普通高中课程标准实验教科书

数学 选修 4－4

坐标系与参数方程

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

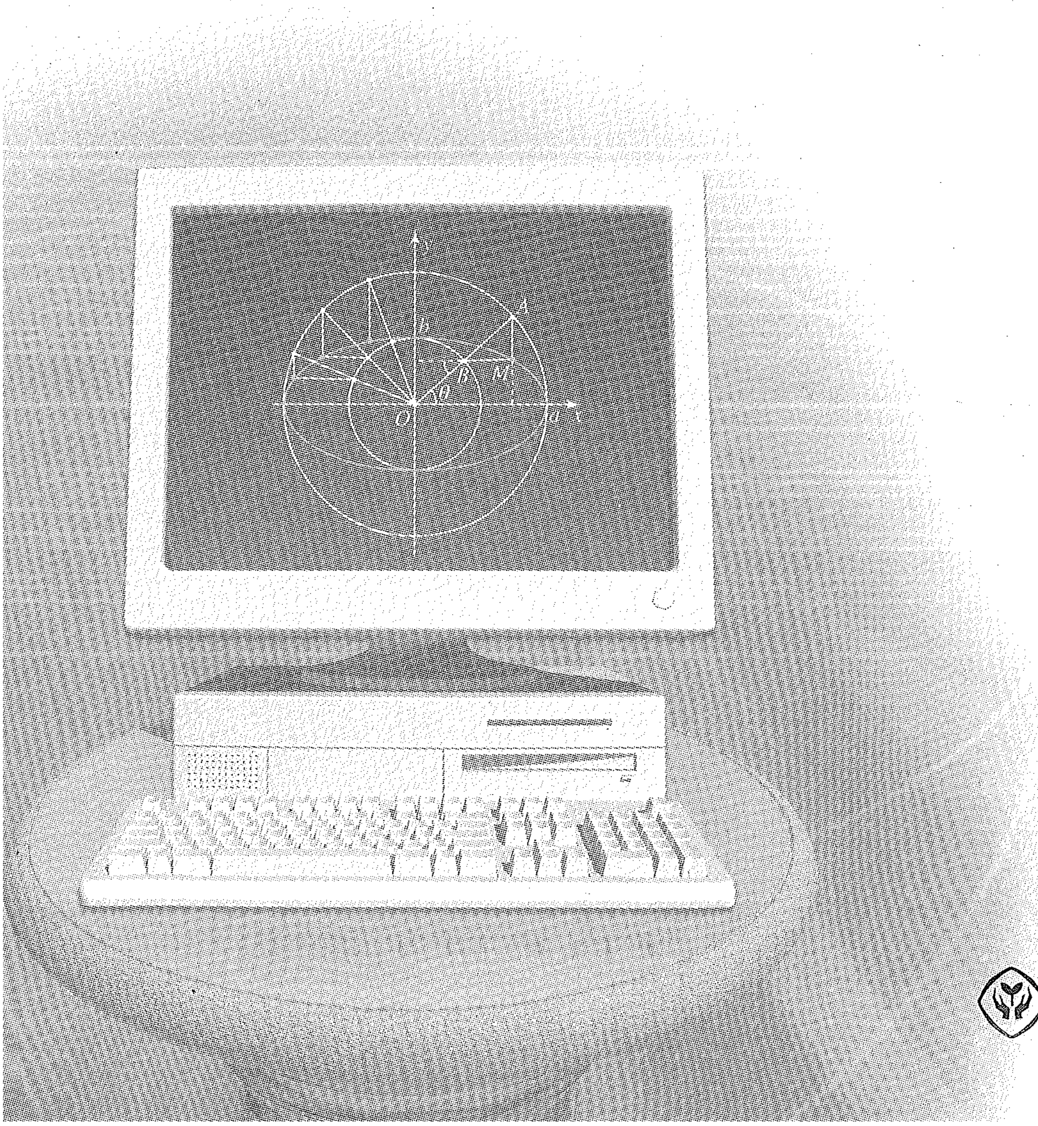
普通高中课程标准实验教科书

数学

选修4-4 坐标系与参数方程

教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著



人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　张润琦
责任编辑　　龙正武
版式设计　　王　喆
封面设计　　李宏庆

图书在版编目（CIP）数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修4-4坐标系与参数方程（B版）教师教学用书 / 人民教育出版社，课程教材研究所中学数学教材实验研究组编著. —2版. —北京：人民教育出版社，2013.8
ISBN 978-7-107-19016-2

Ⅰ. ①普… Ⅱ. ①人…②课… Ⅲ.①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G633.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2012）第031618号

人民教育出版社 出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京世知印务有限公司印装　全国新华书店经销
2007年6月第2版　2013年8月第10次印刷
开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：3　字数：63千字
定价：6.10元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版二科联系调换。
（联系地址：北京市海淀区中关村南大街17号院1号楼　邮编：100081）

说　　明

这本教师教学用书是根据《普通高中数学课程标准（实验）》和经全国中小学教材审定委员会2005年初审通过的《普通高中课程标准实验教科书·数学（B版）》选修4-4坐标系与参数方程编写的教师用书.

本书编写的原则是：

（一）努力体现教材编写的指导思想. 帮助教师钻研教材，理解教材的编写意图.

（二）明确各章的教学要求及要达到的教学目标. 努力完成“课标”中规定的教学任务.

（三）尽力指出相关内容的教学难点、重点以及教学方法，帮助教师克服教学中的一些困难.

（四）努力吸收教师的实际教学经验，使本书能更好地为教学服务.

这本教师教学用书每章包括四个部分：教学基本要求，内容分析与教学提示，知识拓展，习题参考解答.

本书力求阐述编写该教材的指导思想，帮助教师深入理解教材的编写思路. 明确各章的教学基本要求及重点内容. 对教学难点加以分析，给出化解难点的方法. 为了让教师对重点内容有整体的理解，本书还说明了相应内容的拓展. 对教材中的练习和习题都给出了解答，供教师参考.

诚挚地希望广大教师指出本书及教科书中的错误和缺欠，使本书逐步得以完善.

中学数学教材实验研究组
2005年8月

目录

第一章

坐 标 系

一、教学基本要求

1. 复习直角坐标系，初步了解平面上的一种简单变换——伸缩变换.

2. 学会用极坐标表示平面上的点，体会用极坐标刻画平面上点的位置与以前学过的直角坐标的区别. 掌握两种坐标间的变换公式.

3. 了解曲线的极坐标方程的概念，能写出过极点的直线方程和圆心在极点的圆的方程.

4. 熟练掌握和运用过极点且圆心在极轴上或在点$\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$处的圆的极坐标方程，十分熟悉这类圆的两种方程的互化. 运用极坐标方程解一些与圆相关的几何问题，进而体会极坐标方程的方便之处.

5. 了解刻画空间中点的柱坐标和球坐标，知道这两种坐标与直角坐标间的变换公式.

二、内容分析与教学提示

本章先复习了平面上和空间中的直角坐标系，通过具体例子描述了平面上的伸缩变换. 详细讲述了平面上点的极坐标以及它与直角坐标的变换. 简单介绍了曲线的极坐标方程，推导出过极点的圆的极坐标方程. 最后简单介绍了空间中点的柱坐标和球坐标. 作为“探索与研究”的内容，叙述了圆锥曲线的极坐标方程. 作为“阅读与欣赏”，介绍了三种常见曲线的极坐标方程.

本章的重点内容是极坐标系，要熟练掌握刻画平面上点的极坐标，了解极坐标和直角坐标的不同特点，并熟悉两种坐标间的变换. 要了解平面曲线的极坐标方程概念，主要掌握三类圆的极坐标方程：圆心在极点的圆；圆心在极轴上且过极点的圆；圆心在点$\left(a,\ \frac{\pi}{2}\right)$且过极点的圆. 要熟悉这些圆的极坐标方程以及它们与直角坐标方程的互化.

通过具体内容的教学，使学生深入理解并熟练运用平面上点的极坐标 $(\rho,\ \theta)$，要逐步理解平面曲

线的极坐标方程 $\rho=\rho(\theta)$ 的含义.

1.1　直角坐标系，平面上的伸缩变换

内容分析

1. 简单复习平面直角坐标系和空间直角坐标系的基本知识.

2. 通过复习三角函数 $y=A\sin kx$ 的图象，初步认识平面图形的伸缩变换和它的坐标表达式

$$\begin{cases}X=ax\\Y=by\end{cases}$$

教学提示

3. 用直角坐标刻画直线上的点、平面上的点、空间中的点的位置，是已经学过的内容. 此处复习这些内容是为了体会坐标系的作用，为引入极坐标和空间的柱坐标、球坐标作准备.

4. 通过复习函数 $y=3\sin x$，$y=\sin 2x$，$y=3\sin 2x$ 的图形和函数 $y=\sin x$ 的图形的关系，体会坐标的变换在平面图形的变换中的作用. 由此得到平面上的伸缩变换的坐标表达式. 伸缩变换是平面图形变换的简单模型，它可以为后续选修课作些准备.

5. 本节的教学可以根据具体情况采用多种形式.

(1) 按教材内容先复习直角坐标系. 通过分析直线、平面和空间的点的坐标，体会坐标系的作用，强调点与数的结合、用代数方法刻画几何图形的思想，为建立极坐标系打下基础. 再简单介绍平面上的伸缩变换.

(2) 在复习直角坐标系的基础上，讨论平面曲线的直角坐标方程. 这样既为建立极坐标系及曲线的极坐标方程打下基础，同时也讨论了函数 $y=A\sin kx$ 的图形，由此介绍一下平面上的伸缩变换.

(3) 重点复习平面直角坐标系，在此基础上直接讲述 1.2 节的极坐标. 空间直角坐标系的复习放在 1.5 节“柱坐标系和球坐标系”之前，这样使两部分内容结合得更紧密. 平面上的伸缩变换单独介绍.

6. 本节用 1 课时.

1.2　极坐标系

内容分析

这是本章的重点内容，是极坐标问题中的基础知识.

1. 极点 O，标有长度单位的极轴 Ox，选定逆时针方向为计算角度的正方向，合称为极坐标系，由此产生了平面上点的极坐标 (ρ,θ).

