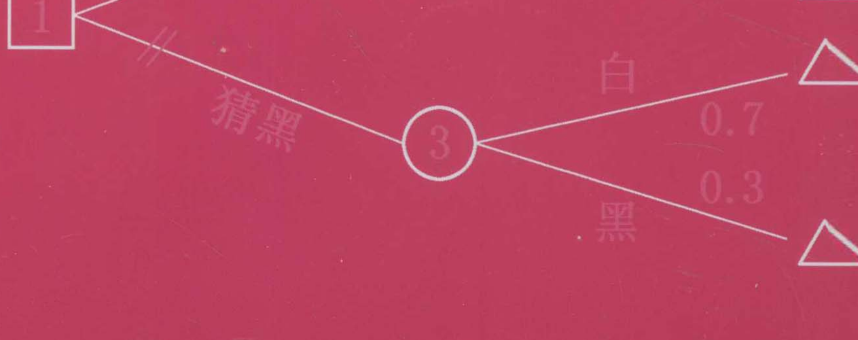
经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

数学

普通高中课程标准实验教科书

选修 4-9

风险与决策



凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE
凤凰国标教材

经全国中小学教材审定委员会2006年初审通过

普通高中课程标准实验教科书

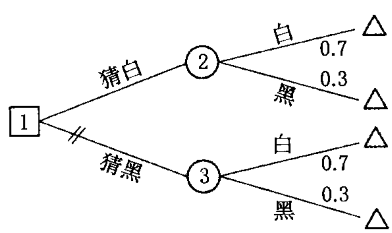
数学

风险与决策

fengxian yu juece

选修4-9

主　编：单　墫
副主编：李善良　陈永高　王巧林



凤凰国标教材
凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

普通高中课程标准实验教科书·数学
书　　名　风险与决策(选修 4－9)
责任编辑　胡晋宾
出版发行　凤凰出版传媒集团
　　　　　江苏教育出版社(南京市湖南路 1 号 A 楼　邮编：210009)
网　　址　http://www.1088.com.cn
集团网址　凤凰出版传媒网 http://www.ppm.cn
经　　销　江苏省新华发行集团有限公司
照　　排　南京理工出版信息技术有限公司
印　　刷　南京市溧水秦源印务有限公司
厂　　址　南京市溧水县开发区溧淳路(邮编 211200)
电　　话　025－56213588
开　　本　1000×1400 毫米　1/32
印　　张　1.5
版　　次　2006 年 6 月第 1 版
　　　　　2009 年 12 月第 4 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5343－7575－0
定　　价　1.95 元
盗版举报　025－83658551

批准文号:苏费核(09 秋)第 21 号　举报电话:12358

主　　编　单　塼

副 主 编　李善良　陈永高　王巧林

编写人员　徐稼红

责任编辑　胡晋宾

为了达到预期目的,从所有可供选择的方案中找出最佳方案的一种择优行为就是决策.

古今中外的许多政治家、军事家、外交家、企业家都曾做出过许许多多出色的决策,至今仍被人们所称颂.决策的正确与否会给国家、企业或个人带来利益或损失.人类创造的精神文明和物质财富,主要得益于人类学会了科学决策;同时,当今人口、资源、环境等世界性的难题也是人类“决策”失误的产物.

由于事物的进展情况和信息往往受随机因素的影响,不能确切预料,决策往往带有风险.为了在情况错综复杂和条件千变万化的情境中作出正确的决策,规避决策失误,决策应按科学的方法进行.统计决策方法可以提供最优的行动方案,大大减少由于盲目地决定而导致的损失.因此,统计决策方法和统计决策分析将会在社会的发展和进步中发挥越来越大的作用.

在本专题中,我们将学习一些简单的统计决策方面的知识和方法,形成初步的决策意识.

目　录

9.1 风险与决策的基本问题

9.1.1 风险的含义

在商业活动和日常生活中，人们经常谈论到风险. 例如：

认真分析一下，看看这件事的风险到底有多大；

这件事的风险太大，不能做；

这件事的风险还不算大，可以做.

上面这些话题有什么共同特点？如何用数学语言来刻画风险？

可以看到，风险至少应当包括两方面的内容：

(1) 风险所涉及的事件的发生是具有随机性的，既可能发生，也可能不发生；

(2) 风险是一个量，可以知道它的大小.

风险的大小与作出的决策是关联的. 为了更好地理解风险的含义，我们先看下面的例子.

A 和 B 两个箱子装有同样规格的产品，但来自不同的厂家. 已经知道 A 箱的废品率是 1%，B 箱的废品率是 3%，你买哪个箱子的产品呢？

解 因为 A 箱的废品率低，所以在通常情况下，应该买 A 箱的产品.

这个例子说明，风险是一个与不利事件发生的可能性有关的量. 风险的大小是与决策有关的，即不同的决策对应着不同的风险. 一个好的决策，应当使得风险达到最小.

A 和 B 两个箱子装有同样规格的产品，但来自不同的厂家. 已经知道 A 箱的废品率是 1%，B 箱的废品率是 3%，如果 A 箱产品的价格

是 10 元，而 B 箱的价格是 1 元，你买哪个箱子的产品呢？

解 用 D_1 和 D_2 分别表示购买 A 箱和 B 箱产品的决策. 很显然，买到废品就会出现损失，那么

$$\begin{aligned} &D_1 \text{ 的损失风险为 } 10 \times 1\% = 0.1(\text{元}), \\ &D_2 \text{ 的损失风险为 } 1 \times 3\% = 0.03(\text{元}). \end{aligned} \qquad (*)$$

因为损失风险越小越好，所以 D_2 要比 D_1 好，即买 B 箱产品的决策要好于买 A 箱产品的决策.

虽然 0.1 和 0.03 差别不大，但是，如果把上式括号中的价格单位换成万元，那么你就会觉得冒一点风险去买 B 箱的产品是值得的.

例 2 通过（*）式的计算来进行决策，你是否满意？如果不满意，应当怎样去做呢？

事实上，还应考虑买到合格品的情况，即考虑成功时的情况.

假如你有 1 000 元，准备进行投资. 有两种投资决策供你选择：一种是稳定的，比如储蓄、国债等，记为 D_1；一种是有风险的，比如经营、股票等，记为 D_2.

若选择 D_1，则一年后可以得到 1 300 元；

若选择 D_2，则可能有两种情况：成功，一年后可以得到 1 500 元；失败，一年后只可能收回 100 元. 已知成功的概率为 0.9，失败的概率为 0.1.

你采取哪种决策？

解 用 H_1 表示投资成功，其概率为 $P(H_1) = 0.9$；用 H_2 表示投资失败，其概率为 $P(H_2) = 0.1$（为叙述方便，以后称 H_1 和 H_2 为状态）. 下面考虑损失：

如果 H_1 发生，采用决策 D_1 要比 D_2 损失

$$1\,500 - 1\,300 = 200(\text{元});$$

如果 H_2 发生，采用决策 D_2 要比 D_1 损失

$$1\,300 - 100 = 1\,200(\text{元}).$$

可以看到，损失是决策 D 和状态 H（成功或失败）的函数，称之为损失函数. 用 $L(D, H)$ 来表示这个损失函数，则

$$L(D_1, H_1) = 200,$$
$$L(D_2, H_2) = 1\,200.$$

当 H_1 发生时,采用决策 D_2 是正确的选择,所以

$$L(D_2, H_1) = 0;$$

当 H_2 发生时,采用决策 D_1 是正确的选择,所以

$$L(D_1, H_2) = 0.$$

用 $R(D)$ 表示采用决策 D 的期望损失,称它为风险函数. 于是,决策 D_1 和 D_2 的风险分别为:

$$\begin{aligned} R(D_1) &= L(D_1, H_1)P(H_1) + L(D_1, H_2)P(H_2) \\ &= 200 \times 0.9 + 0 \times 0.1 \\ &= 180, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(D_2) &= L(D_2, H_1)P(H_1) + L(D_2, H_2)P(H_2) \\ &= 0 \times 0.9 + 1\,200 \times 0.1 \\ &= 120. \end{aligned}$$

可以看到,采用决策 D_2 要比 D_1 好,因为风险要小一些.

由上例可知,风险(risk)实际上是损失函数的加权平均,其中权为状态发生的概率.

损失函数和状态的概率是风险计算中的两个要素,其具体数值的确定有赖于对历史和现实数据的整理分析,以及对未来情况的预测.

在实际生活中,真正采取哪种决策还与决策者的性格和心理素质有关(例如,有的人偏爱冒险,有的人偏爱稳重). 为了考虑性格的因素,对于损失函数的构建可以灵活一些(参看下面的阅读).

阅 读

足球与电影

今天是星期天,某位同学决定下午踢足球(D_1)或看电影(D_2). 但是,下午有可能下雨. 记下雨为状态 H_1,不下雨为状态 H_2,根据天气预

报可知 $P(H_1)=0.4$，$P(H_2)=1-P(H_1)=0.6$. 那么，这位同学应当如何选择呢？

第一步　定义损失函数. 我们来帮助这位同学分析一下如何构建损失函数. 这位同学是足球迷，他最希望的是踢足球，因此在 $\{D_1, H_2\}$ 时损失为 0；在 $\{D_1, H_1\}$ 时损失最大，因为一个下午什么也没有干成，我们认定损失为 1. 其他两种情况的损失就是在 0 和 1 之间了. 这样，就可以得到下面的损失函数：

表 9-1-1

	D_1（足球）	D_2（电影）
H_1（下雨）	1	a
H_2（晴天）	0	b

表 9-1-1 中的 a 和 b 是待定系数，分别表示在下雨时和晴天时选择看电影的损失. 之所以用待定系数，是因为这位同学对于如何决策非常犹豫.

