普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4－9

风险与决策

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

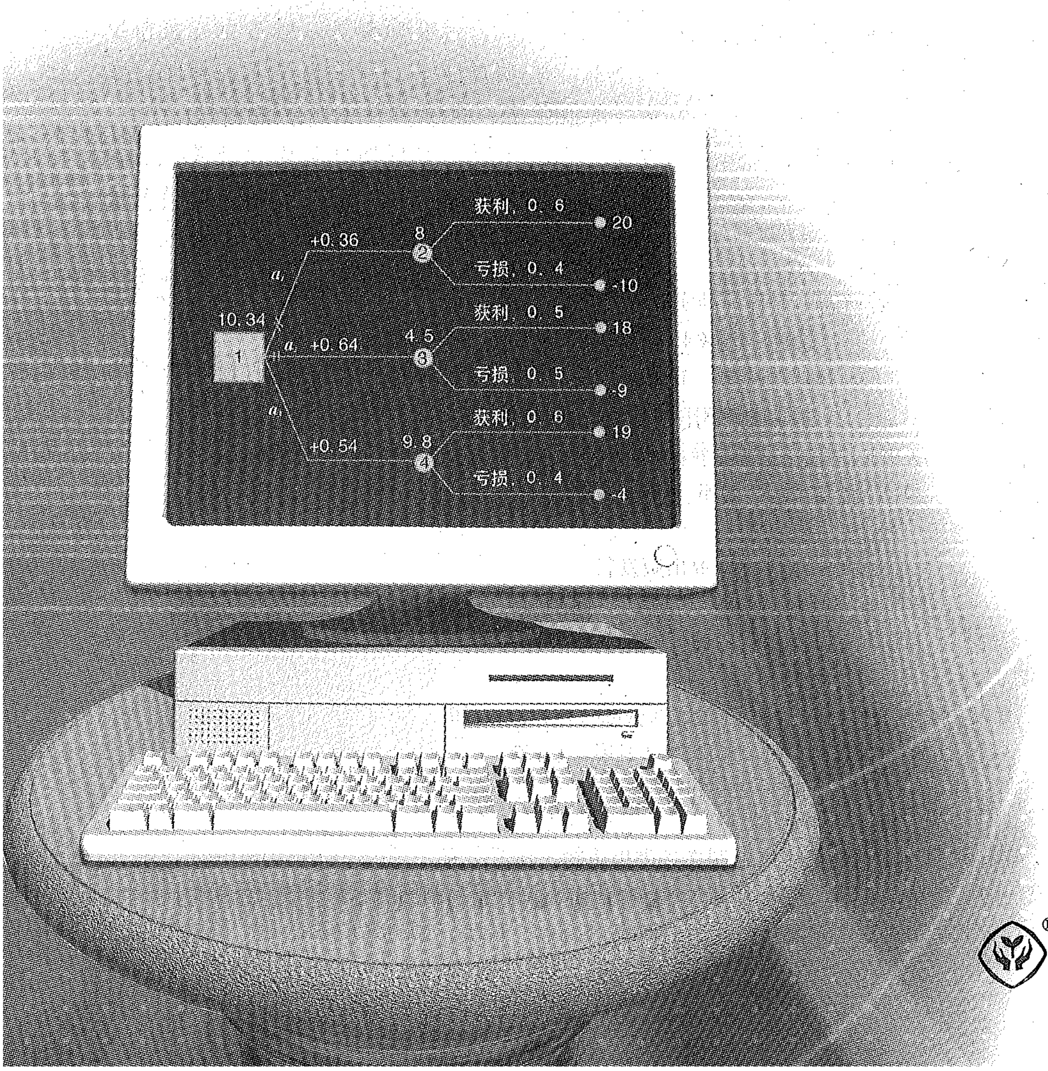
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-9 风险与决策

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　高尚华
责任编辑　　王旭刚
版式设计　　王　喆
封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书
数学　选修4－9
风险与决策（B版）
教师教学用书
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著
*
人民教育出版社出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
人民教育出版社印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：2　字数：45 000
2008年3月第1版　2011年11月第2次印刷
ISBN 978－7－107－20920－8
G·14030（课）
定价：4.70元

说　明

本书是配合全国中小学教材审定委员会2006年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书数学选修4-9风险与决策（B版）》的使用编写的教师教学用书.

本套教师教学用书编写的原则是：

1. 努力体现普通高中数学课程标准实验教科书（B版）编写的指导思想. 帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

2. 明确各章的教学要求及要达到的教学目标. 帮助教师完成“课标”中规定的教学任务.

3. 对相关内容进行分析，并提出一些教法建议，帮助教师克服教学中的一些困难.

本册教师教学用书每章包括两部分：一、内容分析，二、习题参考解答.

教材的课程目标的确定，主要依据是教育部2003年颁布的《普通高中数学课程标准》中的系列4的相关内容的教学要求进行编写.

在教科书中，我们已对全套教材的结构、编写特点和指导思想作了阐述，下面再对这册教科书作如下说明，以帮助老师理解教材.

1. 这册书教学的主要内容是提供风险型决策的一般概念与方法. 主要方法介绍了最大可能法、期望值法、决策树、灵敏度分析、马尔可夫型决策. 这些决策方法的学习都是以分析实例进行展开，通过实例的学习使学生建立初步的风险与决策意识.

2. 学习风险型决策虽然有一定的难度，但本书中所选问题都比较贴近生活实际，易于让学生产生兴趣. 教师应通过实例问题的解决，使学生体会到风险型决策知识是有用的，进而激发学生学习这些知识的热情.

3. 教材最后附录Ⅰ介绍了矩阵知识，教师可在学习“风险与决策”这一专题之前，通过讲课或引导学生自读的方式，使学生了解有关的矩阵知识，为决策问题的学习做好铺垫.

4. 本专题作为选修教材，文理科学生都可以选用，建议在学生学完1-2或2-3的概率统计知识就可以选修这册内容.

风险与决策作为中学数学教材编写，在我国还是首次，有些内容的编排选择没有经验，又由于时间紧，书中必然存在不少缺点，欢迎广大教师和教学研究人员指正.

中学数学教材实验研究组
2008年3月

目录

第五讲 灵敏度分析

*第六讲 马尔可夫型决策

第一讲

风险型决策

一、内容分析

风险与决策是能充分体现数学应用于实际的一个专题，如学生学完该专题，可获得 1 学分.