2. 令极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴，再作 y 轴构成直角坐标系，则两种坐标的变换公式为

$$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\y=\rho\sin\theta\end{cases}$$

教学提示

3. 要通过大量的练习把平面上的点 P 与极坐标 (ρ,θ) 的对应在学生头脑中牢固树立起来. 同时使学生自然联想到它与直角坐标 (x,y) 的关系.

4. 通过练习逐步让学生认识到一个点 P 可以有多组极坐标与之对应. 适当选择 θ 的取值范围，可以建立平面上的点与极坐标的一一对应关系（极点除外）.

5. 练习坐标为 $(1,\theta)$ 的点的画法，其中 θ 在不断变化，而 ρ 总取 1. 使学生逐步想到这样的点的全体构成圆. 然后把 $\rho=1$ 改为 $\rho=2$，…，$\rho=\rho_0$.

6. 练习坐标为 $\left(\rho,\frac{\pi}{4}\right)$ 的点的画法，其中 ρ 在不断变化，而 θ 总取 $\frac{\pi}{4}$，使学生逐步想到这样的点的全体构成射线. 然后把 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 改为 $\theta=\frac{\pi}{6}$，…，$\theta=\theta_0$.

通过上述练习，学生就具体认识了 $\rho=\rho_0$ 和 $\theta=\theta_0$ 的图形，它们分别是圆和射线. 取 ρ_0 和 θ_0 的不同值，可以得到相应的曲线族，它们就是极坐标的两族坐标曲线.

7. 在学生熟悉了点的极坐标后，通过实例逐步认识对称点的极坐标特性，主要是对称于极点和对称于极轴（或反向延长线）的点.

8. 对于取 $\rho<0$，可以根据学生的情况在本节最后提示一下即可.

9. 本节用 3 课时.

1.3 曲线的极坐标方程

内容分析

1. 若曲线 C 是由极坐标 (ρ,θ) 满足方程 $F(\rho,\theta)=0$ 的所有点组成的，则称此方程为曲线 C 的极坐标方程.

2. 过极点的直线为

$$\theta=\theta_0 \text{ 和 } \theta=\pi+\theta_0,$$

它们各表示一条射线，二者合成一条直线.

3. 以极点为圆心，半径为 R 的圆的极坐标方程为

$$\rho=R.$$

教学提示

4. 先复习曲线的直角坐标方程，逐步引出曲线的极坐标方程，使学生初步了解此概念.

5. 描点作图. 先作 $\rho=1$，…，$\rho=R$ 的图，再作 $\theta=\frac{\pi}{4}$，…，$\theta=\theta_0$ 的图，最后作 $\rho=2\cos\theta$ 的图. 使学生认识到作极坐标方程的图与作直角坐标方程的图的方法、步骤是相同的.

6. 通过推导直线的极坐标方程 $\rho=\frac{d}{\cos(\alpha-\theta)}$，讲述由几何条件写出极坐标方程的一般步骤. 把它与写曲线的直角坐标方程的过程加以对比，加深学生对极坐标方程的认识.

对上述直线的极坐标方程一般不作基本要求，因为在今后的学习中一般很少用它.

7. 通过例题说明曲线的极坐标方程和直角坐标方程的区别：由于曲线上点的极坐标有多种形式，并不要求曲线上点的所有形式的极坐标都满足方程，但是至少有一种形式的极坐标满足方程.

8. 本节用 1 课时.

1.4　圆的极坐标方程

内容分析

1. 圆心在点 $(a, 0)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为

$$\rho=2a\cos\theta,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

2. 圆心在点 $\left(a, \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 a 的圆的极坐标方程为

$$\rho=2a\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

教学提示

3. 两类过极点的圆的极坐标方程在今后的学习中十分重要，因此先从几何上给出详细推导. 这样可以让学生再次体会用三角、几何知识导出极坐标方程的步骤和方法. 由于学生十分熟悉圆的直角坐标方程，因此先写出直角坐标方程，再用坐标变换公式转化为极坐标方程，这种求得圆的极坐标方程的方法对学生更容易接受.

4. 本节的例 2 是一个根据给定几何条件写曲线的极坐标方程的例题. 它又一次演示了求曲线的极坐标方程的过程，表现了用极坐标方程描述曲线的方便之处.

5. 本节的例 4 中的圆不过极点. 这种圆的极坐标方程虽然有一般形式，但是今后极少应用. 在今后的学习中，当需要用这类圆的极坐标方程时，往往把极点放在圆心处，这样方程十分简单，不过此时两种坐标的变换公式要用教科书中的公式 (1-5).

6. 本节用 2 课时.

1.5　柱坐标系与球坐标系

内容分析

1. 柱坐标为 (ρ, θ, z)，其中 $0\leqslant\rho<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$-\infty<z<+\infty$. 它就是在极坐标 (ρ, θ) 的基础上，加上竖坐标 z. 与直角坐标的变换公式为

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

2. 球坐标为 (r, θ, φ)，其中 $0\leqslant r<+\infty$，$0\leqslant\theta<2\pi$，$0\leqslant\varphi\leqslant\pi$. 与直角坐标的变换公式为

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta\\ y=r\sin\varphi\sin\theta\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$$

其中 $r\sin\varphi$ 相当于柱坐标中的 ρ，θ 与柱坐标的相同.

教学提示

3. 虽然学生学过空间直角坐标系，但是理解不够深入，应用尚有困难. 因此空间的柱坐标和球坐标是学习中的难点. 要根据学生的具体情况，通过练习逐步理解. 若有条件，可以通过课件的演示，向学生直观地展示两种坐标系的三族坐标曲面，并结合教科书中图 1-28，图 1-30 给以说明.

4. 通过观看课件，结合图 1-31 直观地说明地球的经纬度.

5. 目前国内教科书中对球坐标（r，θ，φ）中 φ 的含义与 θ，φ 的书写顺序存在异议. 编写本书时，我们根据多数国内外书籍的写法，给出了 φ 的含义与 θ，φ 的书写顺序. 当然，各种写法没有本质的区别，只是习惯而已.

6. 本节用 1 课时.

三、知识拓展

1. 圆的极坐标方程

（1）圆心在点（a，π）处且过极点的圆的方程为

$$\rho=-2a\cos\theta,\ \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi.$$

先用几何方法推导方程（与教科书 1.4.1 节类似），再由直角坐标方程

$$(x+a)^2+y^2=a^2,$$

即

$$x^2+y^2=-2ax,$$

用坐标变换公式转化为极坐标方程.

（2）圆心在点 $\left(a,\ \frac{3}{2}\pi\right)$ 处且过极点的圆的方程为

$$\rho=-2a\sin\theta,\ \pi\leqslant\theta\leqslant2\pi.$$

先作几何推导，再由方程

$$x^2+(y+a)^2=a^2,$$

即

$$x^2+y^2=-2ay,$$

转化为极坐标方程.

以上两种圆的极坐标方程在教科书的习题中有出现.

（3）圆心在点（a，θ_0）处且过极点的圆.

如图 1-1 所示，圆与射线 $\theta=\theta_0$ 的交点为 $P(2a,\ \theta_0)$. 在圆上任取

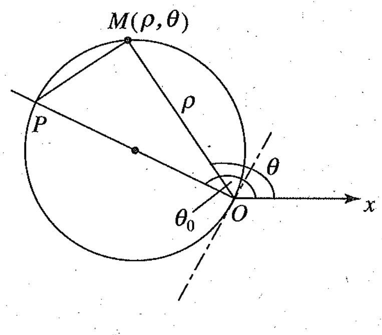


图 1-1

一点 $M(\rho,\ \theta)$，连接 OM 和 MP，则 $OM\perp MP$. 在直角三角形 OMP 中，$\angle MOP=\theta_0-\theta$. 由三角知识可得

$$\rho=2a\cos(\theta_0-\theta),\ \theta_0-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\theta_0+\frac{\pi}{2}.$$

这就是该圆的极坐标方程.

2. 圆锥曲线的极坐标方程

具体内容见教科书 1.4 节后的“探索与研究”.

(1) 圆锥曲线的准线：

椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b)$ 和双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左准线和右准线分别为 $x=-\frac{a}{e}$ 和 $x=\frac{a}{e}$；抛物线 $y^2=2px$ 的准线为 $x=-\frac{p}{2}$.

以椭圆为例说明圆锥曲线的共同几何特征.

由选修 2-1 的 2.2.1 节可知，椭圆上任一点 $M(x,\ y)$ 到左焦点 $F_1(-c,\ 0)$ 的距离为

$$|MF_1|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a+\frac{c}{a}x=e\left(\frac{a}{e}+x\right),$$

其中 $\frac{a}{e}+x$ 表示点 M 到直线 $x=-\frac{a}{e}$ 的距离. 因此，上式表示，点 M 到焦点 F_1 的距离与点 M 到直线 $x=-\frac{a}{e}$ 的距离之比为常数 e. 同样说明点 M 的焦点 $F_2(c,\ 0)$ 的距离与点 M 到直线 $x=\frac{a}{e}$ 的距离之比为常数 e.

对双曲线可以类似说明. 对抛物线由其定义便知.

(2) 圆锥曲线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta},$$

其中 p 为焦点 O（即极点）到曲线的“垂直距离”——由点 O 作极轴的垂线，它与曲线有交点 A，$|OA|=p$，称 p 为圆锥曲线的焦参数. 显然，$\frac{p}{e}$ 为焦点到相应准线的距离. 从圆锥曲线的定义看，似乎用焦点到准线的距离作为一个参数更自然，但是从实际问题看，参数 e 决定了圆锥曲线的类型，而在类型确定后根据焦参数 p 更能直观地想象曲线的形状. 由于准线不能直观地被想象出，因此根据焦点到准线的距离就更难直观地想象曲线的形状了. 在教科书的例 1 中，焦参数 $p=6\ 652$ km，由此可以直观地想象地心到轨道曲线的“垂直距离”. 而焦点到准线的距离为 588 673 km，由此数据难于和轨道曲线的形状联系起来.

(3) 本段中的例 3，应用了圆锥曲线的极坐标方程去解题，显示了极坐标方程的方便之处. 本段后面还有类似的练习题.

3. 常见曲线的极坐标方程

具体内容见本章后的“阅读与欣赏”.

此处介绍的三种曲线在高等数学的学习中常常用到. 要了解三种曲线的极坐标方程及其图形，知道

按方程作图的过程. 看相应课件，对三种曲线会有直观的了解.