第二步　计算风险. 根据风险的定义，可以得到

$$R(D_1)=L(D_1, H_1)P(H_1)+L(D_1, H_2)P(H_2)=1\times0.4+0\times0.6=0.4,$$

$$R(D_2)=L(D_2, H_1)P(H_1)+L(D_2, H_2)P(H_2)=a\times0.4+b\times0.6=a\times0.4+b\times0.6=0.4a+0.6b.$$

第三步　决策. 一般来说，a 应当比较小，比如 $a=0.1$，虽然这位同学是足球迷，但下雨看电影总应当是一个明智的选择. 但是他会认为晴天看电影的损失是不小的，因此 b 可以取值在 0.4 和 0.9 之间，这取决于这位同学对于足球的迷恋程度. 不难得到，当 $b>0.6$ 时，$R(D_1)<R(D_2)$，故此时应选择 D_1；当 $b<0.6$ 时，应选择 D_2.

9.1.2 损益表

上面我们运用风险函数来刻画风险的大小,虽然清楚,但不够直观,演算也较繁琐.实际上,衡量决策方案的优劣,既可从损失最小的角度来考虑,也可以从收益是否最大来甄别.

损益表是进行风险型决策的常用工具,它用表的形式直观地将决策问题中的信息呈现出来.我们以 9.1.1 节中的例 3 为例,介绍损益表的制作方法.

损益表一般由三个部分组成.

(1) 方案

决策问题中可能采取的行动称为方案,方案是可以选择的(选择一种方案称为策略),例 3 中有两个方案:

D_1——储蓄、国债,

D_2——经营、股票.

(2) 状态(也称自然状态)及其发生的概率

状态是指各种方案可能遇到的客观情况.客观状态不能选择,是不可控制的因素.例 3 中方案 D_2 有成功或失败两种状态,各种状态发生的概率之和等于 1.

(3) 各种方案的可能结果

它是不同方案在不同状态下的收益值或损失值.

把以上内容画在一个表里,这个表就称为损益表.9.1.1 节例 3 的损益表如下:

表 9-1-2

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案	成功 $p_1 = 0.9$	失败 $p_2 = 0.1$
D_1	1 300	1 300
D_2	1 500	100

根据损益表,我们不难作出决策(见下节).

有一项工程，若下月开工后天气好，则能按期完工并获得利润 140 万元；若开工后天气不好，则将造成损失 120 万元. 若不开工，不管天气如何，都要因窝工损失 20 万元.

据预测，下月天气好的概率是 0.6，天气坏的概率是 0.4.

试作出本题的损益表.

解 本题有两个方案，即开工或不开工. 在开工的情况下，有两种状态——天气好或天气坏，将相应状态发生的概率及两种方案的损益值列在表中，即得本题的损益表：

表 9-1-3

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	天气好 $p_1=0.6$	天气坏 $p_2=0.4$
开　工	140	-120
不开工	-20	-20

损益表也称决策表，是刻画决策问题的有效手段. 在日常生活中，我们也可以用它来描述有待决策的问题.

例如，你打算在即将来临的“五・一”长假进行一次旅行，但不知道是否应该预订一张车票. 如果不订票而且又买不到票的话，这次旅行就要取消，但如果你预订了车票结果却发现车票并不紧张，可以在任何一个售票点买到，那么你就会白白损失 20 元的订票费. 这个问题可以用下面的决策表来表示.

表 9-1-4

状　态 \ 方　案	无　票	有　票
预　订	虽然花费了订票费，却可以顺利成行	顺利成行，花费了额外的 20 元的订票费
不预订	取消旅行	既可以顺利成行，又省下了一笔订票费

某食品店每天顾客需求 100，150，200，250，300 只蛋糕的可能性分别为 0.2，0.25，0.3，0.15 和 0.1，每只蛋糕的进价为 2.5 元，销售价为 4 元，若当天不能售完，剩下的以每只 2 元的价格处理.

试作出本题的损益表.

解 从收益最大的角度来考虑. 对不同的需求量以及不同的进货量，根据

$$销售数\times(4-2.5)+处理数\times(2-2.5)$$

求出相应的利润，即可得到损益表：

表 9-1-5

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案		需求量				
		100 $p_1=0.2$	150 $p_2=0.25$	200 $p_3=0.3$	250 $p_4=0.15$	300 $p_5=0.1$
进货量	100	150	150	150	150	150
	150	125	225	225	225	225
	200	100	200	300	300	300
	250	75	175	275	375	375
	300	50	150	250	350	450

思　考

在例 5 中，如果从损失的角度来考虑，可得到怎样的损益表？

习题9.1

1. 某篮球运动员平均每场比赛大约得 18 分，于是，我们有理由假定该球员在任何一场比赛中的期望得分大约就是 18 分. 那么，在期望值概念下的风险定义就不难理解了：该球员有可能在某场比赛中独得 30 分甚至更高得分，当然也可能只取得 8 分. 试举出生活中类似的例子.
2. 在保险市场中，常常提到所谓高风险投保人，此时风险的含义就是指保险公司负担的损失的期望值(期望损失)较高. 请按此解释美国加利福尼亚州的地震风险很高的含义.
3. 某甲有资金 10 万元欲进行证券投资，经分析调查认为股票 A 前景看好，国库券也不错. 若现时购买股票 A，一年内获利 1.2 万元的可能性为 70%，亏本 0.8 万元的可能性为 30%；若现时购买一年期国库券，由于国库券在我国目前属于无风险证券，故根据其规定年利率计算后可稳获收益 0.5 万元，试通过建立风险函数来作出投资决策.
4. 当你父亲回家时，发现已有 5 个鸡蛋打在碗里，而你父亲又自愿去炒鸡蛋. 第 6 个鸡蛋放在碗的旁边，出于某种理由他必须将第 6 个鸡蛋与 5 个鸡蛋一起炒. 但有可能第 6 个鸡蛋是一个坏了的鸡蛋，如果把它敲进碗里，就把前 5 个鸡蛋一起毁了. 你父亲必须决定怎么处理这个尚未敲开的鸡蛋.

   他有三种可能的行动方案：一是把第 6 个鸡蛋敲入已有 5 个好鸡蛋的碗里，二是把它敲入一只小碗里审视其好坏，三是把它扔掉. 这些方案中将产生各种结果，试用一张表来说明之.
5. 某公司出售一种产品，成本每件 5 元，售价每件 8 元. 若当天销售不完，因产品性质关系，只能改作其他用途，每件只可得残值 2 元. 根据过去经验，得知该公司销售 10，11，12，13 件的概率分别为 0.1，0.2，0.4，0.3. 试作出本题的损益表.

9.2 风险型决策的方法

风险型决策是在不完全掌握未来情况，但知道未来状态的概率分布的情况下做出的决策.本节我们介绍几种常见的风险型决策的方法.

9.2.1 期望值法

根据每个方案的期望收益(或损失)对方案进行比较，从中选择期望收益最大(或期望损失最小)的方案，这种方法就是以期望值为标准的决策方法.

问题　某鲜花店鲜花的进货价为每束 2.5 元，销售价为每束 5 元.若当天营业时间内没有售完，则在营业结束时以每束 1.5 元价格处理.假如每天鲜花需求 20，30，40，50 束的可能性分别为 0.2，0.35，0.3 和 0.15，问：该店每天进多少束鲜花为宜?

解法 1　从获利的角度看，我们应选择收益最大的一种进货方案.针对不同的需求量以及不同的进货量，按

$$销售数\times(5-2.5)+处理数\times(1.5-2.5)$$

求出相应的利润，即可得到损益表：

表 9-2-1

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案		需求量			
		20 $p_1=0.2$	30 $p_2=0.35$	40 $p_3=0.3$	50 $p_4=0.15$
进货量	20	50	50	50	50
	30	40	75	75	75
	40	30	65	100	100
	50	20	55	90	125

再计算不同方案下的期望利润：
进 20 束鲜花时的期望利润为

$$50\times0.2+50\times0.35+50\times0.3+50\times0.15=50(\text{元}),$$

进 30 束鲜花时的期望利润为

$$40\times0.2+75\times0.35+75\times0.3+75\times0.15=68(\text{元}),$$

进 40 束鲜花时的期望利润为

$$30\times0.2+65\times0.35+100\times0.3+100\times0.15=73.75(\text{元}),$$

进 50 束鲜花时的期望利润为

$$20\times0.2+55\times0.35+90\times0.3+125\times0.15=69(\text{元}).$$

因此，最大期望收益为 73.75 元，故进货 40 束鲜花为宜.

