-a}$.

2. (1) $(x-2)^2+(y+\sqrt{3})^2=7$；　(2) $(x+2)^2+y^2=4$；

(3)圆心 $(\frac{-2+4}{2},\frac{3-5}{2})$，即 $(1,-1)$，半径 $r=\frac{1}{2}\sqrt{(-2-4)^2+(3+5)^2}=5$. 故所求圆的方程是：$(x-1)^2+(y+1)^2=25$.

3. 半径 $r=\frac{|3\times1-4\times3-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{16}{5}$. 所求圆方程是：$(x-1)^2+(y-3)^2=\frac{256}{25}$.

练习(第 76 页)

1. (1)原点；

(2)方程可化为：$(x-1)^2+(y+2)^2=11$，表示圆心为$(1,-2)$，半径为$\sqrt{11}$的圆；

(3)方程可化为：$(x+a)^2+y^2=a^2+b^2$. 当$a^2+b^2=0$时，表示原点；当$a^2+b^2\neq 0$时，表示圆心为$(-a,0)$，半径为$\sqrt{a^2+b^2}$的圆.

2. (1)圆心坐标是$(3,0)$，半径是3；　(2)圆心坐标是$(0,-b)$，半径是$|b|$；

(3)圆心坐标是$(a,\sqrt{3}a)$，半径是$|a|$.

3. 圆$x^2+y^2=4$的圆心是$O(0,0)$，半径$r=2$；圆$x^2+y^2+4x-4y+m=0$的圆心是$O_1(-2,2)$，半径是$r_1=\sqrt{8-m}$. 由题意直线l是线段OO_1的垂直平分线，OO_1的中点是$(-1,1)$，$k_{OO_1}=-1$，故l的斜率是$k=1$，直线l的方程是：$y-1=x+1$，即$x-y+2=0$. 由$r=r_1$得$\sqrt{8-m}=2$，所以$m=4$.

4. 设圆的方程是：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，得$\begin{cases}2+D-E+F=0,\\17+D+4E+F=0,\\20+4D-2E+F=0.\end{cases}$解这个方程组得$\begin{cases}D=-7,\\E=-3,\\F=2.\end{cases}$所以所求圆的方程是：$x^2+y^2-7x-3y+2=0$.

习题 2.2.1

1. (1)CD的垂直平分线的方程是：$y=-x+2$. 令$y=0$得$x=2$，所以所求圆圆心是$(2,0)$. 半径$r=\sqrt{(2+1)^2+(0-1)^2}=\sqrt{10}$. 所求圆方程是：$(x-2)^2+y^2=10$.

(2)圆心是$(0,1)$或$(0,11)$. 故所求圆方程是：$x^2+(y-1)^2=25$或$x^2+(y-11)^2=25$.（图形略.）

2. 设圆心坐标是$(3a,a)$，则半径$r=3|a|$. 圆心到直线$y=x$的距离是：$d=\frac{|3a-a|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}|a|$，因此有$(\sqrt{2}|a|)^2+(\sqrt{7})^2=(3|a|)^2$，解得$a=\pm 1$. 所求圆的方程是：$(x-3)^2+(y-1)^2=9$或$(x+3)^2+(y+1)^2=9$.

3. 证明：因为直径的端点为$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，所以圆心和半径分别为$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$，$\frac{1}{2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$. 从而圆的方程为：

$$\left(x-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2=\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}.$$

化简得

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0,$$

即

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0.$$

4. 设圆的方程是：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，则

$\begin{cases}26-D+5E+F=0,\\50+5D+5E+F=0,\\40+6D-2E+F=0.\end{cases}$解得$\begin{cases}D=-4,\\E=-2,\\F=-20.\end{cases}$

所以所求圆方程是：$x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

5. 解方程组$\begin{cases}x^2+y^2+6x-4=0,\\x^2+y^2+6y-28=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$或$\begin{cases}x=-6,\\y=-2.\end{cases}$

故两圆交点是$M(-1,3)$,$N(-6,-2)$. MN的垂直平分线的方程是:$x+y+3=0$. 解方程组$\begin{cases}x+y+3=0,\\x-y-4=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\y=-\frac{7}{2}.\end{cases}$即所求圆圆心是$(\frac{1}{2},-\frac{7}{2})$,半径是$r=\sqrt{(\frac{1}{2}+1)^2+(-\frac{7}{2}-3)^2}=\sqrt{\frac{89}{2}}$.

因此所求圆方程是:$(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{7}{2})^2=\frac{89}{2}$,即$x^2+y^2-x+7y-32=0$.

6. 设所求圆的方程是:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$,因为圆过原点O,所以$F=0$,圆方程是:$x^2+y^2+Dx+Ey=0$. 令$y=0$,得$x=0$或$x=-D$. 所以有$|D|=2$,$D=\pm2$. 又圆过点$A(-1,3)$,所以有$10-D+3E=0$.