四、习题参考解答

练习 1.1.1

八个顶点的坐标分别为 (0, 0, 0)，(0, 0, 3)，(3, 0, 0)，(3, 0, 3)，(3, 3, 0)，(3, 3, 3)，(0, 3, 0)，(0, 3, 3).

练习 1.1.2

1. 坐标变换公式为

$$\begin{cases} X=\dfrac{x}{2} \\ Y=y \end{cases}$$

2. 把 $x=\dfrac{X}{3}$，$y=\dfrac{Y}{2}$ 代入方程 $x^2+y^2=4$，得

$$\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{4}=4,$$

即
$$\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{16}=1.$$

此变换把圆变为椭圆.

习题 1-1

1. 由 $|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49$,

$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98$,

$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49$,

知 $|AB|=|AC|$，故为等腰三角形.

2. 设点 $C(0, 0, z)$，则

$$|AC|^2=(-4)^2+1^2+(7-z)^2=z^2-14z+66,$$
$$|BC|^2=3^2+5^2+(-2-z)^2=z^2+4z+38,$$

由题设
$$|AC|=|BC|,$$

得

$$z^2-14z+66=z^2+4z+38,$$
$$z=\frac{14}{9}.$$

3. 把 $X=x$，$Y=4y$ 代入椭圆方程

$$X^2+\frac{Y^2}{16}=1,$$

得

$$x^2+y^2=1.$$

这表明，单位圆在此伸缩变换下变为椭圆.

练习 1.2.1

1. 略.
2. 略.
3. 点 $A(\rho,\theta)$与 $B(\rho,-\theta)$ 关于极轴所在的直线对称.
   点 $A(\rho,\theta)$与 $C(\rho,\pi+\theta)$ 关于极点对称.
   点 $A(\rho,\theta)$与 $D(\rho,\pi-\theta)$关于垂直于极轴且过极点的直线对称.
   点 $E(-\rho,\theta)$与 $C(\rho,\pi+\theta)$为同一点.
   点 $F(-\rho,-\theta)$与 $D(\rho,\pi-\theta)$为同一点.

练习 1.2.2

1. 用坐标变换公式，得

$$\begin{cases}x=5\cos\dfrac{5}{6}\pi=-\dfrac{5}{2}\sqrt{3}\\ y=5\sin\dfrac{5}{6}\pi=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

   即 $M\left(-\dfrac{5}{2}\sqrt{3},\ \dfrac{5}{2}\right)$.

2. $\rho^2=(\sqrt{3})^2+(-1)^2=4$,

   点在第四象限，$\tan\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\theta=\dfrac{11}{6}\pi$.

   (1) $M\left(2,\ \dfrac{11}{6}\pi\right)$；

   (2) $M\left(-2,\ \dfrac{5}{6}\pi\right)$.

习题 1-2

1. (1) 所有点都在以极点为圆心，半径为 2 的圆上；

   (2) 所有点都在与极轴的倾角为$\dfrac{\pi}{4}$，且过极点的直线上.

2. (1) (2) 关于极轴对称；
   (3) (4) 关于垂直于极轴且过极点的直线对称；
   (5) (6) 关于极点对称.
3. 用坐标变换公式，得

   $\rho=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$，$\tan\theta=\dfrac{-1}{1}$，$\theta=\dfrac{7}{4}\pi$，点 $A\left(\sqrt{2},\ \dfrac{7}{4}\pi\right)$.

$\rho=2$，$\theta=\dfrac{3}{2}\pi$，点 $B\left(2,\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$.

$\rho=5$，$\theta=\arctan\dfrac{4}{3}$，点 $C\left(5,\ \arctan\dfrac{4}{3}\right)$.

$\rho=5$，$\theta=\pi+\arctan\dfrac{4}{3}$，点 $D\left(5,\ \pi+\arctan\dfrac{4}{3}\right)$.

4. 由 $\begin{cases}x=2\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\\ y=2\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-1\end{cases}$

得 $A(\sqrt{3},\ -1)$.

由 $\begin{cases}x=2\cos\dfrac{3}{2}\pi=0\\ y=2\sin\dfrac{3}{2}\pi=-2\end{cases}$

得 $B(0,\ -2)$.

由 $\begin{cases}x=2\cos\dfrac{5}{4}\pi=-\sqrt{2}\\ y=2\sin\dfrac{5}{4}\pi=-\sqrt{2}\end{cases}$

得 $C(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

由 $\begin{cases}x=-2\cos\dfrac{\pi}{6}=-\sqrt{3}\\ y=-2\sin\dfrac{\pi}{6}=-1\end{cases}$

得 $D(-\sqrt{3},\ -1)$.

习题 1-3

1. 在直线上任取一点 $M(\rho,\ \theta)$，由于直线垂直于极轴，易知

$$\rho\cos\theta=2,\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}.$$

这就是直线的极坐标方程.

2. 直线与极轴的距离为 2. 在直线上任取一点 $M(\rho,\ \theta)$，易知

$$\rho\sin\theta=2,\ 0<\theta<\pi.$$

这就是直线的方程.

3. 把 $x^2+y^2=\rho^2$ 代入方程，得

$$\rho=R.$$

4. 把方程变形为

$$\rho^2=4\rho\cos\theta,$$

用坐标变换公式，得

$$x^2+y^2=4x,$$

即

$$(x-2)^2+y^2=4.$$

5. 把方程变形为

$$\rho^2=2a\rho\sin\theta,$$

用坐标变换公式，得

$$x^2+y^2=2ay,$$

即

$$x^2+(y-a)^2=a^2.$$

练习 1.4.1

1. 用坐标变换公式，得

$$\rho^2=\rho\cos\theta,$$

即　$\rho=\cos\theta$.

圆心的极坐标为（0.5，0），半径为 0.5.

2. 把方程变形为

$$\rho^2=8\rho\cos\theta,$$

得
$$x^2+y^2=8x,$$
即
$$(x-4)^2+y^2=16.$$

圆心在点（4，0），半径为 4.

练习 1.4.2

1. 把方程变形为

$$x^2+y^2=2ay,$$

用坐标变换公式，得

$$\rho^2=2a\rho\sin\theta,$$

即　$\rho=2a\sin\theta$.

2. 把方程变形为

$$\rho^2=\rho\sin\theta,$$

得
$$x^2+y^2=y,$$

即
$$x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

圆心在点（0，0.5），半径为 0.5.

3. 圆心分别为 $A\left(\frac{9}{2}，0\right)$和 $B\left(8，\frac{\pi}{2}\right)$，易知

$$|AB|=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+8^2}=\frac{1}{2}\sqrt{337}.$$

习题 1-4

1. (1) 圆心在点 $A(0.5, 0)$，半径为 0.5 的圆；
   (2) 圆心在点 $B(2, 0)$，半径为 2 的圆；
   (3) 圆心在点 $C\left(0.5, \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为 0.5 的圆；
   (4) 圆心在点 $D\left(4.5, \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为 4.5 的圆.
2. (1) $\rho=4\cos\theta$；
   (2) $\rho=4\sin\theta$；
   (3) $\rho=6\cos\theta$；
   (4) $\rho=6\sin\theta$.
3. (1) $\rho=4\sin\theta$；
   (2) $\rho=6\cos\theta$；
   (3) $\rho=4a\cos\theta$；
   (4) $\rho=4a\sin\theta$.
4. (1) $x^2+y^2=2ax$；
   (2) $x^2+y^2=4ay$；
   (3) 把方程变形为
   $$\rho^2=9\rho(\cos\theta+\sin\theta),$$
   得
   $$x^2+y^2=9(x+y);$$
   (4) 方程变形为
   $$\rho^2=\rho(\cos\theta-4\sin\theta),$$
   得
   $$x^2+y^2=x-4y.$$
5. 如图 1-2 所示，在圆上任取一点 $M(\rho, \theta)$，记弦 OM 的中点为 $P(r, \varphi)$，则
   $$\begin{cases}\varphi=\theta\\ r=\dfrac{1}{2}\rho\end{cases}$$
   代入圆的方程 $\rho=4\sin\theta$，得
   $$2r=4\sin\varphi,$$
   即
   $$r=2\sin\varphi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant\pi.$$
   知轨迹曲线为圆，圆心在点 $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为 1.

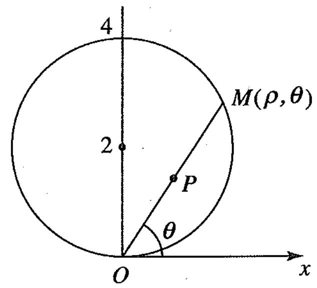


图 1-2

练习（圆锥曲线的极坐标方程）

1. (1) $\rho=\dfrac{4}{1-2\cos\theta}$,

由圆锥曲线的极坐标方程（1-9）知，$e=2$，$p=4$，此曲线为双曲线；

(2) $\rho=\dfrac{4}{2-\cos\theta}$,

方程变形为

$$\rho=\frac{2}{1-\frac{1}{2}\cos\theta},$$

$e=\dfrac{1}{2}$，$p=2$，曲线为椭圆；

(3) $\rho=\dfrac{3}{1-\cos\theta}$,

$e=1$，$p=3$，为抛物线.

2. $\rho=\dfrac{16}{5-3\cos\theta}$,

变形为

$$\rho=\frac{\frac{16}{5}}{1-\frac{3}{5}\cos\theta},$$

$e=\dfrac{3}{5}$，$p=\dfrac{16}{5}$.

由公式 $p=\dfrac{b^2}{a}$，知 $\dfrac{b^2}{a}=\dfrac{16}{5}$.

又 $$\frac{c}{a}=\frac{3}{5},$$

即 $$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{3}{5},$$

得 $$a=\frac{5}{4}b,$$

由此知

$$\frac{b^2}{\frac{5}{4}b}=\frac{16}{5},$$

解得 $b=4$，$a=5$. 椭圆的长轴为 10，短轴为 8.

