

## इकाई-7

### बैंक की जानकारी, बैंक में खाता खोलना तथा खातों के प्रकार

इस इकाई को पढ़ने से आप को निम्नलिखित की जानकारी होगी

- बैंक की जानकारी
- बैंक में खाता खोलना
- खातों के प्रकार

आज हम प्रगतिशील युग से गुजर रहे हैं। चारों ओर से समग्र विकास का आ ह्वान हो रहा है। इस विकास की आधारशिलायें अनेक हैं उन्हीं में बैंकिंग भी एक है। आइए, विचार करें, बैंक की आवश्यकता क्यों पड़ी?

समाज में ऐसे भी लोग हैं जिनके पास आवश्यकता से अधिक धन है। जब बैंकों की कमी थी, लोग कम पढ़े लिखे थे, अपने अतिरिक्त धन को जमीन में गाड़ कर, नींव में छिपाकर, सोना-चाँदी खरीद कर सुरक्षित समझते थे फिर भी वे निश्चित और निर्भय नहीं थे। बैंकों के प्रादुर्भाव से यही पैसा बैंकों में जमा किया जाने लगा जो राष्ट्र के अनेक विकास कार्यों, जरूरतमंद लोगों को ऋण देने आदि में व्यय किया जाने लगा और इसके बदले में जमाकर्ता को कुछ धन ब्याज के रूप में दिया जाने लगा। सारांश यह कि जो धन अचल था चल में बदल गया।

व्यापारिक दृष्टिकोण से बैंकों की उपादेयता, महत्ता दिन-प्रतिदिन बढ़ती जा रही है। व्यापारी, बैंक में बड़ी-बड़ी धनराशि जमा करते हैं, निकालते हैं और व्यापार में लगाते हैं। बैंक की वर्तमान कार्य प्रणाली से बैंक का हर ग्राहक अपने को सुरक्षित तथा भयरहित समझ रहा है।

बैंक धन जमा करने, धन उधार देने वाली संस्था के रूप में कार्य करते हैं। वेतन, पेंशन का भी भुगतान बैंक के खाते के माध्यम से होने लगा है। यही नहीं, शिक्षा संस्थानों की शुल्क से आय, वृद्धावस्था पेंशन, आवास ऋण सहायता आदि का भी आहरण-वितरण बैंकों के माध्यम से होने लगा है।

बीमा निगम भी एक संस्था है जहाँ धन का आहरण-वितरण होता है।

उपर्युक्त के अतिरिक्त विनियम पत्र, बचत पत्र, ऋण पत्र, यात्री चेकों का निर्गमन भी बैंक से होता है। आप देखेंगे कि बड़े-बड़े नगरों में एक ही बैंक की कई शाखायें अलग-अलग स्थानों पर स्थापित हैं तथा भिन्न-भिन्न बैंक भी पर्याप्त संख्या में हैं।

आप बैंक की उपयोगिता समझ गए होंगे। हम यहाँ बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करेंगे। विभिन्न चेकों, शेयर, ऋण पत्र, शेयर एवं ऋण पत्र में अन्तर, निवेश, अंकित मूल्य, बाजार मूल्य, दलाली आदि का व्यावहारिक ज्ञान प्राप्त करेंगे।

## बैंक की जानकारी

आइए, बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करें।

- हम बैंक किस उद्देश्य से जाते हैं?  
धन जमा करने, उधार लेने, धन आहरण करने के लिए।
- हम धन को बैंक में क्यों जमा करते हैं?  
धन को सुरक्षित रखने के लिए और ब्याज पाने के लिए।
- बैंक में क्या-क्या कार्य होते हैं?

बैंक व्यापारियों को व्यापार प्रारम्भ करने के लिए, छोटे किसानों को कृषि के लिए और बेरोजगारों को धन्धा शुरू करने के लिए ऋण देता है।

बैंक खाताधारियों और सरकार के लिए भी कार्य करता है जैसे—स्कूलों की फीस जमा करना, पानी और बिजली के बिल जमा करना, करों का भुगतान, मकान के लिए ऋण की किश्तें जमा करना, वेतन वितरण की सुविधा प्रदान करना आदि।

## बैंक में खाता खोलना

जब हम बैंक में पहली बार धन जमा करते हैं तो हमें बैंक में एक खाता खोलना पड़ता है। इसके लिए हमें बैंक से प्राप्त निर्धारित प्रार्थना-पत्र पर अन्य सूचनाओं के साथ नमूने के तीन हस्ताक्षर करके बैंक में आवेदन करना होता है। खाता खोलने के लिए हमें एक परिचयदाता की आवश्यकता होती है जिसका खाता उसी बैंक में पहले से खुला होता है। परिचयदाता प्रार्थना-पत्र में निर्धारित स्थान पर अपना हस्ताक्षर करके अपनी खाता संख्या लिखता है और प्रमाणित करता है कि वह खाता खोलने वाले को कितने दिनों से जानता है।

शिक्षक कक्ष में बैंक के सभी वास्तविक फार्म दिखाएं।

बैंक खाता खोलने वालों को एक पास बुक जारी करता है जिसमें तिथि अनुसार जमा की गई तथा निकाली गयी राशियों का विवरण लिखा जाता है।

जब हम बैंक में अपने खाते से धन निकालते हैं तो हमें एक फार्म भरना पड़ता है जिसे आहरण फार्म कहते हैं। बैंक अधिकारी आहरण फार्म में किये गये हस्ताक्षर को नमूने के हस्ताक्षर से मिलान

करके ही धन निकालने की अनुमति देता है। यदि हस्ताक्षर नहीं मिलते तो बैंक रुपये देने से इन्कार कर देता है।

## खाता के प्रकार

बैंक में हम कई तरह के खाते खोल सकते हैं, जिनमें से कुछ प्रमुख खाते निम्नवत् हैं—

- (i) बचत खाता (Savings Bank Account)
- (ii) चालू खाता (Current Account)
- (iii) सावधि जमा खाता (Fixed Deposit Account)
- (iv) आवर्ती (संचयी) जमा खाता (Recurring Deposit Account)
- (v) अल्पवयस्क का खाता (Minor Account)
- (vi) बैंक माँग पत्र (Bank demand draft)
- (vii) मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा के लिए लॉकर (Locker)

**(i) बचतखाता**—इस खाते का मुख्य उद्देश्य, कम और मध्यम आय वर्ग के लोगों के लिए बचत की भावना को प्रोत्साहित करना है। यह खाता बैंक द्वारा निर्धारित न्यूनतम धनराशि 500 रुपये जमा करके खोला जा सकता है। हम अपने बचत खाते से धन निकालने के लिए आहरण फार्म (Withdrawal form) या चेक भरकर धन निकाल सकते हैं। खाते में न्यूनतम धनराशि 1000 रुपये रखने पर जमाकर्ता को बैंक से चेक बुक भी प्राप्त हो सकती है।

**(ii) चालू खाता**—बड़े व्यापारी, कंपनियाँ, निगम और संस्थाएँ नगद लेनदेन नहीं करते हैं। वे चेक द्वारा ही लेनदेन करते हैं। इसलिए वे बैंक में अपना चालू खाता खोलते हैं। इस खाते में बैंक जमा धनराशि पर कोई ब्याज नहीं देता है, परन्तु इसमें बचत खाते की अपेक्षा धन को कई बार निकाल या जमा किया जा सकता है। कभी-कभी बैंक खाताधारी से नाममात्र की फीस लेता है। वर्तमान में चालू खाता खोलने पर एक वर्ष में भारतीय स्टेट बैंक द्वारा 50 रुपये सेवाशुल्क भी (सर्विस चार्ज के रूप में) लिया जाता है।

**(iii) सावधि जमा खाता**—इसमें धन निश्चित अवधि के लिए जमा किया जाता है। बैंक खाताधारी को प्रमाण-पत्र प्रदान करता है। इस प्रमाण-पत्र पर राशि, समय, ब्याजदर, ब्याज के अदायगी की विधि और जमा का प्रकार आदि लिखा रहता है। खाताधारी अवधि की समाप्ति पर धन निकालता है। फिर भी खाताधारी की आवश्यकता पर परिपक्वता की अवधि के पूर्व भी ब्याज दर में कटौतीकर भुगतान किया जा सकता है। सावधि जमा में ब्याज दर बचत खाते की अपेक्षा अधिक होती है। इसमें ब्याज वार्षिक, छमाही या तिमाही परिकलित किया जाता है।

**ध्यान दें—**उपर्युक्त ब्याज दर परिवर्तनीय है। समय-समय पर बैंक के निर्देशानुसार ब्याज दर में परिवर्तन होता रहता है।

**(iv) आवर्ती या संचयी जमा खाता**—इसमें एक निश्चित धन (जो 5 रुपये या 10 रुपये के गुणांक के रूप में होना चाहिए) प्रतिमाह निश्चित अवधि (जो कम से कम 12 माह, अधिक से अधिक 10 वर्ष) तक जमा करना होता है। इस खाते में ब्याज की दरें बचत खाते की दर की अपेक्षा अधिक होती हैं। यह योजना उन व्यक्तियों के लिए उपयोगी हैं जो नियमित रूप से अल्प धनराशि बचाना चाहते हैं। आवर्ती जमा योजना डाकघरों में भी संचालित है और इनकी ब्याज की दरें बैंक की ब्याज दरों से अधिक होती हैं।

**(v) अल्पवयस्क का खाता**—18 वर्ष की आयु से कम आयु वाला व्यक्ति अल्पवयस्क कहलाता है। अल्पवयस्क व्यक्ति को भी बैंक में खाता खोलने का अधिकार है। वह चालू खाता खोलने का अधिकारी नहीं होता। अल्पवयस्क व्यक्ति या तो अपने नाम से खाता खोल सकता है या अपने और अपने अभिभावक के संयुक्त नाम से। अल्पवयस्क की आयु कम से कम 12 वर्ष होना आवश्यक है। 12 वर्ष से कम की स्थिति में केवल अभिभावक ही खाता खोल सकता है।

**(vi) बैंक ड्राफ्ट**—डाकघरों से पत्रों की भाँति धन भी एक स्थान से दूसरे स्थान को ‘मनीऑर्डर’ पत्र के माध्यम से भेजा जाता है। इसी प्रकार बैंक भी धन स्थानान्तरण के लिए ‘बैंक माँग पत्र’ (Demand Draft) या बैंक ड्राफ्ट (Bank Draft) निर्गत करते हैं। बैंक ड्राफ्ट बैंक की एक शाखा का अपनी ही किसी अन्य शाखा के नाम एक आज्ञा के रूप में होता है जिसमें एक नियत राशि उस व्यक्ति को दिए जाने का आदेश होता है जिसके नाम ड्राफ्ट निर्गत किया गया है। धन भेजने वाला व्यक्ति एक निर्दिष्ट राशि बैंक को दे कर ड्राफ्ट बनवाता है। बैंक धन पाकर ड्राफ्ट निर्गत करता है। ड्राफ्ट में अधिकृत व्यक्ति अर्थात् जिसका नाम बैंक ड्राफ्ट में उल्लिखित हो बैंक की निर्दिष्ट शाखा में ड्राफ्ट प्रस्तुत करता है। साथ ही अपने खाते में डाल देता है। उसका भुगतान उसी के खाते के माध्यम से किया जाता है। ध्यान रहे ड्राफ्ट निर्गत करने वाली शाखा, स्थानान्तरिक होने वाली धनराशि पर बैंक के नियम के अनुसार कुछ कमीशन लेती है।

**(vii) मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा (लॉकर)**—बैंक जहाँ धन संबंधी कार्य करते हैं वहीं कीमती वस्तुओं, आभूषणों, दस्तावेजों की सुरक्षा के लिए भी व्यवस्था करते हैं। इस कार्य के लिए बैंक के पास अतिसुदृढ़, कक्ष होते हैं जिनमें लॉकर की व्यवस्था होती है। निर्दिष्ट किराये दे कर कोई व्यक्ति बैंक के स्ट्रांग रूप में रखी आलमारी में एक लॉकर किराये पर ले सकता है। लॉकर 2 कुंजियों (चाबियों) के लगाने पर खुलता बन्द होता है। एक चाभी लॉकर किराये पर लेने वाले को दी जाती है और दूसरी चाभी जिसे मास्टर की कहते हैं, बैंक में रख ली जाती है। बैंक के लॉकर में रखी वस्तुओं की जानकारी बैंक वालों को भी नहीं हो पाती है। लॉकर खोलने के लिए बैंक का कर्मचारी मास्टर

की लगा कर एक ताले को खोल कर अलग हट जाता है और वह व्यक्ति अपनी चाबी लगा कर लॉकर को खोल लेता है।

## धन निकालने की विधियाँ

- (1) निकासी (आहरण) फार्म द्वारा
- (2) चेक द्वारा

आहरण फार्म बैंक से निःशुल्क मिलता है। ग्राहक फार्म को भली-भाँति भरकर बैंक में पासबुक सहित प्रस्तुत करता है। अधिकारी हस्ताक्षर सहित अन्य तथ्यों की मिलान जाँच करते हैं। उपयुक्त पाये जाने पर धन ग्राहक को दे दिया जाता है।

आहरण प्रपत्र की तरह चेक भी बैंक द्वारा निर्गत एक छपी हुई पर्ची के रूप में होता है। चेकों पर एक संख्या पड़ी होती है तथा यह ग्राहक को 10,20,25 या 100 चेकों की पुस्तिका के रूप में दी जाती है। बैंक चेकबुक के लिए ग्राहक से नकद मूल्य प्राप्त करती है नकद न मिलने पर खाते से चेकबुक के मूल्य की धनराशि काट ली जाती है।

## चेक

बैंकों ने अपनी कार्य प्रणाली को सुदृढ़ करने हेतु जमाकर्ताओं को धन निकालने या भुगतान करने हेतु चेक की सुविधा प्रदान की है। चेक एक शर्त रहित आज्ञापत्र है जो सम्बन्धित खाते से रूपये निकालने के लिए काम आता है।

## चेक के प्रकार

- चेक निम्नलिखित तीन प्रकार के होते हैं।
- (i) वाहक चेक या धारक चेक (बियरर चेक)
  - (ii) आदेशित चेक (आर्डर चेक)
  - (iii) रेखांकित चेक (क्रास चेक)

## वाहक चेक

यह चेक जिसके नाम होता है। वह अथवा किसी वाहक के द्वारा उस पर लिखी धनराशि को बैंक से प्राप्त कर सकता है। चेक पर खातेदार का हस्ताक्षर आवश्यक है।

## आदेशिक चेक

इस प्रकार के चेक का भुगतान बैंक मात्र उसी व्यक्ति को करेगा जिसके नाम चेक काटा गया है।

## रेखांकित चेक

जब चेक के बाँये कोने पर दो तिरछी समान्तर रेखाएँ खींचकर उनके मध्य & Co., Not-Negotiable अथवा A/c Payee Only लिख देते हैं, ऐसे चेक को रेखांकित चेक कहते हैं। A/c Payee Only Not-Negotiable लिखे चेक का भुगतान चेक धारक अपने खाते में ही जमा करके प्राप्त कर सकता है किन्तु & Co वाला क्रास चेक दूसरे के चालू खाते में भी जमा करके प्राप्त किया जा सकता है।

**बचत खातों की पास बुक में प्रविष्टियों के आधार पर ब्याज की गणना**

बचत खाते में ब्याज का परिकलन वर्ष में दो बार प्रायः मार्च और सितम्बर में किया जाता है। बैंक किसी माह का ब्याज खाताधारक के द्वारा जमा धनराशि पर उस माह की 10 तारीख और अन्तिम तारीख के बीच न्यूनतम धनराशि पर देता है। वर्तमान में बचत खातों पर 3.5% वार्षिक की दर से ब्याज दिया जाता है। परन्तु रिजर्व बैंक आफ इण्डिया द्वारा देय ब्याज दरों में समय-समय पर संशोधन किया जाता रहता है। बचत खाते की सुविधा डाकघर में भी होती है।

**इसे भी जाने**

आप भी, अपने प्रधानाचार्य से परामर्श करें, विद्यालय स्तर पर छात्रों का एक सहकारी बैंक स्थापित करने के लिए आग्रह करें, इससे परस्पर सहयोग की भावना का उदय होगा, बैंकिंग सीखने का अवसर सुलभ हो जाएगा।

**टिप्पणी—**समीप के बैंक में जाकर खातों के प्रकार, खातों को खोलने, धन जमा करने, धन निकालने की प्रक्रिया तथा विभिन्न प्रकार के प्रपत्रों की जानकारी प्राप्त करें।

## मूल्यांकन

- (1) बैंक के क्या-क्या कार्य हैं?
- (2) बैंक में खाता कैसे खोलते हैं?
- (3) बैंक से धन कैसे निकाला जाता है?
- (4) बैंक में कितने प्रकार के खाते खोले जा सकते हैं?
- (5) चेक कितने प्रकार के होते हैं?
- (6) नीचे दिये गये खातों में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
  - (a) बचत खाता एवं चालू खाता
  - (b) सावधि जमा खाता एवं आवर्ती संचयी जमा खाता।

## इकाई-8

### लघुगणक की जानकारी घातांक से लघुगणक तथा इसका विलोम

इस इकाई को पढ़ने से आपको निम्नलिखित की जानकारी होगी—

- (1) लघुगणक का अर्थ
- (2) घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करना।
- (3) आधार 10 पर सामान्य लघुगणक
- (4) पूर्णांश एवं अपूर्णांश
- (5) प्रतिलघुगणक का अर्थ।
- (6) लघुगणकों के नियम

### लघुगणक का अर्थ

शिक्षक शिक्षार्थियों से निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति करायें—

घातांक $n$ के रूप में	$2^n$	$3^n$	$4^n$	$5^n$	$8^n$	$10^n$	$11^n$	$2^n$	$3^n$
संख्या	8	81	16	125	64	10000	11	3	6
$n$ का मान	3	4	—	—	—	—	—	—	—

यहाँ,  $4^n = 16$ ,  $5^n = 125$ ,  $8^n = 64$ ,  $10^n = 10000$ ,  $11^n = 11$  आदि में प्रत्येक दशा में  $n$  का मान शिक्षार्थी ज्ञात कर लेते हैं, किन्तु  $2^n = 3$  या  $3^n = 6$  में  $n$  का मान सरलता से ज्ञात नहीं होता है, क्योंकि यहाँ  $n$  कोई पूर्ण संख्या नहीं है।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

$2^n = 3$  या  $3^n = 6$  में  $n$  का मान लघुगणक के रूप में लिखकर प्राप्त कर सकते हैं।

यथा  $n = \log_2 3$  या  $n = \log_3 6$

एक धनात्मक वास्तविक संख्या  $a, (a \neq 1)$  के लिए अगर  $a^m = b$  हो, तो  $\log_a b = m$ .