当$D=2$时,$E=-\frac{8}{3}$;当$D=-2$时,$E=-4$,故所求圆方程是:$x^2+y^2+2x-\frac{8}{3}y=0$或$x^2+y^2-2x-4y=0$.

7. 设所求圆的方程是:$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$. 其圆心坐标是$(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2})$,由题意有

$$\begin{cases}F=0,\\2+D+E+F=0,\\2\times(-\frac{D}{2})+3\times(-\frac{E}{2})+1=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}D=-8,\\E=6,\\F=0.\end{cases}$$

所以所求圆的方程是:$x^2+y^2-8x+6y=0$.

8. 以AB所在直线为x轴,点O为坐标原点建立直角坐标系,圆拱所在圆半径为r,则有:$(r-4)^2+10^2=r^2$. 解得$r=\frac{29}{2}$,所以圆心坐标是$(0,-\frac{21}{2})$. 故圆拱所在圆的方程是:$x^2+(y+\frac{21}{2})^2=(\frac{29}{2})^2$.

设$P_2(-2,y)$代入圆方程中得:$4+(y+\frac{21}{2})^2=(\frac{29}{2})^2$. 解之得:$y=\frac{-21\pm5\sqrt{33}}{2}$,取正根得$y=3.86$. 因此支柱$A_2P_2$的长度是3.86 m.

练习(第79页)

1. (1)相交; (2)相交; (3)相离; (4)相切.

2. (1)设切线方程是:$y=x+b$,即$x-y+b=0$,则有

$$\frac{|1-0+b|}{\sqrt{2}}=1\Longleftrightarrow b=-1\pm\sqrt{2}.$$

故所求切线方程是:$y=x-1+\sqrt{2}$,或$y=x-1-\sqrt{2}$.

(2)设切线方程是$y=kx+1$,即$kx-y+1=0$. 则有

$$\frac{|k+1|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Longleftrightarrow k=0.$$

所以$y=1$为所求的切线方程.

3. 设所求切线方程是 $y-2=k(x-1)$，即 $kx-y+2-k=0$. 所以有

$$\frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}}=1\Longleftrightarrow k=\frac{3}{4}.$$

所以：$\frac{3}{4}x-y+\frac{5}{4}=0$，即 $3x-4y+5=0$. 又过 $P(1,2)$ 垂直于 x 轴的直线 $x=1$ 显然与圆相切，因此所求切线方程是：$x=1$ 或 $3x-4y+5=0$.

练习(第 81 页)

1. D.　2. $3\sqrt{2}$.

3. 圆 $x^2+y^2-4x-8y-80=0$ 的圆心是 $O_1(2,4)$. $k_{O_1A}=1$，故所求弦所在直线的斜率是 $k=-1$，故所求弦所在直线的方程是：$y-5=-1\cdot(x-3)$，即 $x+y-8=0$.

习题 2.2.2

1. 解方程组 $\begin{cases}3x-y+1=0,\\x+3y-1=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=-\frac{1}{5},\\y=\frac{2}{5},\end{cases}$ 即 l_1 与 l_2 的交点是 $M(-\frac{1}{5},\frac{2}{5})$. 设所求直线方程是：$y-\frac{2}{5}=k(x+\frac{1}{5})$，即 $kx-y+\frac{k}{5}+\frac{2}{5}=0$. 由题意有

$$\frac{\left|\frac{k}{5}+\frac{2}{5}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{2}{5},$$

解得 $k=0$ 或 $k=\frac{4}{3}$.

故所求切线方程是：$y=\frac{2}{5}$ 或 $4x-3y+2=0$.

2. 设切线方程是：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1(a>0,b>0)$. 则 $bx+ay-ab=0$. 所以有

$$\begin{cases}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=r,\\ \frac{1}{2}ab=\frac{2\sqrt{3}}{3}r^2,\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\frac{16}{3}r^2,\\ ab=\frac{4\sqrt{3}}{3}r^2.\end{cases}$$

解得 $a=2r,b=\frac{2\sqrt{3}}{3}r$，或 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3}r,b=2r$.

因此所求切线方程为：$x+\sqrt{3}y-2r=0$ 或 $\sqrt{3}x+y-2r=0$.

3. 由 $(m+1)x+(m-1)y-2m=0$，得 $m(x+y-2)+(x-y)=0$.

令 $\begin{cases}x+y-2=0,\\x-y=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=1.\end{cases}$ 即直线 l 过定点 $A(1,1)$.

由 $x^2+y^2-4y=0$，得 $x^2+(y-2)^2=4$. 故圆心是 $O_1(0,2)$，半径是 $r=2$.

因为 $|O_1A|=\sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}<2=r$，所以点 A 在圆内，即直线 l 恒过圆内一点. 故直线 l 与圆不能相切.

4. 过圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心 O 与直线 $4x+3y=12$ 垂直的直线方程是：$y=\frac{3}{4}x$.