本讲是对风险型决策问题作一概述，进一步的讨论将在后面 4 讲中讲解. 本教科书的一个主要特点是，全部内容以 16 个例子为主线展开，而且这 16 个例子都是与实际生活有联系的，没有采用诸如掷骰子、摸小球、老鼠游迷宫等人为痕迹较重的例子. 但由于编选合适的习题较难，个别习题涉及猜谜、摸围棋棋子等问题.

本讲明确给出了风险型决策问题的 4 个要素，即

① 决策的备选方案；

② 未来状态及其概率；

③ 各备选方案在不同状态下的损益值；

④ 决策准则.

在具体解决风险型决策问题时，还提到了所谓的“决策目标”. 其实决策目标与上述第 3 个要素有着紧密的联系：当问题给出的数据都是“收益值”，决策目标自然越大越好；当问题给出的数据都是“损失值”，决策目标当然是越小越好. 对于高中生来说，理解上述意思毫无困难，所以本讲对“决策目标”是自然而然引入的，并没有多做文章.

由于决策准则要详细讲解期望值准则，这就用到概率论中的离散型随机变量及其数学期望的知识. 对于希望在理工（包括部分经济类）方面发展的高中生，他们在选修 2-3 中学过这部分内容；而对于希望在人文、社会科学等方面发展的高中生，高一学的数学 3 并不包含这部分内容，有必要向他们介绍离散型随机变量及其数学期望的概念，让他们了解并会计算随机变量的期望值.

本讲用了两个实例：

① 某项经营收益与天气的关系；

② 如何衡量一名射击运动员的技术水平

来介绍离散型随机变量及其数学期望的知识，对于打算在文科方面发展的高中生，讲解应详尽一些，甚至可以布置一两道简单的习题，以加深理解. 对于打算在理工科方面发展的高中生，这两个实例可供自

学，当作复习以前已经掌握好的知识.

在《普通高中数学课程标准（实验）》的第 66 页，作为教材选修 2-3 的案例，给出了一道例题 4，讨论在洪水来临前如何处理工地上的一台大型设备. 估计它已成为多种教材选修 2-3 的一道例题. 本讲重点分析了这道例题的解法，从风险型决策问题的 4 个要素出发，特别是对第 4 个要素：决策准则，采取了最大可能准则和期望值准则，分别得出了不同的最佳方案. 这样一方面和前面学过的内容做好了对接，另一方面是要指出：最佳方案不一定唯一，不同的决策准则，有可能导致不同的决策方案，从而使学生更全面地认识风险型决策问题的实质.

二、习题一参考解答

1. 可考虑收益，此时费用为负值.

备选方案：

a_1：钻井，费用-150万元.

① 出油，收益 700 万元，P(出油)$=0.6$；

② 无油，收益 0 元，P(无油)$=0.4$，

期望利润为

$$700\times0.6+0\times0.4-150=270\ (\text{万元}).$$

a_2：转让开采权，收益 160 万元，费用 0 元.

决策目标是利润越大越好，比较方案 a_1 和 a_2，石油公司应选择 a_1 为最佳行动方案. 方案 a_1 显然存在较大风险，如钻井不出油（有百分之四十的可能），公司将损失 150 万元，但是有百分之六十的可能会出油，这时公司的利润为 550 万元.

2. 备选方案：

a_1：先猜谜 1.

设此人所得奖金（元）为离散型随机变量 X，X 的分布列为

X	0	200	200+100
P	$1-0.6$	$0.6\times(1-0.8)$	0.6×0.8

X 的期望 $E(X)$ 为

$$\begin{aligned}E(X)&=0\times(1-0.6)+200\times0.6\times(1-0.8)+300\times0.6\times0.8\\&=168.\end{aligned}$$

a_2：先猜谜 2.

设此人所得奖金（元）为离散型随机变量 Y，Y 的分布列为

Y	0	100	100+200
P	$1-0.8$	$0.8\times(1-0.6)$	0.8×0.6

Y 的期望 $E(Y)$ 为

$$E(Y)=0\times(1-0.8)+100\times0.8\times(1-0.6)+300\times0.8\times0.6$$
$$=176.$$

决策目标是奖金越多越好，由于 $E(Y)>E(X)$，所以此人应选择方案 a_2，即先猜谜 2 更有利. 当然这也是有风险的，$E(Y)=176$ 并不能保证他能得到 176 元. 例如，如果他一上来就猜不出谜 2（有百分之二十的可能），那么他将颗粒无收.

3*. 在投资实例中，

a_1：P(投资成功)=30%，收益 8 万元；

P(投资失败)=70%，收益 −2 万元.

此人的期望收益为

$$8\times30\%+(-2)\times70\%=1\text{（万元）}.$$

a_2：P(投资成功)=40%，收益 5 万元；

P(投资失败)=60%，收益 −2 万元.

此人的期望收益为

$$5\times40\%+(-2)\times60\%=0.8\text{（万元）}.$$

由于是考虑收益，决策目标是越大越好. 因为 1 万元比 0.8 万元多了 0.2 万元，此人的最佳行动方案是选择 a_1.

第二讲

最大可能法

一、内容分析

最大可能法的思想方法很简单，当各种未来状态的概率已知时，选择最大概率的那个未来状态认为它会发生，然后比较该状态下的所有方案的损益值．如果是收益，即取收益最大的方案为最佳方案；如果是损失，即取损失最小的方案为最佳方案．当有一个未来状态的概率明显比其他未来状态的概率大很多时，最大可能法往往能收到很好的效果．

本讲通过例 1 专门介绍了损益函数的概念．这里的所谓函数与高一学过的函数是有区别的．损益函数的两个变量，一般都不指实数，第一个变量表示待选的各种方案；第二个变量表示各种未来状态．这一点倒是与概率中的随机变量有点接近．

借用线性代数中的矩阵符号，来表示损益函数，就得到损益矩阵．这里学生可以看一下附录Ⅰ矩阵中的“一、矩阵的概念”．对于第二、三、四、五讲，教科书在处理内容时已经避免了矩阵的运算，矩阵的运算只在第六讲马尔可夫型决策中有用．

用损益矩阵可以使损益函数取的诸多值排列整齐．确定好未来状态后，只需在相应的损益矩阵那一列上比较各数大小，决定方案的取舍，操作起来不易出错．

二、习题二参考解答

1．用最大可能法．

① 决策目标：利润最大．

② 未来状态及其概率：P(天晴)$=0.5$，P(天阴)$=0.2$，P(天气常下雨)$=0.3$．

备选方案：a_1：采购西瓜，a_2：采购哈密瓜．

③ 损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\begin{array}{lccc} & \text{天晴} & \text{天阴} & \text{常下雨} \\ a_1\text{：采购西瓜} & \multicolumn{3}{c}{\multirow{2}{*}{}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a_1\text{：采购西瓜} \\ a_2\text{：采购哈密瓜} \end{array}\begin{pmatrix} 20\,000 & 10\,000 & -10\,000 \\ 15\,000 & 10\,000 & 3\,000 \end{pmatrix}$$

④ 应假定未来天晴，由损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 1 列容易看出 $20\,000>15\,000$，最佳决策方案是 a_1：采购西瓜.