यहाँ, आधार  $a$  पर  $b$  का लघुगणक (logarithm)  $m$  है।  $\log$  (लॉग) लघुगणक के अंग्रेजी शब्द logarithm का संक्षिप्त रूप है।

$$a^m = b \Leftrightarrow \log_a b = m$$

**नोट :**

1.  $\log$  में ‘एल’ को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षर से लिखते हैं।
2. आधार  $a$  को  $b$  की अपेक्षा छोटा तथा नीचे लिखते हैं।

शिक्षार्थियों को लघुगणक के अर्थ का बोध निम्नांकित रूप में करायें—

किसी दिए हुए आधार पर किसी संख्या का लघुगणक, आधार का वह घातांक होता है, जिसे आधार पर लगाने से वह संख्या प्राप्त की जा सकती है।

उदाहरण  $\log_2 8 = ?$

चूँकि  $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

$\log_2 8 = 3$

इसी प्रकार  $\log_3 81 = 4$  क्योंकि  $3^4 = 81$ ;  $4^2 = 16 \Leftrightarrow \log_4 16 = 2$

शिक्षार्थियों से  $5^2 = 25$  को लघुगणक रूप में व्यक्त करायें।

## घात के लघुगणक को घात में व्यक्त करना

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि  $2^4 = 16$  घातांकीय रूप है, जिसे लघुगणक के रूप में  $\log_2 16 = 4$  लिखते हैं।

पुनः बोध करायें कि, लघुगणक रूप  $\log_2 16 = 4$  को घातांकीय रूप  $2^4 = 16$  में व्यक्त किया जा सकता है।

शिक्षार्थियों को निम्नांकित सारणी का अवलोकन करायें—

लघुगणकीय रूप	घातांकीय रूप
$\log_6 36 = 2$	$6^2 = 36$
$\log_5 125 = 3$	$5^3 = 125$
$\log_{10} 10000 = 4$	$10^4 = 10000$
$\log_{10} 0.01 = -2$	$10^{-2} = 0.01$
$\log_{10} 1 = 0$	$10^0 = 1$

निम्नांकित उदाहरणों द्वारा बोध करायें।

$$\log_2 8 = 3, \text{ क्योंकि } 2^3 = 8$$

$$\log_2 64 = 6, \text{ क्योंकि } 2^6 = 64$$

$$\log_3 9 = 2, \text{ क्योंकि } 3^2 = 9$$

$$\log_3 81 = 4, \text{ क्योंकि } 3^4 = 81$$

$$\log_7 1 = 0, \text{ क्योंकि } 7^0 = 1$$

यहाँ हम देखते हैं कि लघुगणक एक दूसरे रूप में लिखा हुआ घातांक है। आधार दोनों स्थितियों में समान रहता है।

उक्त सारणी तथा उदाहरण से—

$$\log_{10} 1 = 0, \text{ तथा } \log_7 1 = 0$$

इसके आधार पर शिक्षार्थियों को बोध करायें कि किसी भी धनात्मक आधार (1 को छोड़कर) पर 1 का लघुगणक सदैव ‘शून्य’ होता है। शिक्षक विद्यार्थियों को इस बात का अहसास करायें कि आधार में हम संख्या 1 को क्यों नहीं लेते हैं।

$$\log_a 1 = 0, \text{ जहाँ } (a \neq 1)$$

नोट :  $\log_1 1$  अपरिभाषित है।

## आधार 10 पर सामान्य लघुगणक

शिक्षार्थी भिज्ञ है कि हमारी संख्या पद्धति ‘दाशमिक’ है।

इसलिए आधार 10 पर लघुगणकों का प्रयोग सुविधाजनक है।

शिक्षार्थियों से 10 के निम्नांकित घातांकीय रूप से लघुगणकीय रूप व्यक्त कराये जाये।

घातांकीय रूप	लघुगणकीय रूप
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
$10^3 = 1000$	$\log_{10} 1000 = 3$
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$10^{-1} = 0.1$	$\log_{10} 0.1 = -1$
$10^{-2} = 0.01$	$\log_{10} 0.01 = -2$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 10 की पूर्णांक घातांक की संख्या का लघुगणक ज्ञात करना आसान है। किन्तु ऐसी संख्याएँ जो 10 की पूर्णांक घातांक के रूप में न हों, उनका लघुगणक ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

लघुगणक सारणी की सहायता से दशमलव में व्यक्त किसी भी संख्या का लघुगणक ज्ञात किया जा सकता है।

इस हेतु दशमलव संख्या को एक 'मानक रूप' में लिखते हैं।

यथा

$$37.3 \text{ को } 3.73 \times 10^1$$

$$413.7 \text{ को } 4.137 \times 10^2$$

$$0.125 \text{ को } 1.25 \times 10^{-1}$$

$$0.072 \text{ को } 7.2 \times 10^{-2}$$

'मानक रूप' की संख्या में केवल एक अंक पूर्णांक होता है।

इस हेतु दशमलव चिह्न को बाएँ या दाएँ हटाना पड़ता है।

दशमलव बिन्दु को जितने स्थान बाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 413.7 का मानक रूप  $4.137 \times 10^2$ ।

दशमलव बिन्दुओं को जितने स्थान दाएँ हटाते हैं, 10 की उतनी ऋणात्मक घात से प्राप्त संख्या में गुणा करते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से 0.072 का मानक रूप  $7.2 \times 10^{-2}$ ।

## पूर्णांक (Characteristics) एवं अपूर्णांश (Mantissa)

शिक्षार्थियों को निम्नांकित घातांकीय रूप तथा उनके लघुगणकीय रूप का अवलोकन करायें।

$$10^0 = 1 \Leftrightarrow \log_{10} 1 = 0$$

$$10^1 = 10 \Leftrightarrow \log_{10} 10 = 1$$

$$10^2 = 100 \Leftrightarrow \log_{10} 100 = 2$$

$$10^3 = 1000 \Leftrightarrow \log_{10} 1000 = 3$$

$$10^{-1} = 0.1 \Leftrightarrow \log_{10} 0.1 = -1$$

## शिक्षार्थियों को बोध करायें कि

10 तथा 100 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 1 तथा 2 के बीच की संख्या होगी। अर्थात् 1 + एक दशमलव संख्या

इसी प्रकार 100 और 1000 के बीच की संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक 2 तथा 3 के बीच की संख्या होगी। अर्थात् 2 + एक दशमलव संख्या।

तथा 0.1 एवं 1 के बीच एक संख्या का (आधार 10 पर) लघुगणक -1 तथा 0 के बीच की संख्या होगा। अर्थात् -1 + एक दशमलव संख्या।

शिक्षार्थियों से ज्ञात करायें 1 तथा 10 के बीच की किसी संख्या का लघुगणक (आधार 10 पर) 0 और 1 के बीच की संख्या होगी अर्थात् 0 + एक दशमलव संख्या।

अतः एक संख्या के लघुगणक के दो भाग होते हैं। इसमें एक पूर्णांक भाग जिसे पूर्णांश (characteristics) कहते हैं।

दूसरा भिन्नात्मक भाग जो धनात्मक होता है। इसे अपूर्णांश (*mantissa*) कहते हैं।

**नोट :**

1. पूर्णांश धनात्मक, शून्य याऋणात्मक हो सकता है, किन्तु अपूर्णांश सदैव धनात्मक लिया जाता है।
2. संख्याओं का लघुगणक आधार 10 पर ज्ञात किया गया है, अतः जहाँ लघुगणक में आधार नहीं लिखा हो तो आधार 10 ही मानते हैं। सुविधा के लिए आधार नहीं लिखते हैं।
3. संख्याओं के एक ही क्रम व्यवस्थित विभिन्न संख्याओं के लघुगणक में अपूर्णांक समान होते हैं।

यथा— $\log 741 = 2.8698$

$$\log 74.1 = 1.8698$$

$$\log 7.41 = 0.8698$$

$$\log 0.741 = 1.8698$$

क्योंकि

$$741 = 7.41 \times 10^2$$

$$74.1 = 7.41 \times 10^1$$

$$7.41 = 7.41 \times 10^0$$

$$0.741 = 7.41 \times 10^{-1}$$

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि 1 से छोटी संख्याओं के लघुगणक में पूर्णांश ऋणात्मक होता है कि जबकि अपूर्णांश सदैव धनात्मक होता है ऐसी स्थिति में ऋण चिह्न (-) को पूर्णांक संख्या के ऊपर लिखते हैं जिसे 'बार' पढ़ते हैं।

## संख्याओं का लघुगणक ज्ञात करना

### पूर्णांश ज्ञात करना—

जैसे  $\log(3.754 \times 10^2)$  का जो धारांक होता है, वही उस संख्या के लघुगणक का पूर्णांश होगा।

$$\text{जैसे } \log(3.754 \times 10^2) \text{ में पूर्णांश} = 2$$

$$\log(1.25 \times 10^{-1}) \text{ में पूर्णांश} = -1$$

### अपूर्णांश ज्ञात करना—

अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु लघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

शिक्षार्थियों से पुस्तक में छपी लघुगणक सारणी को ध्यान से देखने को कहें। उन्हें बतायें कि—

#### भाग-1

- इस सारणी के प्रथम स्तम्भ में 10 से 99 तक दो अंकों वाली संख्या है जो पंक्ति निर्धारित करती है।
- बाद के प्रत्येक स्तम्भ के ऊपरी भाग पर 0 से 9 तक एक अंकीय संख्या है। इससे दायीं ओर औसत अन्तर (*Mean differences*) का खण्ड है, जिसमें 1 से 9 तक के स्तम्भ हैं।
- किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने हेतु संख्या के प्रथम दो अंकों (जिसमें पहला अंक शून्य न हो) की पंक्ति देखते हैं। इस पंक्ति में तीसरे अंक वाले स्तम्भ से संख्या लिख लेते हैं। इस संख्या में चौथे अंक के औसत अन्तर स्तम्भ से प्राप्त संख्या का योग अपूर्णांश होता है।

उदाहरण : लघुगणक सारणी की सहायता से 45.32 का लघुगणक ज्ञात करना।

हल : 45.32 का मान रूप  $4.532 \times 10^1$

$$\log_{10} 45.32 \text{ का पूर्णांश} = 1$$

लघुगणक सारणी की सहायता से 45 की पंक्ति का स्तम्भ 3 पर अंकितसंख्या = 6561

औसत अन्तर स्तम्भ 2 से संख्या = 2

योगफल  $6561 + 2 = 6563$

अपूर्णांश = .6563

अतः  $\log 45.32 = 1.6563$

**नोट :**

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि यदि किसी संख्या में केवल एक अंक हो तो इसे तीन अंकों तक लिख लेते हैं। यथा 2 को 2.00।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि अपूर्णांश ज्ञात करने में संख्या के केवल चार अंकों का ही प्रयोग होता है। अधिक अंक होने पर संख्या का चौथे अंक तक निकटतम मान ज्ञात करते हैं।

जैसे 1.1368 को 1.137 तथा 1.1362 को 1.136।

शिक्षार्थियों को बोध करायें कि लघुगणक सारणी में 10 से 19 की पंक्ति में औसत अन्तर स्तम्भ में दो-दो पंक्ति दी गयी हैं। तीसरे स्थान के अंक 0 से 4 तक के स्तम्भ में संख्याओं को पंक्ति से कुछ ऊपर लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ में ऊपर वाली संख्या ली जायेगी।

किन्तु 5 से 9 तक के स्तम्भ में संख्याओं को नीचे लिखा गया है। इसलिए आवश्यकता पड़ने पर औसत अन्तर के स्तम्भ से नीचे वाली संख्या जोड़ने हेतु ली जायेगी।

## **प्रतिलघुगणक (Antilogarithms)**

यदि  $\log x = y$  तो  $x$  को  $y$  का प्रतिलघुगणक कहते हैं। पुस्तक में दी गयी प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग लघुगणक सारणी की तरह करते हैं। प्रतिलघुगणक सारणी में पहले स्तम्भ की संख्या में दशलमलव चिह्न लगा हुआ है और संख्याएँ .00 से .99 तक की पंक्तियाँ दी गयी हैं।

यदि  $\log n = 2.4571$  तो संख्या  $n$  ज्ञात करना।

शिक्षार्थी  $n$  ज्ञात होने पर  $\log n$  ज्ञात करना सीख चुके हैं। अब उन्हें बोध कराये कि  $\log n$  ज्ञात हो तो  $n$  ज्ञात करने के लिए प्रतिलघुगणक (Antilog) ज्ञात करते हैं। इसके लिए प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग करते हैं।

**शिक्षार्थियों को बोध करायें कि,**

किसी संख्या के लघुगणक में अपूर्णांश उस संख्या के अंकों के क्रम पर निर्भर करता है, अतः अपूर्णांश की सहायता से पहले संख्या के अंकों को क्रम में ज्ञात कर लेते हैं। पूर्णांश के आधार पर दशलमलव चिह्न लगा कर पूर्णांकों की संख्या निर्धारित करते हैं।

इसमें  $\log n$  का अपूर्णांश = .4571

प्रति लघुगणक सारणी से .45 की पंक्ति के सामने स्तम्भ 7

की संख्या = 2864, औसत अन्तर के स्तम्भ 1 की संख्या = 1

योगफल = 2864 + 1 = 2565

$\log n$  का पूर्णांश = 2

चूंकि लघुगणक की गणना के दौरान, संख्याओं के मानक रूप में दशमलव का स्थान एक अंक के बाद से शुरू होता है,

इसलिए 2865 में पूर्णांक भाग के  $2 + 1 = 3$  अंक होंगे।

अतः  $n = 286.5$

संक्षेप में, यदि  $\log n = 2.4571$  तो

$n = \text{Antilog } 2.4571 = 286.5$

शिक्षार्थियों को प्रतिलघुगणक सारणी के प्रयोग का अभ्यास कराया जाय। उन्हें सचेष्ट करें कि लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी देखने में में सावधानी रखें।

## लघुगणकों के नियम (Law of Logarithms)

शिक्षार्थी घातांकों के नियम से परिचित हैं। लघुगणक घातों को व्यक्त करने का दूसरा ढंग है। अतः घातांकों का नियम लघुगणकों में लागू होते हैं।

### प्रथम नियम

यदि  $a^x = m$  तो  $\log_a m = x$

पुनः  $a^y = n$  तो  $\log_a n = y$

$$a^x \times a^y = m \cdot n \quad (m, n \text{ धन पूर्णांक})$$

पुनः घातांक नियम (1) से

$$a^x \times a^y = a^{x+y} = m \cdot n$$

लघुगणक के रूप में  $\log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n$  (का मान रखने पर)

अतः  $\log_a mn = \log_a m + \log_a n$

शिक्षार्थियों से निष्कर्ष निकलवाएँ कि

$$\log_a mnp = \log_a m + \log_a n + \log_a p$$

### द्वितीय नियम

यदि  $a^x = m$  तो  $\log_a m = x$

पुनः  $a^y = n$  तो  $\log_a n = y$

$$\frac{a^x}{a^y} = \frac{m}{n} \quad (\text{जहाँ } m, n \text{ दो धनपूर्णक हैं, तथा } n \neq 0)$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} = \frac{m}{n} \quad (\text{घातांक नियम 2 से})$$

लघुगणक रूप में  $\log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n$  ( $x, y$  का मान रखने पर)

$$\log_a \left( \frac{m}{n} \right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\text{इसी प्रकार } \log_a \left( \frac{m}{np} \right) = \log_a m - \log_a n - \log_a p$$

### तृतीय नियम

$$a^x = m \text{ तो } \log_a m = x$$

$n$  को धनात्मक पूर्ण संख्या हो तो  $(a^x)^n = m^n$  (घातांक नियम 3 से)