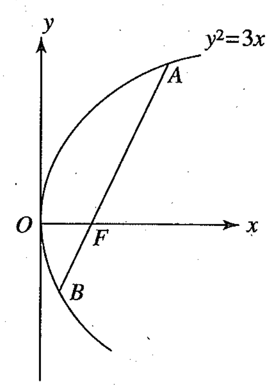


图 1-3

3. 如图 1-3 所示，F 为焦点. 由方程 $y^2=3x$ 知

$$p=\frac{3}{2},\ e=1,$$

得抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{\frac{3}{2}}{1-\cos\theta},$$

由题设，得

$$|FA|=\frac{\frac{3}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{3}}=3,$$

$$|FB|=\frac{\frac{3}{2}}{1-\cos\frac{4}{3}\pi}=1,$$

因此 $$|AB|=|FA|+|FB|=3+1=4.$$

4. 如图 1-4 所示，抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta},$$

由题设得

$$1.6\times10^8=\frac{p}{1-\cos\frac{\pi}{3}},$$

$$p=1.6\times10^8\times\frac{1}{2}=0.8\times10^8,$$

得彗星轨道的极坐标方程为

$$\rho=\frac{0.8\times10^8}{1-\cos\theta},$$

$$|AO|=\frac{0.8\times10^8}{1-\cos\pi}=0.4\times10^8(\mathrm{km}).$$

这就是近日点到太阳的距离.

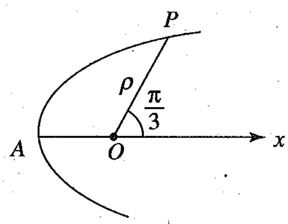


图 1-4

5. 如图 1-5 所示，F 为焦点，$p=2$，抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{2}{1-\cos\theta},$$

由此得

$$\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\left[\frac{2}{1-\cos(\pi+\theta)}\right]^{-1}+\left(\frac{2}{1-\cos\theta}\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{2}[(1+\cos\theta)+(1-\cos\theta)]$$
$$=1.$$

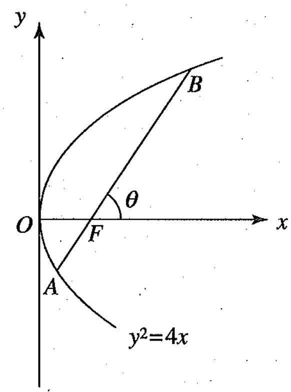


图 1-5

6. 如图 1-6 所示，以焦点 F 为极点，则椭圆的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-e\cos\theta},$$

得

$$\frac{1}{|FA|}+\frac{1}{|FB|}=\left[\frac{p}{1-e\cos(\pi+\theta)}\right]^{-1}+\left(\frac{p}{1-e\cos\theta}\right)^{-1}$$
$$=\frac{1}{p}[(1+e\cos\theta)+(1-e\cos\theta)]$$

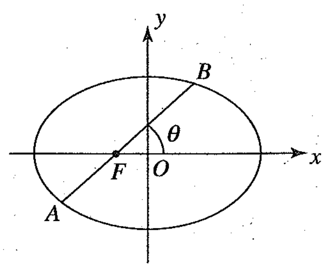


图 1-6

$$=\frac{2}{p}=\frac{2a}{b^2},$$

其中 a，b 为给定值，因此 $\frac{2a}{b^2}$ 为定值.

练习 1.5.1

1. $\rho=\sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2}=2$，

$\tan\theta=\frac{-\sqrt{3}}{1}$，$\theta=2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5}{3}\pi$，

点 M 的柱坐标为 $\left(2，\frac{5}{3}\pi，4\right)$.

2. $\begin{cases} x=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3} \\ y=2\sin\frac{\pi}{6}=1 \end{cases}$

点 M 的直角坐标为（$\sqrt{3}$，1，7）.

练习 1.5.2

1. $\begin{cases} x=2\sin\frac{3}{4}\pi\cos\frac{3}{4}\pi=-1 \\ y=2\sin\frac{3}{4}\pi\sin\frac{3}{4}\pi=1 \\ z=2\cos\frac{3}{4}\pi=-\sqrt{2} \end{cases}$

点的直角坐标为（-1，1，$-\sqrt{2}$）.

2. $r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2+1^2}=2$.

$\tan\theta=\frac{-1}{\sqrt{2}}$，$\theta=2\pi-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$r\cos\varphi=1$，$\cos\varphi=\frac{1}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{3}$.

点的球坐标为 $\left(2，2\pi-\arctan\frac{\sqrt{2}}{2}，\frac{\pi}{3}\right)$.

3. 略.

习题 1-5

1. $\rho=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$.

$\tan\theta=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$，$\theta=2\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

点的柱坐标为$\left(\sqrt{3}，2\pi-\arctan\dfrac{\sqrt{2}}{2}，-3\right)$.

2. 方程 $\rho=1$ 表示以 z 轴为中心轴，底半径为 1 的圆柱面.

方程 $z=-1$ 表示与 xOy 坐标面平行的平面，此平面与 xOy 面的距离为 1，在此坐标面之下.

3. $r=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$，

$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，

$\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

点的球坐标为$\left(\sqrt{2}，\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 方程 $r=1$ 表示球心在原点的单位球面.

方程 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$表示顶点在原点，半顶角为$\dfrac{\pi}{4}$的上半个圆锥面，中心轴是 z 轴.

巩固与提高

1. $\rho\cos\theta=3$ 表示垂直于极轴的直线，该直线过点 $M_0(3，0)$.

用 $\rho=\dfrac{3}{\cos\theta}$计算 ρ：

当 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$时，$\rho=2\sqrt{3}$，对应点 $A\left(2\sqrt{3}，\dfrac{\pi}{6}\right)$；

当 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$时，$\rho=3\sqrt{2}$，对应点 $B\left(3\sqrt{2}，\dfrac{\pi}{4}\right)$；

当 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$时，$\rho=6$，对应点 $C\left(6，\dfrac{\pi}{3}\right)$；

当 $\theta=-\dfrac{\pi}{3}$时，$\rho=6$，对应点 $D\left(6，-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

2. $\rho\sin\theta=1$ 表示平行于极轴的直线，该直线过点 $M_0\left(1，\dfrac{\pi}{2}\right)$.

用 $\sin\theta=\dfrac{1}{\rho}$计算 θ：

当 $\rho=1$ 时，$\sin\theta=1$，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，对应点 $A\left(1，\dfrac{\pi}{2}\right)$；

当 $\rho=2$ 时，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}$，$\theta=\dfrac{\pi}{6}$或$\dfrac{5\pi}{6}$，对应点 $B\left(2，\dfrac{\pi}{6}\right)$或 $C\left(2，\dfrac{5\pi}{6}\right)$；

当 $\rho=\sqrt{2}$时，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$或$\dfrac{3\pi}{4}$，对应点 $D\left(\sqrt{2}，\dfrac{\pi}{4}\right)$或 $E\left(\sqrt{2}，\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

3. 图略.

(1) $\rho\cos\theta=4$ 表示垂直于极轴的直线，且过点 $(4，0)$；

(2) $\rho=9\cos\theta$ 表示圆心在点$\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$，半径为$\frac{9}{2}$的圆；

(3) $\rho=16\sin\theta$ 表示圆心在点$\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 8 的圆.

4. (1) $\rho=4$ 表示圆心在极点，半径为 4 的圆；

(2) 化为极坐标方程

$\rho^2=-6\rho\sin\theta$,

$\rho=-6\sin\theta$，$\pi\leqslant\theta\leqslant2\pi$,

表示圆心在点$\left(3,\ \frac{3}{2}\pi\right)$，半径为 3 的圆；

(3) $\rho=10\cos\theta$ 表示圆心在点（5，0），半径为 5 的圆.

5. (1) $\rho\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}\right)=1$,

$\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=1$,

$\sqrt{3}x+y-2=0$；

(2) $\rho^2=\rho\cos\theta-2\rho\sin\theta$,

$x^2+y^2=x-2y$,

即 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2=\frac{5}{4}$；

(3) $\rho^3=\rho^2\sin^2\theta$,

$(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=y^2$.

6. $\rho^2=-\sqrt{3}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta$,

$x^2+y^2=-\sqrt{3}x-y$,

即 $\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1$.

圆心在点$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，半径为 1.

7. 如图 1-7 所示，圆的极坐标方程为

$$r=2\cos\varphi.$$

设圆上动点 $P(r,\ \varphi)$，中点 $M(\rho,\ \theta)$，则

$$\begin{cases}\rho=\frac{r}{2}\\ \theta=\varphi\end{cases}$$

代入圆的方程，得

$$2\rho=2\cos\theta,$$

即 $\rho=\cos\theta$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$.

轨迹为圆心在点（0.5，0），半径为 0.5 的圆.

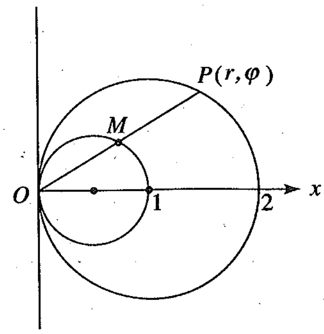


图 1-7

8. 如图 1-8 所示，设点 $M(\rho,\ \theta)$. 由题设知

$$|AB|=4,\ OM\perp AB.$$

又
$$|OA|^2+|OB|^2=4^2,$$

得

$$\left(\frac{\rho}{\cos\theta}\right)^2+\left(\frac{\rho}{\sin\theta}\right)^2=4^2,$$

$$\frac{\rho^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}=4^2,$$

$$\rho=4\sin\theta\cos\theta,$$

$$\rho=2\sin 2\theta.$$

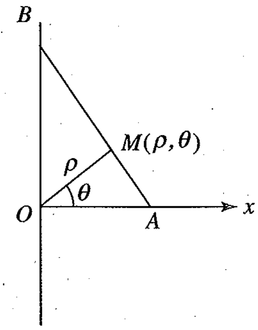


图 1-8

这是四叶玫瑰线的极坐标方程. 此曲线如图 1-9 所示.

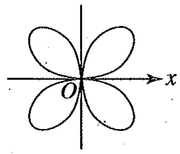


图 1-9

9. 如图 1-10 所示，设直线上的动点 $M(\rho,\ \theta)$，OM 上的点 $P(r,\ \varphi)$，则 $\varphi=\theta$. 由题设知

$$|OM|\cdot|OP|=12,$$

即
$$\rho\cdot r=12,$$

$$\frac{3}{\cos\theta}\cdot r=12,$$

$$r=4\cos\theta,$$

得
$$r=4\cos\varphi,\ -\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}.$$

轨迹为圆心在点（2，0），半径为 2 的圆（极点除外）.