解法 2 从损失的角度来分析，应该选择期望损失最小的决策方案. 若进货量等于需求量，则损失值为 0；若进货量小于需求量，则会造成机会损失，损失值为

$$(\text{需求量}-\text{进货量})\times(5-2.5);$$

若进货量大于需求量，则因低价处理而损失

$$\text{处理数}\times(2.5-1.5).$$

这样可求出相应的损失值，得到损益表：

表 9-2-2

损失/元 状态及概率 方案		需求量			
		20 $p_1=0.2$	30 $p_2=0.35$	40 $p_3=0.3$	50 $p_4=0.15$
进货量	20	0	25	50	75
	30	10	0	25	50
	40	20	10	0	25
	50	30	20	10	0

再计算不同方案下的期望损失：

进 20 束鲜花时的期望损失为

$$0\times 0.2+25\times 0.35+50\times 0.3+75\times 0.15=35(\text{元}),$$

进 30 束鲜花时的期望损失为

$$10\times 0.2+0\times 0.35+25\times 0.3+50\times 0.15=17(\text{元}),$$

进 40 束鲜花时的期望损失为

$$20\times 0.2+10\times 0.35+0\times 0.3+25\times 0.15=11.25(\text{元}),$$

进 50 束鲜花时的期望损失为

$$30\times 0.2+20\times 0.35+10\times 0.3+0\times 0.15=16(\text{元}).$$

选择期望损失最小的方案，即进 40 束鲜花为最优方案.

事实上，对于某天进 40 束鲜花而言，其利润可能是 30 元(需求量为 20 束)，或 65 元(需求量为 30 束)，或 100 元(需求量为 40 束或 50 束)，肯定不会是 73.75 元(期望利润). 期望利润是销售一天鲜花的平均利润，它对具体某天鲜花的销售来讲没有什么意义. 但当天数很多时，平均利润就显得重要了. 天数越多，每天销售鲜花的平均利润就越接近 73.75 元.

例 1 的两种解法，本质上是一致的. 以期望值为标准的决策方法一般适用于以下情况：

(1) 概率的出现有明显的客观性且比较稳定；

(2) 决策不是解决一次性问题，而是解决多次重复的问题；

(3) 决策的结果不会对决策者带来严重的后果.

例 2 某公司为生产一种产品需要建设一个工厂. 建厂有两个方案，一是建大厂，二是建小厂. 大厂需要投资 300 万元，小厂需要投资 160 万元，两者的使用期都是 10 年. 估计在此期间，产品销路好的可能性是 0.7，产品销路差的可能性是 0.3，两个方案的年度收益如下. 如何进行决策？

解 用期望值法进行决策：

建大厂的期望收益为

$$100\times 0.7\times 10+0.3\times(-20)\times 10-300=340(\text{万元}),$$

表 9-2-3

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	销路好 $p_1=0.7$	销路差 $p_2=0.3$
建大厂	100	-20
建小厂	40	10

建小厂的期望收益为

$$40\times0.7\times10+0.3\times10\times10-160=150(\text{万元}).$$

两者比较,建大厂的方案是合理的.

下面我们再用期望值法解决 9.1.1 节中的例 3.

假如你有 1 000 元,准备进行投资.有两种投资决策供你选择:一种是稳定的,比如储蓄、国债券,记为 D_1;一种是有风险的,比如经营,股票等,记为 D_2.

若选择 D_1,则一年后可以得到 1 300 元.

若选择 D_2,则可能有两种情况:成功,一年后可以得到 1 500 元;失败,一年后只可能收回 100 元.已知成功的概率为 0.9,失败的概率为 0.1.

你采取哪种决策?

解 第一步 写出损益表:

表 9-2-4

收益/元 \ 状态及概率 \ 方案	成功 $p_1=0.9$	失败 $p_2=0.1$
D_1	1 300	1 300
D_2	1 500	100

第二步 计算期望值.采用方案 D_1 的期望收益为

$$1\,300 \times 0.9 + 1\,300 \times 0.1 = 1\,300(\text{元});$$

采用方案 D_2 的期望收益为

$$1\,500 \times 0.9 + 100 \times 0.1 = 1\,360(\text{元});$$

第三步　比较.

由于 $1\,360 > 1\,300$，因此，选择方案 D_2.

以上三个例子属于一步决策问题，一般可通过计算期望损益值，列出一个损益表加以解决.

9.2.2　最大可能法

以事件出现的可能性大小作为选择方案的标准，而不考虑其经济结果，这种决策便是以最大可能性为标准的决策方法.

一家电器公司看到市场上 MP3 播放机热销，打算在原有的基础上增加生产. 现有两种方案：

① 增加一套设备大规模生产；

② 维持原有的生产规模.

若 MP3 热继续保持下去，那么采用方案①能获利 100 万元，而方案②获利 25 万元；

若 MP3 热下降，则采用方案①将损失 25 万元，而方案②获利 5 万元.

据估计，MP3 热继续保持下去和 MP3 热下降的概率分别为 0.3 和 0.7. 试对大规模生产还是维持原有的生产规模作出决策.

分析　先列出损益表(见下页)，再计算期望利润：

采用方案①的期望利润为

$$100 \times 0.3 + (-25) \times 0.7 = 12.5(\text{万元}),$$

采用方案②的期望利润为

$$25 \times 0.3 + 5 \times 0.7 = 11(\text{万元}).$$

表 9-2-5

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	MP3 热继续 $p_1 = 0.3$	MP3 热下降 $p_2 = 0.7$
方案①	100	−25
方案②	25	5

虽然方案①的期望利润较方案②高，但从一次性损益来看，MP3 热下降的可能性较大(概率为 0.7)，而且两个方案的期望值相差并不大，所以还是采用方案②，即维持原有的生产规模为好.

解　由于状态的概率 0.7 最大，因此 MP3 热下降的可能性也就最大. 于是考虑按 MP3 热下降进行决策，此时方案②的收益最大，所以方案②就是最优决策.

从上例我们看到，选择一个概率最大的状态进行决策，置其他状态于不顾，就是以最大可能性为标准的决策. 这个方法，实际上把风险型决策问题变成确定型决策问题.

决策时，当某一状态的概率显著高于其他状态出现的概率，而期望值又相差不大时，用最大可能性为标准来决策是比较理想的. 例如，我们打桥牌时常常采用此决策准则. 但是，如果状态比较多，而且概率相差不太显著，不同方案的期望收益又相差较大时，采用最大可能性标准就未必能取得好的结果，甚至会造成较大的失策.

9.2.3　决策树法

利用决策树来表示决策过程，既直观又方便. 所谓“决策树”就是将有关的方案、状态、结果、损益值和概率等用一些“节点”和“边”组成的“树”的图形. 因此，决策树实际上是决策问题的一种图解，它可以使决策问题形象化，能更清晰明确地表示可能的决策.

例如,对于第 9.2.1 节中的例 2,它的决策树如图 9-2-1.

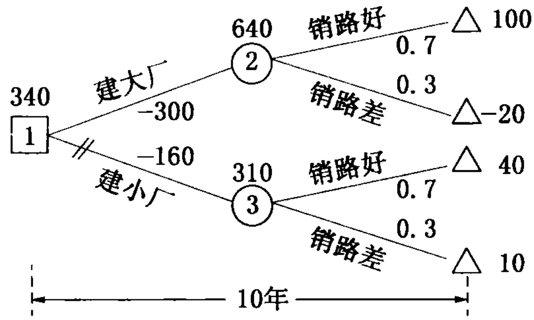


图 9-2-1

图中,"□"表示决策点,从它引出的分枝称为方案分枝,边下面的数字为进行决策时的费用支出;

"○"表示状态点,从它引出的分枝称为概率分枝,每条分枝边写有状态及相应的概率;

"△"表示结果点,位于树的末梢,它旁边的数字表示在该状态下的损益值.

"⫽"表示剪枝,它意味着经过比较后,此方案被删除掉了.

画出决策树后,可按下面的步骤进行决策:

第一步　从末梢开始,计算各状态点上的期望收益,并写在状态点的旁边.如状态点 2 处的值为

$$[0.7\times 100+0.3\times(-20)]\times 10=640(\text{万元});$$

状态点 3 处的值为

$$[0.7\times 40+0.3\times 10]\times 10=310(\text{万元}).$$

第二步　剪枝,比较状态点旁的期望值,留下期望值最大的那一条方案分枝,删去其他的方案分枝.在图 9-2-1 中,由于

$$640-300>310-160,$$

故在决策点 1 处选择建大厂,划去建小厂的边,并将费用值 340(万元)注在点 1 的上边.

因此,这个问题的决策是建大厂,总期望收益为 340 万元.

用决策树进行决策实际上是以期望值为标准进行决策的.上例就

是按期望收益最大为标准决策的，当然也可以按期望损失最小进行决策.

思 考

画出第 9.2.1 节中例 2 以最小期望损失最小为标准的决策树，并与图 9-2-1 的决策树比较，看看两者之间有什么联系.

画决策树时，要注意各方案点是不相容的，状态点后的各种事件(状态)之间也是互不相容的，其中一个事件发生，其他事件就不可能发生，且各事件发生概率的和为 1.

假定对例 2 分前 3 年和后 7 年两期考虑. 根据市场预测，前 3 年销路好的概率为 0.7，而若前 3 年销路好，则后 7 年销路好的概率为 0.9，若前 3 年销路差，则后 7 年的销路肯定差. 在这种情况下，建大厂和建小厂哪个方案好？

解　画出决策树，如图 9-2-2 所示.