लघुगणक रूप में,  $\log_a (m^n) = n \cdot x = n \cdot \log_a m$  ( $x$  का मान रखने पर)

$$\boxed{\log_a (m^n) = n \cdot \log_a m}$$

उदाहरण 1.  $\sqrt{12.35}$  का मान लघुगणक के प्रयोग से ज्ञात करना।

$$\text{हल : माना कि } x = \sqrt{12.35} = (12.35)^{\frac{1}{2}}$$

$$\log x = \frac{1}{2} \log 12.35 \quad (\text{दोनों पक्षों का log लेने पर})$$

$$= \frac{1}{2} \times (1.0917)$$

$$= 0.54584 \sim 0.5459$$

$$= 0.5459 \times 10^0$$

$$x = \text{Antilog } 0.5459 \times 10^0$$

$$= 3.515 \quad (\text{लगभग})$$

**उदाहरण 2.**  $\frac{2.7}{11.3}$  को लघुगणक की सहायता से हल करना।

**हल :** माना कि  $x = \frac{2.7}{11.3}$

$$\begin{array}{rcl}
 \log x & = & \log 2.7 - \log 11.3 \\
 & = & 0.4314 - 1.0531 \\
 & = & -0.6217 \\
 & = & -1 + (1 - .6217) \\
 & = & \overline{1.3783} \\
 & & \begin{array}{l} 0.4314 \\ - 1.0531 \\ \hline \overline{1.3783} \end{array}
 \end{array}$$

घटाने की दूसरी विधि

$$\begin{aligned}
 x & = \text{Antilog } \overline{1.3783} \\
 & = 0.2390
 \end{aligned}$$

**उदाहरण 3.**  $\frac{2 \times 3 \times 5}{7}$  का मान लघुगणक द्वारा ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल : } \log \frac{2 \times 3 \times 5}{7} & = \log 2 + \log 3 + \log 5 - \log 7 \\
 & = 0.3010 + 0.4771 + 0.6990 - 0.8451 \\
 & = 1.4771 - 0.8451 \\
 & = 0.6320 = 0.6320 \times 10^0 \\
 \frac{2 \times 3 \times 5}{7} & = \text{Antilog } 0.6320 \times 10^0 \\
 & = 4.285
 \end{aligned}$$

## मूल्यांकन

- निम्नांकित को लघुगणक के रूप में लिखिए—
  - $5^4 = 625$
  - $10^3 = 1000$
  - $4^{-2} = \frac{1}{16}$
  - $10^{-2} = 0.01$
- निम्नांकित को घातांक रूप में लिखिए—

$$(i) \log_2 64 = 6$$

$$(ii) \log_2 25 = 2$$

$$(iii) \log \frac{1}{27} = -3$$

$$(iv) \log_{10}(0.001) = 3$$

### 3. लघुगणक ज्ञात कीजिए—

(अ) 64 का आधार 8 पर

(ब) 0.1 का आधार 10 पर

(स)  $\frac{1}{216}$  का आधार 6 पर

(ट) २७ का आधार ३ पर

4. निम्नलिखित में प्रत्येक संख्या को मानक रूप में लिखिए—

(अ) 32.75

(b) 427.2

(स) 0.0254

(d) 0.357

## 5. निम्नांकित का पूर्णांश ज्ञात कीजिए—

$$(i) \log 37.35$$

(ii)  $\log 4176.2$

(iii) log 0.012

(iv)  $\log 0.0057$

6. लघुगणक सारणी की सहायता से  $\log 23.35$  का अपर्णश ज्ञात कीजिए।

7.  $\log 30$  का मान  $\log 2, \log 3, \log 5$  द्वारा व्यक्त कीजिए।

$$8. \quad \text{सिद्ध कीजिए} — \log \frac{25}{24} = 2 \log 5 - 3 \log 7 - \log 3$$

$$9. \quad \text{सिद्ध कीजिए} — \log(2 + 3 + 4) = 2\log 3.$$

10. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर  $3.756$  का घनमूल ज्ञात कीजिए।

11. लघुगणक एवं प्रतिलघुगणक सारणी का प्रयोग कर निम्नांकित का मान ज्ञात कीजिए—

$$\frac{3.75 \times 0.416}{2.75 \times 0.02 \times 9.07}$$

12. लघुगणक की सहायता से 10 का घनमूल ज्ञात कीजिए—

## लघुगणकीय सारणियों का अनुप्रयोग

### लघुगणकीय सारणियों का प्रयोग कर अभिकलन

#### चक्रवृद्धि ब्याज

शिक्षार्थी जानते हैं कि ऋण लेने पर, ऋण देने वाली संस्था ब्याज पर भी ब्याज लेती है जिसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

इसको निम्नांकित सूत्र की सहायता से ज्ञात करते हैं—

$$A = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n$$

जहाँ  $A$  = मिश्रधन,  $P$  = मूलधन,  $r$  = दर,  $n$  = समय,

चक्रवृद्धि ब्याज  $A - P$

नोट :—ब्याज छमाही देय होने पर  $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{2}$  तथा  $n = 2$  वर्ष (छमाही)

ब्याज तिमाही देय होने पर  $r = \frac{\text{वार्षिक दर}}{4}$  तथा  $n = 4$  वर्ष (तिमाही)

$n$  का मान 2 से अधिक अथवा भिन्न में होने पर लघुगणक के प्रयोग से अभिकलन सरल हो जाता है।

**उदाहरण 1.** 4500 का 10.5 वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 5 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल :  $A = P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n$

यहाँ पर  $P = 4500$ ,  $r = 10.5$ ,  $n = 5$

$$\begin{aligned} A &= 4500 \left( 1 + \frac{10.5}{100} \right)^5 \\ &= 4500 (1.105)^5 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log A &= \log 4500 + 5 \log 1.105 \\
 &= 3.6532 + 5 \times (0.0434) && (\text{लघुगणक सारणी से}) \\
 &= 3.6532 + 0.2170 \\
 &= 3.8702 \\
 A &= \text{Antilog } (3.8702) && (\text{प्रति लघुगणक सारणी से}) \\
 &= 7416
 \end{aligned}$$

चक्रवृद्धि ब्याज =  $A - P = 7416 - 4500 = 2916$

अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज =  $\sqrt[5]{2916}$  (लगभग)

**उदाहरण 2.** कितने समय में कोई धन 10% चक्रवृद्धि ब्याज की दर से अपने से दो गुना हो जायेगा?

(दिया है  $\log 2 = 0.3010$ ,  $\log 11 = 1.0414$ )

**हल :** माना कि धन =  $P$  तो मिश्रधन  $A = 2P$ ,  $r = 10$ ,  $n = ?$

$$\begin{aligned}
 A &= P \left( 1 + \frac{r}{100} \right)^n \\
 2P &= P \left( 1 + \frac{10}{100} \right)^n \\
 2 &= \left( \frac{11}{10} \right)^n
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का  $\log$  लेने पर

$$\log 2 = n(\log 11 - \log 10)$$

$$0.3010 = n(1.0414 - 1)$$

$$0.3010 = n \times 0.0414$$

$$n = \frac{0.3010}{0.0414} = \frac{3010}{414}$$

$$= 7.27 \text{ वर्ष} \quad (\text{लगभग})$$

## जनसंख्या वृद्धि (Population Growth)

यदि किसी नगर की जनसंख्या किसी निश्चित प्रतिशत दर से बढ़ रही है, तो निश्चित समय ( $n$ ) के पश्चात् नगर की जनसंख्या निम्न सूत्र से ज्ञात की जाती है :

$$n \text{ वर्ष बाद जनसंख्या} = \text{वर्तमान जनसंख्या} \left(1 + \frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^n$$

**उदाहरण**—एक गाँव की जनसंख्या इस समय 4000 है। उस गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 2.2% बढ़ रही है। 5 वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या कितनी हो जायेगी?

$$\text{हल: } n \text{ वर्ष बाद जनसंख्या} = \text{वर्तमान समय} \left(1 + \frac{\text{वृद्धिदर}}{100}\right)^n$$

यहाँ  $n = 5$  वर्तमान, जनसंख्या = 4000 वृद्धि पर = 2.2

माना कि 5 वर्ष बाद उस गाँव की जनसंख्या =  $x$

$$\begin{aligned} x &= 4000 \left(1 + \frac{2.2}{100}\right)^5 \\ &= 4000 (1 + 0.022)^5 \\ &= 4000 (1.022)^5 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर—

$$\log x = \log 4000 + 5 \log 1.022$$

$$= 3.6021 + 5 \times 0.0095 \text{ (लघुगणक सारणी के प्रयोग से)}$$

$$= 3.6021 + 0.0475$$

$$= 3.6496$$

$$x = \text{Antilog } 3.6496$$

$$= 4463 \text{ (लगभग) (प्रतिलघुगणक सारणी से)}$$

$$5 \text{ वर्ष बाद गाँव की जनसंख्या} = 4463 \text{ (लगभग)}$$

**नोट :** यदि जनसंख्या घट रही हो तो—

$$n \text{ वर्ष बाद जनसंख्या} = \text{वर्तमान जनसंख्या} \left(1 - \frac{\text{कमी दर}}{100}\right)^n$$

## वस्तुओं का मूल्य ह्रास (Depreciation of value)

पुरानी वस्तुओं अथवा मशीनों के मूल्य समय के साथ-साथ घटता रहता है। समय के साथ मूल्य में आने वाली यह कमी मूल्य ह्रास कहलाती है। इसे अवमूल्यन भी कहते हैं।

यदि वस्तु का प्रारम्भिक मूल्य  $v_0$ , मूल्य ह्रास की दर =  $r\%$  वार्षिक  $t$  वर्षों के बाद वस्तु का मूल्य  $v_t$

$$v_t = v_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^t$$

**उदाहरण**—एक मोटर साइकिल का मूल्य ` 60,000 है। इसके मूल्य में प्रतिवर्ष 5% अवमूल्यन हो रहा है। 5 वर्ष बाद इस मोटर साइकिल का मूल्य ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल} : \quad v_t = v_0 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^t$$

जहाँ  $v_0 = 60,000$ ,  $t = 5$ ,  $r = 5$

$$\begin{aligned} v_t &= 60000 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^5 \\ &= 60,000 (1 - 0.05)^5 \\ &= 60,000 (0.95)^5 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log v_t = \log 60,000 + 5 \log (0.95) \quad (\text{लघु सारणी के प्रयोग से})$$

$$\begin{aligned} &= 4.7782 + 5 \times (-0.05) \\ &= 4.7782 + (-0.25) \\ &= 4.6667 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\{5 \times (-0.05) = 5 \times (-1) + 5 \times 0.95 \\ &= -5 + 4.7782 = -0.25\} \end{aligned}$$

$$v_t = \text{Antilog } 4.6667$$

$$= ` 46410 \text{ (लगभग)}$$

5 वर्ष बाद उस मोटर साइकिल का मूल्य = ` 46410

## क्षेत्रमिति (Mensuration)

शिक्षक इस बात की सुनिश्चित करें कि छात्रों को क्षेत्रफल की समझ है।

### आयत का क्षेत्रफल

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

$$= l.b$$

जहाँ  $l$  = लम्बाई,  $b$  = चौड़ाई

$$\begin{aligned}\text{आयत का विकर्ण} &= \sqrt{(\text{ल.})^2 + (\text{चौ.})^2} \\ &= \sqrt{l^2 + b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{आयत का परिमाप} &= (\text{ल.} + \text{चौ.}) \\ &= (l + b)\end{aligned}$$

**उदाहरण**—एक आयताकार बाग का क्षेत्रफल 1.4 हेक्टेअर हैं। इसकी भुजाओं में 5 : 4 का अनुपात है। बाग का परिमाप ज्ञात कीजिए।

हल : बाग की लम्बाई एवं चौड़ाई में अनुपात = 5 : 4

माना कि बाग की लम्बाई =  $5x$  मी. तथा चौड़ाई =  $4x$  मी.

आयताकार बाग का क्षेत्रफल = ल.  $\times$  चौ.

$$\begin{aligned}&= 5x \times 4x \text{ वर्ग मीटर} \\ &= 20x^2 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

बाग का क्षे. = 1.4 हेक्टेअर =  $1.4 \times 10000$  वर्ग मी.

$$= 14000 \text{ वर्ग मी.}$$

$$20x^2 = 14000$$

$$x^2 = \frac{14000}{20} = 700$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$2 \log x = \log 700$$

$$= 2.8451$$

(लघुगणक सारणी से)

$$\log x = 1.42255 \approx 1.4226$$

$$x = \text{Antilog } 1.4226$$

$$= 26.46 \text{ (प्रतिलघुगणक सारणी से)}$$

$$\text{बाग की ल.} = 5x = 5 \times 26.46 = 132.30 \text{ मी. (लगभग)}$$

$$\text{बाग की चौ.} = 4x = 4 \times 26.46 = 105.83 \text{ मी. (लगभग)}$$

$$\text{बाग का परिमाप} = 2 (\text{ल.} + \text{चौ.})$$

$$= 2 (132.30 + 105.84) \text{ मी.}$$

$$= 2 \times 238.14 \text{ मी.}$$

$$= 476.28 \text{ मी. (लगभग)}$$

## वर्ग का क्षेत्रफल

शिक्षार्थी पढ़ चुके हैं कि—

$$\text{वर्ग का क्षेत्रफल} = (\text{भुजा})^2$$

$$= a^2$$

(जहाँ  $a$  वर्ग की भुजा है।)

$$\text{वर्ग का विकर्ण} = a\sqrt{2}$$

$$\text{वर्ग का परिमाप} = 4a$$

**उदाहरण**—एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1753 वर्ग मीटर है। मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।

**हल :** वर्ग का क्षे. =  $a^2$  जहाँ  $a$  वर्ग की भुजा है।

$$a^2 = 1753$$

$$a = \frac{1}{(1753)^2}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\log a = \frac{1}{2} \log 1753$$

$$= \frac{1}{2} \times 3.2438$$

(लघुगणक सारणी से)

$$= 1.6219$$

$$\text{अतः } a = 41.87$$

(प्रतिलघुगणक सारणी से)

$$\text{मैदान का परिमाप} = 4 \times a = 4 \times 41.87 \text{ मी.}$$

$$= 167.48 \text{ मी. (लगभग)}$$

## त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} a h$$

$$\text{समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{भुजा}^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल (जब तीनों भुजाओं की माप दी हो)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{जहाँ } S = \frac{a+b+c}{2}$$

**उदाहरण 1.** एक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा की माप 7 सेमी. हो।

**हल :** समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल  $A = \frac{\sqrt{3} \times a^2}{4}$  जहाँ  $a = 7$  सेमी.

$$A = \frac{\sqrt{3} \times 7^2}{4} = \frac{(3)^{1/2} \times 7^2}{4}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}\log A &= \frac{1}{2} \log 3 + 2 \log 7 - \log 4 \\&= \frac{1}{2} \times 0.4771 + 2 \times 0.8451 - 0.6021 \\&= 0.23855 + 1.6902 - 0.6021 \\&= 0.23855 + 1.0881 \quad (0.23855 \sim 0.2386) \\&= 1.32665 = 1.3267 \\A &= \text{Antilog } 1.3267 \\&= 21.21 \text{ सेमी.}^2\end{aligned}$$

**उदाहरण 2.** एक त्रिभुज जिसकी भुजाएँ क्रमशः 6 सेमी., 7 सेमी. व 8 सेमी. लम्बाई है। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

**हल :**  $a = 6$  सेमी.,  $b = 7$  सेमी.,  $c = 8$  सेमी.

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(6+7+8)}{2} = \frac{21}{2} = 10.5 \text{ सेमी.}$$

**त्रिभुज का क्षेत्रफल**

$$\begin{aligned}A &= \frac{\sqrt{3} \times 7^2}{4} = \frac{(3)^{1/2} \times 7^2}{4} \\A &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\&= \sqrt{10.5(10.5-6)(10.5-7)(10.5-8)} \\&= \sqrt{10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5} \\&= (10.5 \times 4.5 \times 3.5 \times 2.5)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log A &= \frac{1}{2}(\log 10.5 + \log 4.5 + \log 3.5 + \log 2.5) \\
 &= \frac{1}{2}(1.0212 + 0.6532 + 0.5441 + 0.3979) \\
 &= \frac{1}{2}(2.6164) = 1.3082 \\
 A &= \text{Antilog } 1.3082 = 20.33 \text{ सेमी.}^2 \text{ (लगभग)}
 \end{aligned}$$

## समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2} \times$  विकर्णों का गुणनफल

$$A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$$

जहाँ  $d_1, d_2$  समचतुर्भुज के विकर्ण हैं।

$$\text{समचतुर्भुज की भुजा} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

**नोट :** समचतुर्भुज का विकर्ण ज्ञात होने पर, क्षेत्रफल की गणना सरलता से की जा सकती है।

**उदाहरण 1.** एक समचतुर्भुज के विकर्णों की माप क्रमशः 163 मी. व 95 मी. है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात करना।

**हल :** समचतुर्भुज का क्षेत्रफल  $A = \frac{1}{2} d_1 \times d_2$

जहाँ  $d_1 = 163$  मी.,  $d_2 = 95$  मी.

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \times 163 \times 95 \\
 &= 0.5 \times 163 \times 95
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log A &= \log 0.5 + \log 163 + \log 95 \\
 &= 1.6990 + 2.2122 + 1.9777 \\
 &= 3.8889 \\
 A &= \text{Antilog } 3.8889 \\
 &= 7743
 \end{aligned}$$

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = 7743 मी<sup>2</sup> (लगभग)

**उदाहरण 2.** एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 25 सेमी. तथा 15 सेमी. माप के हैं। समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात करना।

$$\text{हल : समचतुर्भुज की भुजा} = \sqrt{\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2}$$

जहाँ  $d_1 = 25$  सेमी.  $d_2 = 15$  सेमी.