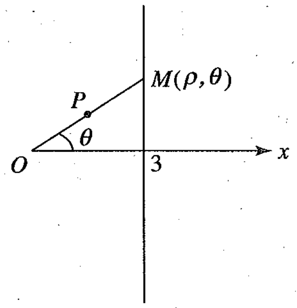


图 1-10

自测与评估

1. $\rho=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$,

   $\tan\theta=\dfrac{-1}{-\sqrt{3}}$，$\theta=\dfrac{7\pi}{6}$，

   得　$M\left(2,\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$.

2. (1) $\rho=5$;

   (2) $\rho=2a\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant\pi$;

   (3) $\rho=2a\cos\theta$，$-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$;

   (4) 直角坐标方程为

   $$(x+5)^2+y^2=25,$$

   即
   $$x^2+y^2=-10x,$$

   $$\rho^2=-10\rho\cos\theta,$$

   得极坐标方程
   $$\rho=-10\cos\theta,\ \frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3}{2}\pi.$$

3. 把方程变形为

$$\rho^2=-4\rho\sin\theta+\rho\cos\theta,$$

化为直角坐标，得

$$x^2+y^2=-4y+x,$$

即

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+2)^2=\frac{17}{4},$$

这是圆心在点$\left(\frac{1}{2}, -2\right)$，半径为$\frac{\sqrt{17}}{2}$的圆.

4. 极坐标方程为

$$\rho=12a\sin\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

5. 如图 1-11 所示，设直线上的动点 $P(\rho, \theta)$，OP 上的点 $M(r, \varphi)$，其中 $\rho\sin\theta=8$.

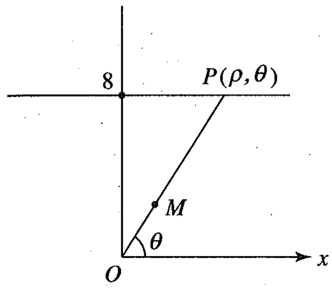


图 1-11

由题设知

$$|OM|\cdot|OP|=16,$$

即 $r\rho=16$，

$$r\cdot\frac{8}{\sin\theta}=16,$$

$$r=2\sin\theta.$$

又 $\varphi=\theta$,

得 $r=2\sin\varphi,\ 0<\varphi<\pi$.

它表示圆心在点$\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$，半径为 1 的圆（极点除外）.

第二章 参数方程

一、教学基本要求

1. 通过分析抛射体运动中时间与物体位置的关系，了解其参数方程，体会参数的意义.
2. 了解一般曲线的参数方程的含义.
3. 详细讨论直线和圆的参数方程，并运用参数方程解决某些相关的应用问题（主要是和几何量有关的问题）.
4. 要熟悉椭圆的参数方程，并能用它方便地解一些几何问题. 了解抛物线和双曲线的参数方程.
5. 了解摆线的生成过程及它的参数方程，学习用向量知识推导运动轨迹曲线的方法和步骤.
6. 了解圆的渐开线的参数方程.

二、内容分析与教学提示

参数方程是表示曲线的常用数学形式，也是表示函数关系的重要形式. 有些曲线用参数方程表示十分方便，也便于应用. 因此它是学习高等数学的基础知识.

本章先通过实例引入了曲线的参数方程，深入讨论了直线和圆的参数方程. 在叙述了圆锥曲线的参数方程后，作了一些关于直线和圆锥曲线的综合练习，从中可以体会到参数方程的方便之处和参数的作用. 最后推导了摆线和圆的渐开线的参数方程，由推导过程可以分析总结用“向量方法”推导轨迹曲线参数方程的思路、方法和步骤. 在本章的“阅读与欣赏”中，着重描述了星形线的参数方程，对内摆线、外摆线及相应的各类变幅摆线都作了全面的概括介绍.

本章中要重点掌握直线、圆和椭圆的参数方程，并能较为熟练地运用参数方程的形式解决一些相关问题. 通过学习摆线的参数方程，逐步学会用向量知识推导运动轨迹曲线的参数方程的基本方法和步骤.

2.1 曲线的参数方程

内容分析

1. 借助物理知识，运用向量工具，得到抛射体运动的参数方程

$$\begin{cases} x=v_0\cos\alpha\cdot t \\ y=v_0\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

方程中参数 t 的物理意义很清楚，由此方程可适时地确定物体所在位置，应用十分方便.

2. 上面的参数方程可以消去参数 t，变为直角坐标方程，由此可知曲线是一条抛物线.

3. 给出一般曲线的参数方程的概念. 以直线方程为例，说明把直角坐标方程化为参数方程的过程.

教学提示

4. 本节的教学目的是让学生初步认识参数方程. 学生对抛物运动和圆周运动都比较熟悉，由此开始逐步引入参数方程概念.

5. 由于圆周运动（教科书中的例 2）比抛物运动更简单，也可以先从圆周运动讲起，说明参数 θ 的几何意义与参数 t 的物理意义. 这样更易于学生理解.

6. 本节用 2 课时.

2.2 直线和圆的参数方程

内容分析

1. 直线的参数方程（标准形式）为

$$\begin{cases} x=x_0+t\cos\alpha \\ y=y_0+t\sin\alpha \end{cases}$$

其中 $|t|$ 表示参数 t 对应的动点 $(x,\ y)$ 与直线上的定点 $(x_0,\ y_0)$ 之间的距离，α 为直线的倾角. 当要解决与距离有关的几何问题时，常用直线方程的这一形式.

2. 直线的参数方程（一般形式）为

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases}$$

其中向量 $(l,\ m)$ 与直线平行.

3. 圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+R\cos t \\ y=y_0+R\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

当 $x_0=0$，$y_0=0$ 时，圆心在原点. R 为圆的半径.

教学提示

4. 直线的参数方程十分重要. 熟练运用这种形式解题非常方便，而且用法灵活. 教科书中的例 2、例 3、例 4 都是典型例题，应该用较多时间详细分析，使学生逐步理解和掌握参数在解题中的用法.

5. 在 2.2.1 节后面的“思考与讨论”中，专门对点到直线的距离问题提出各种解题思路. 可以组织学生讨论. 在后面的“习题参考解答”中有详细说明. 上述的某些解题思路以后可以直接推广，用以解空间中的相应问题.

6. 本节用 3 课时.

2.3 圆锥曲线的参数方程

内容分析

1. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=x_0+a\cos t \\ y=y_0+b\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

当 $x_0=0$，$y_0=0$ 时，椭圆中心在原点.

2. 抛物线的参数方程为

$$\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$$

3. 双曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\sec t \\ y=b\tan t \end{cases}$$

教学提示

4. 椭圆的参数方程在今后的学习中常用，它是本节的重点内容. 教科书中的例 3 是一个求最大值的实际问题，用参数方程解起来十分方便. 在习题中还有一些类似的问题可供练习.

5. 在 2.3.1 节后的“思考与讨论”中，叙述了椭圆参数方程的参数的几何意义. 可以组织学生课外讨论.

6. 抛物线和双曲线的参数方程在今后的学习中很少用，因此只要了解它们的参数方程就可以了.

7. 在学完 2.3 节后，对参数方程已有较多的了解，为了让学生深入体会参数方程的作用，要多作一些相关练习. 在本章小结中提供了这方面的习题.

8. 本节用 3 课时.

2.4 一些常见曲线的参数方程

内容分析

1. 一圆周沿一直线作无滑动的滚动时，圆周上的一定点 M 的轨迹称为摆线. 由此，用三角、几何知识，借助向量工具建立起摆线的参数方程

$$\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$$

2. 利用参数方程讨论了摆线的一些性质，并简单指出它的某些应用.

3. 用初等方法说明了圆的渐开线，用"向量方法"建立起它的参数方程

$$\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t)\\ y=a(\sin t-t\cos t)\end{cases}$$

教学提示

4. 本节重点是让学生了解摆线的参数方程及摆线的图形、简单性质.

5. 以摆线和圆的渐开线为例，让学生逐步了解用"向量方法"建立运动轨迹曲线的参数方程的过程和步骤：

(1) 建立合适的坐标系，设轨迹曲线上的动点为 $M(x, y)$；

(2) 取定运动中产生的某一角度为参数；

(3) 用三角、几何知识写出相关向量的坐标表达式；

(4) 用向量运算得到$\overrightarrow{OM}$的坐标表达式，由此得到轨迹曲线的参数方程.

6. 用"向量方法"建立轨迹曲线的参数方程是本章的难点. 可以组织学生作专门讨论. 还可以结合本章的"阅读与欣赏"，分析星形线的参数方程的建立过程.

7. 圆的渐开线也称为圆的渐伸线，该曲线上各点处的曲率中心就组成基圆，称基圆为该曲线的渐屈线. 如果一条曲线的各点处都存在曲率中心，由全体曲率中心点组成的曲线就称为原曲线的渐屈线，而原曲线称为它的渐伸线.

由圆的渐开线的参数方程可以求出相应的曲率中心，它们就构成了基圆.

8. 本节用 2 课时.

三、知识拓展

本章的"阅读与欣赏"补充了摆线（也称为平摆线）、内摆线和外摆线的全面知识. 三类摆线都可以稍作变化，成为相应的变幅平摆线、变幅内摆线和变幅外摆线. 变幅摆线又可以分为短幅摆线和长幅摆线.

1. 星形线是小圆在大圆内无滑动地滚动，小圆周上的一定点 M 的轨迹，其中大圆的半径 a 为小圆

的半径 r 的 4 倍. 星形线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos^3 t\\y=a\sin^3 t\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

推导星形线的参数方程的过程与摆线的情况本质上相同，只是选取的参数 t 不同，所用三角、几何知识的具体情形有所区别.

2. 当圆半径 a 和 $r(a>r)$ 取任意值时，运动轨迹统称为内摆线. 它的参数方程的推导过程与星形线完全类似.

当大圆半径 a 等于小圆半径 r 的 2 倍时，轨迹变为大圆的一条直径.

以上过程在资料中都给出了详细说明.