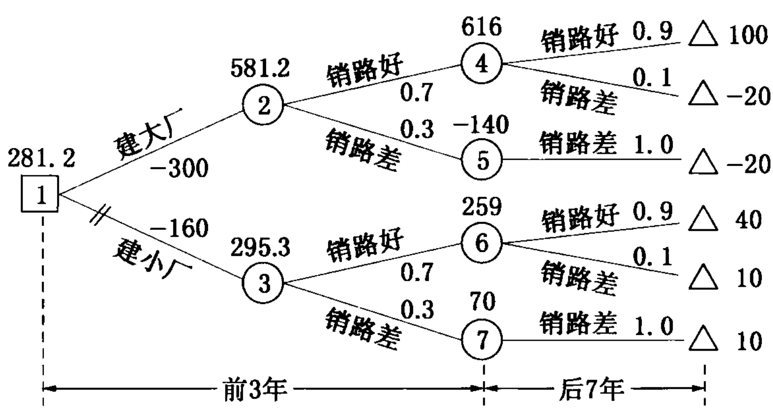


图 9-2-2

按下面的步骤进行决策：

第一步　从末梢开始，计算各状态点上的期望收益.

状态点 4：

$$[0.9\times 100+0.1\times(-20)]\times 7=616(\text{万元});$$

状态点 5：

$$1.0 \times (-20) \times 7 = -140(\text{万元});$$

状态点 6：

$$[0.9 \times 40 + 0.1 \times 10)] \times 7 = 259(\text{万元});$$

状态点 7：

$$1.0 \times 10 \times 7 = 70(\text{万元}).$$

在计算状态点 2 和 3 时，要注意将前三年的收益或亏损考虑进去.

状态点 2：

$$0.7 \times (100 \times 3 + 616) + 0.3 \times [(-20) \times 3 + (-140)]$$
$$= 581.2(\text{万元});$$

状态点 3：

$$0.7 \times (40 \times 3 + 259) + 0.3 \times [10 \times 3 + 70] = 295.3(\text{万元}).$$

第二步　比较状态点旁的期望值，留下期望值最大的那一条方案分枝，删去其他的方案分枝. 由于

$$581.2 - 300 > 295.3 - 160,$$

故在决策点 1 处选择建大厂，划去建小厂的边，并将费用值 281.2(万元)注在点 1 的上边.

因此，建大厂仍然是合理方案，总期望收益为 281.2 万元.

上面两例都是一步决策问题，但在实际生活中，许多决策往往需多步决策，也就是说，某一步决策要取决于上一步的决策结果. 在这种情形下，采用决策树法就较为合适. 下面我们用决策树法解决一个多步决策的问题.

某建筑工地用正常速度施工，如果天气正常，那么 30 天即可完工. 但据预测，15 天后天气将转坏，其中有 40%的可能为不影响施工的阴雨天气；有 50%的可能遇暴雨，使工期推迟 15 天；有 10%的可能遇台风，使工期推迟 20 天. 现有两个方案：

(1) 提前紧急加班，在天气变坏之前完工，需多支付 18 000 元工资.

(2) 不加班，到 15 天后再决策.

① 若遇阴雨天,照常施工,按时完工.

② 若遇暴雨有两个方案:其一,不采取任何措施,但需支付工程延期损失费 20 000 元. 其二,采取某种应急措施,但有三种不同的可能性:有 50%的可能性减少误工一天,需支付延期损失费和应急费 24 000 元;有 30%的可能性减少误工 2 天,需支付延期损失费及应急费 18 000 元;有 20%的可能性减少误工 3 天,需支付损失费和应急费 12 000 元.

③ 若遇台风,也有两种可能的方案:其一,不采取特别措施,但需支付延期损失费 50 000 元. 其二,采取应急措施,有三种可能性:有 70%的可能性减少误工 2 天,支付损失费和应急费 54 000 元;有 20%的可能性减少误工 3 天,需支付损失费及应急费 46 000 元;有 10%的可能性减少误工 4 天,需支付损失费和应急费 38 000 元.

试用决策树法选择最佳方案.

解 本题要进行两次决策,即:是否需要提前加班,如果不需要提前加班的话,是否要采取应急措施.

(1) 先画出决策树(如图 9-2-3).

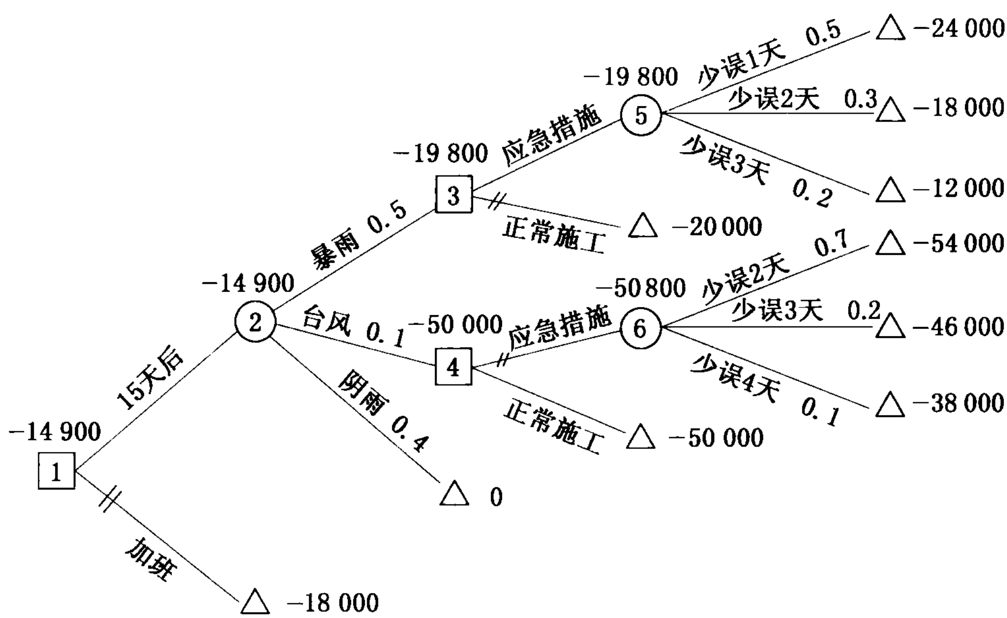


图 9-2-3

(2) 计算 5, 6 两个状态点损益期望值:

状态点 5：

$$0.5\times(-24\,000)+0.3\times(-18\,000)+0.2\times(-12\,000)$$
$$=-19\,800;$$

状态点 6：

$$0.7\times(-54\,000)+0.2\times(-46\,000)+0.1\times(-38\,000)$$
$$=-50\,800.$$

(3) 在决策点 3，4 处剪枝：

在决策点 3，因 19 800 < 20 000，故去掉“正常施工”方案，将点 5 的期望值移至点 3.

同理，在决策点 4，去掉“应急措施”方案，且标出点 4 的期望值.

(4) 计算状态点 2 的损益期望值：

$$0.5\times(-19\,800)+0.1\times(-50\,000)+0.4\times 0$$
$$=-14\,900.$$

(5) 在决策点 1 处剪枝：

因 14 900 < 18 000，故去掉“加班”分枝.

因此，本题的正确决策是，不用提前加班，施工 15 天后若遇阴雨天或台风都只需按原计划进行；而遇暴风雨则采取应急措施，按此决策方案支付的期望值为 14 900 元.

通过上面几个例子，我们看到风险决策问题包括下面几个基本要素：

(1) 决策者——进行决策的个人或组织. 在问题比较重大和严肃时，通常以组织形式出现.

(2) 方案——为决策者提供的各种可行计划和谋略. 如施工负责人要决定开工还是不开工，就是两个方案.

(3) 准则——衡量所选方案正确性的标准. 作为风险型决策，采用较多的准则是期望值准则，即根据每个方案的数学期望值作出判断. 从收益角度来看，期望收益越大则方案越好；从损失角度视察，期望损失越小则方案越好. 如果决策时，发现某一状态的概率明显高于其他状态出现的概率，那么也可根据最大可能性标准来决策.

(4) 状态——不以决策者所控制的、客观存在的且将发生的自然状态称为状态(或事件). 在例 6 中,阴雨、暴雨和台风就是三种状态,它们是不可控制的因素.

(5) 结果——某状态发生带来的收益或损失值.

风险决策过程一般通过作出损益表或画出决策树来进行. 运用决策树法进行决策清楚直观,而且适于多分阶段决策,是进行风险决策的有效方法.

为考察所作的决策是否有效、稳定,有时还需要利用灵敏度分析方法对决策结果作进一步的推广和分析(见下节).

决策问题的分类

一个决策问题要通常具备以下几个条件:

(1) 决策者要有一个希望达到的明确目标.

在例 4 中,决策者希望能获利 100 万元.

(2) 要给出决策系统存在的各种可能的状态.

在例 4 中,MP3 热继续、MP3 热下降便是两种状态.

(3) 存在着供决策人选择的不同方案.

在例 4 中,有“增加一套设备大规模生产”和“维持原有的生产规模”两种不同方案.

(4) 知道各种状态出现的可能性大小.

在例 4 中,预测 MP3 热继续或下降的可能性分别为 0.3 和 0.7.

(5) 对于各种不同决策下的损益值作出估计.

按照决策者掌握的信息量的不同,决策问题可分为确定型决策、风险型决策和不确定型决策三类.

确定型决策是指条件(4)的信息完全掌握,即未来状态完全确定情况下的决策. 在例 4 中,如果 MP3 热肯定继续保持下去,那么这个决策问题就变为确定型决策,这时表 9-2-5 的右边一列就不存在了. 决策者的最优决策当然是“增加一套设备大规模生产”.