2. 用最大可能法.

① 决策目标：收益最大.

② 损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

本题的未来状态就是各种需求量. 为方便起见，把未来状态 x_1，x_2，…就表示为皮上衣的需求量 3，4，…，8. 备选方案是各种定购量，方案 a_1，a_2，…就表示为皮上衣的定购量 3，4，…，8. 损益函数 $R(a, x)$有多种取值. 例如，

$R(3, 3)$表示定购 3 件，需求 3 件，每件收益是 $2\,800-2\,000=800$（元），所以

$$R(3, 3)=800\times3=2\,400\text{（元）}.$$

$R(3, 5)$表示定购 3 件，需求 5 件，收益值应和 $R(3, 3)$相同，所以

$$R(3, 5)=2\,400\text{（元）}.$$

$R(4, 3)$表示定购 4 件，需求 3 件，有 1 件要削价销售，收益是 $500-2\,000=-1\,500$（元），但卖掉的 3 件收益是 2 400（元），所以

$$R(4, 3)=2\,400-1\,500=900\text{（元）}.$$

$R(8, 6)$表示定购 8 件，需求 6 件，有 2 件要削价销售，收益是 $-3\,000$（元），但卖掉的 6 件收益是 $800\times6=4\,800$（元），所以

$$R(8, 6)=4\,800-3\,000=1\,800\text{（元）}.$$

以此类推，可以求出损益函数 $R(a, x)$的全部取值，从而写出损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\begin{array}{cc} & x/\text{件} \\ & \begin{array}{cccccc} 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array} \\ a/\text{件}\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{array} & \begin{pmatrix} 2\,400 & 2\,400 & 2\,400 & 2\,400 & 2\,400 & 2\,400 \\ 900 & 3\,200 & 3\,200 & 3\,200 & 3\,200 & 3\,200 \\ -600 & 1\,700 & 4\,000 & 4\,000 & 4\,000 & 4\,000 \\ -2\,100 & 200 & 2\,500 & 4\,800 & 4\,800 & 4\,800 \\ -3\,600 & -1\,300 & 1\,000 & 3\,300 & 5\,600 & 5\,600 \\ -5\,100 & -2\,800 & -500 & 1\,800 & 4\,100 & 6\,400 \end{pmatrix} \\ \text{未来状态概率：} & \begin{array}{cccccc} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.25 & 0.1 & 0.05 \end{array} \end{array}$$

③ 应假定今冬需求量 5 件，由损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 3 列容易看出，数值 4 000 最大，于是，最佳决策方案是定购 5 件皮上衣.

3. 用最大可能法.

① 本题的未来状态应设为市场的日销售量，利用去年同期的销售记录可以估计其概率分布，这里，总的销售天数为 $18+36+27+9=90$（天）.

x/箱	100	120	140	160
P	$\frac{18}{90}=0.2$	$\frac{36}{90}=0.4$	$\frac{27}{90}=0.3$	$\frac{9}{90}=0.1$

② 生产方案可设为每天生产的雪糕数，以箱为单位计数，方案 a_1，a_2，a_3，a_4 可分别记为 100，120，140，160. 损益函数 $R(a，x)$ 可取 16 个值，表示所得利润数（单位：元），例如

$R(120，100)$ 表示日产 120 箱，销售 100 箱，当天得利为 $R(120，100)=50\times100-30\times20=4\ 400$（元）.

$R(160，120)$ 表示日产 160 箱，销售 120 箱，当天得利为 $R(160，120)=50\times120-30\times40=4\ 800$（元）.

……

损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\begin{array}{cc} & x/\text{箱} \\ & \begin{array}{cccc} 100 & 120 & 140 & 160 \end{array} \\ a/\text{箱}\ \begin{array}{c} 100 \\ 120 \\ 140 \\ 160 \end{array} & \begin{pmatrix} 5\ 000 & 5\ 000 & 5\ 000 & 5\ 000 \\ 4\ 400 & 6\ 000 & 6\ 000 & 6\ 000 \\ 3\ 800 & 5\ 400 & 7\ 000 & 7\ 000 \\ 3\ 200 & 4\ 800 & 6\ 400 & 8\ 000 \end{pmatrix} \end{array}$$

③ 决策目标是获利越多越好. 每天销售 120 箱的概率 0.4 最大，可以此组织生产. 从损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 2 列容易看出，此时获利 6 000 元收益最大，对应的日产 120 箱应定为最佳生产方案.

4. ① 由于随意遇到的一名高一(1)班同学可能有票，也可能没有票，这就是可能出现的两个未来状态 x_1 和 x_2. 题目没有直接给出它们的概率，但可以根据已知条件推算出来：

女生人数$=50\times60\%=30$，

其中有足球票的人数$=30\times30\%=9$；

男生人数$=50\times(1-60\%)=50\times40\%=20$，

其中有足球票的人数$=20\times70\%=14$.

因此 50 名同学中有足球票的人数是

$$9+14=23；$$

没有足球票的人数是

$$50-23=27.$$

于是

$$P(\text{有票})=\frac{23}{50}，P(\text{没有票})=\frac{27}{50}.$$

② 用最大可能法.

决策目标显然是游戏中得分要高. 由题意容易写出损益矩阵 $\boldsymbol{R}$(这里实际上是得分矩阵)：

$$\begin{array}{cc} & x \\ & \begin{array}{cc} \text{有票} & \text{没有票} \end{array} \\ \begin{array}{l} a_1\text{：猜有票} \\ a_2\text{：猜没有票} \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

③ 由于 P(没有票)$>P$(有票)，应假定遇到的高一(1)班同学没有票，从损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 的第 2 列容易看出，由于 $8>-5$，相应的最优决策方案应该是 a_2：猜没有票.