解方程组$\begin{cases}y=\dfrac{3}{4}x,\\4x+3y=12,\end{cases}$ 得$\begin{cases}x=\dfrac{48}{25},\\y=\dfrac{36}{25}.\end{cases}$ 因此所求点 P 的坐标是：$(\dfrac{48}{25},\dfrac{36}{25})$.

5. (1)圆 $x^2+y^2=25$ 的弦长为 8 的弦到圆心的距离是 3. 设所求弦所在直线方程是：

$$y+\frac{3}{2}=k(x+3)\text{，即 } kx-y+3k-\frac{3}{2}=0,$$

则有$\dfrac{|3k-\frac{3}{2}|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得 $k=-\dfrac{3}{4}$. 所以有：$3x+4y+15=0$.

又过点 P 垂直于 x 轴的直线 $x=-3$ 满足条件，故所求弦所在直线方程是：$x=-3$ 或 $3x+4y+15=0$.

(2)过点 P 的最长弦即过 P 点的直径，故所在直线 OP 的方程是：$y=\dfrac{1}{2}x$.

过点 P 的最短弦即过点 P 垂直于直线 OP 的直线，故其斜率为 $k=-2$，所在直线方程是：$y+\dfrac{3}{2}=-2\cdot(x+3)$，即 $4x+2y+15=0$.

练习(第 84 页)

1. (1)内切； (2)相交； (3)外切； (4)外切.
2. $4x+5=0$.
3. 圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心是 $O(0,0)$，半径是 $r=2$；圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$ 的圆心是 $O_1(3,4)$，半径是 $r_1=1$. $|OO_1|=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

所以 $|PQ|_{\min}=5-r_1-r=5-2-1=2$，$|PQ|_{\max}=5+r_1+r=5+2+1=8$.

习题 2.2.3

1. 圆 C_1 的圆心是 $C_1(0,0)$，半径 $r_1=8$；圆 C_2 的圆心是 $C_2(-\dfrac{32}{3},0)$，半径 $r_2=\dfrac{8}{3}$. $|C_1C_2|=\dfrac{32}{3}=r_1+r_2$，因此两圆外切，切点是 $(-8,0)$. 两圆共有三条公切线，内公切线的方程是：$x=-8$；由平面几何知识知，两条外公切线的倾斜角分别是：$30°$ 或 $150°$，与 x 轴的交点是 $(-16,0)$. 因此两条外公切线的方程分别是：$y=\tan30°\cdot(x+16)$ 或 $y=\tan150°\cdot(x+16)$. 即 $x-\sqrt{3}y+16=0$ 或 $x+\sqrt{3}y+16=0$.

2. 解方程组$\begin{cases}x^2+y^2-10x-10y=0, & ①\\x^2+y^2+6x+2y-40=0, & ②\end{cases}$

②－①化简得：$4x+3y-10=0$. 这就是两圆公共弦所在直线的方程，圆 $x^2+y^2-10x-10y=0$ 的圆心是 $C_1(5,5)$. 半径是 $5\sqrt{2}$，C_1 到公共弦的距离是

$$d_1=\frac{|4\times5+3\times5-10|}{\sqrt{4^2+3^2}}=5.$$

所以，两圆公共弦的长是 $2\sqrt{(5\sqrt{2})^2-5^2}=10$.

3. 设所求圆的方程是：$x^2+y^2-6x+\lambda(x^2+y^2-4)=0$.

把点 $(-2,4)$ 的坐标代入此方程得：$(-2)^2+4^2-6\times(-2)+\lambda[(-2)^2+4^2-4]=0$. 解得

$\lambda=-2$.

因此所求圆方程是：$x^2+y^2+6x-8=0$.

练习(第 87 页)

1. $l=0.000\,15t+12.5$. $t=100$℃时，$l=12.515$ m.

习题 2.3

1. 如图 2-5. 以 BC 所在直线为 x 轴，AD 所在直线为 y 轴建立直角坐标系，设点 $B(-b,0)$，$C(c,0)$. 则点 A 坐标是 $(0,b+c)$，点 M 的坐标是 $(\frac{c-b}{2},0)$. $k_{AC}=-\frac{b+c}{c}$，所以 AC 边上高所在直线方程是：

$$y=\frac{c}{b+c}(x+b).$$

令 $x=0$ 得 $y=\frac{bc}{b+c}$，即点 H 坐标是 $(0,\frac{bc}{b+c})$.

所以 $MH=\sqrt{(\frac{c-b}{2})^2+(\frac{bc}{b+c})^2}=\frac{b^2+c^2}{2(b+c)}$.

又 $DH=\frac{bc}{b+c}$，所以 $MH+DH=\frac{b^2+c^2}{2(b+c)}+\frac{bc}{b+c}=\frac{b^2+c^2+2bc}{2(b+c)}=\frac{b+c}{2}$.