风险型决策是指条件(4)的信息掌握得不很充分,即未来状态不能

完全确定,但对各种状态可能发生的概率为已知的条件下的决策.这类决策往往受到某些随机因素的影响,因而决策时存在一定的风险.本专题我们重点讨论的就是这类决策.

不确定型决策是指条件(4)的信息一无所知,即未来状态出现的可能性大小无法预测的条件下所做的决策.这种类型的决策只能根据不同的决策准则,得出不同的决策(参看附录:不确定型决策).

习题9.2

1. 某工厂要制订下年度产品的生产批量计划，根据市场调查和市场预测的结果，得到产品市场销路好、中、差三种状态的概率分别为 0.3，0.5，0.2. 工厂采用大批、中批、小批生产可能得到的收益如下表所示，试分别用期望值法和最大可能法进行决策，合理地确定生产批量，使企业获得的收益最大.

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	销路好 $p_1=0.3$	销路中 $p_2=0.5$	销路差 $p_3=0.2$
方案①——大批生产	20	12	8
方案②——中批生产	16	16	10
方案③——小批生产	12	12	12

2. 解决 9.1.2 节中的例 5：某食品店每天顾客需求 100，150，200，250，300 只蛋糕的可能性分别为 0.2，0.25，0.3，0.15 和 0.1，每只蛋糕的进价为 2.5 元，销售价为 4 元，若当天不能售完，剩下的以每只 2 元的价格处理. 试用期望值法进行决策，该店每天进货多少只蛋糕为宜(进货量必须是 50 的倍数)？

3. 进一步解答习题 9.1 第 4 题：某公司出售一种产品，成本每件 5 元，售价每件 8 元，若当天销售不完，因产品性质关系，只能改作其他用途，每件只可得残值 2 元. 根据过去经验，得知该公司的销售量与销售概率如下表所示. 试用期望值法进行决策，确定该公司进货量为多少时，才能获得最大利润.

每日销售量	10 件	11 件	12 件	13 件
销售概率	0.1	0.2	0.4	0.3

4. 约翰打算在足球比赛场中销售饮料及雨伞，但每一场球赛均须付租金 100 美元，这是他必须列入考虑的损失. 其最后的盈亏取决于所销售商品种类与天气的变化. 假设他只有三种方案可供选择：a_1 表示只卖饮料，a_2 表示兼售饮料及雨伞，a_3 表示只卖雨伞. 如果是雨天，而他只卖饮料将少赚 70 元. 然而如果是晴天，则少赚 10 元. 下表是全部可能的情形.

状　态	概　率	方案(损失/元)		
		a_1	a_2	a_3
下雨	0.4	70	40	20
晴天	0.6	10	40	60

(1) 如果约翰希望长期损失最小,他应采取哪一个方案?

(2) 若正确地报道雨天的概率为 90%,正确报道晴天的概率为 70%,那么,如果某一天气象报告说明天会下雨,那么约翰应采取哪一个方案?

5. 某工地有一台大型吊车. 因该工地有可能受洪水侵袭,为保护吊车有 3 种方案:①运走吊车,需支付 1 800 元;②建一堵保护围墙,为此需支付 500 元,若遇小洪水吊车可免遭损失,若遇大洪水,淹没吊车,损失 60 000 元;③不采取任何措施,若遇小洪水,损失 10 000 元,若遇大洪水,淹没吊车,损失 60 000 元. 据气象预报知,有小洪水的概率为 0.25,有大洪水的概率为 0.01. 试用决策树法进行决策.

6. 某开发公司拟为一企业承包新产品的研制与开发任务,但为得到合同必须参加投标. 已知投标的准备费用为 4 万元,中标的可能性是 40%. 如果不中标,准备费用得不到补偿. 如果中标,可采用两种方法进行研制开发:方法 1 成功的可能性为 80%,费用为 26 万元;方法 2 成功的可能性为 50%,费用为 16 万元. 如果研制开发成功,该开发公司可得到 60 万元,如果合同中标,但未研制开发成功,则开发公司需赔偿 10 万元. 试画出决策树后进行决策:

(1) 是否参加投标;

(2) 若中标了,采用哪种方法研制开发?

7. 有一化工原料厂,由于某项工艺不太好,产品成本高. 在价格保持中等水平的情况下无利可图,在价格跌落时要亏本,只有在价格高涨时才盈利,有盈利也不多. 现在工厂管理人员在编制五年计划时欲将该项工艺加以改革,用新工艺代替. 取得新工艺有两种途径:一是自行研究,但成功的可能是 0.6;二是买专利,估计谈判成功的可能性是 0.8. 不论研究成功或谈判成功,生产规模都有两种方案:一是产量不变;二是产量增加. 如果研究或谈判都失败,则仍采用原工艺进行生产,保持产量.

根据市场预测,估计今后五年内这种产品跌价的可能性是 0.1,保持中等水平的可能性是 0.5,涨价的可能性是 0.4. 试决策:是购买专利,还是自行研制?

收益/万元 \ 方案 \ 价格状态	按原工艺生产	购买专利成功(0.8)		自行研究成功(0.6)	
		产量不变	增加产量	产量不变	增加产量
价格跌落(0.1)	−100	−200	−300	−200	−300
价格中等(0.5)	0	50	50	0	−250
价格高涨(0.4)	100	150	250	200	600

9.3 灵敏度分析

利用决策树或期望值法进行风险型问题的决策，主要取决于状态的概率分布的准确程度.但是状态的概率及损益值往往通过估计或预测得到，不可能十分准确，那么，如何分析状态发生的概率在某范围内变化时，原最优决策方案仍然有效？如何刻画最优方案的稳定性？

回顾第 9.2.1 节的例 2，原估计销路好的概率为 0.7，销路差的概率为 0.3，用期望值法或决策树法决策的结果是建大厂.

现在考察状态概率的变化对决策结果的影响，如图 9-3-1 所示[①]：

	A	B	C	D	E
1	自然状态概率分布		建大厂方案期望值	建小厂方案期望值	最优方案
2	销路好	销路差			
3	0.9	0.1	88	37	建大厂
4	0.8	0.2	76	34	建大厂
5	0.7	0.3	64	31	建大厂
6	0.6	0.4	52	28	建大厂
7	0.5	0.5	40	25	建大厂
8	0.4	0.6	28	22	建大厂
9	0.3	0.7	16	19	建小厂
10	0.2	0.8	4	16	建小厂
11	0.1	0.9	-8	13	建小厂

图 9-3-1

从图 9-3-1 可以看出，当状态的概率变化到一定程度后，最优决策方案发生了变化.那么如何确定转折点呢？

使两个方案期望值相等的概率称为转折概率.在上例中，设销路好的概率为 p，则销路差的概率为 $1-p$，当两个方案的期望值相等时，可得

$$100p+(-20)(1-p)=40p+10(1-p),$$

解得

$$p=\frac{1}{3}.$$

① 单元格 B3，C3，D3，E3 中的公式如下：

	B	C	D	E
3	=1-A3	=100*A3+(-20)*B3	=40*A3+10*B3	=IF(C3>=D3,"建大厂","建小厂")

因此，当 $p>\frac{1}{3}$ 时，选“建大厂”的方案；当 $p<\frac{1}{3}$ 时，选“建小厂”的方案.

在实际决策时，可以将状态概率、损益值等在可能的范围内做几次变动，分析这些变动会给期望损益值和决策结果带来的影响. 如果参数稍加变动而最优方案不变，则这个最优方案是比较稳定的；反之，如果参数稍加变动使最优方案改变，则原最优方案是不稳定的，需要作进一步的分析.

我们还可以用稳定系数来描述决策的稳定性. 如上例中，题设预计的销路好的概率为 $p_0=0.7$，我们将

$$\frac{p_0-p}{p_0}\approx\frac{0.7-0.33}{0.7}=0.53$$

定义为这个决策的稳定性系数.

显然，决策稳定系数越大越好，稳定系数大的决策对由于信息不准造成决策失误的风险具有一定的防范能力.

有外表完全相同的盒子 100 只，将其分为两组，一组内装有白球，有 70 盒；另一组内装黑球，有 30 盒. 现从这 100 盒中任取一盒让你猜，如这盒内装的是白球，猜对了得 500 分，猜错了罚 200 分；如这盒内装的是黑球，猜对了得 1 000 分，猜错了罚 150 分，有关数据见下表. 为使期望得分最高，应选择哪一方案？该方案的稳定性如何？

表 9-3-1

收益/分 \ 方案 \ 状态及概率	白 0.7	黑 0.3
猜白(D_1)	500	−200
猜黑(D_2)	−150	1 000

解 画出决策树，如图 9-3-2. 由决策树可知猜白是最优方案. 设 p 是白球出现的概率，则$1-p$是黑球出现的概率. 计算两个方案的数学期望，并使其相等，得

$$500p+(-200)(1-p)=-150p+1\,000(1-p),$$

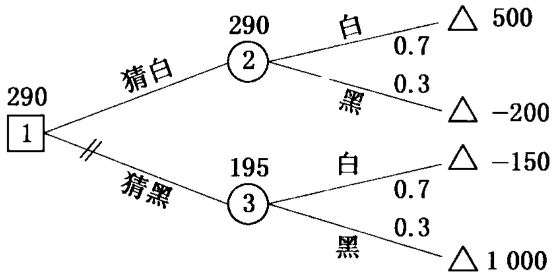


图 9-3-2

解此方程，得转折概率 $p \approx 0.65$. 即当 $p > 0.65$ 时，猜白是最优方案；当 $p < 0.65$ 时，猜黑是最优方案. 本题猜白的决策的稳定系数为 $\frac{0.7-0.65}{0.7} \approx 7\%$，可以看出，这个决策的稳定性并不理想.