3. 当动圆在定圆外无滑动地滚动时，若两圆的半径相等，则动圆周上一定点 M 的运动轨迹是心形线. 它就是在第一章的"阅读与欣赏"中介绍过的一种曲线. 此处先推导出参数方程，再由参数方程转化为极坐标方程.

当两圆的半径不相等时，动圆周上一定点 M 的运动轨迹称为外摆线. 它的参数方程的推导过程与心形线情况类似. 资料中都有详细说明.

4. 三类摆线都是动圆周上的一定点 M 的运动轨迹. 若取定圆平面上圆内的一定点 M，则运动中点 M 的轨迹就转化为短幅曲线——短幅平摆线、短幅内摆线和短幅外摆线. 资料中给出了短幅平摆线的参数方程的详细推导过程，它与平摆线的推导过程完全类似. 对其余两种曲线也作了简要说明.

若取定圆平面上圆外一定点 M，则运动中点 M 的轨迹就转化为长幅曲线——长幅平摆线、长幅内摆线和长幅外摆线.

仔细分析资料中各类曲线参数方程的推导过程，可以深入理解和掌握用"向量方法"推导轨迹曲线的参数方程的一般步骤.

四、习题参考解答

练习 2.1.1

把 $\alpha=30°$ 代入方程，得

$$\begin{cases}x=v_0\cos 30°\cdot t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 t\\[2mm] y=v_0\sin 30°\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2=\dfrac{1}{2}v_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2\end{cases}$$

把 $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}v_0}x$ 代入 y 的表达式，得

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2g}{3v_0^2}x^2.$$

把 $\alpha=60°$ 代入方程，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}v_0 t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}v_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

消去 t，得

$$y=\sqrt{3}x-\frac{2g}{v_0^2}x^2.$$

练习 2.1.2

速度的水平分量为

$$v_x=2\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

竖直分量为

$$v_y=2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2},$$

轨迹的参数方程为

$$\begin{cases} x=\sqrt{2}t \\ y=\sqrt{2}t \end{cases} \quad 0\leqslant t<+\infty.$$

习题 2-1

1. $\begin{cases} x=v_0\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot t \\ y=v_0\sin\dfrac{\pi}{4}\cdot t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

即

$$\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_0 t \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_0 t-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

射程为

$$\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}=\frac{v_0^2}{g},$$

最大高度为

$$\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}=\frac{v_0^2}{4g}.$$

2. 射程为 $x_T=\dfrac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$,

当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，射程达到最大值 $\dfrac{v_0^2}{g}$.

3. $\begin{cases} x=v_0 t \\ y=-\dfrac{1}{2}gt^2 \end{cases}$

当 $y=-h$ 时，物体落地. 此时有

$$-\frac{1}{2}gt^2=-h,$$

得落地时间为

$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

4. 由 $x=3-2t$，得 $t=\frac{1}{2}(3-x)$. 代入 y 的表达式，得

$$y=-1-\frac{4}{2}(3-x),$$

即

$$y=2x-7.$$

这是斜率为 2 的直线.

思考与讨论 2.2.1

解法一 如图 2-1 所示，由于直线 l 与向量$(2,-4)$平行，而$(4,2)\cdot(2,-4)=0$，因此得与 PP_0 平行的向量$(4,2)$. 作变形

$$(4,2)=2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right),$$

令 $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$，其中 α 为 PP_0 的倾角. 得 PP_0 的参数方程（标准形式）

$$\begin{cases} x=-2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}t \\ y=-1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}t \end{cases} \qquad ①$$

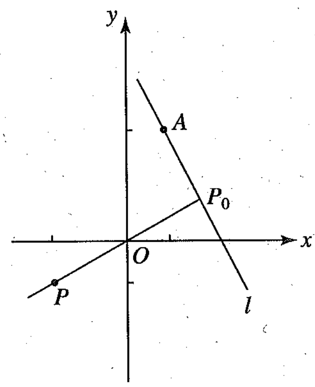


图 2-1

把直线 l 的参数方程化为直角坐标方程（或由给定条件直接写出方程），得

$$y=3-2(x-1),$$

即

$$2x+y-5=0, \qquad ②$$

把①代入②，得

$$2\left(-2+\frac{2}{\sqrt{5}}t\right)+\left(-1+\frac{1}{\sqrt{5}}t\right)-5=0,$$

解得

$$t=2\sqrt{5}.$$

由$|t|=|PP_0|$，知这就是要求的距离.

解法二 直线 l 的方程为

$$2x+y-5=0,$$

直线 PP_0 的方程为

$$y=\frac{1}{2}x \quad \left(由解法一知，\tan\alpha=\frac{1}{2}\right),$$

以上二方程联立，解得交点 P_0 的坐标：$x=2$，$y=1$.

因此 $|PP_0|=\sqrt{(2+2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}$.

解法三 向量(4，2)与 PP_0 平行，得 PP_0 的参数方程

$$\begin{cases}x=-2+4t\\y=-1+2t\end{cases}$$

代入直线 l 的方程 $2x+y-5=0$，得

$$2(-2+4t)+(-1+2t)-5=0,$$

解得

$$t=1,$$

对应点 P_0 的坐标为

$$\begin{cases}x=-2+4=2\\y=-1+2=1\end{cases}$$

由此得

$$|PP_0|=\sqrt{(2+2)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{5}.$$

练习 2.2.1

1. $\cos\frac{2}{3}\pi=-\frac{1}{2}$，$\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

   直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=3-\frac{1}{2}t\\y=-5+\frac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$$

2. 设直线上的动点为 $M(x,y)$，点 $P(3,6)$，则

$$\begin{aligned}|PM|^2&=(x-3)^2+(y-6)^2\\&=(-1+t-3)^2+(2-4t-6)^2\\&=17t^2+24t+32\\&=17\left(t+\frac{12}{17}\right)^2+\frac{400}{17}.\end{aligned}$$

   当 $t=-\frac{12}{17}$时，$|PM|^2$ 取最小值，此时$|PM|$为点 P 到直线的距离，则

$$|PM|=\sqrt{\frac{400}{17}}=\frac{20}{17}\sqrt{17}.$$

练习 2.2.2

1. $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

2. 把直线的参数方程代入圆的方程，得

$$(-1+2t)^2+(1-2t)^2=9,$$
$$8t^2-8t-7=0,$$

得

$$t_1=\frac{2+3\sqrt{2}}{4},\ t_2=\frac{2-3\sqrt{2}}{4}.$$

代入直线方程，得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y_1=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}\qquad \begin{cases}x_2=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\ y_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

两个交点分别为

$$A\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},\ -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right),\ B\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},\ \frac{3\sqrt{2}}{2}\right).$$

3. (1) 圆心在原点，半径为 3 的圆（第一象限部分）；
   (2) 圆心在原点，半径为 2 的下半个圆；
   (3) 圆心在点(3，2)，半径为 15 的圆.

习题 2-2

1. $y=\frac{1}{2}(x+1)=\frac{1}{2}(1+2t+1)=t+1$，
   得直线的参数方程

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+t\end{cases}$$

2. 把 $x=-4$ 代入 $x=-2-t$，得

$$-4=-2-t,$$
$$t=2.$$

代入 $y=3+2t$，得 $y=7$.
由此知，点$(-4，7)$在直线上.

3. $\begin{cases}x-1=2\cos t\\ y+2=2\sin t\end{cases}$
   得

$$(x-1)^2+(y+2)^2=4,$$

表示圆心在点$(1，-2)$，半径为 2 的圆.

4. $x^2+(y-1)^2=1$，参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t\\ y=1+\sin t\end{cases}\qquad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

5. (1) $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=-2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$

(2) 把 l_1 的方程代入 l_2 的方程，得

$$\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)+2\left(-2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)-4=0,$$

$$t=\frac{7}{3}\sqrt{2},$$

代入 l_1 的方程，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{10}{3} \\ y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

交点为 $\left(\dfrac{10}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$.

6. 直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$$

代入圆的方程，得

$$\left(-1-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(2+\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2=8,$$

$$t^2+3\sqrt{2}t-3=0,$$

解得

$$t_1=\frac{1}{2}(-3\sqrt{2}+\sqrt{30}),\ t_2=\frac{1}{2}(-3\sqrt{2}-\sqrt{30}).$$

得

$$\begin{cases} x_1=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{-3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{15}}{2} \\ y_1=2+\dfrac{-3+\sqrt{15}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2=-1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{-3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{15}}{2} \\ y_2=2-\dfrac{3+\sqrt{15}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{15}}{2} \end{cases}$$

交点为

$$A\left(\frac{1-\sqrt{15}}{2},\ \frac{1+\sqrt{15}}{2}\right),\ B\left(\frac{1+\sqrt{15}}{2},\ \frac{1-\sqrt{15}}{2}\right).$$

练习 2.3.1

1. 把方程变形为

$$\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{2^2}=1,$$

参数方程为

$$\begin{cases}x=4\cos t\\ y=2\sin t\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

2. P 点的坐标为

$$\begin{cases}x=1+3\cos\dfrac{\pi}{6}=1+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}\\ y=-2+2\sin\dfrac{\pi}{6}=-1\end{cases}$$

点 $P\left(1+\frac{3}{2}\sqrt{3},\ -1\right)$. 直线 OP 的斜率为

$$k=\frac{-1}{1+\frac{3}{2}\sqrt{3}}=-\frac{2}{23}(3\sqrt{3}-2).$$

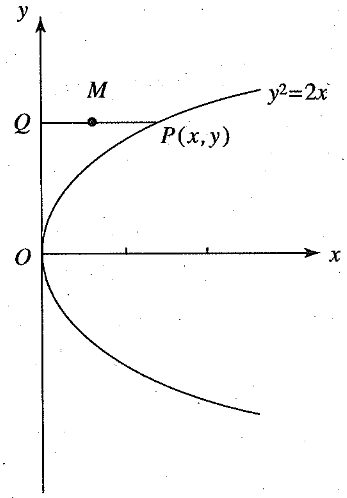


图 2-2

练习 2.3.2

1. 如图 2-2 所示，设 $P(x,\ y)$ 为抛物线上的动点，$M(X,\ Y)$ 为线段 QP 的中点，点 Q 为垂足. 抛物线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2t^2\\ y=2t\end{cases}$$

由中点公式，得

$$\begin{cases}X=t^2\\ Y=2t\end{cases}$$

变形为

$$Y^2=4X,$$

表示一条抛物线.