又 $BC=b+c$，所以 $MH+DH=\frac{1}{2}BC$.

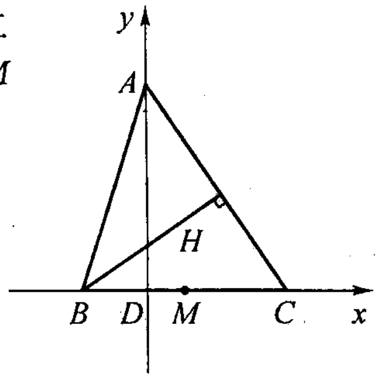


图 2-5

2. 以 DC 所在直线为 x 轴，线段 DC 中点为坐标原点建立直角坐标系(如图 2-6)，则有 $A(-1,-1.8)$，$B(1,-1.8)$，$C(1,0)$，$D(-1,0)$，设圆拱与 y 轴交于点 E，则 $E(0,0.5)$.

设圆拱所在圆半径为 r，则有：$(r-0.5)^2+1^2=r^2$. 解得 $r=\frac{5}{4}$，所以圆心是 $(0,-\frac{3}{4})$. 所以圆弧 $\overset{\frown}{CD}$ 的方程是：

$$x^2+(y+\frac{3}{4})^2=\frac{25}{16}(0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}).$$

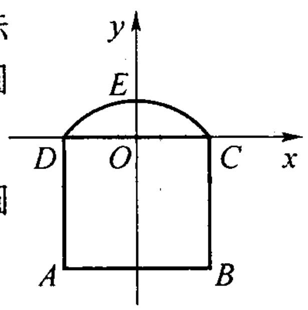


图 2-6

易得线段 AB 的方程是：$y=-1.8(-1\leqslant x\leqslant 1)$，线段 AD 的方程是：$x=-1(-1.8\leqslant y\leqslant 0)$.

3. 由题意可知，震中所在位置是分别以 A、B、C 为圆心，半径分别是 10，10，5 的三圆的交点. 解方程组

$$\begin{cases}x^2+(y+8)^2=10^2,\\ x^2+(y-8)^2=10^2,\\ (x-9)^2+(y-4)^2=5^2,\end{cases}\quad 得\begin{cases}x=6,\\ y=0.\end{cases}$$

即震中所在位置是点 $(6,0)$.

4. 分别以 BC、AE 所在直线为 x 轴，y 轴建立直角坐标系，则得线段 AB 方程是

$$\frac{x}{30}+\frac{y}{20}=1(0\leqslant x\leqslant 30).$$

由题意知，应在 AB 上选一点 M 过 DC，ED 的垂线构成矩形地基，设点 M 坐标是 $(x,20-\frac{2}{3}x)$. 则矩形面积是：

$$
\begin{aligned}
S&=(100-x)(80-20+\frac{2}{3}x)\\
&=\frac{2}{3}(-x^2+10x+9\,000)\\
&=-\frac{2}{3}(x-5)^2+\frac{18\,050}{3}.
\end{aligned}
$$

因此当 $x=5$ 时，$S_{\max}=\frac{18\,050}{3}$. 即过点 $M(5,\frac{50}{3})$分别作 CD,ED 所画矩形地基面积最大，地基的最大面积是$\frac{18\,050}{3}$ m^2.

练习(第 90 页)

1. (1)$A(-1,0,-1)$,$B(1,0,-1)$,$C(1,2,-1)$,$D(-1,2,-1)$,$A'(-1,0,1)$,$B'(1,0,1)$,$C'(1,2,1)$,$D'(-1,2,1)$.

(2)E 为棱 $A'B'$ 中点，F 为棱 CD 中点，G 为棱 $C'D'$靠近 D'的第一个四等分点，H 为棱 CC'的中点.

2. (1)坐标平面 yoz 垂直于 x 轴；坐标平面 xoz 垂直于 y 轴；坐标平面 xoy 垂直于 z 轴.

(2)点 P 在坐标平面 xoy 内射影的坐标是(2,3,0)，在平面 yoz 内射影坐标是(0,3,4)，在平面 xoz 内射影坐标是(2,0,4).

(3)点 P 关于原点对称的点的坐标是(−1,−3,−5).

3. 点 B 的坐标是(3,4,0). OB 的长是 5.

4. (1)$\sqrt{61}$;　　(2)$\sqrt{13}$.

习题 2.4

1. (1)点 P 关于坐标平面 xoy 对称的点坐标是$(x,y,-z)$，关于坐标平面 yoz 对称的点的坐标是$(-x,y,z)$，关于坐标平面 xoz 对称的点的坐标是$(x,-y,z)$.

(2)点 P 关于 x 轴对称的点的坐标是$(x,-y,-z)$，点 P 关于 y 轴对称的点的坐标是$(-x,y,-z)$，点 P 关于 z 轴对称的点的坐标是$(-x,-y,z)$.