对于只有两种状态的决策问题，灵敏度分析还可以通过图示的方法来进行. 在例 1 中，设 p 是白球出现的概率，则 $1-p$ 是黑球出现的概率. 两个方案的期望收益为

$$E(D_1) = 500p + (1-p)(-200) = 700p - 200,$$

$$E(D_2) = -150p + 1\,000(1-p) = -1\,150p + 1\,000.$$

以状态的概率 p 为横坐标，期望收益为纵坐标画出上面两个方程表示的直线(图 9-3-3).

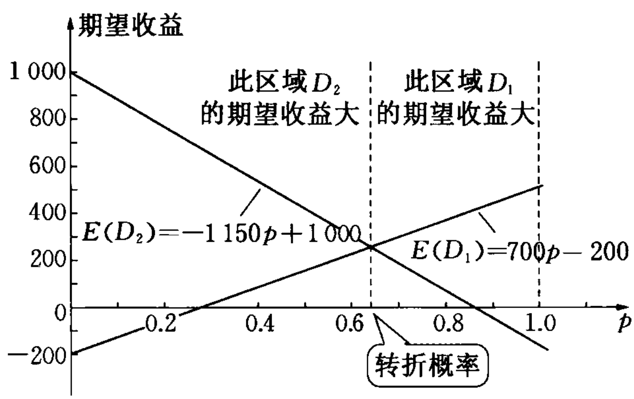


图 9-3-3

由图 9-3-3 可以清楚地看出，以期望值为标准给出的决策方案是如何随着 p 的变化而变化的. 其中，两直线交点的横坐标就是转折概率. 就

状态的概率来说，当其概率越远离转折概率，则其相应的最优方案就越稳定；反之，就越不稳定. 在例 6 中，因为 $p=0.7$ 与转折概率 $p\approx 0.65$ 相差不远，因此选择决策 D_1（猜白）的可靠性并不高.

习题 9.3

1. 求第 9.1 节例 3 的转折概率，原决策的稳定性如何？
2. 某厂生产甲、乙两种产品，根据以往市场需求统计如下：

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	旺季 $p_1=0.8$	淡季 $p_2=0.2$
甲产品	5	3
乙产品	8	2

(1) 分别用最大可能法和期望值法进行决策；

(2) 作出灵敏度分析，求出转折概率.

3. 某项工程明天开工，在天气好时可收益 8 万元，在天气不好时会损失 10 万元，但是如果明天不开工，则会损失 1 万元. 如果明天的降水概率是 40%，试决定是否开工，并讨论决策的稳定性.
4. 在第 9.2.3 节例 4 中，考虑遇暴风雨情形下，采取紧急措施的三种状态的概率发生变化，因而对决策的影响. 假设因采取紧急措施减少误工 1 天、2 天、3 天的概率分别为 0.55，0.25 和 0.2，那么此时所做的决策会发生变化吗？

阅读材料

马尔可夫型决策

马尔可夫(Markov)型决策的基本思想是根据当前状态的概率分布来推断未来状态的概率分布，并以此做出判断和决策.

我们先来研究下面的两个问题.

某企业为使技术人员具有多方面的经验，实行技术人员在技术部门、生产部门和销售部门(分别用部门 1、部门 2、部门 3 表示)轮换工作制度. 轮换办法采取随机形式，每半年轮换一次. 初始状态，即技术人员开始在第 1、2、3 个部门工作的概率分别用 $P_1^{(0)}$, $P_2^{(0)}$, $P_3^{(0)}$ 表示，第 i 个部门的技术人员在半年后(一步)转移到第 j 个部门的概率用 P_{ij} 表示. 已知

$$P^{(0)}=(P_1^{(0)},\ P_2^{(0)},\ P_3^{(0)})=\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),$$

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12} & P_{13}\\ P_{21} & P_{22} & P_{23}\\ P_{31} & P_{32} & P_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0.5 & 0.5\\ 0.75 & 0.25 & 0\end{bmatrix}.$$

(1) 如果某人开始在部门 1 工作，则经过 2 次转移后他在部门 2 工作的概率是多少?

(2) 求经过 2 次和 3 次转移后的概率分布.

解 由状态 1 经过两次转移到状态 2 的所有途径有三个(图 1)：

$$1\to1\to2,\ 1\to2\to2,\ 1\to3\to2.$$

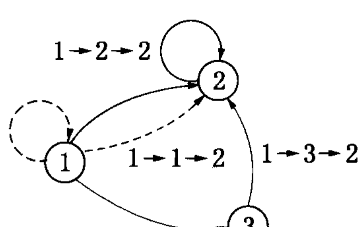


图 1

用 $P_{ij}^{(2)}$ 表示由状态 i 经两步转移到状态 j 的概率，则

$$
\begin{aligned}
P_{12}^{(2)} &= P_{11}P_{12}+P_{12}P_{22}+P_{13}P_{32} \\
&=0.5\times0.5+0.5\times0.5+0\times0.25 \\
&=0.5.
\end{aligned}
$$

因此，此人开始在部门1工作，经过2次转移后他在部门2工作的概率是0.5. 同理，

$$P_{13}^{(2)} = P_{11}P_{13}+P_{12}P_{23}+P_{13}P_{33} = 0.25,$$

$$P_{11}^{(2)} = P_{11}P_{11}+P_{12}P_{21}+P_{13}P_{31} = 0.25,$$

……

如用 $P^{(2)} = \begin{bmatrix} P_{11}^{(2)} & P_{12}^{(2)} & P_{13}^{(2)} \\ P_{21}^{(2)} & P_{22}^{(2)} & P_{23}^{(2)} \\ P_{31}^{(2)} & P_{32}^{(2)} & P_{33}^{(2)} \end{bmatrix}$ 表示第二步转移矩阵，则

$$P^{(2)} = P \cdot P = P^2,$$

即第二步转移矩阵就是第一步转移矩阵的平方，依此类推

$$P^{(3)} = P^3,\ P^{(n)} = P^n.$$

据此，我们可以得到第 n 步转移后系统的概率分布为

$$(P_1^{(n)},\ P_2^{(n)},\ P_3^{(n)}) = P^{(0)}P^n.$$

根据此关系式，只要知道初始状态和转移概率矩阵，就可求出 n 步以后系统所处的状态. 于是，求经过两次转移后的概率分布为

$$
\begin{aligned}
(P_1^{(2)},\ P_2^{(2)},\ P_3^{(2)}) &= P^{(0)}P^2 \\
&=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{bmatrix} \\
&=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix} 0.25 & 0.5 & 0.25 \\ 0.375 & 0.375 & 0.25 \\ 0.375 & 0.5 & 0.125 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$=(0.333,\ 0.458,\ 0.208),$$

经过三次转移后的概率分布为

$$(P_1^{(3)},\ P_2^{(3)},P_3^{(3)}) = P^{(0)}P^3$$
$$=(0.323,\ 0.448,\ 0.229).$$

利用 Excel 可方便地进行矩阵的运算，如图 2 所示.

E2 {=MMULT(A2:C4,A2:C4)}

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		P				P²				P³	
2	0.5	0.5	0		0.25	0.5	0.25		0.3125	0.4375	0.25
3	0	0.5	0.5		0.375	0.375	0.25		0.375	0.4375	0.1875
4	0.75	0.25	0		0.375	0.5	0.125		0.28125	0.46875	0.25
5		P⁽⁰⁾				P⁽⁰⁾P²				P⁽⁰⁾P³	
6	0.333333	0.333333	0.333333		0.333333	0.458333	0.208333		0.322917	0.447917	0.229167

图 2

设某公司有 1 和 2 两种状态，1 为盈利，2 为亏损. 当其处于 1 时，下一年仍为 1 的概率是$\frac{1}{2}$，因此下一年转为 2 的概率也是$\frac{1}{2}$. 当公司处于状态 2 时，下一年经过努力回到状态 1 的概率为$\frac{2}{5}$，仍处于状态 2 的概率为$\frac{3}{5}$. 若公司现处于状态 1，问：经过 n 年后该公司处于状态 1 和 2 的概率各是多少？

解　初始状态的概率分布为

$$P^{(0)} = (P_1^{(0)},\ P_2^{(0)}) = (1,\ 0),$$

一步转移矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

故可得

$$P^{(1)} = P^{(0)}P = (1,\ 0)\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = (0.5,\ 0.5),$$

这表明公司在一年后处于两种状态的概率是相等的，而两年后的概

率分布为

$$P^{(2)} = P^{(1)}P = (0.5, 0.5)\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix} = (0.45, 0.55).$$

依此类推,此公司各年的状态的概率分布如表 1 所示.

表 1

n	0	1	2	3	4	5	…
$P_1^{(n)}$	1	0.5	0.45	0.445	0.444 5	0.444 45	…
$P_2^{(n)}$	0	0.5	0.55	0.555	0.555 5	0.555 55	…

由此可见,系统处于状态 1 的概率将趋于$\frac{4}{9}$,而系统处于状态 2 的概率趋于$\frac{5}{9}$. 同时还可以发现,即使初始状态为 2, n 年后系统处于 1 和 2 的概率仍趋于$\frac{4}{9}$和$\frac{5}{9}$.