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\left(\frac{25}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{625}{4} + \frac{225}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{850}{4}} = \left(\frac{50}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\begin{aligned} \log x &= \frac{1}{2}(\log 850 - \log 4) \\ &= \frac{1}{2}(2.9294 - 0.6021) \\ &= \frac{1}{2} \times 2.3273 = 1.16365 \approx 1.1637 \\ x &= \text{Antilog } 1.1637 \\ &= 14.57 \text{ सेमी. (लगभग)} \end{aligned}$$

## समलम्ब चतुर्भुज

समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल =  $\frac{1}{2}$  (समान्तर भुजाओं का योग)  $\times$  उनके बीच की दूरी

**उदाहरण**—एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ क्रमशः 11.7 सेमी. व 18.6 सेमी. माप की हैं। इनके बीच की दूरी 6.5 सेमी. है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2}(\text{समान्तर भुजाओं का योग}) \times \text{उनके बीच की दूरी} \\
 &= \frac{1}{2}(11.7 + 18.6) \times 6.5 \\
 &= \frac{1}{2} \times 30.3 \times 6.5 \\
 &= 0.5 \times 30.3 \times 6.5
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log A &= \log 0.5 + \log 30.3 + \log 6.5 \\
 &= 1.6990 + 1.4814 + 0.8129 \\
 &= 1.9933 \\
 A &= \text{Antilog } 1.9933 \\
 &= 98.47
 \end{aligned}$$

अभीष्ट समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = 98.47 सेमी.<sup>2</sup> (लगभग)

### समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल

समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = एक भुजा की लम्बाई × इस भुजा के समान्तर भुजा से लम्बवत् दूरी।

**उदाहरण**—एक मैदान जो समान्तर चतुर्भुज के आकार का है जिसकी आसन्न भुजाएँ 23 मी. तथा 17 मी. की हैं इसके एक विकर्ण की माप 18 मी. है। छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात करना।

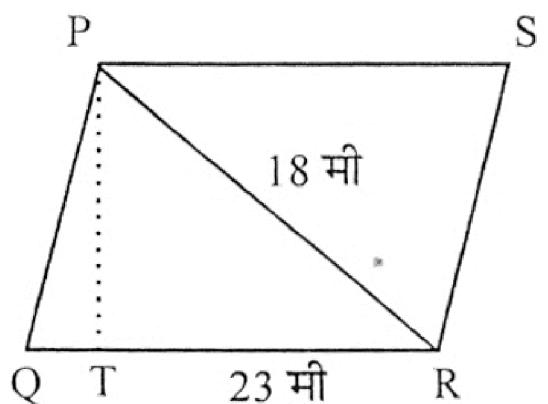
हल :  $\triangle PQR$  का क्षेत्रफल ज्ञात कर  $PT$  ज्ञात किया जायेगा।

$$\Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल } A = \sqrt{s - (s - a)(s - b)(s - c)}$$

$$\begin{aligned}
 \text{जहाँ} \quad s &= \frac{a+b+c}{2} = \frac{23+17+18}{2} \\
 &= \frac{58}{2} = 29
 \end{aligned}$$

$\Delta PQR$  का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned}
 A &= \sqrt{29(29-23)(29-17)(29-18)} \\
 &= \sqrt{29 \times 6 \times 12 \times 11} \\
 &= (29 \times 6 \times 12 \times 11)^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$



दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log A &= \frac{1}{2}(\log 29 + \log 6 + \log 12 + \log 11) \\
 &= \frac{1}{2}(1.4624 + 0.7782 + 1.0792 + 1.0414) \\
 &= \frac{1}{2} \times (4.3612) \\
 &= 2.1806 \\
 A &= \text{Antilog } 2.1806 \\
 &= 151.6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta PQR \text{ का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} \times QR \times PT \\
 PT &= \frac{2 \times \Delta PQR \text{ का क्षे.}}{QR} \\
 h &= \frac{2 \times 151.6}{23} [PT = h]
 \end{aligned}$$

दोनों पक्षों का log लेने पर

$$\begin{aligned}
 \log h &= \log 2 + \log 151.6 - \log 23 \\
 &= 0.3010 + 2.1807 - 1.3617 \\
 &= 2.4817 - 1.3617 \\
 &= 1.1200 \\
 h &= \text{Antilog } 1.1200 \\
 &= 13.18 \text{ सेमी. (लगभग)}
 \end{aligned}$$

शीर्ष लम्ब की लम्बाई = 13.18 मी.

## मूल्यांकन

लघुगणक की सहायता से ज्ञात कीजिए—

1. ` 2300 का 8% वार्षिक ब्याज की दर से 4 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. कितना धन 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 15 वर्षों में ` 3600 हो जायेगा।
3. कितने वर्ष में 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ` 500 का मिश्रधन ₹0 630.50 हो जायेगा?
4. किसी शहर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% बढ़ जाती है। यदि इस समय शहर की जनसंख्या 10000 हो तो 3 वर्ष बाद उस शहर की जनसंख्या कितनी हो जायेगी?
5. एक नगर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से घट रही है। यदि नगर की वर्तमान जनसंख्या 60,000 है तो 2 वर्ष बाद उस नगर की जनसंख्या क्या होगी?

6. एक स्कूटर के मूल्य में प्रतिवर्ष 6% का अवमूल्यन हो रहा है। यदि एक स्कूटर वर्ष 2007 में 35000 में खरीदा गया था, तो वर्ष 2012 में उसका मूल्य कितना होगा?
  7. एक मशीन 15000 में खरीदी गयी। इसका अवमूल्यन (मूल्य का ह्लास) प्रतिवर्ष 8% की दर से हो रहा है, तो 4 वर्ष बाद उस मशीन का मूल्य कितना होगा?
  8. एक आयत की संलग्न भुजाएँ क्रमशः 23.7 सेमी. तथा 16.8 सेमी. भी हैं। आयत का क्षेत्रफल कितना होगा?
  9. एक समबाहु त्रिभुज की भुजा 30.4 सेमी. लम्बी है। इस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए?
  10. एक त्रिभुज की भुजाएँ 20 सेमी., 21 सेमी. और 22 सेमी. की हैं। उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
  11. एक समचतुर्भुज के विकर्ण क्रमशः 21 सेमी. व 30 सेमी. के हैं। उस समचतुर्भुज की भुजा की माप ज्ञात कीजिए।
  12. एक समलम्ब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 11.6 सेमी. और 19.8 सेमी. की हैं। इनके बीच की दूरी 6.2 सेमी. है। इस समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
  13. एक समान्तर चतुर्भुज की आसन्न भुजाओं की माप 31 सेमी. व 23 सेमी. हैं तथा इसके एक विकर्ण की लम्बाई 19 सेमी. है। इसके छोटे शीर्ष लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
-







(77)

## इकाई-9

### शेयर, लाभांश

इस इकाई को पढ़ने से निम्नलिखित की जानकारी होगी।

- शेयर
- लाभांश

### शेयर और लाभांश (Share and Dividend)

जब कोई व्यक्ति कोई व्यापार या उद्योग करने के लिए स्वयं धन एकत्रित नहीं कर पाता है तो वह एक समूह बनाकर एक कंपनी की स्थापना करता है और उस कंपनी को पंजीकृत करा लेता है। इस प्रकार की कंपनी जनता से पूँजी प्राप्त करने के लिए शेयर जारी करके पूँजी प्राप्त करती है।

- कम्पनी में लगाया पूरा धन उसकी पूँजी कहलाता है।
- पूँजी को प्रायः समान मूल्य की इकाइयों में बाँट दिया जाता है, प्रत्येक इकाई को शेयर कहते हैं।

यदि कम्पनी को जनता से एक करोड़ रुपये एकत्रित करना है तो वह गणना की दृष्टि से दस-दस रुपये के शेयरों में बाँट लेती है। इस प्रकार इसके दस लाख शेयर हो जाते हैं। वी हुई शर्तों के अनुसार जनता को विज्ञापन द्वारा कम्पनी में पूँजी लगाने के लिए इन शेयरों को खरीदने के लिए आमंत्रित किया जाता है।

सभी को बांधित संख्या में शेयर आवंटित करने में कठिनाई होती है क्योंकि पूर्व से ही शेयरों की संख्या निश्चित होती है। जिन्हें शेयर आवंटित किए जाते हैं वे शेयर खरीद लेते हैं।

शेयर खरीदने वाला व्यक्ति कम्पनी का शेयरधारी या अंशधारी कहलाता है।

प्रत्येक शेयरधारी को कम्पनी की ओर से एक प्रमाणपत्र दिया जाता है जिसमें उन शेयरों का मूल्य और संख्या लिखी होती है जिसके लिए उसने धन लगाया है।

जिस मूल्य पर एक शेयर कम्पनी द्वारा जारी किया जाता है, उसे सममूल्य या अंकित मूल्य या फेस वैल्यू या पार वैल्यू कहते हैं।

**उदाहरण**—एक कम्पनी नई योजना के लिए 50 लाख रुपये की पूँजी एकित्रित करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है। यदि एक शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये हो, तो कम्पनी द्वारा जारी किए गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : कुल पूँजी जो एकत्रित करनी है = 50 लाख रुपये

एक शेयर का अंकित मूल्य = 100 रुपये

माना जारी किए गये शेयरों की संख्या  $n$  है।

अतः  $n \times 100 = 50,00,000$

$$n = \frac{50,00,000}{100} = 50,000$$

अतः कम्पनी 50,000 शेयर जारी करेगी।

## शेयरों की खरीद एवं बिक्री

अन्य वस्तुओं की भाँति शेयरों को भी खुले बाजार (जिन्हें एक्सचेन्ज कहते हैं) में खरीदा या बेचा जा सकता है।

जिस मूल्य पर शेयर खुले बाजार में खरीदा या बेचा जाता है उसे शेयर का बाजार मूल्य कहते हैं।

जब शेयर का बाजार मूल्य उसके अंकित मूल्य से अधिक हो तो हम कहते हैं कि शेयर अंकित मूल्य से ऊपर या 'अधिमूल्य पर' है।

यदि बाजार मूल्य अंकित मूल्य से कम हो तो हम कह सकते हैं कि शेयर 'अंकित मूल्य से नीचे है या 'बढ़े पर' है।

यदि शेयर का बाजार मूल्य और अंकित मूल्य समान हो तो कहते हैं कि शेयर 'अंकित मूल्य पर' है।

उदाहरण के लिए, यदि किसी शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये है और बाजार मूल्य 108 रुपये है तो शेयर 'अंकित मूल्य के ऊपर' कहा जायेगा परन्तु; यदि इस शेयर का बाजार मूल्य 60 रुपये है तो शेयर 'अंकित मूल्य के नीचे' कहा जायेगा।

## लाभ और लाभांश का वितरण

जब कम्पनी को वर्ष के अन्त में लाभ होता है, तो लाभ का कुछ भाग नयी मशीन खरीदने या टैक्स देने आदि में आरक्षित कर दिया जाता है। शेष लाभ को शेयरधारियों को उनके द्वारा खरीदे गए शेयरों के अनुपात में बाँट दिया जाता है। इस लाभ को लाभांश कहते हैं। लाभांश अंकित मूल्य पर दिया जाता है।

यह लाभांश प्रति शेयर की दर या प्रतिशत की दर से वितरित किया जाता है। जैसे-यदि लाभांश 10 रुपये प्रति शेयर की दर से 100 शेयर के अंशधारी को दिया जाय तो उसे 1000 रुपये का

लाभांश मिलेगा। 25 प्रतिशत लाभ का अर्थ है कि 100 रुपये के अंशधारी को 25 रुपये का लाभांश मिलेगा।

## दलाल और दलाली

शेयर ऐसे व्यक्तियों के माध्यम से खरीदे या बेचे जाते हैं जिनको शेयर बाजार का पूर्ण ज्ञान होता है। इन व्यक्तियों को शेयर दलाल या ब्रोकर कहा जाता है। दलाल लोग अपनी सेवाओं के लिए शेयर बेचने और खरीदने वालों से कुछ कमीशन या फीस लेते हैं। दलालों द्वारा लिए गए कमीशन को दलाली कहते हैं। दलाली को शेयर के बाजार मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं।

## ऋणपत्र

कम्पनियाँ अपने कारोबार को और बढ़ाने के लिए शेयर के स्थान पर ऋणपत्र (**Debentures**) जारी करती है, ये ऋणपत्र आम जनता से, जिनमें शेयरधारी भी सम्मिलित हो सकते हैं, ऋण प्राप्त करने हेतु जारी किये जाते हैं। कम्पनियाँ निश्चित अवधि के लिए ऋण लेती हैं और उस पर निश्चित दर से ऋणपत्र-धारकों को ब्याज अदा करती रहती हैं। जिस निश्चित अवधि के लिए ऋणपत्र जारी होते हैं, वह ऋणपत्रों पर लिखी होती है। ऋण की समयावधि समाप्त होने पर कम्पनियाँ ऋणपत्र धारकों को उनसे लिया गया ऋण वापस कर देती है।

शेयरों की ही भाँति ऋणपत्रों का भी निश्चित (या नियत) मूल्य उसका 'सममूल्य' या 'अंकित मूल्य' कहलाता है। ऋणपत्र भी बेचे या खरीदे जा सकते हैं, अतः इनका भी बाजार मूल्य होता है जो स्थिर नहीं होता और दिन-प्रतिदिन बदलता रहता है। जहाँ तक ब्याज के परिकलन का प्रश्न है, वह ऋणपत्र के सममूल्य पर ही परिकलित किया जाता है, न कि बाजार-मूल्य पर।

शेयर कम्पनी की पूँजी का अंग होता है और कम्पनी इसे वापस नहीं करती है जबकि ऋणपत्र के आधार पर लिया गया ऋण निश्चित अवधि के अंत में कम्पनी द्वारा वापस कर दिया जाता है। जहाँ शेयर धारी कम्पनी का हिस्सेदार (मालिक) होता है, वहीं ऋणपत्र-धारक केवल कम्पनी को ऋण देता है और उसका हिस्सेदार नहीं होता। इसी प्रकार शेयर पर लाभआधारित विभिन्न दरों पर लाभंश दिया जाता है जबकि ऋणपत्र पर पूर्व निर्धारित दर पर ब्याज दिया जाता है, चाहे भले ही कम्पनी घाटे में जा रही हो। ब्याज का परिकलन प्रायः छमाही अथवा वार्षिक किया जाता है।

### इसे भी जानिए

- दलाली शेयर के बाजार मूल्य पर ली या दी जाती है, उसके अंकित मूल्य पर नहीं।
- किसी शेयर के बेचने पर प्राप्त राशि = बाजार मूल्य - दलाली
- किसी शेयर को खरीदने पर खर्च की गई राशि = बाजार मूल्य + दलाली

**उदाहरण** एक क्रेता को 10 रुपये के 200 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा, यदि शेयर का बाजार मूल्य 50 रुपये प्रति शेयर बताये गये हैं? शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था?

हल : शेयर का अंकित मूल्य = 10 रुपये

1 शेयर का बाजार मूल्य = 50 रुपये

## मूल्यांकन

1. पूँजी किसे कहते हैं?
  2. शेयरधारी किसे कहते हैं? शेयर धारक तथा ऋणधारक में क्या अन्तर है?
  3. अंकित मूल्य और बाजार मूल्य में क्या अन्तर है?
  4. शेयर बट्टे पर कब होता है?
  5. लाभांश किसे कहते हैं?
  6. लाभांश शेयर के किस मूल्य पर दिया जाता है?
  7. शेयर दलाल या ब्रोकर किसे कहते हैं?
  8. दलाली शेयर के किस मूल्य पर ली या दी जाती है?
  9. एक कम्पनी 25 लाख रुपये की पूँजी एकत्रित करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है। यदि एक शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये हो तो कम्पनी द्वारा किये गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए।
  10. एक क्रेता को एक शेयर का अंकित मूल्य 10 रुपये और बाजार मूल्य 40 रुपये प्रति शेयर बताया गया हो तो
    - (i) क्रेता को 300 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा?
    - (ii) शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था?
  11. 100 रुपये अंकित मूल्य के 150 शेयर जिनका बाजार मूल्य 300 रुपये प्रति शेयर और दलाली 3% है, खरीदने के लिए कितना धन चाहिए?
-

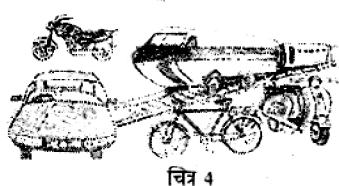
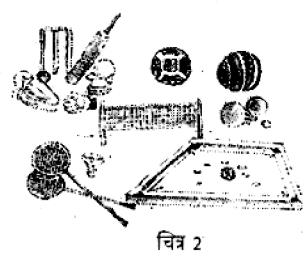
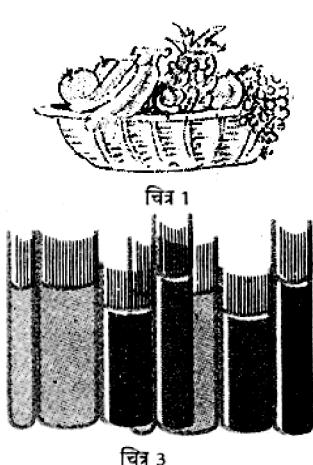
## इकाई-10

### समुच्चय की संकल्पना, लिखने की विधियाँ समुच्चय के प्रकार<sup>(सीमित, असीमित, एकल, रिक्त)</sup> समुच्चयों का संघ, अन्तर तथा सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात करना

इस इकाई को पढ़ने से आपको निम्नलिखित की जानकारी होगी

- समुच्चय की संकल्पना
- लिखने की विधियाँ,
- समुच्चय के प्रकार (सीमित, असीमित, एकल, रिक्त)
- समुच्चयों का संघ
- अन्तर तथा सर्वनिष्ठ ज्ञात करना

समुच्चय को अंग्रेजी भाषा में सेट (Set) कहा जाता है। सेट शब्द को प्रायः हम प्रतिदिन प्रयोग में लाते हैं। टी सेट, सोफा सेट, डिनर सेट, पेन सेट आदि ऐसे संग्रह हैं जिनकी वस्तुओं से हम परिचित हैं। इस प्रकार हम वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह या समूह को सेट के रूप में लेते हैं। प्राकृतिक संख्याओं का समूह, किसी रेखाखंड के बिन्दुओं का समूह, किसी अभ्यास के प्रश्नों का संग्रह आदि ऐसे बहुत से संग्रह हो सकते हैं जिन्हें हम समुच्चय के रूप में लेते हैं। पर समुच्चय एक ऐसा शब्द है जिसकी स्पष्ट परिभाषा देना कठिन है। हम इसे समझ तो सकते हैं पर इसे शब्दों में बाँधना सरल नहीं है।



समुच्चय की अवधारणा सर्वप्रथम जर्मन गणिज़न जार्ज कैन्टर ने सन् 1890 में दी। आज समुच्चय सिद्धान्त का उपयोग गणित की अधिकांश शाखाओं में हो रहा है। हम इस अध्याय में समुच्चयों और उन पर संक्रियाओं का अध्ययन करेंगे।

उपर्युक्त चित्रों को देखिए और बताइए कि इनमें क्या प्रदर्शित हैं?