2. (1)$A(\frac{\sqrt{3}}{6}a,0,h)$,$B(0,-\frac{1}{2}a,0)$,$C(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$,$D(0,\frac{1}{2}a,0)$,$E(\frac{\sqrt{3}}{12}a,-\frac{1}{4}a,\frac{1}{2}h)$.

(2)点 F 为棱 BC 的中点，点 G 为棱 OD 的中点，点 H 为棱 AD 的中点.

3. (1)$|AB|=\sqrt{122}$;　　(2)$|CD|=2\sqrt{11}$;　　(3)$|EF|=3\sqrt{14}$.

4. $4x+6y-8z+7=0$.

思考题(第 93 页)

1. 与 l_1,l_2 平行.

2. 原方程可化为 $2x+y-6+x(x+y-4)=0$，它表示过直线 $2x+y-6=0$ 和 $x+y-4=0$交点的直线系. 解方程组

$$\begin{cases}2x+y-6=0,\\x+y-4=0,\end{cases}\text{得}\begin{cases}x=2,\\y=2.\end{cases}$$

设交点为 M，则点 M 坐标是(2,2)，$|MP|$是过 M 点的直线到点 P 距离的最大值.

因为$|MP|=\sqrt{(2+2)^2+(2-2)^2}=4<4\sqrt{2}$，因此不存在实数 λ 满足条件.

复习题(A 组)

1. $15^\circ \leqslant \alpha < 195^\circ$.

2. $\begin{cases} k_{AB}=\dfrac{7-5}{a-3}=2, \\ k_{AC}=\dfrac{b-5}{-1-3}=2, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=4, \\ b=-3. \end{cases}$

所以 $a+b=1$.

3. 当 $0^\circ \leqslant \alpha < \frac{3\pi}{4}$ 时，l_1 的倾斜角是 $\alpha+\frac{\pi}{4}$；当 $\frac{3\pi}{4} \leqslant \alpha < \pi$ 时，l_1 的倾斜角是 $(\alpha+\frac{\pi}{4})-\pi$. 即 $\alpha-\frac{3\pi}{4}$.

4. $k_{PA}=\frac{5-\sqrt{3}+\sqrt{3}}{-3-2}=-1$，直线 PA 的倾斜角是 135°；$k_{PB}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4-2}=\sqrt{3}$，直线 PB 的倾斜角是 60°. (1) l 的倾斜角 α 的取值范围是 $60^\circ \leqslant \alpha \leqslant 135^\circ$；(2) l 的斜率的取值范围是 $k \geqslant \sqrt{3}$ 或 $k \leqslant -1$.

5. 假设存在实数 m，使 l 的斜率为 1，则

$$-\frac{m^2-2m-3}{2m^2+m-1}=1.$$

化简得 $3m^2-m-4=0$，解得 $m=-1$ 或 $m=\frac{4}{3}$，$m=-1$ 不满足，故舍去，所以 $m=\frac{4}{3}$ 为所求.

6. (1) AB 的中点是 $F(6,\frac{3}{2})$，BC 的中点是 $D(-1,\frac{1}{2})$，AC 的中点是 $E(1,4)$. 所以，直线 DE 的方程是：$\frac{y-4}{\frac{1}{2}-4}=\frac{x-1}{-1-1}$，即 $7x-4y+9=0$. 直线 EF 的方程是：$\frac{y-4}{\frac{3}{2}-4}=\frac{x-1}{6-1}$，即 $x+2y-9=0$. 直线 DF 的方程是：$\frac{y-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}}=\frac{x+1}{6+1}$，即 $2x-14y+9=0$.

(2) BC 的中点为 $D(-\frac{5}{2},1)$. 因此 BC 边上中线所在直线的方程是：$y=\frac{5-1}{0+\frac{5}{2}}x+5$，即 $8x-5y+25=0$.

7. $\frac{l-10}{16-10}=\frac{w-5}{8-5}$，即 $l=2w$. 当 $l=12\text{cm}$ 时，$w=6$，即所挂物体的质量为 6kg.

8. (1) 由 $-\frac{m-2}{3}=-\frac{1}{m}$，得 $m=-1$ 或 $m=3$，$m=3$ 时 l_1 与 l_2 重合，所以应舍去. 当 $m=-1$ 时，$l_1 /\!/ l_2$，此时 l_1 与 l_2 之间的距离是 $\frac{8}{3}\sqrt{2}$.

(2) 由 $(-\frac{m-2}{3})\cdot(-\frac{1}{m})=-1$，得 $m=\frac{1}{2}$. 当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$l_1 \perp l_2$，此时 l_1 与 l_2 的交点坐标是 $(-\frac{14}{3},-\frac{8}{3})$.

(3) 由 $\frac{|3+m\times0+6|}{\sqrt{1+m^2}}=1$，得 $m=\pm4\sqrt{5}$.