实际上,当转移次数 n 很大时,可认为 $P^{(n)} = P^{(n-1)} = (x, y)$, 由 $P^{(n)} = P^{(n-1)}P$ 得

$$(x, y) = (x, y)\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix},$$

所以

$$x = 0.5x + 0.4y,$$
$$y = 0.5x + 0.6y,$$

且

$$x + y = 1,$$

则

$$x = \frac{4}{9}, \ y = \frac{5}{9}.$$

结果与前述相同. 上述概率也称之为稳态概率.

应用马尔可夫方法计算分析的目的,就是根据某些变量现在的状态及其变化趋势,来预测它在未来某一特定时期可能出现的状态,从而提供某种决策的依据. 马尔可夫决策的基本方法是用转移概率矩阵进行预测和决策.

某地区有甲、乙、丙三家公司，历史上三家产品分别拥有该地区50%，30%，20%的市场．不久前丙公司制定一项将甲、乙公司顾客吸引到本公司的销售与服务方针．市场调查表明，在丙公司新方针影响下，甲公司顾客只有70%仍购买甲产品，而10%，20%的顾客分别转向乙、丙；公司乙将有80%老顾客，余下各一半转向甲、丙；丙公司保持90%老顾客，余下各一半转向甲、乙．设销售趋势一直不变．

(1) 求一步转移概率；

(2) 求三个公司在第一季度、第二季度拥有的销售份额；

(3) 求三个公司最终拥有的销售份额．

解 (1) 记状态0，1，2分别为购买甲、乙、丙公司的产品，则一步转移概率如下：

表2

状　态	0	1	2
0	0.7	0.1	0.2
1	0.1	0.8	0.1
2	0.05	0.05	0.9

(2) 甲、乙、丙三家公司原拥有的销售份额的分布为(0.5，0.3，0.2)，于是三个公司在第一季度拥有的销售份额的分布为

$$(0.5, 0.3, 0.2)\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$=(0.39, 0.30, 0.31);$$

在第二季度拥有的销售份额的分布为

$$(0.39, 0.30, 0.31)\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix}$$

$$=(0.319, 0.295, 0.387).$$

(3) 求解最终拥有的销售份额,即求稳态概率,设为(x, y, z),则有

$$(x, y, z)=(x, y, z)\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix},$$

$$x+y+z=1,$$

即

$$\begin{cases}x=0.7x+0.1y+0.05z,\\ y=0.1x+0.8y+0.05z,\\ z=0.2x+0.1y+0.9z,\\ x+y+z=1,\end{cases}$$

解得

$$(x, y, z)=\left(\frac{3}{17}, \frac{4}{17}, \frac{10}{17}\right),$$

这就是甲、乙、丙三家公司最终拥有的销售份额.

由于最后市场的占有率不取决于原始条件,而取决于转移概率矩阵,所以决策的重点是加强经营管理的各种措施(如提高产品质量、降低产品成本和销售价格、改善服务态度、加强宣传和推销等),来改善转移概率矩阵的组成,以增强竞争能力,提高市场占有率.

在例3中,若甲公司提高市场占有率,有如下两个行动方案可供选择,且两个行动方案的费用相同,问:甲公司应采用哪一种方案?

(1) 与乙公司竞争,从流失到乙公司的客户中争回5%;

(2) 与丙公司竞争,从流失到丙公司的客户中争回5%.

解　当甲公司从流失到乙公司的客户中争回5%时,转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix}0.75 & 0.05 & 0.2\\ 0.1 & 0.8 & 0.1\\ 0.05 & 0.05 & 0.9\end{bmatrix},$$

仿上可求得最后市场的占有率为$\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

当甲公司从流失到丙公司的客户中争回5%时，转移概率矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0.75 & 0.1 & 0.15 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix},$$

求得最后市场的占有率为$\left(\frac{6}{29}, \frac{7}{29}, \frac{16}{29}\right)$.

由于第(1)方案的最后市场占有率$\frac{1}{5}$低于第(2)方案的最后市场占有率$\frac{6}{29}$，因此，甲公司应采取第(2)方案.

学习总结报告

(1) 小结

梳理本专题的主要知识,包括风险的含义、风险决策的常用方法、灵敏度分析,等等.

(2) 拓展

查阅有关风险与决策的资料,调查风险与决策在采购、求职、投资、企业生产或经营中的作用.收集身边运用风险决策解决实际问题的案例.

(3) 交流

就风险决策方法及其意义的认识、学习本专题的感受或看法、风险决策在现实生产生活中的应用、调查结果与启示等专题,在班级(或小组)进行交流.

在上述内容的基础上,完成本专题的学习总结报告.

复习题

1. 某出版公司对送审的两本新书进行评估，以决定出版其中的一本. 在审读以后，有关专家认为，新书甲出版后，若能够在市场上获得成功，则在以后五年间该公司可望赚 80 万元；但若失败，则可能会损失 40 万元. 对于新书乙专家则认为，若获得成功，该公司可望赚 50 万元；若失败，可能会损失 10 万元，专家预测这两本书成功的概率均为 0.4. 试建立风险函数为该公司进行决策.
2. 设某工厂是按批生产某产品并按批销售，每件产品的成本为 30 元，批发价格为每件 35 元. 若每月生产的产品当月销售不完，则每件损失 1 元，工厂每投产一批是 10 件，最大月生产能力是 40 件，决策者可选择生产 0，1，2，3，4 批这五种方案. 试作出本题的损益表.
3. 一个卖冰棍的人，以每支 0.35 元购进 100 支，零售价每支 0.50 元，如当天卖不出去，就会溶化报废. 根据以往经验，每天售 0，100，200，300，400，500 支的可能性是 0.01，0.05，0.10，0.30，0.30，0.24.

   (1) 写出收益表；

   (2) 以期望值法确定最优方案.
4. 某水果店以 2 元/kg 的价格购进每筐重 100 kg 的香蕉. 第一天以 3 元/kg 的价格出售，当天销售余下的香蕉再以平均 1.2 元/kg 处理价出售. 需求情况（以筐为单位）见下表. 试用期望值法进行决策：为获取最大利润，该店每天应购进多少筐香蕉？

需求量	1	2	3	4	5	6	7
概　率	0.1	0.15	0.25	0.25	0.15	0.05	0.05

5. 某渔船要对下个月是否出海打鱼作出决策. 如果出海后是好天，可获收益 5 000 元，若出海后天气变坏，将损失 2 000 元；若不出海，无论天气好坏都要承担 1 000 元损失费. 据预测下月好天的概率为 0.6，天气变坏的概率为 0.4，应如何选择最佳方案？
6. 某工厂要订购一台新设备，该设备中有一个重要部件，每个售价 500 元. 如果在使用中该部件损坏，而工厂又无备用件，将造成 20 000 元的损失，因此工厂需要考虑购买备用件的问题. 但该备件只能在订购设备的同时购买，每个备用

件在设备使用期内的存储费，不论存储时间长短均为 100 元. 已知该设备在使用期内所需备用件的数量服从如下概率分布. 问：在订购设备的同时，应订购多少个备用件最为经济？用期望值法进行决策.

备用件	0	1	2	3	4	5	≥6
概　率	0.90	0.05	0.02	0.01	0.01	0.01	0

7. 某位农民准备种植新品种的蔬菜，对于种植多少面临着三种选择：多、中、少. 根据市场预测，未来市场分为好、中、差三种情况，根据过去的经验可以得到如下损益表：

收益/千元 \ 状态及概率 \ 方案	好 $p_1=0.3$	中 $p_2=0.5$	差 $p_3=0.2$
多	12	5	−4
中	8	6	−1
少	−3	−3	2

(1) 用最大可能法决策，应选择何种种植方案？

(2) 用决策树法进行决策，应选择何种种植方案？

8. 某公司需要决定建大厂还是建小厂来生产一种新产品，该产品的市场寿命为 10 年. 建大厂的投资费用为 280 万元，建小厂的费用为 140 万元. 估计 10 年内销售状况的概率分布是：需求高的概率是 0.5，需求一般的概率是 0.3，需求低的概率是 0.2. 公司算出的年收益如表所示.

收益/万元 \ 状态及概率 \ 方案	需求高 $p_1=0.5$	需求一般 $p_2=0.3$	需求低 $p_3=0.2$
建大厂	100	60	−25
建小厂	25	45	55

(1) 求出此问题的损益表(10 年)；

(2) 用决策树法进行决策.

9. 某食品公司考虑是否参加为某运动会服务的投标，以取得饮料或面包两者之一的供应特许权. 两者中任何一项投标被接受的概率为 40%. 公司的获利情况取决于天气. 若获得的是饮料供应特许权，则当晴天时可获利 2 000 元；雨天时

要损失 2 000 元. 若获得的是面包供应特许权，则不论天气如何，都可获利 1 000元. 已知天气晴好的可能性为 70%. 问：

(1) 公司是否参加投标？若参加，为哪一项投标？

(2) 若再假定当饮料投标中的后，公司可选择供应冷饮或咖啡. 如果供应冷饮，则晴天时可获利 2 000 元，雨天要损失 2 000 元；如果供应咖啡，则雨天可获利 2 000 元，晴天可获利 1 000 元，公司应作出怎样的决策？

10. 某厂考虑生产甲、乙两种产品，根据对过去市场需求的统计，可知不同需求状态出现的概率及相应的获利情况如表所示. 试用期望值法进行决策，并进行灵敏度分析，计算出转折概率.