注 解此题时可以直接用直角坐标方程：由 $\begin{cases}X=\dfrac{x}{2}\\ Y=y\end{cases}$

代入抛物线方程 $y^2=2x$，得

$$Y^2=4X,$$

再变为参数方程.

2. 如图 2-3 所示，设 $M(x,\ y)$ 为抛物线上的动点，$P(X,\ Y)$ 在 OM 的延长线上，且 M 为线段 OP 的中点. 抛物线的参数方程为

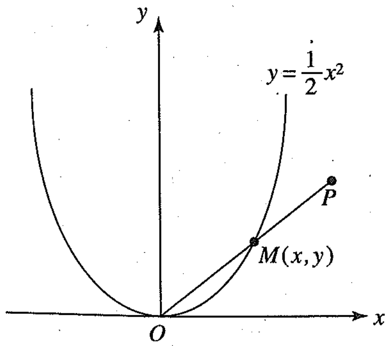


图 2-3

$$\begin{cases}x=2t\\ y=2t^2\end{cases}$$

用中点公式，得

$$\begin{cases}X=4t\\ Y=4t^2\end{cases}$$

变形为 $Y=\frac{1}{4}X^2$，表示抛物线（原点为特殊点）.

练习 2.3.3

如图 2-4 所示，设双曲线上的动点为 $P(x, y)$，焦点 $F_1(-\sqrt{2}, 0)$，$F_2(\sqrt{2}, 0)$. 双曲线的参数方程为

$$\begin{cases}x=\sec\theta\\ y=\tan\theta\end{cases}$$

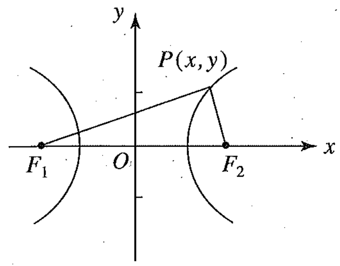


图 2-4

得

$$\begin{aligned}&(|F_1P|\cdot|F_2P|)^2\\ =&[(\sec\theta+\sqrt{2})^2+\tan^2\theta]\cdot[(\sec\theta-\sqrt{2})^2+\tan^2\theta]\\ =&(\sec^2\theta+2\sqrt{2}\sec\theta+2+\tan^2\theta)\cdot(\sec^2\theta-2\sqrt{2}\sec\theta+2+\tan^2\theta)\\ =&(2\sec^2\theta+1)^2-(2\sqrt{2}\sec\theta)^2\\ =&4\sec^4\theta-4\sec^2\theta+1\\ =&(2\sec^2\theta-1)^2,\end{aligned}$$

又

$$|OP|^2=\sec^2\theta+\tan^2\theta=2\sec^2\theta-1,$$

由此得

$$|F_1P|\cdot|F_2P|=|OP|^2.$$

习题 2-3

1. 把直线方程

$$\begin{cases}x=1+t\\ y=-2+2t\end{cases}$$

代入椭圆方程 $\frac{4x^2}{9}+\frac{y^2}{9}=1$，得

$$\frac{4(1+t)^2}{9}+\frac{(-2+2t)^2}{9}=1,$$

$$8t^2-1=0,$$

解得 $t_1=\frac{1}{2\sqrt{2}}$，$t_2=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$，

$$|t_1-t_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

设交点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$ 分别对应参数 t_1 和 t_2，则

$$|AB|^2=|x_1-x_2|^2+|y_1-y_2|^2$$

$$=|t_1-t_2|^2+(2|t_1-t_2|)^2$$
$$=5|t_1-t_2|^2$$
$$=\frac{5}{2},$$

得

$$|AB|=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{10}.$$

2. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=\cos t\\y=2\sin t\end{cases}$$

得

$$\begin{aligned}x+2y&=\cos t+4\sin t\\&=\sqrt{17}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\cos t+\frac{4}{\sqrt{17}}\sin t\right)\\&=\sqrt{17}\sin(\alpha+t),\end{aligned}$$

由此得 $x+2y$ 的最大值为 $\sqrt{17}$，最小值为 $-\sqrt{17}$.

3. 如图 2-5 所示，设直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+t\\y=-1+kt\end{cases}$$

其中 k 为直线的斜率，待定. 代入椭圆的方程，得

$$9(2+t)^2+16(-1+kt)^2=144,$$
$$(16k^2+9)t^2-(32k-36)t-92=0.$$

设方程的解为 t_1 和 t_2，分别对应交点 $A(x_1, y_1)$ 和 $B(x_2, y_2)$. 由题设，$M(2, -1)$ 为 AB 的中点，用中点公式知

$$x_1+x_2=4,$$

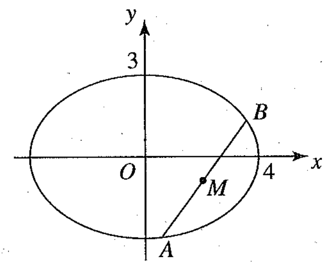


图 2-5

由此得

$$4+(t_1+t_2)=4,$$
$$t_1+t_2=0.$$

由上面的二次方程，可知

$$32k-36=0,$$
$$k=\frac{9}{8},$$

即直线与向量(8, 9)平行，得直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=2+8t\\y=-1+9t\end{cases}$$

4. 设 $M(x, y)$ 为椭圆上的动点，椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=10\cos t\\y=5\sin t\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-\dfrac{1}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$$

2. $\begin{cases}x=-1-2t\\ y=2+t\end{cases}$

3. $\begin{cases}x=1+3\cos t\\ y=-2+3\sin t\end{cases}$ $\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

4. (1) 圆心在点(1，−2)，半径为 4 的圆；

(2) 中心在原点，长半轴为 5，短半轴为 3 的椭圆；

(3) 摆线，产生此摆线的圆的半径为 1.

5. $\begin{cases}x=1+6t\\ y=2+8t\end{cases}$ $\quad t\geqslant 0$.

6. (1) 落地时 $y=0$，即

$$2t\cdot\sin\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}gt^2=0,$$

$$t=\frac{2}{g}.$$

(2) $x=2t\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}t$，把 $t=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ 代入 y 的表达式，得

$$\begin{aligned}y&=\frac{x}{\sqrt{3}}-\frac{1}{2}g\cdot\frac{x^2}{3}\\&=-\frac{g}{6}\left(x^2-\frac{6}{\sqrt{3}g}x\right)\\&=-\frac{g}{6}\left(x-\frac{\sqrt{3}}{g}\right)^2+\frac{1}{2g}.\end{aligned}$$

知炮弹的最大高度为$\dfrac{1}{2g}$.

注 可以从公式

$$y=\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g},$$

直接得出．此题中 $v_0=2$，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，代入后得

$$y=\frac{2^2\sin^2\dfrac{\pi}{6}}{2g}=\frac{1}{2g}.$$

7. **解法一** 设 $P(x,y)$为直线上的动点，由题设得

$$\begin{aligned}|PA|^2&=(x-4)^2+(y+2\sqrt{3})^2\\&=t^2+(\sqrt{3}t)^2\\&=4t^2,\end{aligned}$$

由 $|PA|=4$，得

$$|2t|=4,$$

$$t_1=2,\ t_2=-2,$$

得直线上的对应点为 $P_1(2,\ 0)$，$P_2(6,\ -4\sqrt{3})$.

解法二 直线的参数方程为

$$\begin{cases}x=4-t\\ y=-2\sqrt{3}+\sqrt{3}t\end{cases}$$

显然点 $A(4,\ -2\sqrt{3})$在此直线上. 向量$(-1,\ \sqrt{3})$平行于直线. 把向量变形为

$$(-1,\ \sqrt{3})=2\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

由此得直线的参数方程（标准形式）为

$$\begin{cases}x=4-\dfrac{1}{2}t\\ y=-2\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$$

其中 $|t|$ 表示直线上与 t 对应的点 P 到点 A 的距离. 由题设知

$$|t|=4,$$

即 $t_1=4$，$t_2=-4$，

得对应点 $P_1(2,\ 0)$和 $P_2(6,\ -4\sqrt{3})$.

8. **解法一** 如图 2-8 所示，圆心在点(4，0)，半径为 2. 设 P 为切点，α 为切线的倾角，t 表示圆心角，其中

$$\alpha=t-\frac{\pi}{2}.$$

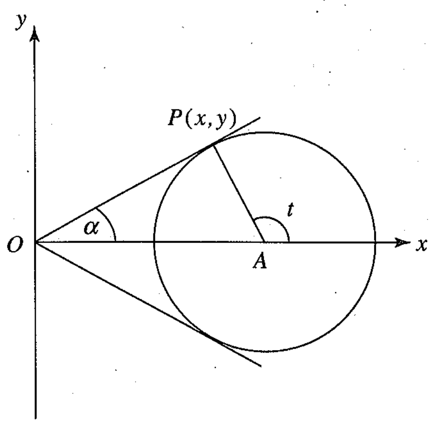


图 2-8

把圆的参数方程代入切线方程，得

$$2\sin t=k(4+2\cos t),$$

$$2\sin t=\tan\left(t-\frac{\pi}{2}\right)(4+2\cos t),$$

$$\sin t=-\frac{\cos t}{\sin t}(2+\cos t),$$

$$-2\cos t=1,$$

$$\cos t=-\frac{1}{2},$$

得 $t_1=\frac{2}{3}\pi$，$t_2=\frac{4}{3}\pi$.