(4)解方程组$\begin{cases}x+my+6=0, & ①\\(m-2)x+3y+2m=0, & ②\\x+y+10=0. & ③\end{cases}$

①−③,得 $y=\dfrac{4}{m-1}$, ④

②−3×③,得 $x=\dfrac{30-2m}{m-5}$, ⑤

④、⑤代入③化简,得 $m^2-3m=0$.

解得 $m=3$ 或 0,但当 $m=3$ 时,l_1 与 l_2 重合不符合题意,应舍去. 故 $m=0$.

(5)l_2 方程可化为:$m(x+2)-2x+3y=0$.

令$\begin{cases}x+2=0,\\-2x+3y=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-2,\\y=-\dfrac{4}{3}.\end{cases}$

因此 l_2 恒过定点$(-2,-\dfrac{4}{3})$.

9. 点 $M(0,1)$到直线 $y=x-2$ 的距离是

$$d=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

设与直线 $y=x-2$ 平行的正方形一边所在直线方程是:$y=x+b$,即 $x-y+b=0$. 则有

$$\frac{|0-1+b|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

解得 $b=-2$(舍),$b=4$. 所以所求正方形一边所在直线方程是:$y=x+4$.

设与直线 $y=x-2$ 垂直的正方形另两边所在直线方程是:$y=-x+m$,即 $x+y-m=0$,则

$$\frac{|0+1-m|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

解得 $m=-2$ 或 4. 所以所求正方形另两边所在直线方程是:$y=-x-2$ 或 $y=-x+4$.

10. 设点 P_1 的坐标是(x,y). 因为 P_1 在 l_1 上,则 $x-3y+10=0$,所以 $x=3y-10$,所以 P_1 的坐标是$(3y-10,y)$. 由中点公式得点 P_1 关于点 $M(0,1)$对称的点是 $P_2(10-3y,2-y)$,又 P_2 在直线 l_2:$2x+y-8=0$ 上,所以 $2\times(10-3y)+(2-y)-8=0$. 解得 $y=2$,所以点 $P_1(-4,2)$,$P_2(4,0)$. 因此直线 l 的方程是:$\dfrac{y-2}{0-2}=\dfrac{x+4}{4+4}$,即:$x+4y-4=0$.

11. 解方程组$\begin{cases}x+3y+7=0,\\3x-2y-12=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=2,\\y=-3.\end{cases}$所以所求圆半径是:

$$r=\sqrt{(2+1)^2+(-3-1)^2}=5.$$

所求圆的方程是:$(x+1)^2+(y-1)^2=25$.

12. 圆 $x^2+y^2+2x+4y-3=0$ 配方得$(x+1)^2+(y+2)^2=8$,其圆心是$(-1,-2)$,半径是 $r=2\sqrt{2}$. 圆心到直线 $x+y+1=0$ 的距离是 $d=\dfrac{|-1-2+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

所以圆上到直线 $x+y+1=0$ 的距离为$\sqrt{2}$的点共有 3 个.

13. 圆 $x^2+y^2+4x+3=0$ 配方得$(x+2)^2+y^2=1$,圆心是$(-2,0)$. 半径是 1. 设过原点的

圆的切线方程是：$y=kx$，即 $kx-y=0$，则有 $\frac{|-2k-0|}{\sqrt{k^2+1}}=1$. 解得 $k=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k=-\frac{\sqrt{3}}{3}$（舍去）. 因此所求切线方程是：$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

14. 设直线 l 的方程是：$y+10=k(x+5)$，即

$$kx-y+5k-10=0.$$

圆半径是 5，所以圆心到弦的距离是 $\sqrt{5^2-(\frac{5}{2}\sqrt{2})^2}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$，即有

$$\frac{|5k-10|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{5}{2}\sqrt{2} \Longrightarrow k^2-8k+7=0,$$

解得 $k=1$ 或 $k=7$.

所以所求直线 l 的方程是：$x-y-5=0$ 或 $7x-y+25=0$.

15. 由图形的几何性质知，l_1 在 y 轴上的截距是 $40-\frac{20\sqrt{3}}{3}$，l_1 的方程是：

$$y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x+40-\frac{20\sqrt{3}}{3}. \qquad ①$$

直线 l_2 在 y 轴上的截距是 60，所以直线 l_2 的方程是：

$$y=-\sqrt{3}x+60. \qquad ②$$

联立①、②解之得 $x=10+10\sqrt{3}$，$y=30-10\sqrt{3}$，即钻孔中心 A 到直角顶点 O 的水平距离是 $10+10\sqrt{3}$，铅直距离是 $30-10\sqrt{3}$.

16. $x^2+y^2=a^2$.

17. (1) $A(0,-a,0)$，$B(\sqrt{3}a,0,0)$，$C(0,a,0)$，$A'(0,-a,2a)$，$B'(\sqrt{3}a,0,2a)$，$C'(0,a,2a)$，$F(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{a}{2},a)$，$D(0,a,a)$.