值得注意的是，本题中，由于有票的概率$\frac{23}{50}$很接近没有票的概率$\frac{27}{50}$，或者说，遇到的高一(1)班同学有票的可能性并不小，作上述决策所冒的风险是较大的，即很可能得不到 8 分，反而被扣掉 5 分. 实际上，在未来状态发生的概率比较接近的情况下，做任何决策所冒的风险都比较大.

第三讲

期望值法

一、内容分析

本讲的期望值法是风险型决策问题中用得很多的一种方法，实际上是概率论中离散型随机变量及其数学期望应用于实际的最好例子. 如教师面临的是希望在人文、社会科学等方面发展的学生的教学班，应放慢些进度，尽量把数学思想交代得清楚点.

由于实际问题的五花八门，所以本讲在投资、进口产品、修防护堤、专家评估等 4 个方面各选了一个风险型决策问题进行剖析，以帮助学生掌握期望值法. 问题尽管不同，但从数学的统计决策观点上看，进行风险型决策的步骤是一样的.

求期望值也可以利用向量与矩阵的乘法进行，考虑到高中学生初次接触矩阵知识，本讲不涉及向量与矩阵的乘法内容，求期望值照第一讲中的方法来做，即把随机变量的取值与对应的概率相乘，然后把所得到的全部乘积相加，期望值可以反映该随机变量取值的平均水平.

二、习题三参考解答

1. 用期望值法.

① 决策目标：得分要大.

② 状态及其概率：x_1——普通硬币，P(普通硬币)$=\dfrac{2}{3}$；x_2——特制硬币，P(特制硬币)$=\dfrac{1}{3}$.

备选方案 a_1：判断为普通硬币，a_2：判断为特制硬币.

③ 由题意写出损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ \text{普通} & \text{特制} \end{array} \\ \begin{array}{l} a_1\text{：判断普通} \\ a_2\text{：判断特制} \end{array} & \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -6 & 15 \end{pmatrix} \end{array}$$

④ 方案 a_1：设 X_1 为采纳方案 a_1 的得分值，它是一个离散型随机变量，分布列为

X_1	9	-12
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

方案 a_1 的得分期望值$=E(X_1)=9\times\frac{2}{3}-12\times\frac{1}{3}=2$.

方案 a_2：设 X_2 为采纳方案 a_2 的得分值，分布列为

X_2	-6	15
P	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

方案 a_2 的得分期望值$=E(X_2)=(-6)\times\frac{2}{3}+15\times\frac{1}{3}=1$.

因为 $E(X_1)>E(X_2)$，所以应该采纳方案 a_1，即判断取出的 1 枚硬币是普通硬币，这时得分的期望值是 2 分.

2. 用期望值法.

① 参看前面习题二参考解答 1，本题的损益矩阵 $\boldsymbol{R}$(实际上是收益矩阵)为

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc}\text{天晴} & \text{天阴} & \text{常下雨}\end{array} \\ \begin{array}{l} a_1\text{：采购西瓜} \\ a_2\text{：采购哈密瓜}\end{array} & \begin{pmatrix} 20\,000 & 10\,000 & -10\,000 \\ 15\,000 & 10\,000 & 3\,000 \end{pmatrix} \\ \text{未来状态的概率：} & \begin{array}{ccc} 0.5 & 0.2 & 0.3 \end{array} \end{array}$$

② 计算方案的期望值.

方案 a_1 的期望收益：

$$\begin{aligned}&20\,000\times0.5+10\,000\times0.2+(-10\,000)\times0.3\\=&9\,000\ (\text{元}).\end{aligned}$$

方案 a_2 的期望收益：

$$\begin{aligned}&15\,000\times0.5+10\,000\times0.2+3\,000\times0.3\\=&10\,400\ (\text{元}).\end{aligned}$$

作比较，由于 $10\,400>9\,000$，所以最优决策是选择方案 a_2，即应去采购哈密瓜.

注意用期望值法的风险型决策结果与用最大可能法的结果不同. 期望值法考虑到三种未来天气的状态，而最大可能法只考虑未来天晴状态下比较方案 a_1 与 a_2 的优劣. 考虑问题的出发点不同，得到的结果就有可能不同.

3. 用期望值法.

决策目标：收益要大.

状态：x_1——新设备畅销；

x_2——新设备滞销.

备选方案a_1：出售图纸；

a_2：自己制造.

(1) 畅销与滞销的可能性相同意味着两个未来状态发生的概率相等，即

$$P(\text{畅销})=P(\text{滞销})=\frac{1}{2}.$$

损益矩阵 $\boldsymbol{R}$(实际上是收益矩阵):

$$\begin{array}{lcc} & \text{畅销} & \text{滞销} \\ a_1\text{: 出售图纸} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 50 & -25 \end{pmatrix}$}} \\ a_2\text{: 自己制造} & & \\ \text{未来状态概率:} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

$\boldsymbol{R}$ 中数据的单位:万元.

方案 a_1 的期望收益:

$$20\times\frac{1}{2}+10\times\frac{1}{2}=15\ (\text{万元});$$

方案 a_2 的期望收益:

$$50\times\frac{1}{2}+(-25)\times\frac{1}{2}=12.5\ (\text{万元}).$$

作比较:由于 $15>12.5$,所以采纳 a_1 为最佳方案,即出售新设备的图纸.

(2) 畅销的概率是滞销的两倍意味着

$$P(\text{畅销})=2P(\text{滞销}). \qquad ①$$

本题的未来状态只有两个,别无其他可能,意味着两个未来状态的并是必然事件,于是,

$$P(\text{畅销})+P(\text{滞销})=1. \qquad ②$$

解联立方程组①与②,易得

$$P(\text{畅销})=\frac{2}{3},\ P(\text{滞销})=\frac{1}{3}.$$

收益矩阵仍是 (1) 中的 $\boldsymbol{R}$. 于是

方案 a_1 的期望收益:

$$20\times\frac{2}{3}+10\times\frac{1}{3}=\frac{50}{3};$$

方案 a_2 的期望收益:

$$50\times\frac{2}{3}+(-25)\times\frac{1}{3}=\frac{75}{3}.$$

由于 $\frac{75}{3}>\frac{50}{3}$,所以采纳 a_2 为最佳方案,即公司自己制造新设备.