因此，切线的倾角为

$$\alpha_1=\frac{2}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{6},\ \alpha_2=\frac{4}{3}\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{5}{6}\pi.$$

解法二 圆的方程为

$$(x-4)^2+y^2=4,$$

把切线方程 $y=kx$ 代入，得

$$(x-4)^2+(kx)^2=4,$$
$$(1+k^2)x^2-8x+12=0.$$

在切点处有重根，得

$$\Delta=64-48(1+k^2)=0,$$
$$k_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ k_2=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

得切线倾角

$$\alpha_1=\frac{\pi}{6},\ \alpha_2=\frac{5}{6}\pi.$$

解法三 设切点 $P(x, y)$，由图可知

$$\begin{cases} 2^2+(x^2+y^2)=4^2 \\ \dfrac{y}{x}\cdot\dfrac{y}{x-4}=-1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} x_1=3 \\ y_1=\sqrt{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=-\sqrt{3} \end{cases}$$

切线斜率为

$$k_1=\frac{\sqrt{3}}{3},\ k_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

倾角为 $$\alpha_1=\frac{\pi}{6},\ \alpha_2=\frac{5}{6}\pi.$$

解法四 直线 OP 的方程为

$$y=kx,$$

直线 AP 的方程为

$$y=-\frac{1}{k}(x-4),$$

把圆的参数方程分别代入上面的方程，得

$$\begin{cases} 2\sin t=k(4+2\cos t) \\ 2\sin t=-\dfrac{1}{k}\cdot 2\cos t \end{cases}$$

由此得

$$\frac{\sin t}{2+\cos t}=-\frac{\cos t}{\sin t},$$

解得

$$\cos t=-\frac{1}{2},$$
$$t_1=\frac{2}{3}\pi,\ t_2=\frac{4}{3}\pi.$$

代入圆的方程，得两个切点的坐标为

$$\begin{cases}x_1=3\\y_1=\sqrt{3}\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=3\\y_2=-\sqrt{3}\end{cases}$$

对应的斜率

$$k_1=\tan\alpha_1=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{，倾角 }\alpha_1=\frac{\pi}{6}\text{；}$$

$$k_2=\tan\alpha_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}\text{，倾角 }\alpha_2=\frac{5}{6}\pi.$$

9. 把直线 l_2 的参数方程

$$\begin{cases}x=1+t\\y=-5+\sqrt{3}t\end{cases}$$

代入直线 l_1 的方程 $x-y-2\sqrt{3}=0$，得

$$(1+t)+(5-\sqrt{3}t)-2\sqrt{3}=0,$$

$$t=\frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}=2\sqrt{3}.$$

得两直线交点 P_0 的坐标为

$$\begin{cases}x=1+2\sqrt{3}\\y=1\end{cases}$$

$$|PP_0|^2=(2\sqrt{3})^2+(1+5)^2=48,$$

得　$|PP_0|=4\sqrt{3}.$

注　由于点 $P(1,\ -5)$在直线 l_2 上，因此把 l_2 的方程化为标准形式

$$\begin{cases}x=1+\dfrac{1}{2}t\\y=-5+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$$

代入 l_1 的方程，类似可求出

$$t=4\sqrt{3},$$

它就是交点 P_0 到 P 点的距离.

10. 参数方程

$$\begin{cases}x=t+2\cos\theta\\y=2t+\sin\theta\end{cases}$$

(1) 当 $t=1$ 时，方程为

$$\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=2+\sin\theta\end{cases}\quad\theta\text{ 为参数，}$$

表示椭圆，中心在点(1，2)，长半轴为 2，短半轴为 1. 化为普通方程

$$\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1.$$

(2) 当 $\theta=\frac{\pi}{4}$时，方程为

$$\begin{cases} x=t+\sqrt{2} \\ y=2t+\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad t\text{ 为参数,}$$

表示直线，过点$\left(\sqrt{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，与向量(1，2)平行. 化为普通方程

$$y=2(x-\sqrt{2})+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

即

$$y=2x-\frac{3}{2}\sqrt{2}.$$

11. 直线的方程

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1+2t \end{cases}$$

设$M(x, y)$为直线上的动点，由$P(-1, 1)$得

$$\begin{aligned} |PM|^2 &=(3+t)^2+(-2+2t)^2 \\ &=5t^2-2t+13 \\ &=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{64}{5}, \end{aligned}$$

当$t=\dfrac{1}{5}$时，$|PM|^2$取最小值，此时

$$|PM|=\sqrt{\frac{64}{5}}=\frac{8}{5}\sqrt{5}.$$

12. 直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2t \end{cases}$$

代入圆的方程$x^2+y^2=4$，得

$$(1+t)^2+(2t)^2=4,$$
$$5t^2+2t-3=0.$$

解得 $t_1=-1$，$t_2=\dfrac{3}{5}$.

交点分别为

$$P_1(0, -2), \quad P_2\left(\frac{8}{5}, \frac{6}{5}\right).$$

13. 如图 2-9 所示，设$M(x, y)$为圆上动点，$P(X, Y)$为线段MN的中点. 圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=3\sin t \end{cases}$$

由中点公式，得

$$\begin{cases} X=3\cos t \\ Y=\dfrac{3}{2}\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

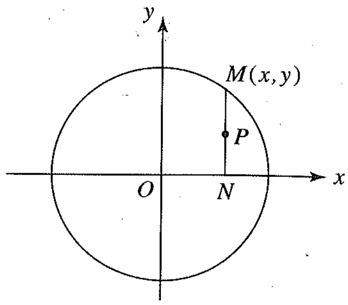


图 2-9

表示椭圆.

14. 设 $P(x, y)$ 为椭圆上的动点. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=\sin t \end{cases}$$

用点到直线的距离公式，得

$$\begin{aligned} d &= \frac{|x-y-4|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|2\cos t-\sin t-4| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\sqrt{5}\sin(\alpha+t)-4|. \end{aligned}$$

当 $\sin(\alpha+t)=-1$ 时，d 取最大值，此时

$$d=\frac{\sqrt{5}+4}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}+2\sqrt{2}.$$

自测与评估

1. (1) $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+t \end{cases}$

(2) 设 $M(x, y)$ 为直线上的动点，则

$$\begin{aligned} |PM|^2 &= (x+1)^2+(y+2)^2 \\ &= (3-t)^2+(3+t)^2 \\ &= 2(t^2+9). \end{aligned}$$

当 $t=0$ 时，$|PM|$ 最小，此时

$$|PM|=\sqrt{18}=3\sqrt{2}.$$

2. 把圆的参数方程代入直线方程 $x-y-2=0$，得

$$(1+2\cos\theta)-(-1+2\sin\theta)-2=0.$$

$$\cos\theta-\sin\theta=0,$$

得 $\theta_1=\frac{\pi}{4}$，$\theta_2=\frac{5}{4}\pi$.

相应交点的坐标为

$$\begin{cases} x_1=1+\sqrt{2} \\ y_1=-1+\sqrt{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=1-\sqrt{2} \\ y_2=-1-\sqrt{2} \end{cases}$$

即交点为

$$A(1+\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}), B(1-\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}).$$

3. (1) 圆心在点 $(-1, -2)$，半径为 2 的圆；

(2) 中心在原点，长半轴为 7，短半轴为 3 的椭圆；

(3) 摆线，生成摆线的圆半径为 2.

4. 以长轴所在直线为 x 轴，以短轴所在直线为 y 轴，建立直角坐标系，则

$$\begin{cases} x=\dfrac{15\ 565}{2}\cos t \\ y=\dfrac{15\ 443}{2}\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

5. $\begin{cases} x=\dfrac{225}{2}(\cos t+t\sin t) \\ y=\dfrac{225}{2}(\sin t-t\cos t) \end{cases}$

6. 把直线的参数方程代入圆的方程 $x^2+(y-4)^2=16$，得

$$(-3+4t)^2+(3t-1)^2=16,$$

$$25t^2-30t-6=0.$$

设 t_1，t_2 为解，则

$$t_1+t_2=\frac{6}{5},\ t_1t_2=-\frac{6}{25}.$$

记相应交点为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则

$$\begin{aligned} |AB|^2 &=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 \\ &=[4(t_2-t_1)]^2+[3(t_2-t_1)]^2 \\ &=25(t_1-t_2)^2 \\ &=25[(t_1+t_2)^2-4t_1t_2] \\ &=25\left[\left(\frac{6}{5}\right)^2+\frac{24}{25}\right] \\ &=60, \end{aligned}$$

得　$|AB|=2\sqrt{15}$.

7. 圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=2\cos t \\ y=1+2\sin t \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} 2x+y &=4\cos t+2\sin t+1 \\ &=2\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos t+\frac{1}{\sqrt{5}}\sin t\right)+1 \\ &=2\sqrt{5}\sin(\alpha+t)+1, \end{aligned}$$

由此知

$$-2\sqrt{5}+1\leqslant 2x+y\leqslant 2\sqrt{5}+1,$$

即最小值为 $1-2\sqrt{5}$（此时 $\sin(\alpha+t)=-1$），最大值为 $1+2\sqrt{5}$（此时 $\sin(\alpha+t)=1$）.

8. 椭圆的参数方程为

$$\begin{cases} x=3\cos t \\ y=2\sin t \end{cases}$$

由点到直线的距离公式，得

$$d=\frac{|x+2y+36|}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|3\cos t+4\sin t+36|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}|5\sin(\alpha+t)+36|,$$

当 $\sin(\alpha+t)=-1$ 时，可得 $P\left(-\frac{9}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$，此时 d 最小，即

$$d=\frac{36-5}{\sqrt{5}}=\frac{31}{5}\sqrt{5}.$$

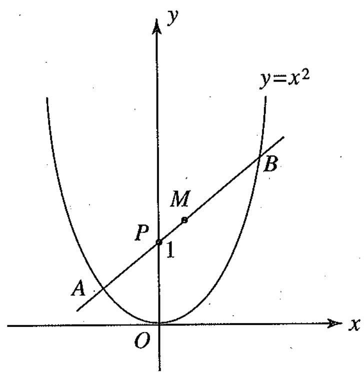


图 2-10

9. 如图 2-10 所示，设 $M(x,\ y)$为 AB 的中点，AB 过点 $P(0,\ 1)$，它的参数方程为

$$\begin{cases}x=t\\ y=1+kt\end{cases}$$

其中 k 为直线 AB 的斜率．把此方程代入抛物线方程 $y=x^2$，得

$$1+kt=t^2,$$
$$t^2-kt-1=0.$$

设解为 t_1 和 t_2，则

$$t_1+t_2=k,\ t_1t_2=-1.$$

记相应交点为 $A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，则由中点公式，得

$$X=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$$
$$=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$$
$$=\frac{k}{2},$$
$$Y=\frac{1}{2}(y_1+y_2)$$
$$=1+\frac{k}{2}(t_1+t_2)$$
$$=1+\frac{k^2}{2}.$$

这就是轨迹的参数方程，k 为参数．化为直角坐标方程，得

$$Y=2X^2+1.$$

这是顶点在点$(0,\ 1)$，对称于 y 轴的抛物线．