(2) $|DB|=\sqrt{5}a$，$|C'F|=2a$.

复习题（B 组）

1. 在 l_1 上任取一点 $P(0,4)$. 设点 P 关于直线 l 对称的点是 $P'(x',y')$. 则有

$$\begin{cases} 3\cdot\frac{x'}{2}+4\cdot\frac{y'+4}{2}-1=0, \\ \frac{y'-4}{x'}\cdot(-\frac{3}{4})=-1. \end{cases}$$

解这个方程组得 $x'=-\frac{18}{5}$，$y'=-\frac{4}{5}$，即 $P'(-\frac{18}{5},-\frac{4}{5})$. 解方程组 $\begin{cases} 3x+4y-1=0, \\ 2x+y-4=0, \end{cases}$ 得 $x=3$，$y=-2$. 即 l_1 与 l 的交点是 $M(3,-2)$. 直线 l_2 过点 P' 和点 M，所以所求直线 l_2 的方程是：

$$\frac{y+2}{-\frac{4}{5}+2}=\frac{x-3}{-\frac{18}{5}-3}，即\ 2x+11y+16=0.$$

2. (1) A 关于直线 l 的对称点是 $A'(-1,5)$，直线 OA' 的方程是 $y=-5x$.

所求点 P 就是直线 OA' 与直线 l 的交点. 解方程组 $\begin{cases} y=x+4, \\ y=-5x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=-\dfrac{2}{3}, \\ y=\dfrac{10}{3}. \end{cases}$

即所求点 P 的坐标是 $\left(-\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right)$.

(2) 直线 OA 的方程是: $y=3x$. 所求点 Q 就是直线 OA 与直线 l 的交点. 解方程组

$$\begin{cases} y=x+4, \\ y=3x, \end{cases} \text{得} \begin{cases} x=2, \\ y=6. \end{cases}$$

即所求点 Q 的坐标是 $(2,6)$.

3. 圆 $x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 的圆心是 $O_1(2,2)$, 半径是 $r=1$. 点 $A(-3,3)$ 关于 x 轴的对称点是 $A'(-3,-3)$, 故反射光线 l' 所在直线的方程可设为: $y+3=k(x+3)$, 即 $kx-y+3k-3=0$. 所以有

$$\frac{|2k-2+3k-3|}{\sqrt{k^2+1}}=1.$$

解得 $k=\dfrac{3}{4}$ 或 $k=\dfrac{4}{3}$. 因此光线 l 所在直线的斜率为 $-\dfrac{3}{4}$ 或 $-\dfrac{4}{3}$, 因此所求光线 l 所在直线的方程是: $y-3=-\dfrac{3}{4}(x+3)$ 或 $y-3=-\dfrac{4}{3}(x+3)$, 即 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$.

4. 设点 P 的坐标是 (x,y). 则有

$$|AP|^2+|BP|^2=(x+1)^2+y^2+(x-1)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2.$$

因为 x^2+y^2 是点 P 到原点距离的平方, 因此使 $|AP|^2+|BP|^2$ 取最小值时点 P 是原点与圆心所连线段与圆的交点.

圆 $(x-3)^2+(y-4)^2=4$ 的圆心是 $O'(3,4)$. 所以直线 OO' 的方程是: $y=\dfrac{4}{3}x$. 解方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x, \\ (x-3)^2+(y-4)^2=4, \end{cases}$$

得 $x=\dfrac{21}{5}$(舍) 或 $x=\dfrac{9}{5}$, 此时 $y=\dfrac{12}{5}$. 因此所求点 P 的坐标是 $\left(\dfrac{9}{5}, \dfrac{12}{5}\right)$.

5. 设直线 AB 的方程为: $y-1=k(x-\sqrt{3})$. 与 $x^2+y^2=4$ 联立消去 y, 并整理得

$$(k^2+1)x^2+2k(1-\sqrt{3}k)x+(1-\sqrt{3}k)^2-4=0.$$

因为点 A 在圆上, 所以 $\sqrt{3}$ 是此方程的一个解. 若设 $B(x_1,y_1)$, $C(x_2,y_2)$. 则由韦达定理得

$$x_1+\sqrt{3}=\frac{2(\sqrt{3}k-1)k}{k^2+1} \Longleftrightarrow x_1=\frac{\sqrt{3}k^2-2k-\sqrt{3}}{1+k^2}.$$

又因为点 B 在直线 AB 上, 所以 $y_1=k(x_1-\sqrt{3})+1$.

同理(把上式中的 k 换成 $-k$)得

$$x_2=\frac{\sqrt{3}k^2+2k-\sqrt{3}}{1+k^2},$$

$$y_2=-k(x_2-\sqrt{3})+1.$$

因此

$$k_{BC}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{k(x_1+x_2-2\sqrt{3})}{x_1-x_2}=\sqrt{3}.$$

即直线 BC 的方向不变，其斜率为$\sqrt{3}$.