本题还表明,当未来状态的概率改变时,最佳方案的选择也有可能改变. 关于这一点的较深入讨论,将在第五讲中进行.

4. 参看前面第二讲中习题二参考解答 4,可知得分矩阵 $\boldsymbol{R}$:

$$\begin{array}{lcc} & \text{有票} & \text{没有票} \\ a_1\text{: 猜有票} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$}} \\ a_2\text{: 猜没有票} & & \\ \text{未来状态的概率:} & \frac{23}{50} & \frac{27}{50} \end{array}$$

a_1 的期望得分：

$$10\times\frac{23}{50}+(-5)\times\frac{27}{50}=\frac{95}{50};$$

a_2 的期望得分：

$$(-5)\times\frac{23}{50}+8\times\frac{27}{50}=\frac{101}{50}.$$

由于$\frac{101}{50}>\frac{95}{50}$，最佳决策方案是 a_2，即高一(2)班的同学应该猜没有票. 对本题来说，用最大可能法作风险型决策的结果与用期望值法的结果相同.

第四讲

决 策 树

一、内容分析

本讲主要介绍解决风险型决策问题的反推决策树法，可以把它理解成第三讲期望值法的图解方法.

例 7 是王华决定坐哪一路公共汽车的实例，它一方面和导引中的叙述起到了呼应作用，另一方面，本讲用这个相对简单的例子，具体介绍如何画决策树，如何利用决策树来做风险型决策.

一般地说，对于较简单的例子，可以用第三讲的方法计算各个备选方案的期望值，画决策树的意义不大. 但对于较复杂的风险型决策问题，已知条件一大堆，头绪繁多，画出其决策树可以把已知数据梳理得清清楚楚，然后在决策树上进行挑选最佳方案的工作，既方便又不容易出错. 教师在教学例 8、例 9、例 10 时可以体会到上述思想.

多级决策问题是实际中常常遇到的风险型决策问题，当然比例 7 至例 10 的“单级”决策问题更复杂些. 本讲例 11 编选了一道两级决策问题，从其解法中更能体现反推决策树法的优越性. 假如不用决策树，如果学生的语文水平较差的话，写清楚例 11 的解将是件令人头痛的事情.

二、习题四参考解答

1. 可行方案为 a_1：整修堤岸；a_2：增高并加固堤岸；a_3：修建混凝土防水墙. 题目所要求的决策树如图 1 所示.

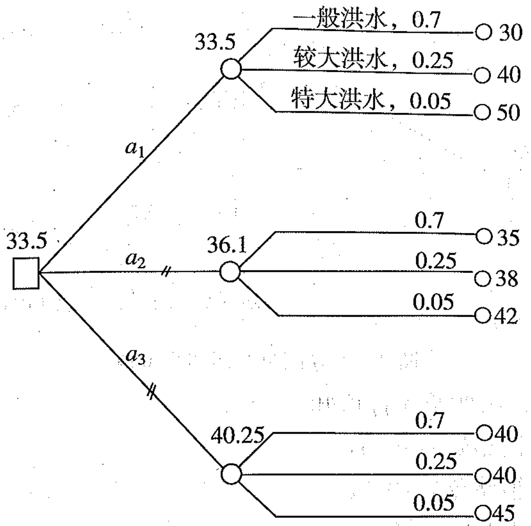


图 1　第三讲例 5 的决策树

2. 设两个可行方案为

a_1：新建车间；

a_2：扩建车间.

问题的决策树如图 2 所示.

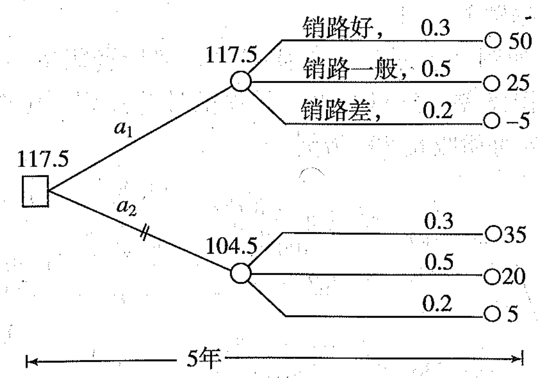


图 2　习题四第 2 题的决策树

方案 a_1 的五年收益期望值：

$[50\times0.3+25\times0.5+(-5)\times0.2]\times5-15$（新建投资）

$=117.5$（万元）；

方案 a_2 的五年收益期望值：

$(35\times0.3+20\times0.5+5\times0.2)\times5-3$（扩建投资）$=104.5$（万元）.

由图 2 的决策树容易看出，企业应采纳新建车间的方案.

3. 设方案 a_1：猜白，a_2：猜黑. 问题的决策树如图 3 所示，由图 3 容易看出，方案 a_1 较好，即猜盒子中装的是白色的围棋棋子.

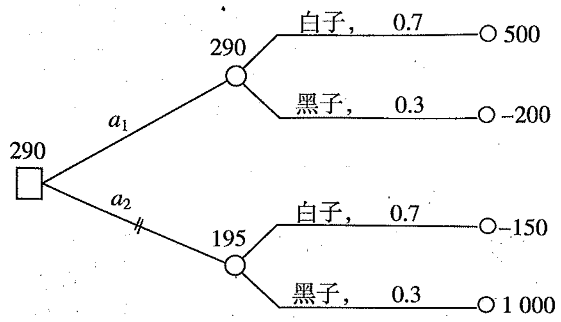


图 3　习题四第 3 题的决策树

4. 这是个两级决策问题①，由题给条件可知：

P(前三年销路好，后七年销路好)＝0.5，

P(前三年销路好，后七年销路差)＝0.3，

所以，P(前三年销路好)＝0.5＋0.3＝0.8，

P(后七年销路好 | 前三年销路好)＝$\dfrac{0.5}{0.8}=\dfrac{5}{8}$，

P(后七年销路差 | 前三年销路好)＝$\dfrac{0.3}{0.8}=\dfrac{3}{8}$.

而 P(前三年销路差)＝0.2，

P(后七年销路差 | 前三年销路差)＝1.

于是，可以画出问题的决策树如图 4 所示．为方便起见，把投资额也标明在相应的方案枝上，并用“好”表示销路好，“差”表示销路差．这里略去了具体的计算过程．由图 4 可见，应该选择方案 a_2，即企业新建两个车间投产，十年可望收益 236 万元.