हम देखते हैं कि चित्र 1 में फलों का समूह है। चित्र 2 में खेल के सामनों का समूह है। चित्र 3 में पुस्तकों का संग्रह है। चित्र 4 में यातायात के साधनों का समूह है।

**इसे भी जाने—**

निम्नांकित सारणी में समूह का नाम एवं प्रदर्शित समूह दिया गया है।

समूह का नाम	प्रदर्शित करता है।
प्रश्नावली	प्रश्नों का समूह
सप्ताह	दिनों का समूह
फूलमाला	फूलों का समूह
पुस्तकालय	पुस्तकों का समूह
क्रिकेट टीम	खिलाड़ियों का समूह
वर्ष	12 महीनों का समूह

निम्नांकित चित्रों को देखिए और बताइए कि ये क्या दर्शाते हैं?

चित्र 5 टाईयों के सेट को प्रदर्शित करता है।

चित्र 6 बर्तनों के सेट को प्रदर्शित करता है।

चित्र 7 शिक्षा सम्बन्धित समानों के सेट को प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि—

समूह, झुण्ड, संग्रह और सेट सभी वस्तुओं के संग्रह का बोध कराते हैं।

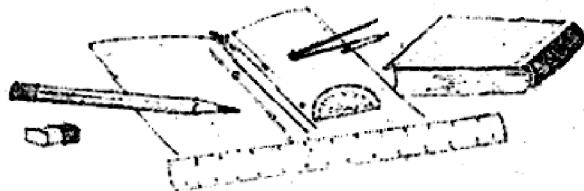
गणित में संग्रह का बोध कराने हेतु समुच्चय (Set) शब्द का प्रयोग करते हैं। परन्तु समूह या संग्रह समुच्चय नहीं होता है।



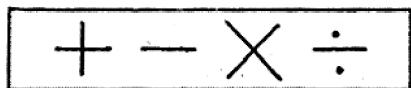
चित्र 5



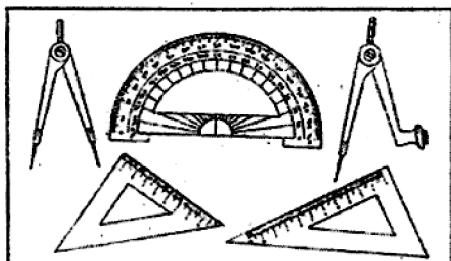
चित्र 6



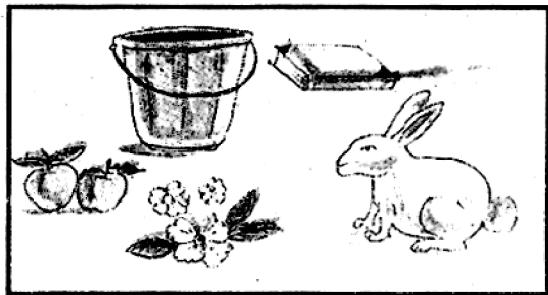
चित्र 7



चित्र 8



चित्र 9



चित्र 10

उपर्युक्त चित्रों को देखिए। क्या विशेषताएँ हैं?

चित्र 8 गणितीय संक्रियाओं के प्रतीकों का समूह है।

चित्र 9 ज्यामितीय उपकरणों का समूह है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि—

प्रत्येक समूह में कुछ विशेषता है, जो समूह की प्रत्येक वस्तु में भी है। ये सभी समुच्चय हैं।

चित्र 10 के समूह में क्या विशेषता है?

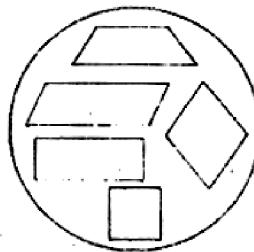
चित्र 10 किताब, फूल, फल, बाल्टी, खरगोश के संग्रह को प्रदर्शित करता है, यह एक समुच्चय नहीं है, क्योंकि संग्रहीत वस्तुओं के गुणों में समानता नहीं है। निम्नांकित चित्रों में चार समुच्चय प्रदर्शित किए गये हैं। बताइए इनमें क्या-क्या वस्तुएँ हैं—



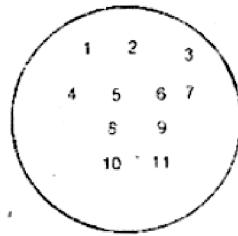
A



B



C



D

समुच्चय A में खेलने के सामान-हाकी, फुटबाल, रैकेट, चिड़िया, बल्ला है।

समुच्चय B में फल - केला, आम, अमरुद, संतरा, खरबूजा हैं।

समुच्चय C में चतुर्भुज - समलम्ब, समान्तर चतुर्भुज, आयत, वर्ग, पतंगाकार चतुर्भुज हैं।

समुच्चय D में संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, हैं।

बताइए कि क्या 'आम' समुच्चय A में सम्मिलित है?

क्या 'आम' समुच्चय C में सम्मिलित है?

हम देखते हैं कि 'आम' समुच्चय B में सम्मिलित है।

इसी प्रकार अंक 10, समुच्चय A या B या C में सम्मिलित नहीं है, लेकिन समुच्चय D में सम्मिलित है।

अतः समुच्चय A,B,C,D में विशेषता यह है कि इसके सदस्य सुपरिभाषित हैं, क्योंकि हम पहचान सकते हैं कि अमुक समुच्चय में कौन-कौन से सदस्य सम्मिलित हैं और कौन नहीं।

विचार कीजिए कि क्या प्रत्येक समूह या संग्रह को समुच्चय कहा जा सकता है?

उदाहरण के लिए पुस्तकालय की उन पुस्तकों के समूह पर विचार कीजिए जो सभी को पढ़ने में अच्छी लगती हैं, क्या यह समूह समुच्चय है?

ऐसी पुस्तकों के समूह का निर्णय करना सरल नहीं है जो पढ़ने में सभी को अच्छी लगें क्योंकि कोई पुस्तक किसी को अच्छी लगती है तो वही पुस्तक दूसरे को अच्छी लगे, यह आवश्यक नहीं है।  
अतः यह समूह समुच्चय नहीं कहा जायेगा।

### प्रयास कीजिए :

बताइए कि निम्नांकित समूहों में से कौन समूह समुच्चय है कौन नहीं?

1. प्रदर्शनी के आकर्षक चित्रों का समूह।
2. 5 से 15 के मध्य की प्राकृतिक संख्याओं का समूह।
3. प्रथम तीन अभाज्य संख्याओं का समूह।
4. बाटिका के सुन्दर फूलों का समूह।

इस प्रकार हम देखते हैं कि

सुस्पष्ट वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। सुपरिभाषित संग्रह से अभिप्राय यह है कि सुनिश्चित होना चाहिए कि कौन सी वस्तु समुच्चय में सम्मिलित है और कौन सी वस्तु नहीं।

यहाँ वस्तु शब्द का प्रयोग व्यापक रूप में किया गया है— संख्याएँ, चित्र, शब्द, अक्षर, चिह्न आदि सभी गणित की दृष्टि में वस्तुएँ हैं।

चित्र में प्रदर्शित समुच्चय F में वस्तुओं के नाम बताइए।

इनका समुच्चय से क्या सम्बन्ध है?

समुच्चय F में आम, केला, अमरुद, तथा सेब है।

आम समुच्चय F का सदस्य है।

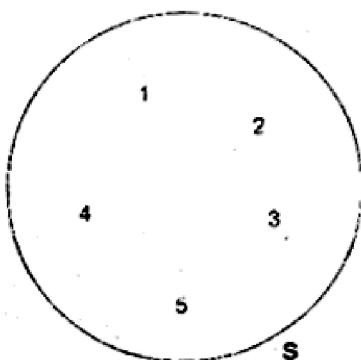
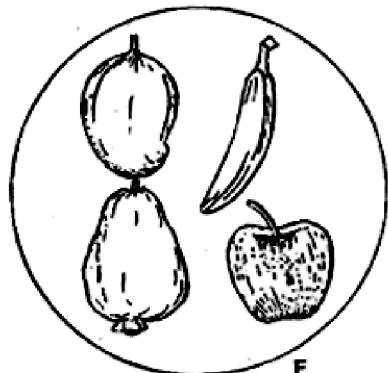
केला समुच्चय F का सदस्य है।

सेब समुच्चय F का सदस्य है।

पाश्व चित्र में प्रदर्शित समुच्चय S के सदस्यों के नाम बताइए।

1, 2, 3, 4, 5 समुच्चय S के सदस्य हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि



उन वस्तुओं को जिनसे समुच्चय बनता है उन्हें समुच्चय के अवयव (element) या सदस्य member कहते हैं।

“समुच्चय का सदस्य है”, इसे ग्रीक भाषा के अक्षर  $\in$  से प्रदर्शित करते हैं। जैसे उपर्युक्त समुच्चय F तथा इसके सदस्यों के सम्बन्ध को निम्नांकित प्रकार भी लिख सकते हैं—

$\in$	$\in$
$\in$	$\in$

उदाहरण में समुच्चय S तथा सदस्य संख्याओं में ∈ संकेतन का प्रयोग कर संबंध बताइएं क्या खरबूजा समुच्चय F का सदस्य है?

खरबूजा समुच्चय F का सदस्य नहीं है, इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं

खरबूजा ∉ समुच्चय F (खरबूजा does not belong to F)

यहाँ संकेतन ∉, ‘सदस्य नहीं है’ को प्रदर्शित करता है।

निम्नांकित को ∈ या ∉ प्रयोग करके लिखिए।

1. 0 समुच्चय S का सदस्य नहीं है।
2. 4 समुच्चय S का सदस्य है।
3. केला समुच्चय F का सदस्य है।
4. अंगूर समुच्चय F का सदस्य नहीं है।

## समुच्चय को प्रदर्शित करने की विधियाँ

1. सतुच्चयों को प्रायः A,B,C,P,Q,R आदि अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े (Capital) अक्षरों से प्रकट करते हैं तथा उनके अवयवों को छोटे (small) अक्षरों a,b,c,d,x,y आदि से प्रकट करते हैं।  
निम्नांकित समुच्चयों को देखिए:

a. एक से आठ तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

b. 2 से छोटी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय

$$B = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$$

c. अंग्रेजी वर्णमाला में स्वरों का समुच्चय

$$C = \{a,e,i,o, u\}$$

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चय A,B और C के सभी अवयव ज्ञात हैं और उनकी सूची बना दी गयी है। इन सब अवयवों को मझाले कोष्ठक के अन्दर लिख दिया गया है और अवयवों को एक दूसरे से पृथक करने के लिए उनके बीच में अल्प विराम लगा दिया गया है।

उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित समुच्चयों को निरूपित कीजिए:

1. एक से दस तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय P
2. 20 से छोटी सभी विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय Q
3. 12 के सभी अपवर्तकों का समुच्चय s

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समुच्चयों के निरूपण की एक प्रमुख विधि ‘सारणीयन विधि’ या ‘सूची विधि’ (Tabular or Listing Method) है। इस विधि द्वारा समुच्चय के समस्त अवयवों की सूची बनाकर मझले कोष्ठक के अन्दर लिख दिया जाता है और अवयवों को पृथक दर्शाने के लिए उनके बीच अल्प विराम लगा दिया जाता है।

## 2. अब निम्नांकित समुच्चयों को लिखिए—

1. 100 से छोटी सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय  $A = \{z : z \text{ एक प्राकृतिक संख्या है। और } z < 100\}$
2. एशिया के सभी देशों की राजधानियों का समुच्चय  $B = \{x : x \text{ एशियाई देशों की राजधानी है}\}$
3. संख्या 4 के सभी अपवर्त्यों का समुच्चय  $C = \{y : y \text{ संख्या 4 का अपवर्त्य है}\}$
4. भारत की लोक सभा के सभी वर्तमान सदस्यों का समुच्चय  $D = \{x : x \text{ भारत की वर्तमान लोक सभा का सदस्य है}\}$

यहाँ हम देखते हैं कि समुच्चयों को निरूपित करने के लिए मझले कोष्ठक के अन्दर एक चर  $x$ ,  $y$  या  $z$  लिख कर उसकी व्याख्या कर दी गयी है।  $x$  या  $y$  या  $z$  के बाद दो बिन्दु (एक के नीचे दूसरा) ‘:’ लगा दिया गया है। ‘ $x:$ ’ का अर्थ है ‘ $x$  इस प्रकार का है कि’। दो बिन्दुओं की जगह पर एक खड़ी रेखा का भी कभी-कभी प्रयोग किया जाता है, यथा  $x' y'$

**इसे भी जानें**

उपर्युक्त की भाँति निम्नलिखित समुच्चयों को लिखिए

1. सभी धनपूर्णांकों का समुच्चय  $P$
2. सभी ऋणपूर्णांकों का समुच्चय  $S$
3. विश्व के सभी देशों की राजधानियों का समुच्चय  $T$

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि समुच्चयों को निरूपित करने की दूसरी विधि **नियम विधि** या **समुच्चय निर्माण विधि** (**Rule Method or Set Builder Method**) है, जिसमें मझले कोष्ठक के अन्दर कोई चर  $x$  या  $y$  लिखकर समस्त अवयवों के उभयनिष्ठ गुण के आधार पर उसकी व्याख्या कर दी जाती है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह भी स्पष्ट है कि अवयवों की संख्या कम होने पर अवयवों को मझले कोष्ठक के अन्दर किसी भी क्रम में लिख दिया जाता है।

यदि अवयवों की संख्या अधिक होती है, तो मझले कोष्ठक के अन्दर कोई व्यापक अवयव लिखकर समस्त अवयवों के उभयनिष्ठ गुण के आधार पर उसकी व्याख्या कर देना सुविधाजनक होता है।

समुच्चय प्रदर्शित करने की दो विधियाँ हैं:

1. सारणीयन विधि या सूची विधि
2. नियम विधि या समुच्चय निर्माण विधि

**उदाहरण**—यदि  $A =$  भारत के प्रथम पाँच प्रधान मंत्रियों के नामों का समुच्चय, तो इसकी सारणी विधि एवं नियम विधि से लिखिए।

**हल :**  $A =$  भारत के प्रथम पाँच प्रधान मंत्रियों के नामों का समुच्चय।

**सारणी विधि:**

$A = \{पं. जवाहर लाल नहेरू, श्री लाल बहादुर शास्त्री, श्रीमती इन्दिरा गांधी, श्री गुलजारी लाल नन्दा, श्री मोरारजी देसाई\}$

**नियम विधि:**

$A = \{x : x \text{ भारत के प्रथम पाँच प्रधानमन्त्रियों में से एक है}\}$

**उदाहरण**— $B = 24$  यदि  $s$  से छोटी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय, तो इसे सारणी एवं नियम विधि से लिखिए।

**हल :** सारणी विधि

$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

**नियम विधि:**

$B = \{x : x \text{ एक अभाज्य संख्या है तथा } x < 24\}$

**उदाहरण**—समुच्चय  $V = \{a, e, i, o, u\}$  का वर्णन कीजिए।

**हल :** समुच्चय  $V$  अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों का समुच्चय है।

**यह भी जानिए:**

1. समुच्चय के सारणीयन विधि के रूप में निरूपित करने में किसी भी अवयव को एक से अधिक बार नहीं लिखते हैं। उदाहरण के लिए committee शब्द के अक्षरों का समुच्चय  $\{c, o, m, i, t, e\}$  है।
2. यदि सदस्य वे ही हों, तो क्रम बदलने से समुच्चय नहीं बदलता है, जैसे