6. 设存在斜率为 1 的直线 l 满足条件，其方程为：$y=x+b$.

代入圆 C：$x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 中并整理得

$$2x^2+(2b+2)x+b^2+4b-4=0. \quad ①$$

设 l 截圆 C 得弦 AB 的两端点为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 x_1,x_2 为上述方程的两根，所以有

$$x_1+x_2=-b-1,x_1x_2=\frac{1}{2}(b^2+4b-4).$$

由题意有 $k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$. 所以有 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 即

$$x_1x_2+(x_1+b)(x_2+b)=0\Longrightarrow 2x_1x_2+b(x_1+x_2)+b^2=0.$$

所以 $b^2+4b-4+b(-b-1)+b^2=0$，整理得 $b^2+3b-4=0$. 解得 $b=1$ 或 $b=-4$.

因此直线 l 存在，其方程是：$y=x+1$ 或 $y=x-4$.

7. 由已知(i)，知直线 $kx-y+4=0$ 过圆 $x^2+y^2+x-6y+3=0$ 的圆心$(-\frac{1}{2},3)$. 所以有：$-\frac{1}{2}k-3+4=0$，即 $k=2$. 因此 $k_{PQ}=-\frac{1}{2}$，由此设直线 PQ 的方程为：$y=-\frac{1}{2}x+b$.

直线 PQ 的方程与圆的方程联立消去 y，并整理得

$$5x^2+4(4-b)x+4(b^2-6b+3)=0. \quad ①$$

设点 P、Q 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2). 因 $OP\perp OQ$，所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$. 即 $x_1x_2+(b-\frac{1}{2}x_1)(b-\frac{1}{2}x_2)=0$，也就是 $b^2+\frac{5}{4}x_1x_2-\frac{b}{2}(x_1+x_2)=0$.

对①利用根与系数关系并代入上式，解得 $b=\frac{3}{2}$或$\frac{5}{4}$，此时方程①的判别式$\triangle>0$，所以直线 PQ 的方程为：$y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$或 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{4}$.

思考与实践

1. $k_{OA}=\frac{1}{2}$，表示小张出发到 A 地时的速度；$k_{AB}=-\frac{5}{4}$，表示小张返回取文件时的速度；$k_{BC}=0$，表示小张取文件时的速度；$k_{CD}=\frac{5}{6}$，表示小张出发到 D 地时的速度.

2. (1)当直线不与 x 轴垂直时，设点 P 关于直线 l：$Ax+By+C=0$ 的对称点是 $P'(x',y')$，则线段 PP'的中点在直线 l 上，有

$$A\cdot\frac{x_0+x'}{2}+B\cdot\frac{y_0+y'}{2}+C=0, \quad ①$$

且有直线 PP'与直线 l 垂直，所以

$$\frac{y'-y_0}{x'-x_0}\cdot(-\frac{A}{B})=-1. \quad ②$$

联立①，②解之求出 x'，y'，即得点 P'的坐标.

当直线 l 与 x 轴垂直时易求.

(2)解方程组$\begin{cases}3x-y+4=0,\\x-y-2=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x=-3,\\y=-5.\end{cases}$

所以 l_1 与 l 的交点是 $(-3,-5)$.

在直线 l_1 上任取一点 $(0,4)$，关于直线 l 的对称点的坐标是 $(6,-2)$. 所以直线 l_1 关于直线 l 的对称直线是：$\frac{y+5}{-2+5}=\frac{x+3}{6+3}$，即 $x-3y-12=0$.

3. 当 $B>0$ 时，不等式 $Ax+By+C>0$ 的解集表示直线 $Ax+By+C=0$ 上方区域内的点；

当 $B<0$ 时，不等式 $Ax+By+C>0$ 的解集表示直线 $Ax+By+C=0$ 下方区域内的点.

4. （略）

{
  "filename": "MTI3NjcwNTAuemlw",
  "filename_decoded": "12767050.zip",
  "filesize": 6258138,
  "md5": "f9eb48518197e802ffad8dfb32b85264",
  "header_md5": "f034966c1b1fa1e54a45bd9a064eec21",
  "sha1": "7c4c94997e972130f1e0723c6f01cf43992fd8aa",
  "sha256": "51a15653de818693b20c7a882463602bb48d2d0a880016fac12752eeb0e8b38c",
  "crc32": 456516739,
  "zip_password": "",
  "uncompressed_size": 6230644,
  "pdg_dir_name": "12767050_\u2569\u00b2\u2564\u00ba2\u255c\u2560\u2569\u00aa\u255c\u2560\u2564\u00ba\u2559\u251c\u2569\u0398\u2592\u256a\u2568\u2590",
  "pdg_main_pages_found": 63,
  "pdg_main_pages_max": 63,
  "total_pages": 68,
  "total_pixels": 417402973,
  "pdf_generation_missing_pages": false
}