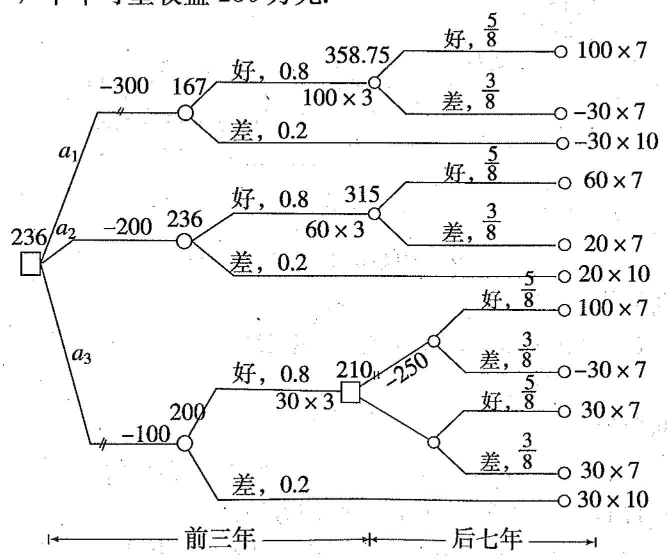


图 4　习题四第 4 题的决策树

① 对希望在文科方面发展的高中生，本题可不做.

5. 参看第一讲中习题一参考解答 2，备选的

方案 a_1：先猜谜 1；

方案 a_2：先猜谜 2.

题目要求的决策树如图 5 所示. 图 5 中“对”表示猜对，“错”表示猜错，数据（奖金）的单位是元.

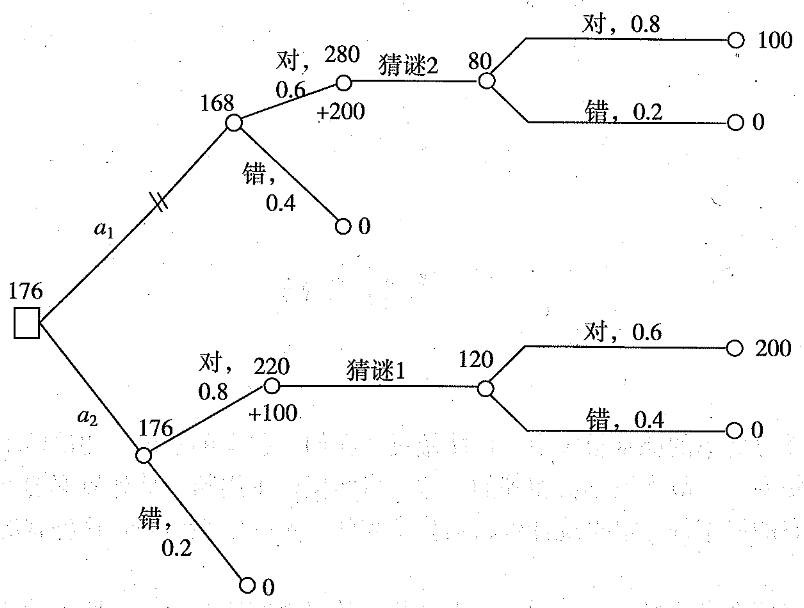


图 5　习题一第 2 题的决策树

由图 5 的决策树看出，该题不是多级决策问题，是“单级”风险型决策问题. 回顾学习第一讲时，做习题一的第 2 题还是觉得有点难，不容易理清题目给出的诸多线索，并要对事件的相互独立性有较清楚的认识. 图 5 实际体现了反推决策树法的解题过程，思路清楚，计算方便，显得更为实用.

第五讲

灵敏度分析

一、内容分析

在高中一年级学习概率的课堂教学中，可能做过“我们一起来掷硬币”的试验. 那时全班各小组得到的“正面向上”频率，一般来说不会相等的，这一事实反映了用频率估计概率的不确定性. 在很多实际问题中，未来状态的概率都是根据统计资料估算出来的，不一定很精确，这种状况会不会影响做出的风险型决策呢？

于是，理论上需要考虑这样一个问题：当未来状态的概率有所变化时，原来的最佳决策方案的反应是否“灵敏”，说得更清楚些，就是原来的决策方案还是不是最佳方案？

例 12 是讲工程进度与天气状况的关系，本例详细讨论了“天气好”的概率为 0.2，0.3，0.5 时的最佳决策变化情况，从而引出了“转折概率”的概念. 当未来状态的概率在转折概率附近变化时，最佳方案的反应很“灵敏”，极有可能改变；而当未来状态的概率在远离转折概率的地方稍有变化时，最佳方案的反应很“迟钝”，一般不作改变.

学完本讲，学生应理解风险型决策灵敏度分析的意义，并会求转折概率，进行灵敏度分析.

二、习题五参考解答

1. 习题三第 3 题给出的收益矩阵为

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{cc}\text{畅销} & \text{滞销}\end{array} \\ a_1\text{：出售图纸} & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 20 & 10 \\ 50 & -25 \end{pmatrix}$} \\ a_2\text{：自己制造} & \end{array}$$

求转折概率 p：设 $P(\text{畅销})=p$，于是 $P(\text{滞销})=1-p$. 令方案 a_1 的收益期望值等于方案 a_2 的收益期望值，即

$$20p+10(1-p)=50p+(-25)(1-p).$$

化简得

$$10p+10=75p-25,$$

$$65p=35,$$

$$p=\frac{35}{65}=\frac{7}{13}.$$

由于在做习题三第3题时已经得出当 $P(\text{畅销})=\frac{1}{2}$ 时应采纳方案 a_1，而 $\frac{1}{2}<\frac{7}{13}$，即 $\frac{1}{2}<p$，所以经灵敏度分析得出结论：

当新设备畅销的概率小于 $\frac{7}{13}$ 时，应采纳出售图纸的方案；当新设备畅销的概率大于 $\frac{7}{13}$ 时，应采纳自己制造新设备的方案.

2. 设方案 a_1：猜白，a_2：猜黑，$P(\text{白子})=p$. 令方案 a_1 与 a_2 的得分期望值相等，即

$$500p+(-200)(1-p)=-150p+1\,000(1-p).$$

化简得

$$1\,850p=1\,200,$$

$$p\approx 0.65.$$

由于在做习题四第3题时已经得出当 $P(\text{白子})=0.7$ 时应选方案 a_1，而 $0.7>0.65$，即 $0.7>p$，所以经灵敏度分析可得出结论：

在这10盒围棋棋子中，如果有7～10盒装白子，应猜白子；如果有1～6盒装白子，应猜黑子，这样得分的期望值较高.