$A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{3, 2, 1\}$

$C = \{2, 1, 3\}$

ये एक ही समुच्चय को प्रदर्शित करते हैं, क्योंकि अवयव समान हैं।

## समुच्चय की सदस्य संख्या (Cardinal number)

निम्नांकित समुच्चयों की सदस्य संख्या बताइए :

(i)  $A = \{\text{केला, आम, अमरुद}\}$

(ii)  $B = \{a,b,c,d\}$

(iii)  $C = \{1,4,7, 10,13\}$

(iv)  $D = \{-2, -1\}$

(v)  $E = \{0\}$

हम देखते हैं कि समुच्चय  $A$  में 3 सदस्य हैं, संक्षेप में इसे  $n(A) = 3$  द्वारा अभिव्यक्त करते हैं।

इसी प्रकार समुच्चय  $B$  में 4 सदस्य हैं, या  $n(B) = 4$

समुच्चय  $C$  में 5 सदस्य हैं, या  $n(C) = 5$

समुच्चय  $D$  में 2 सदस्य हैं, या  $n(D) = 2$

समुच्चय  $E$  में 1 सदस्य है, या  $n(E) = 1$

यदि समुच्चय  $S$  में  $m$  सदस्य हों, तो संकेतन में समुच्चय की सदस्य संख्या  $n(S) = m$

समुच्चय  $A = \{2,4,6\}$  की सदस्य संख्या बताइए।

$n(A) = 3$

$A = \{1,2,3\}$  और  $B = \{a,b,c\}$  तो हम देखते हैं कि  $n(A) = 3$  तथा  $n(B) = 3$

$\therefore n(A) = n(B)$

हम देखते हैं कि दोनों समुच्चयों की सदस्य संख्या समान है, परन्तु सदस्य अलग-अलग हैं। ऐसे समुच्चयों को समतुल्य समुच्चय कहते हैं। यहाँ समुच्चय  $A$  तथा समुच्चय  $B$  समतुल्य कहलायेंगे।

ऐसे समुच्चय जिनकी सदस्य संख्या समान हों, परन्तु सदस्य अलग-अलग हों, समतुल्य समुच्चय होते हैं।

- यदि  $A = \{a,e,i,o,u\}$  तथा  $B = \{x : x$  एक 6 से छोटी प्राकृतिक संख्या है। $\}$   
 $n(A)$  तथा  $n(B)$  के मान बताइए।
- क्या समुच्चय  $A$  और समुच्चय  $B$  समतुल्य हैं और क्यों?

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए—

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$B = \{a, b, c, d\}$$

$$C = \{a, e, i, o, u\}$$

$$D = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 6, 8, \dots, 50\}$$

$$F = \{2\}$$

$$G = \{\}$$

हम देखते हैं कि:

समुच्चय A के अवयवों की संख्या 8 है।

समुच्चय B के अवयवों की संख्या 4 है।

समुच्चय C के अवयवों की संख्या 5 है।

समुच्चय D के अवयवों की संख्या असीमित या अपरिमित है।

समुच्चय E के अवयवों की संख्या 25 है।

समुच्चय F के अवयवों की संख्या 1 है।

समुच्चय G के अवयवों की संख्या शून्य है अर्थात् इसमें कोई अवयव नहीं है।

स्पष्ट है कि उपर्युक्त समुच्चयों के अवयवों की संख्या भिन्न-भिन्न है। अवयवों या सदस्यों की संख्या की दृष्टि से समुच्चस भिन्न-भिन्न प्रकार के होते हैं। समुच्चय के अवयवों की संख्या सीमित या असीमित होती है। सीमित संख्या में अवयव वाले समुच्चयों में एक या शून्य अवयव वाले समुच्चय भी सम्मिलित हैं।

समुच्चय A के अवयवों की संख्या 8 है।  
समुच्चय B के अवयवों की संख्या 4 है।



## परिमित समुच्चय

निम्नांकित सारणी को देखिए:

समुच्चय	समुच्चयों के अवयवों की संख्या
$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$	5
$B = \{d, e, g, h\}$	4
$C = \{18, 16, 24\}$	3
$D = \{11, 12, 13, 14, 15\}$	5
$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$	7
$F = \{2, 4\}$	2

हम देखते हैं कि

समुच्चय A के सदस्यों की संख्या 5 है। समुच्चय B के सदस्यों की संख्या 4 है। समुच्चय C के सदस्यों की संख्या 3, D की 5, E की 7 तथा F की 2 हैं। इन सभी समुच्चयों में अवयवों की संख्या सीमित हैं।

बताइए कि:

- (i) समुच्चय {0} में कितने अवयव हैं?
- (ii) समुच्चय {a,b,c,d,e} में अवयवों की संख्या क्या है?
- (iii) समुच्चय {1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19} में कितने अवयव हैं?

इससे निष्कर्ष निकलता है कि कुछ ऐसे समुच्चय होते हैं, जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है।

जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या परिमित होती है, वे परिमित (सीमित) (Finite) कहलाते हैं।

उदाहरण—निम्नांकित समुच्चयों में अवयवों की संख्या तथा इनके प्रकार बताइए:

- (a)  $A = \{6,7,8,9,10\}$
- (b)  $B = \{a, b, f, g, h\}$
- (c)  $C = \{x : x \text{ एक प्राकृतिक संख्या}, x < 5\}$

हल:

- (a) समुच्चय A के अवयवों की संख्या 5 है। यह परिमित समुच्चय है।
- (b) समुच्चय B के अवयवों की संख्या 5 है। यह भी परिमित समुच्चय है।
- (c)  $C = \{x : x \text{ एक प्राकृतिक संख्या } x > 5\} = \{1,2,3,4\}$

समुच्चय C के अवयवों की संख्या 4 है। यह भी परिमित समुच्चय है।

## अपरिमित (असीमित) समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए;

$$A = \{1,2,3,4,5,6,\dots\}$$

$$B = \{2,4,6,8,\dots\}$$

$$C = \{1,3,5,7,9,\dots\}$$

हम देखते हैं कि:

समुच्चय A में केवल 6 अवयव अंकित हैं इसके बाद ... बिन्दु अंकित हैं। जिसका अर्थ है उसी क्रम में अवयवों की सततता अर्थात् इन 6 अवयवों के बाद उसी क्रम में अनन्त अवयव हैं। अतः समुच्चय A के अवयवों को गिना नहीं जा सकता है। इसी प्रकार समुच्चयों B और C के अवयवों को भी गिना नहीं जा सकता है।

इस प्रकार समुच्चय A,B,C के अवयवों की संख्या अपरिमित या अनन्त है।

### प्रयास कीजिए :

- {2,4,6,8,10,...} में कितने अवयव हैं?
- {2,3,5,7,11,...} में अवयवों की संख्या कितनी है?
- {1,8,27,64,125,...} में कितने अवयव हैं?

इससे निष्कर्ष निकलता है कि ऐसे भी समुच्चय होते हैं जिनके अवयवों की संख्या अपरिमित होती है।

जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या अनन्त होती है, वे समुच्चय अपरिमित समुच्चय (Infinite set) कहलाते हैं।

**उदाहरण**—यदि  $A = \{12, 14, 16, 18, \dots\}$  तो समुच्चय A का प्रकार बताइए।

**हल** : समुच्चय A उन सम संख्याओं का समूह है जो 10 से बड़े हैं।

अतः समुच्चय के अवयवों की संख्या अनन्त है।

अतः समुच्चय अपरिमित समुच्चय है।

**उदाहरण**—यदि  $B = \{x : x, 3\}$  से विभाज्य प्राकृतिक संख्या है), तो समुच्चय B का प्रकार ज्ञात कीजिए।

**हल** : 3 से विभाज्य प्राकृतिक संख्याएं असीमित हैं तथा 3, 6, 9, 12, 15, ...। इस प्रकार समुच्चय B के अवयवों की संख्या अपरिमित हैं अतः समुच्चय B अपरिमित समुच्चय है।

## एकल समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए:

- A = वर्तमान में भारत के प्रधानमन्त्री का समुच्चय
- B = किसी एक विद्यालय के प्रधानाचार्य का समुच्चय
- C = सबसे छोटी प्राकृतिक सम संख्या का समुच्चय

समुच्चय A वर्तमान में भारत के प्रधानमंत्री का समुच्चय है। किसी भी देश का किसी समय केवल एक ही प्रधानमंत्री होता है। अतः इस समय भारतवर्ष के प्रधानमंत्री की संख्या 1 है। अतः समुच्चय A के अवयवों की संख्या 1 है। इसी प्रकार समुच्चय B और C के अवयवों की संख्या भी 1 ही है।

समुच्चय  $Q = \{x : x \text{ सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या}\}$  के अवयवों की संख्या पर विचार कीजिए। यहाँ पर समुच्चय Q सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या का समुच्चय है। सबसे छोटी प्राकृतिक संख्या 1 है, अतः समुच्चय Q के भी अवयवों की संख्या 1 ही है।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि एक अवयव वाले समुच्चय भी होते हैं।

**जिन समुच्चयों के अवयवों की संख्या केवल एक होती है, वे समुच्चय एकल समुच्चय (Singleton Set) कहलाते हैं।**

**उदाहरण—** 9 और 12 के मध्य अभाज्य संख्याओं के समुच्चय के अवयवों की संख्या बताइए।

**हल—** 9 और 12 के मध्य केवल 11 एक ऐसी संख्या है, जो अभाज्य है। अतः समुच्चय  $A = \{11\}$  के अवयवों की संख्या 1 है।

**उदाहरण—** यदि  $B = \{x : x \text{ सबसे छोटा धनपूर्णांक}\}$ , तो समुच्चय का प्रकार बताइए।

**हल—** समुच्चय B सब से छोटे धनपूर्णांक का समुच्चय है। सबसे छोटा धनपूर्णांक है।

अतः समुच्चय B एकल समुच्चय है।

## रिक्त समुच्चय

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए:

$A = 2$  से छोटी सम प्राकृतिक संख्या का समुच्चय

$B = 1$  से छोटी धन पूर्णांक संख्याओं का समुच्चय

हम जानते हैं कि 2 सबसे छोटी सम प्राकृतिक संख्या है। इससे छोटी कोई भी सम प्राकृतिक संख्या नहीं होती है। अतः समुच्चय A में कोई भी अवयव नहीं है।

समुच्चय B में भी कोई अवयव नहीं है, क्योंकि 1 से छोटा धनपूर्णांक नहीं होता है।

### प्रयास कीजिए :

1. यदि  $P = 2$  और 3 के बीच के धनपूर्णांकों का समुच्चय, तो P के अवयवों की संख्या बताइए।
2. समुच्चय  $A = \{\}$  के अवयवों की संख्या बताइए।

अतः निष्कर्ष निकलता है कि ऐसे भी समुच्चय होते हैं, जिनमें अवयवों की संख्या शून्य होती है।

जिन समुच्चयों के एक भी अवयव नहीं होते हैं, उन्हें रिक्त समुच्चय (Null Set or empty set or void set) कहते हैं। ऐसे समुच्चय को “{ }” से या “ $\phi$ ” चिह्न से प्रदर्शित करते हैं।

**टिप्पणी:** चिह्न “ $\phi$ ” ग्रीक वर्णमाला का एक अक्षर है जिसे ‘फाई’ कहते हैं। ध्यान दें, समुच्चय {0} रिक्त समुच्चय नहीं है क्योंकि इसके अवयव की संख्या 1 है।

**उदाहरण** 99 से बड़ी दो अंकों की प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय का प्रकार लिखिए।

**हल** 99 से बड़ी दो अंकों की कोई भी प्राकृतिक संख्या नहीं होती है।

अतः 99 से बड़ी दो अंकों की प्राकृतिक संख्या का समुच्चय { } या रिक्त समुच्चय  $\phi$  है।

## उपसमुच्चय (Subset)

निम्नांकित समुच्चयों को देखिए

$$A = \{a,b,c,d,e\}$$

$$B = \{a\}$$

$$C = \{a,e\}$$

$$D = \{c,d,e\}$$

$$E = \{b,c,d\}$$

$$F = \{b,c,d,e\}$$



- क्या समुच्चय B का अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है?
- समुच्चय B का अवयव और किस समुच्चय का भी अवयव है?
- समुच्चय E के सभी अवयव किन-किन समुच्चयों के अवयव हैं?
- क्या समुच्चय D का प्रत्येक अवयव समुच्चय E का भी अवयव है?
- क्या समुच्चय A के सभी अवयव समुच्चय s के अवयव हैं?

हम देखते हैं कि समुच्चय B का अवयव समुच्चय A का भी अवयव है।

इसी प्रकार समुच्चय B का अवयव समुच्चय C में भी है। समुच्चय C,D,E और F के अवयव भी समुच्चय A के अवयव हैं।

समुच्चय B समुच्चय A का उपसमुच्चय और समुच्चय A, समुच्चय B का अधिसमुच्चय (Superset) कहलाता है। इसी प्रकार समुच्चय B, समुच्चय C समुच्चय C,B उपसमुच्चय और s का अधिसमुच्चय है।

### बताइए

1. क्या समुच्चय D, समुच्चय A का उपसमुच्चय है?
2. समुच्चय A का समुच्चय E से क्या संबंध है?
3. समुच्चय A तथा समुच्चय F में कौन किसका उपसमुच्चय और कौन किसका अधिसमुच्चय है?

हम देखते हैं कि—

- यदि समुच्चय B के सभी अवयव समुच्चय A के अवयव हैं, तो समुच्चय B समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। इसे  $B \subset A$  द्वारा व्यक्त करते हैं तथा 'B उपसमुच्चय A' पढ़ते हैं।
- यदि समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का अवयव है, तो समुच्चय A समुच्चय B का अधिसमुच्चय कहलाता है। इसे  $A \supset B$  द्वारा व्यक्त करते हैं और 'A अधिसमुच्चय B' पढ़ते हैं।
- यदि समुच्चय B, समुच्चय A का उप समुच्चय हो, तो समुच्चय A समुच्चय B का अधिसमुच्चय होता है। प्रतीकात्मक भाषा में यदि  $B \subset A$  तो  $A \supset B$ ।

पुनः देखिए,

$$A = \{1,2,3\}$$

$$B = \{1\}$$

$$C = \{2,3\}$$

$$D = \emptyset$$

$$E = \{2,3,1\}$$

### प्रयास कीजिए :

1. समुच्चय B का अवयव समुच्चय A में है, अतः समुच्चय B समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?
2. समुच्चय C समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?
3. समुच्चय D में अवयवों की संख्या कितनी है?
4. समुच्चय D, समुच्चय A का क्या कहलायेगा?
5. समुच्चय F समुच्चय A का क्या कहा जायेगा?

ध्यान दें, D एक रिक्त समुच्चय है जिसके अवयवों की संख्या शून्य है। यह रिक्त समुच्चय है। अतः यह कल्पना की जा सकती है कि समुच्चय D का अवयव समुच्चय A में भी है। अतः समुच्चय D समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है। इसी प्रकार समुच्चय D, समुच्चयों B,C,D और E का भी एक उपसमुच्चय है। व्यापक रूप में रिक्त समुच्चय  $\emptyset$  सभी समुच्चयों का एक उपसमुच्चय होता है। यही नहीं,

यह स्वयं अपना भी एक उप समुच्चय होता है।

क्या समुच्चय E, समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है? ध्यान दें, समुच्चय E के सभी अवयव समुच्चय A में हैं, अतः समुच्चय E, समुच्चय A का एक उपसमुच्चय है अर्थात्  $E \subset A$ ; परन्तु हम जानते हैं कि यहाँ  $E=A$  क्योंकि E और A के अवयव समान है। इस प्रकार के उपसमुच्चय उचित उप समुच्चय नहीं होते। उपर्युक्त से स्पष्ट है कि  $B \subset A$  परन्तु  $B \neq A$  इसी प्रकार  $C \subset A$  परन्तु  $C \neq A$ ,  $D \subset A$  परन्तु  $D \neq A$ , अतः हम कह सकते हैं कि समुच्चय B,C और D समुच्चय A के उचित उपसमुच्चय हैं। समुच्चय B समुच्चय A का तभी एक उचित उपसमुच्चय कहलाता है जब A में कम से कम एक ऐसा अवयव अवश्य हो जो B में न हो, जबकि B का प्रत्येक अवयव A का अवयव भी हो। उचित उपसमुच्चय को संकेत  $\subseteq \neq$  द्वारा व्यक्त करते हैं। उपर्युक्त उदाहरण में  $B \subset A$ ।

### इस प्रकार

यदि  $B \subset A$ , किन्तु  $B \neq A$ , तो B,A का एक उचित उपसमुच्चय होता है और इसे  $B \subset A$  लिखा जाता है।

### यह भी जानें:

ध्यान दें,  $A \subset A$  तथा  $A = A$ । इस कारण हम देखते हैं कि प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है।

क्या  $A, A$  का एक उचित उपसमुच्चय है?