状态及概率 / 收益/万元 / 方案	高需求 $p_1=0.7$	低需求 $p_2=0.3$
甲产品	4	3
乙产品	7	2

11. 某工厂的产品销售势头良好，厂长考虑是否要生产更多的产品以满足预期的市场需求. 市场调研结果是：如果民用电的价格不变，该产品的需求量将增加 10%；如果民用电的价格上涨，则该产品的需求量将下降 5%；且民用电的价格只有“不变”和“上涨”两种可能性. 厂业务部门提出了 3 种备选方案：保持当前的生产水平、工人加班生产、增加新设备. 厂财务部门根据这 3 种方案测算了利润状况如下表(单位：万元).

	需求量增加 10%	需求量下降 5%
保持当前生产水平	35	30
工人加班生产	42	30
增加新设备	45	25

(1) 假设民用电价格不变的概率是 0.65，试画出决策树进行决策；

(2) 假设民用电价格不变的概率为 p，试进行灵敏度分析.

不确定型决策

在决策的结果无法预料和各种状态的发生的概率无法预测的条件下所做的决策称为不确定型决策. 在进行不确定型决策过程中,决策者的主观意志和经验判断居于主导地位.

根据决策者的主观态度,通常有五种决策准则:悲观准则,乐观准则,等可能准则,后悔准则,折衷准则. 下面通过一个例子介绍上述五种决策准则.

某公司为经营业务的需要,决定要在现有生产条件不变的情况下,生产一种新产品,现可供开发生产的产品有甲、乙、丙、丁四种,对应的方案为 A_1, A_2, A_3, A_4. 由于缺乏相关资料背景,对产品的市场需求只能估计为大、中、小三种状态,而且对于每种状态出现的概率无法预测,每种方案在各种状态下的收益如下表所示(单位:万元).

表 1

状态 / 收益/万元 / 方案	需求量大 S_1	需求量中 S_2	需求量小 S_3
A_1:生产产品甲	800	320	−250
A_2:生产产品乙	600	300	−200
A_3:生产产品丙	300	150	50
A_4:生产产品丁	400	250	100

试用各种不同的决策准则求出最优策略(用折衷准则决策时取乐观系数 0.3).

1. 悲观准则(max-min 收益准则)

悲观准则属于保守型的决策准则. 决策者由于自己的经济实力比较脆弱,决策的错误可能造成很大的损失,因此处理问题时比较谨慎,往往

总从最坏的结果着想，在最坏的结果中挑选最好的结果. 决策步骤如下：

第一步　先从每个方案中选出一个最小的收益值.

A_1：$\min\{800, 320, -250\}=-250$;

A_2：$\min\{600, 300, -200\}=-200$;

A_3：$\min\{300, 150, 50\}=50$;

A_4：$\min\{400, 250, 100\}=100$;

第二步　选出最小值中的最大值.

$\max\{-250, -200, 50, 100\}=100$.

第三步　最大值 100 对应的方案是 A_4，即选择生产产品丁.

2. 乐观准则(max-max 收益准则)

乐观准则与悲观准则相反. 决策者即使在情况不明的条件下，也绝不放弃任何一个获得最好结果的机会，要争取好中之好. 决策步骤如下：

第一步　先从每个方案中选出一个最大的收益值.

A_1：$\max\{800, 320, -250\}=800$;

A_2：$\max\{600, 300, -200\}=600$;

A_3：$\max\{300, 150, 50\}=300$;

A_4：$\max\{400, 250, 100\}=400$.

第二步　选出最大值中的最大值.

$\max\{800, 600, 300, 400\}=800$.

第三步　最大值 800 对应的方案是 A_1，即选择生产产品甲.

3. 等可能准则(Laplace 准则)

等可能决策准则又称为拉普拉斯准则. 这个准则将各种可能出现的状态"一视同仁"，即认为它们出现的可能性都是相等的，均为$\frac{1}{n}$(有 n 个状态). 然后，再用期望值法选择最优方案. 决策步骤如下：

第一步　计算每个方案的期望收益.

$$E(A_1)=\frac{1}{3}(800+320-250)=290;$$

$$E(A_2)=\frac{1}{3}(600+300-200)=\frac{700}{3};$$

$$E(A_3)=\frac{1}{3}(300+150+50)=\frac{500}{3};$$

$E(A_4)=\frac{1}{3}(400+250+100)=250.$

第二步　选出每个方案的期望收益的最大值.

$\max\left\{290,\ \frac{700}{3},\ \frac{500}{3},\ 250\right\}=290.$

第三步　最大值 290 对应的方案是 A_1，即选择生产产品甲.

4. 后悔准则(min-max regret 准则)

在决策过程中，当某一种状态可能出现时，决策者必然要选择使收益最大的方案. 但如果决策者由于决策失误而没有选择使收益最大的方案，则会感到后悔. 后悔准则的基本思想就在于尽量减少决策后的后悔. 决策步骤如下：

第一步　建立后悔值表. 将每个状态下的最大收益值减去同列其他收益值，即得到后悔值表.

表 2

方案	后悔值			最大后悔值
	S_1	S_2	S_3	
A_1	0	0	350	350
A_2	200	20	300	300
A_3	500	170	50	500
A_4	400	70	0	400

第二步　找出各行动方案在各状态下最大后悔值.

A_1：$\max\{0,\ 0,\ 350\}=350$；

A_2：$\max\{200,\ 20,\ 300\}=300$；

A_3：$\max\{500,\ 170,\ 50\}=500$；

A_4：$\max\{400,\ 70,\ 0\}=400$.

第三步　找出各行动方案最大后悔值中的最小值.

$\min\{350,\ 300,\ 500,\ 400\}=300.$

所以决策方案是 A_2，即选择生产产品乙.

5. 折衷准则

折衷准则是介于悲观准则和乐观准则之间的一个准则，它的特点是

对客观状态的估计既不完全乐观，也不完全悲观，而是采用一个乐观系数来反映决策者对状态估计的乐观程度.

令 α 为乐观系数，且 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$，计算

$H_i = \alpha \times$ 第 i 个方案的最大收益 $+ (1-\alpha) \times$ 第 i 个方案的最小收益，那么 H_i 中的最大值所对应的方案为决策方案.

可以看出，当 $\alpha = 0$ 时，折衷准则即为 max-min 收益准则；当 $\alpha = 1$ 时，即为 max-max 收益准则.

本例中，$\alpha = 0.3$，则

$H_1 = 0.3 \times 800 + (1-0.3) \times (-250) = 65$；

$H_2 = 0.3 \times 600 + (1-0.3) \times (-200) = 40$；

$H_3 = 0.3 \times 300 + (1-0.3) \times 50 = 125$；

$H_4 = 0.3 \times 400 + (1-0.3) \times 100 = 190$.

于是，$\max\{65, 40, 125, 190\} = 190$，对应的决策方案为 A_4，即生产产品丁.

我们看到，根据不同的决策准则得到的结果并不完全一致. 因此，在处理实际问题时，可同时采用几个准则来进行分析和比较. 最后采用哪个方案取决于具体情况和决策者对状态所持的态度.

下表是利用不同准则对本例进行决策分析的结果，通常被选中多的方案应予以优先考虑.

表 3

准则	决策方案			
	A_1	A_2	A_3	A_4
悲观准则				√
乐观准则	√			
等可能准则	√			
后悔准则		√		
折衷准则 ($\alpha = 0.3$)				√

说　　明

江苏教育出版社出版的《普通高中课程标准实验教科书·数学》是根据2003年教育部制订的《普通高中数学课程标准(实验)》编写的.

该套教科书充分体现数学课程标准的基本理念,使学生通过高中阶段的学习,能获得适应现代生活和未来发展所必需的数学素养,满足他们个人发展与社会进步的需要.

教科书力图使学生在丰富的、现实的、与他们经验紧密联系的背景中感受数学、建立数学、运用数学,做到"入口浅,寓意深".通过创设恰当的问题情境,引导学生进行操作、观察、探究和运用等活动,感悟并获得数学知识与思想方法.在知识的发生、发展与运用过程中,培养学生的思维能力、创新意识和应用意识.

教科书按知识发展、背景问题、思想方法三条主线,通过问题将全书贯通.每个模块围绕中心教育目标展开,每章围绕核心概念或原理展开.教科书充分关注数学与自然、生活、科技、文化、各门学科的联系,让学生感受到数学与外部世界是息息相通、紧密相连的.

教科书充分考虑学生的不同需求,为所有学生的发展提供帮助,为学生的不同发展提供较大的选择空间.整个教科书设计为:一个核心(基本教学要求),多个层次,多种选择.学好核心内容后,根据需要,学生有多种选择,每一个人都能获得必备的数学素养与最佳发展.

众多的数学家、心理学家、学科教育专家、特级教师参加了本套教科书的编写工作,参与讨论的有仇炳生、陈光立、张松年、樊亚东、葛军、于明、王红兵、祁建新、孙旭东等,在此向他们深表感谢!

本书编写组

2006年6月

ISBN 978-7-5343-7575-0
9 787534 375750 >
定价：1.95 元

批准文号：苏费核（09 秋）第 21 号　　举报电话：12358

[General Information]
书名=普通高中课程标准实验教科书　数学　选修4-9　风险与决策
作者=单墫主编
页数=42
SS号=12802078
DX号=
出版日期=2009.12
出版社=南京江苏教育出版社