3. 决策目标是获利越大越好，画出决策树做风险型决策. 设方案 a_1：大批量购进，a_2：小批量购进.

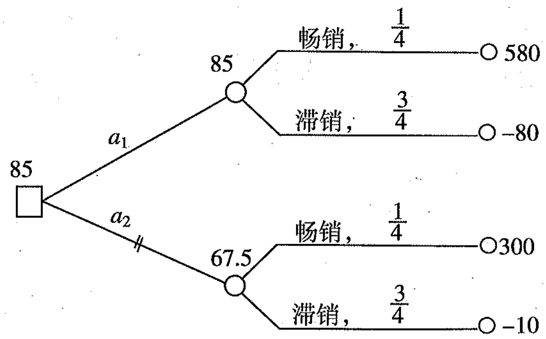


图6 习题五第3题的决策树

由图6可见，应选择大批量购进为最佳方案.

再求转折概率 p，设 $P(\text{畅销})=p$，则 $P(\text{滞销})=1-p$，可得方程：

$$580p+(-80)(1-p)=300p+(-10)(1-p).$$

化简得

$$350p=70,$$

$$p=0.2.$$

由于 $\frac{1}{4}=0.25>0.2$，所以当畅销的概率大于0.2时公司应选择大批量购进的方案，当畅销的概率小于0.2时公司应选择小批量购进的方案.

现在假定未来畅销的概率在$\frac{1}{4}$附近有微小变动，由以上分析，只要这些“微小变动”不越过转折概率0.2，最佳方案是不会改变的，也就是说，对畅销概率$\frac{1}{4}$作出的最佳方案是稳定的.

但是，如果未来畅销的概率变到低于0.2时，就应该改变原来的决策方案.

*第六讲

马尔可夫型决策

一、内容分析

讲清马尔可夫型决策的一些基本概念，最好的方法是利用选修教材 2-3 中的条件概率．但考虑到本教材对有志于文科方向发展的学生的适用性，本讲例 14 采用了百分比的方法，以此介绍一些基本概念．本讲的正文只涉及两个状态的马尔可夫型决策，有一道习题是 3 个状态的马尔可夫型决策问题，从两个状态过渡到 3 个状态，并不存在实质上的差异，只是矩阵运算要复杂些．

教学第六讲前，应要求学生阅读附录 I 矩阵的“二、矩阵的运算”，会做简单的矩阵运算．

如果教学时数偏紧，可以考虑不讲第六讲，毕竟马尔可夫型决策的理论根据是随机过程中对马尔可夫链的研究，具体计算又不可避免地用到学生不熟悉的矩阵运算，本讲的难度比前五讲要大一些．

二、习题六参考解答

1. 设状态空间

$$I=\{有雨，无雨\}.$$

于是，一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}.$$

4 月 29 日当地有雨，即指初始分布

$$\boldsymbol{p}_0=(1 \quad 0).$$

5 月 1 日天气情况的概率分布

$$\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{P}^2=(1 \quad 0)\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}^2$$

$$=(0.6 \quad 0.4)\begin{pmatrix}0.6 & 0.4\\0.3 & 0.7\end{pmatrix}$$
$$=(0.6^2+0.4\times0.3 \quad 0.6\times0.4+0.4\times0.7)$$
$$=(0.48 \quad 0.52),$$

就是说有雨的概率为 0.48，这种天气状况很不确定，为保险起见，5 月 1 日外出登山应带雨具.

2. 由题给数据序列可知，96 次状态转移的情况是：

$$0\to0 \quad 8\text{次}，\qquad 0\to1 \quad 18\text{次}；$$
$$1\to0 \quad 18\text{次}，\qquad 1\to1 \quad 52\text{次}.$$

状态空间 I 可设为

$$I=\{\text{不正常，正常}\},$$

于是可得一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\frac{8}{26} & \frac{18}{26}\\ \frac{18}{70} & \frac{52}{70}\end{bmatrix}.$$

(1) 因为

$$(1 \quad 0)\begin{bmatrix}\frac{8}{26} & \frac{18}{26}\\ \frac{18}{70} & \frac{52}{70}\end{bmatrix}=\left(\frac{8}{26} \quad \frac{18}{26}\right)=\left(\frac{4}{13} \quad \frac{9}{13}\right),$$

所以该计算机某一时段状态为 0 时下一时段状态为 1 的概率是$\frac{9}{13}$.

(2) 由于 $\boldsymbol{P}$ 无零元，故状态分布的稳定性成立，可设 $\boldsymbol{p}=(p_1^* \quad p_2^*)$，有

$$(p_1^* \quad p_2^*)\begin{bmatrix}\frac{8}{26} & \frac{18}{26}\\ \frac{18}{70} & \frac{52}{70}\end{bmatrix}=(p_1^* \quad p_2^*),$$
$$p_1^*+p_2^*=1.$$

解之可得
$$p_1^*=\frac{13}{48},\ p_2^*=\frac{35}{48}.$$

由于 $p_1^*>\frac{1}{4}$，所以用马尔可夫型决策可得出该计算机需要大修的结论.

3. 若把甲盒中的红球数作为状态空间 I 的元素，

$$I=\{0,\ 1,\ 2\}.$$

(1) 初始分布①

$$\boldsymbol{p}_0=\left(\frac{C_4^3}{C_6^3} \quad \frac{C_2^1C_4^2}{C_6^3} \quad \frac{C_2^2C_4^1}{C_6^3}\right)=\left(\frac{4}{20} \quad \frac{12}{20} \quad \frac{4}{20}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{1}{5}\right).$$

---

① 对希望在文科方面发展的高中生，本题可不做.