ध्यान दें, कुछ समुच्चय ऐसे होते हैं जिनके अवयव समान होते हैं। जैसे शब्द ART तथा RAT के अक्षरों से बने समुच्चयों {A,R,T} तथा {R,A,T} के अवयव समान हैं।

इसी प्रकार समुच्चयों {1,2,3}, {2,3,1}, {3,2,1} के अवयव भी समान हैं, केवल अवयवों के क्रम बदले हुए हैं। ऐसे समुच्चयों को सम समुच्चय (Equal Sets) कहते हैं।

यदि  $A = \{2,3,1\}$

$B = \{3,2,1\}$

यहाँ समुच्चय A का प्रत्येक अवयव B में है तथा समुच्चय B का प्रत्येक अवयव A में है। अर्थात्  $A \subset B$  तथा  $B \subset A$  दोनों समुच्चय A और B सम समुच्चय हैं।

- ऐसे समुच्चय जिनके अवयव समान हैं, सम समुच्चय कहलाते हैं।
- यदि  $A$  और  $B$  दो सम समुच्चय हैं, तो  $A \subset B$  तथा  $B \subset A$ ।
- सम समुच्चय के अवयवों के क्रम कुछ भी हो सकते हैं।

ध्यान दें, दो सम समुच्चय सदैव समतुल्य होते हैं, किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि दो समतुल्य समुच्चय सदैव सम समुच्चय हों।

## किसी समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या

समुच्चय  $\phi$  में कितने अवयव हैं?

समुच्चय  $\{1\}$  में कितने अवयव हैं?

समुच्चय  $\{1,2\}$  में कितने अवयव हैं?

समुच्चय  $\{1,2,3\}$  में कितने अवयव हैं?

ध्यान दें, यहाँ समुच्चय  $\phi$ ,  $\{1\}$  और  $\{1,2\}$  तीनों ही समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के उपसमुच्चय हैं। स्वयं  $\{1,2,3\}$  भी  $\{1,2,3\}$  का एक उपसमुच्चय है।

- समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के उपर्युक्त उपसमुच्चयों के अतिरिक्त और कितने उप समुच्चय हो सकते हैं?
- समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के अवयवों में से केवल एक अवयव लेकर कितने उप समुच्चय बना सकते हैं?
- समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के अवयवों में से कोई दो अवयव लेकर कितने उप समुच्चय बनाये जा सकते हैं?

हम देखते हैं कि समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के 3 अवयवों में से शून्य, एक, दो तथा तीन अवयवों को लेकर निम्नांकित उपसमुच्चय बनाये जा सकते हैं।

$\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}$

बताइए, समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के सभी उप समुच्चयों की संख्या कितनी है?

देखिए,

- (i)  $\phi$  में कोई भी अवयव नहीं है [ $n(\phi) = 0$ ] अतः इसका केवल एक उपसमुच्चय स्वयं  $\phi$  प्राप्त होगा।

अतः रिक्त समुच्चय  $\phi$  के उपसमुच्चय की संख्या

$$= 1 = 2^0 [\because a^0 = 1, a \neq 0]$$

- (ii) समुच्चय  $\{1\}$  एकल समुच्चय है, इसके कुल उपसमुच्चय  $s$  और  $\{1\}$  प्राप्त होते हैं।  
अतः  $\{1\}$  के उपसमुच्चयों की संख्या =  $2 = 2^1$
- (iii) इसी प्रकार समुच्चय  $\{1,2\}$  के अवयवों से बने  $\emptyset, \{1\}, \{2\}$  और  $\{1,2\}$  कुल 4 उपसमुच्चय प्राप्त होते हैं। इस प्रकार  $\{1,2\}$  के कुल उप समुच्चयों की संख्या =  $4 = 2^2$
- (iv) इसी प्रकार समुच्चय  $\{1,2,3\}$  के कुल उपसमुच्चयों की संख्या =  $8 = 2^3$
- (v) समुच्चय  $\{1,2,3,4\}$  के कुल उपसमुच्चयों की संख्या =  $16 = 2^4$
- (vi) यदि  $n(B) = 5$  तो  $B$  के कुल उपसमुच्चयों की संख्या =  $32 = 2^5$

इसे भी जाने

- समुच्चय  $A$ , के कुल कितने उपसमुच्चय होंगे यदि  $n(A) = 6$ ?
- यदि किसी समुच्चय  $D$  के कुल उपसमुच्चयों की संख्या  $2^7$  हो तो  $n(D)$  का मान क्या होगा?

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि:

**यदि  $n(S) = m$ , तो समुच्चय  $S$  के कुल उपसमुच्चयों की संख्या =  $2^m$**

**उदाहरण—**समुच्चय  $A = \{7, 11, 13\}$  के सभी उपसमुच्चय लिखिए तथा गिनकर इनकी संख्या बताइए।

**हल—** $A = \{7, 11, 13\}$

$A$  के उपसमुच्चय  $\emptyset, \{7\}, \{11\}, \{13\}, \{7, 11\}, \{7, 13\}, \{11, 13\}, \{7, 11, 13\}$   
उपसमुच्चयों की कुल संख्या = 8

**सामूहिक कार्य कीजिए**

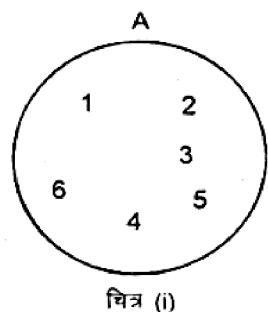
1. समुच्चय  $\{a, b\}$  का एक सम समुच्चय बताइए।
2. समुच्चय  $\{1, 2\}$  के कुल कितने उपसमुच्चय हैं?
3. यदि  $B \subset A$  तो बताइए कि समुच्चय  $A$  और समुच्चय  $B$  में किसके अवयवों की संख्या अधिक होगी?
4. किसी समुच्चय का सबसे कम संख्या के अवयव वाला उपसमुच्चय बताइए।

## वैन आरेख द्वारा समुच्चयों का निरूपण

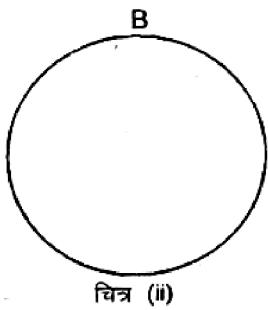
समुच्चयों के परस्पर सम्बन्धों और समुच्चयों पर होने वाली संक्रियाओं को चित्रों द्वारा आसानी से समझा जा सकता है। 18 वीं शताब्दी में स्विस गणितज्ञ आयलर (Euler) ने सर्वप्रथम समुच्चयों को चित्र द्वारा प्रदर्शित किया। बाद में ब्रिटिश तर्कशास्त्री वैन (Venn) ने 19वीं शताब्दी में इन्हें परिवर्तित करके वृत्त रूप में प्रयोग किया। इसी से इन्हें आयलर आरेख (Euler diagram) या वैन आरेख (Venn Diagrams) कहते हैं।

निम्नांकित चित्रों को देखिए।

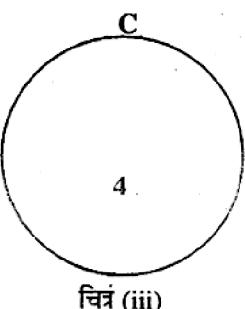
पार्श्व चित्र (i) समुच्चय A का है। इसके अवयव 1,2,3,4,5, और 6 हैं। यह परिमित समुच्चय को प्रदर्शित करता है।



पार्श्व (चित्र) (ii) समुच्चय B को प्रदर्शित करता है। इसमें कोई अवयव नहीं है। अतः समुच्चय B के अवयवों की संख्या शून्य है। चित्र (iii) रिक्त समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

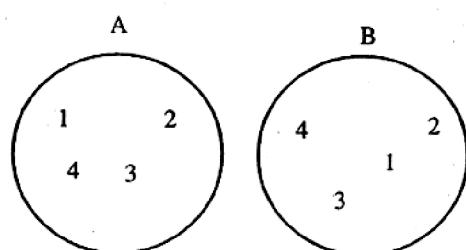


पार्श्व चित्र (iii) समुच्चय C को प्रदर्शित करता है। इसमें केवल एक अवयव 4 है। अतः यह एकल समुच्चय को प्रदर्शित करता है।



पार्श्व चित्र (iv) समुच्चय A तथा B को प्रदर्शित करता है। इनके अवयवों की संख्या समान है और वे एक से हैं।

अतः चित्र (iv) दो समान समुच्चयों को प्रदर्शित करता है।

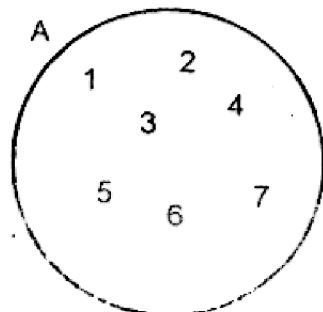


इस प्रकार हम समुच्चयों को चित्रों के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं। इससे निष्कर्ष निकलाता है कि:

समुच्चयों के परस्पर और समुच्चय पर होने वाली संक्रियाओं सम्बन्धों को चित्रों द्वारा आसानी से समझने हेतु समुच्चयों को चित्रों द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इन चित्रों को वैन आरेख (Venn diagrams) कहते हैं।

उदाहरण—समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  को वैन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।

हल—पार्श्व चित्र समुच्चय  $A$  को प्रदर्शित करता है।



## समुच्चयों का संक्रियाएँ

जिस प्रकार अंकगणित की संक्रियाओं में दो संख्याओं के योग, अन्तर, गुणा तथा भाग करने से एक अन्य संख्या प्राप्त होती है, उसीप्रकार दो समुच्चयों पर संघ (Union), सर्वनि (Intersection), अन्तर (Difference) तथा पूरक (Complement) की संक्रियाएँ लागू करने पर एक नया समुच्चय प्राप्त होता है। ये संक्रियाएँ लगभग उसी प्रकार की होती हैं, जैसे जोड़ने, घटाने आदि की संक्रियाएँ होती हैं। यहाँ केवल संघ और सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं पर विचार किया जायेगा।

## दो समुच्चयों का संघ (Union of two sets)

निम्नांकित सारणी को देखिए

क्रमांक	समुच्चय A	समुच्चय B	A तथा B के अवयवों से बना समुच्चय
1	{1,2,3}	{4,5}	{1,2,3,4,5}
2	{2,4,6,8}	{6,8,10}	{2,4,6,8,10}
3	{1,5,9,10}	{5,9}	{1,5,9,10}
4	{11,12,13,14}	{ }	{11,12,13,14}

हम देखते हैं कि क्रमांक 1 में समुच्चय A के अवयव 1,2 तथा 3 हैं तथा समुच्चय B के अवयव 4 तथा 5 हैं। समुच्चय A के अवयवों में समुच्चय B के अवयवों को मिलाने पर कुल अवयव 1,2,3,4 तथा 5 प्राप्त होते हैं। इन अवयवों का समुच्चय {1,2,3,4,5} है, जो एक नया समुच्चय है। यह दो समुच्चयों A तथा B के सभी अवयवों का संघ समुच्चय है।

क्रमांक 2 में समुच्चय A के अवयव 2, 4, 6, 8 हैं और समुच्चय B के अवयव 6, 8, 10 हैं। समुच्चय A तथा B के अवयवों को मिलाने पर कुल अवयव 2,4,6,8,10 प्राप्त होते हैं, किन्तु अवयव 6 और 8 दोनों समुच्चयों में हैं।

अतः समुच्चय बनाते समय इन अवयवों को एक ही बार लिखते हैं क्योंकि किसी समुच्चय में अवयवों की पुनरावृत्ति नहीं होती है। अतः समुच्चय A और B का संघ समुच्चय {2,4,6,8,10} है।

क्रमांक 3 में समुच्चय B के सभी अवयव समुच्चय A में सम्मिलित हैं। अतः इनके संघ समुच्चय के अवयव 1,5,9 तथा 10 हैं। इस प्रकार समुच्चय A तथा B का संघ समुच्चय, {1,5,9, 10} है।

इसी प्रकार क्रमांक 4 में समुच्चय B एक रिक्त समुच्चय है अतः समुच्चय A और B का संघ समुच्चय {11,12,13,14} है। यह समुच्चय A के अवयवों का समुच्चय है। अतः किसी समुच्चय के साथ रिक्त समुच्चय का संघ लेने पर वही समुच्चय प्राप्त होता है।

#### इसे भी जाने

- समुच्चय A = {7,8,9} तथा समुच्चय B = {15,16} का संघ समुच्चय बनाइए।
- P = {a,e,i} तथा Q = {e,i,o,u} का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए।

इससे निष्कर्ष निकलता है कि यदि दो समुच्चयों A तथा B को आपस में मिलाएँ या उनका संघ करें, तो एक नया समुच्चय प्राप्त होता है, जिसके अवयव या तो A के अवयव होते हैं, या B के अवयव होते हैं, या A और B दोनों के अवयव होते हैं।

**दो समुच्चयों A और B के संघ समुच्चय से अभिप्राय एक ऐसे समुच्चय से है, जो इन दोनां के सभी अवयवों से बनता है। इसको A ∪ B द्वारा प्रदर्शित किया जाता और इसे A संघ B (A union B) पढ़ते हैं। संघ के लिए '∪' चिह्न का प्रयोग करते हैं।**

**उदाहरण**—यदि समुच्चय S = {4,5,6} तथा समुच्चय T = {7,8} तो S ∪ T का मान ज्ञात कीजिए।

**हल**—यहाँ पर S = {4, 5, 6}

तथा  $T = \{7, 8\}$

$$\therefore S \cup T = \{4, 5, 6\} \cup \{7, 8\}$$

$$= \{4, 5, 6, 7, 8\}$$

**उदाहरण**—यदि  $A = \{x : x$  प्राकृतिक सम संख्या है तथा  $x < 9\}$  तथा  $B = \{x : x$  प्राकृतिक संख्या है तथा  $x < 5\}$  तो  $A \cup$  ज्ञात कीजिए।

**हल**—यहाँ पर  $A = \{x : x$  प्राकृतिक सम संख्या है तथा  $x < 9\}$

$$= \{2, 4, 6, 8\}$$

तथा  $B = \{x : x$  प्राकृतिक संख्या है तथा  $x < 5\}$

$$= \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{1, 2, 3, 4\}$$

$$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$$

## दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (Intersection of two sets)

निम्नांकित सारणी को देखिए:

क्रमांक	समुच्चय A	समुच्चय B	A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय
1	{4, 5, 7, 8, 9}	{8, 9, 10, 11}	{8, 9}
2	{1, 3, 5, 7}	{9, 11, 13}	या {}
3	{2, 4, 6, 8}	{2, 8, 16, 18}	{2, 8}
4	{3, 6, 9, 12}	{6, 15, 18}	{6}

हम देखते हैं कि सारणी के क्रमांक 1 में समुच्चय A के अवयव 4, 5, 7, 8, 9 हैं और समुच्चय B के अवयव 8, 9, 11 हैं। इन दोनों में उभयनिष्ठ अवयव 8 और 9 हैं। इन उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय {8, 9} है।

सारणी के क्रमांक 2 में दोनों समुच्चयों में उभयनिष्ठ अवयव नहीं है, इसलिए इन दोनों के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय रिक्त समुच्चय है।

इसी प्रकार सारणी के क्रमांक 3 और 4 में दोनों समुच्चयों A और B के उभयनिष्ठ अवयवों के समुच्चय क्रमशः {2, 8} तथा {6} हैं।

इन उभयनिष्ठ अवयवों के समुच्चय को इन समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय कहते हैं।

### इसे भी जाने

- यदि  $A = \{1, 3, 7, 11, 13, 17\}$  तथा  $B = \{3, 7, 19\}$  तो इनके उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।
- यदि  $P = \{21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$  तथा  $Q = \{26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35\}$  तो इनके उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय ज्ञात कीजिए।

दो समुच्चयों A और B सर्वनिष्ठ (Intersection of A and B) समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ (Common) अवयव होते हैं। इसको " $A \cap B$ " द्वारा निरूपित किया जाता है। इसको A सर्वनिष्ठ B (A Intersection B) पढ़ते हैं। इसके लिए " $\cap$ " चिह्न का प्रयोग करते हैं।

**उदाहरण**—समुच्चय  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  तथा  $B = \{6, 7, 9, 10\}$  का सर्वनिष्ठ समुच्चय लिखिए।

**हल**—यहाँ पर समुच्चय  $A = \{4, 5, 6, 7, 8\}$  के अवयव 4, 5, 6, 7, तथा 8 हैं।

समुच्चय  $B = \{6, 7, 9, 10\}$  के अवयव 6, 7, 9 तथा 10 हैं। इनके उभयनिष्ठ अवयव 6 और 7 हैं, इन अवयवों का समुच्चय {6, 7} है।

$$\begin{aligned}\therefore A \cap B &= \{4, 5, 6, 7, 8\} \cap \{6, 7, 9, 10\} \\ &= \{6, 7\}\end{aligned}$$

**उदाहरण**—यदि समुच्चय  $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ एक सम संख्या}\}$  समुच्चय  $B = A$  ( $x : x \in \mathbb{N}, x$  पाँच से विभाज्य संख्या), जहाँ  $\mathbb{N}$  प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है; तो  $A \cap B$  ज्ञात कीजिए।

**हल**—यहाँ पर  $A = \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ एक सम संख्या}\}$

$$= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

$$\begin{aligned}B &= \{x : x \in \mathbb{N}, x \text{ पाँच से विभाज्य संख्या}\} \\ &= \{5, 10, 15, 20, \dots\}\end{aligned}$$