(2) 一步转移概率矩阵

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 交换一次后甲盒中红球数的概率分布

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_0P&=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9}\\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

(4) 现在，虽然 P 有零元，但是

$$P^2=\begin{pmatrix}\frac{7}{27} & \frac{16}{27} & \frac{4}{27}\\ \frac{16}{81} & \frac{49}{81} & \frac{16}{81}\\ \frac{4}{27} & \frac{16}{27} & \frac{7}{27}\end{pmatrix}$$

无零元，所以状态分布的稳定性成立，可设 $\boldsymbol{p}=(p_1^* \quad p_2^* \quad p_3^*)$，下列方程组有解：

$$\begin{cases}\boldsymbol{p}P=\boldsymbol{p},\\ p_1^*+p_2^*+p_3^*=1.\end{cases}$$

解之可得

$$\boldsymbol{p}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

由 (1) (3) 的结果可见

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_1.$$

实际上，可以验证：

$$\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}_0=\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{p}_2=\cdots,$$

所以经若干次交换后，甲盒中红球数为 1 的概率稳定在 $\frac{3}{5}$，而红球数为 0 的概率稳定在 $\frac{1}{5}$，红球数为 2 的概率也稳定在 $\frac{1}{5}$，与初始分布完全一样．由于 $\frac{3}{5}$ 比 $\frac{1}{5}$ 大了不少，最佳马尔可夫型决策应该猜甲盒中有 1 个红球．

巩固与提高参考解答

1. 设备选方案 a_1：钻井，a_2：转让开采权.

用反推决策树法解之，如图 7 所示. 图 7 中的收入数据单位为万元.

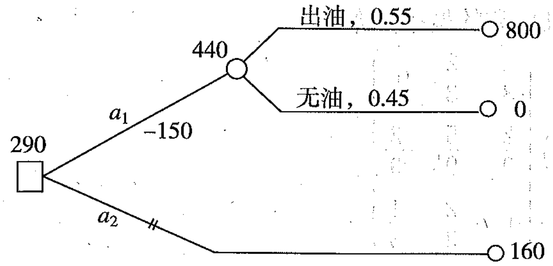


图 7　第 1 题的决策树

如图 7 易见，因为 290>160，所以公司的最佳风险型决策是 a_1，即应该自己钻井.

2. 本题的未来状态是各种销售量，为方便起见，未来状态 x_1，x_2，x_3，x_4 就表示为 50，100，150，200. 备选方案是各种订购量，同理可把 a_1，a_2，a_3，a_4 表示为 50，100，150，200. 于是

$$
\begin{aligned}
&R(50,50)=50\times2=100,\\
&R(50,100)=100,\\
&R(100,50)=50\times2-50\times2=0,\\
&R(150,50)=50\times2-100\times2=-100,\\
&R(200,50)=50\times2-150\times2=-200,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

收益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 为

$$
\begin{array}{cc}
 & x/\text{本} \\
 & \begin{array}{cccc} 50 & 100 & 150 & 200 \end{array} \\
a/\text{本}\ \begin{array}{c} 50 \\ 100 \\ 150 \\ 200 \end{array} & \begin{pmatrix} 100 & 100 & 100 & 100 \\ 0 & 200 & 200 & 200 \\ -100 & 100 & 300 & 300 \\ -200 & 0 & 200 & 400 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

未来状态概率：　0.2　0.4　0.3　0.1

① 用最大可能法.

应假定销售量为 100，由 $\boldsymbol{R}$ 的第 2 列容易看出，最佳订购数量是 100 本.

② 用期望值法.

订购 50 本的期望收益

$$
\begin{aligned}
&100\times0.2+100\times0.4+100\times0.3+100\times0.1\\
=&100;
\end{aligned}
$$

订购 100 本的期望收益

$$0\times0.2+200\times0.4+200\times0.3+200\times0.1$$
$$=160;$$

订购 150 本的期望收益

$$-100\times0.2+100\times0.4+300\times0.3+300\times0.1$$
$$=140;$$

订购 200 本的期望收益

$$-200\times0.2+0\times0.4+200\times0.3+400\times0.1$$
$$=60.$$

经比较，最佳订购数量是 100 本，此结果与使用最大可能法的结果相同.

3. (1) 设状态空间

$$I=\{正常，故障\},$$

于是，一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.005 & 0.995\end{pmatrix}.$$

(2) 由于 $\boldsymbol{P}$ 的 4 个元都大于 0，所以状态分布的稳定性成立. 可设

$$\boldsymbol{p}=(p_1^* \quad p_2^*),$$

下列方程组有解：

$$\begin{cases}(p_1^* \quad p_2^*)\begin{pmatrix}0.95 & 0.05\\ 0.005 & 0.995\end{pmatrix}=(p_1^* \quad p_2^*),\\ p_1^*+p_2^*=1.\end{cases}$$

解之，即解

$$\begin{cases}0.95p_1^*+0.005p_2^*=p_1^*,\\ p_1^*+p_2^*=1,\end{cases}$$

可得

$$p_1^*\approx0.091,\ p_2^*\approx0.909.$$

概率分布的稳定值为

$$(0.091,\ 0.909),$$

意味着自动加工机经过一段时间的工作，处于正常状态的概率稳定在 0.091，处于故障状态的概率稳定在 0.909. 上述计算结果表明，该自动加工机此时需要大修了.

自测与评估参考解答

案例 1.

设备选方案a_1：开放旅游区一个月；

a_2：关闭旅游区一个月.

考虑经济收入，单位为万元.

用反推决策树法帮助当地政府做风险型决策，如图 8 所示.

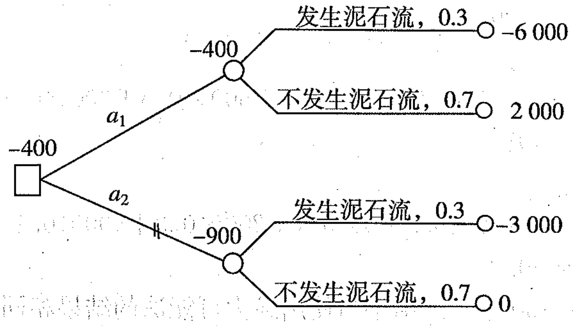


图 8　案例 1 的决策树

由图 8 可见，因为 $-400>-900$，所以最佳决策是 a_1，即开放旅游区一个月.

假如使用最大可能法做风险型决策，应假定不会发生泥石流，因为其概率为 0.7，明显大于发生泥石流的概率 0.3. 此时由于 2 000 明显大于 0，最佳决策是开放旅游区一个月.

对本案例来说，使用不同的决策准则，最佳决策相同.

案例 1 中的第 2 点，实际上指如没有泥石流发生，开放旅游区一个月可以得到经济收入 2 000 万元，但此时若关闭旅游区一个月，经济收入应理解为 0. 相对于前者，即“当地经济损失 2 000 万元”.