समुच्चय A और B में स्पष्टतः उभयनिष्ठ अवयव 10, 20, 30, हैं।

$$\begin{aligned}\therefore A \cap B &= \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\} \cap \{5, 10, 15, 20, \dots\} \\ &= \{10, 20, 30, \dots\} \\ &= \{x : x \in \mathbb{N} \text{ तथा } x \text{ } 10 \text{ से विभाज्य है}\}\end{aligned}$$

## समुच्चयों पर संक्रियाओं को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित करना

यदि समुच्चय  $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  तथा समुच्चय  $B = \{8, 9, 10, 11, 12\}$ , तो  $A \cup B$  और  $A \cap B$  को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित करना।

समुच्चय A और B के दो वैन आरेख पार्श्व चित्र की भाँति बनाइए।

1. चित्र से स्पष्ट है कि अवयव 6 और 7 केवल समुच्चय A के अवयव हैं और 12 केवल समुच्चय B का अवयव है। अवयव 8,9,10,11 समुच्चय A और B दोनों के उभयनिष्ठ अवयव हैं। अतः चित्र देखकर हम कह सकते हैं कि

$$A \cup B = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

2. पार्श्व चित्र की भाँति पुनः समुच्चय A और B के चैन आरेख खींचिए। चित्र से स्पष्ट है कि समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ अवयव 8,9,10 तथा 11 हैं।

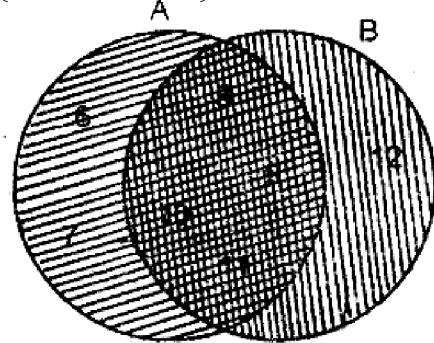
$$A \cap B = \{8, 9, 10, 11\}$$

**उदाहरण**—यदि समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  तथा समुच्चय  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  तो  $A \cup B$  तथा  $A \cap B$  का मान वैन आरेख द्वारा ज्ञात कीजिए।

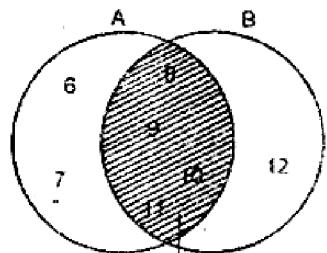
**हल—**

समुच्चय s के अवयव 1,2,3,4, तथा 5 हैं और समुच्चय B के अवयव 4,5,6, तथा 7, हैं। दोनों समुच्चयों का सम्मिलित समुच्चय ज्ञात करने के लिए दो वृत्त खींचेंगे। किन्तु समुच्चय A और B के उभयनिष्ठ अवयव 4,5, हैं। अतः दो वृत्त ऐसे खींचेंगे कि उनका कुछ भाग उभयनिष्ठ रहे। पार्श्व चित्र में दो वृत्तों को छायांकित किया गया है जो दो समुच्चयों के संघ को प्रदर्शित करता है जिसमें 1,2,3,4,5,6 तथा 7 अवयव सम्मिलित हैं। ये अवयव A या B या दोनों के अवयव हैं।

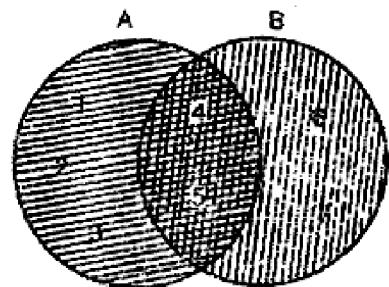
$$\therefore A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



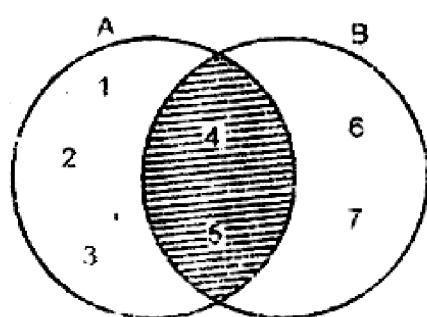
सम्पूर्ण छायांकित भाग  $A \cup B$



छायांकित भाग  $A \cap B$



$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$



$$\text{छायांकित भाग } A \cap B = \{4, 5\}$$

समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  तथा समुच्चय  $B = \{4, 5, 6, 7\}$  के उभयनिष्ठ अवयव 4, 5 हैं। अतः समुच्चय A और B के लिए ऐसे दो वृत्त खींचेंगे जिसके उभयनिष्ठ भाग के अवयव 4 और 5 हैं। उभयनिष्ठ भाग को छायांकित किया जो सर्वनिष्ठ समुच्चय को प्रदर्शित करता है।

$$\therefore A \cap B = \{4, 5\}$$

## मूल्यांकन

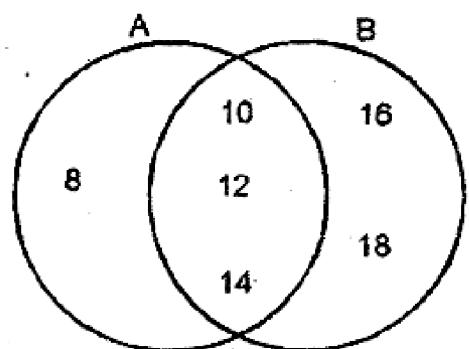
1. निम्नांकित में से कौन से समूह सुपरिभाषित हैं?
  - (i) किसी नगर के सभी सफल नागरिक।
  - (ii) कक्षा 9 के एक विद्यार्थी द्वारा चयनित विषयों का समूह।
  - (iii) 10 से कम सम प्राकृतिक संख्याएँ।
  - (iv) किसी विद्यालय के आठवीं कक्षा के छात्रों का समूह।
  - (v) भारत के सभी महत्वपूर्ण व्यक्तियों का समूह है।
2. बताइए कि निम्नांकित समूहों में से कौन समुच्चय हैं?
  - (i) कक्षा 8 के लम्बे विद्यार्थियों का समूह।
  - (ii) एक घर में रहने वाले समस्त व्यक्तियों का समूह।
  - (iii) प्रथम दस प्राकृतिक संख्याओं का समूह।
  - (iv) उन सभी सब्जियों का समूह जो खाने में अच्छी लगती हैं।
  - (v) प्रथम 5 प्राकृतिक संख्याएँ जिनका इकाई अंक 5 हो।
3. निम्नांकित समुच्चयों के सदस्यों को बताइए। प्रत्येक समुच्चय के सदस्यों को मझाले कोष्ठत {} में अद्विराम (,) से पृथक् करके लिखिए। जैसे
  - (i) सप्ताह के दिनों का समुच्चय
  - (ii) प्रथम चार प्राकृतिक सम संख्याओं का समुच्चय।
  - (iii) वर्ष के प्रथम तीन अंग्रेजी महीनों का समुच्चय।
  - (iv) प्रथम पांच पूर्ण संख्याओं का समुच्चय।
  - (v) प्रथम छह प्राकृतिक विषम संख्याओं का समुच्चय।
4. निम्नांकित समुच्चयों का वर्णन कीजिए:
  - (i)  $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
  - (ii)  $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - (iii)  $O = \{1, 3, 5\}$



12. समुच्चय  $A = \{3,6,9,12,15\}$  को नियम विधि से लिखिए।
13. प्रथम 8 प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय को सारणीयन विधि से लिखिए।
14. निम्नांकित समुच्चयों को सारणीयन एवं नियम विधि से लिखिए।
14. निम्नांकित समुच्चयों को सारणीयन एवं नियम विधि से लिखिए।
- (a) 10 और 18 के बीच की सम संख्याओं का समुच्चय।
  - (b) 2 और 8 के बीच की पूर्ण संख्याओं का समुच्चय।
  - (c) ऋण पूर्णांकों का समुच्चय।
  - (d) 30 और 50 के बीच की अभाज्य संख्याओं का समुच्चय।
15. निम्नांकित समुच्चयों की सदस्य संख्या बताइए।
- (i)  $B = \{1,3,5,7\}$
  - (ii)  $C = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
  - (iii)  $D = \{0, 1,2,3\}$
16. प्रश्न संख्या 1 में दिये गये समुच्चयों के लिए निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य/असत्य हैं?
- (a)  $n(B) = n(D)$
  - (b)  $n(C) = n(D)$
  - (c)  $n(C) = 2n(D)$
  - (d)  $n(D) = 2n(C)$
17. यदि समुच्चय  $A = \{a,b,c,d,e\}$  तथा समुच्चय  $B = \{c,d,f\}$  तो दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिए।
18. यदि  $A = \{x : x \in N \text{ तथा } 3 \leq x \leq 6\}$  तथा  $B = \{x : x \in N \text{ तथा } x < 5\}$  तो  $A \cap B$  का मान ज्ञात कीजिए। जहाँ  $N$  सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है।
- A, 10 से लेकर 25 तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय तथा B 6 से लेकर 15 तक की प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है, तो दोनों समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय मसन ज्ञात कीजिए।
20. यदि  $P = \{15,16,17,18,19,20\}$  तथा  $Q = \{15, 20,25, 30\}$ , तो  $P \cap Q$  का मान ज्ञात कीजिए।  
यदि  $A = \{6, 8,11\}$ ,  $B = \{1,2,3\}$  तो  $A \cap B$  ज्ञात कीजिए।
21. यदि  $A = \{1,2,3,4,5,6\}$  तथा  $B = \{9,10\}$  तो  $A \cup B$  ज्ञात कीजिए।
22. यदि  $A = \{1,3,5,7\}$  तथा  $B = \{5, 7, 8, 9\}$  तो दोनों समुच्चयों का संघ ज्ञात कीजिए।  
(प्रश्न संख्या 3 और 4 में N का तात्पर्य प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चस से है।)

23. यदि  $A = \{x : x \in N \text{ तथा } x < 5\}$  तथा  $B = \{x : x \in N \text{ तथा } x \neq 0\}$  का मान ज्ञात कीजिए।
24. यदि  $A = \{x : x \in N \text{ तथा } x^2 \leq 16\}$  तथा  $B = \left\{x : x \in N \text{ तथा } \frac{4}{3} < x \leq 3\right\}$  तथा  $s$  तो दोनों समुच्चयों का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए।
25. यदि  $P = \{36 \text{ के अपवर्तक}\}$  तथा  $Q = \{48 \text{ के अपवर्तक}\}$  तो  $A \cup B$  ज्ञात कीजिए।
26. समुच्चय  $(0,1)$  के उप समुच्चय लिखिए।
27. निम्नलिखित में सम समुच्चय छाँटिए:
- $A = \{1,2,3,4\}$
  - $B = \{3, -3\}$
  - $C = \{2,4,6,8\}$
  - $D = \{x : x^2 = 9\}$
28. एक समुच्चय  $S$  के कुल 32 उपसमुच्चय हैं।  $n(S)$  का मान क्या होगा?
29. समुच्चय  $\{a, b\}$  तथा  $\{a, b, c\}$  के उपसमुच्चय लिखिए और बताइए कि कितने उपसमुच्चय दोनों के उपसमुच्चय हैं?
30. निम्नलिखित में से सत्य कथनों को छाँटिए :
- $\{1,5\} \subset \{1,2,3,4\}$
  - $\emptyset \subset \{a,b\}$
  - $\{x,y\} \subset \{x, y\}$
  - $\{a\} \supset \{a,b,c\}$
  - $\{1,2,3\} \supset \{1\}$
  - $n(C) = 2n(D)$
  - $n(D) = 2n(C)$
31. निम्नांकित समुच्चयों के प्रकार बताइए:
- $-1$  और  $+1$  के बीच धन पूर्णांकों का समुच्चय।
  - 15 से छोटी विषम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।
  - सींग वाले घोड़ों का समुच्चय।
  - उन प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय, जिनका दहाई का अंक 2 है।
  - वर्ष के महीनों का समुच्चय जिसमें 31 दिन होते हैं।
32. “1946 से पहले भारत के प्रधानमंत्रियों का समुच्चय” का प्रकार लिखिए।

33. निम्नांकित कथन 'सत्य' है अथवा 'असत्य'?
- $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  – परिमित समुच्चय
  - $B = \{1, 3, 5, 7\}$  परिमित समुच्चय
  - $C = \{f\}$  – एकल समुच्चय
  - $D =$  अभाज्य प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय - असीमित समुच्चय
  - $E = \{0\}$  – रिक्त समुच्चय
34. निम्नांकित समुच्चयों के प्रकार बताइए:
- अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों का समुच्चय।
  - प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय।
  - $P = \{x : x^2 = 9\}$
  - $I = \{x : x$  एक पूर्णांक है।
  - $A = \{x : x$  एक व्यक्ति जिसकी उम्र 200 वर्ष है।
  - 3 से बड़ी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है।
- क्या  $A = \{x : x$  भारत का वर्तमान राष्ट्रपति है} एकल समुच्चय है?
- 7 और 9 के बीच विषम संख्याओं का समुच्चय का प्रकार लिखिए।
35. समुच्चय  $A = \{10, 11, 12\}$  तथा समुच्चय  $B = \{12, 13\}$  का संघ समुच्चय  $A \cup B$  वैन आरेख से प्रस्तुत कीजिए।
36. यदि समुच्चय  $A = \{a, b, c, d\}$  तथा समुच्चय  $B = \{c, g, h\}$  तो सर्वनिष्ठ समुच्चय  $A \cap B$  वैन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।
37. निम्नांकित समुच्चयों का वैन आरेख द्वारा चित्रांकन कीजिए जहाँ पर  $A = \{2, 3, 5, 7\}$  तथा  $s = \{3, 7, 11\}$  है।
38. पार्श्व चित्र से निम्नांकित समुच्चयों के मान लिखिए।
- $A \cap B$
  - $A \cup B$
39. निम्नांकित समुच्चयों का संघ समुच्चय ज्ञात कीजिए:
- $A = \{p, q, r\}$  तथा  $B = \{s, t, u\}$
  - $C = \{1, 3, 5, 7\}$  तथा  $D = \{1, 2, 4, 6\}$
  - $G = (\text{पिता}, \text{पुत्र})$  तथा  $H = (\text{माता}, \text{पुत्र})$



40. निम्नांकित समुच्चयों का सर्वनिष्ठ समुच्चय ज्ञात कीजिएः
- $A = \{3, 6, 9, 12\}$  तथा  $B = \{3, 6, 10\}$
  - $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  तथा  $D = \{2, 4, 5, 6\}$
  - $E = \{x : x \text{ प्राकृतिक संख्या तथा } x < 5\}$   
तथा  $F = \{x : x \text{ प्राकृतिक संख्या तथा } 4 \leq x \leq 7\}$
  - $G = \{7, 11, 17\}$  तथा  $H = \emptyset$
  - $G =$  सप्ताह के दिनों के नामों का समुच्चय तथा  $Q = (\text{सोमवार}, \text{मंगलवार}, \text{बुधवार})$
41. यदि समुच्चय  $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$  तथा  $B = \{2, 3, 4, 8\}$  तो  $A \cup B$  वैन आरेख द्वारा ज्ञात कीजिए।
42. यदि समुच्चय  $A = \{3, 6, 8, 9, 12\}$  तथा  $B = \{6, 9, 15\}$  तो वैन आरेख द्वारा  $A \cup B, A \cap B$  ज्ञात कीजिए।
43. यदि  $A = \{3, 6, 8, 9, 12\}$  तथा  $B = \{6, 9, 15\}$  तो वैन आरेख द्वारा  $A \cup B, A \cap B$  ज्ञात कीजिए।
44. किसी कस्बे में हिन्दी और अंग्रेजी भाषा का कोई-न-कोई अखबार मंगाने वाले परिवारों की संख्या 1000 है। यदि 700 परिवार हिन्दी का अखबार मंगाते हों और 400 परिवार अंग्रेजी का, तो कितने परिवार दोनों भाषाओं के अखबार मंगाते हैं?
- निम्न प्रश्नों में N को सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय लीजिए।
45. यदि  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  तो बताइए कि निम्नांकित कथन ‘सत्य’ है या ‘असत्य’।
- $9 \in A$
  - $10 \in A$
  - $3 \notin A$
  - $\emptyset \in A$
  - $4 \notin A$
  - $\{2, 4\} \in A$
  - $7 \in A$
  - $5 \notin A$
46. (a) शब्द MATHEMATICS के अक्षरों का समुच्चय लिखिए।  
(b) शब्द SANITATION के स्वर का समुच्चय लिखिए।  
(c) शब्द HYGIENE में अक्षरों का समुच्चय लिखिए।
47. समुच्चय  $A = \{a, b, c, d\}$  तथा  $B = \{e, f, g\}$  के अवयवों की संख्या लिखिए।
48. यदि  $A, 5$  से विभाज्य प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय है, तो इसे सारणी विधि से लिखिए।
49. समुच्चय  $B = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  को नियम विधि से लिखकर समुच्चय का प्रकार भी लिखिए।
50. समुच्चय  $A = \{x : x \in \text{ तथा } x < 9\}$  को सारणी विधि से लिखकर समुच्चय का प्रकार ज्ञात कीजिए।
51. समुच्चय  $A = \{6, 7, 9, 10, 12\}$  तथा  $B = \{10, 9, 13\}$ ,  $A \cup B, A \cap B$  ज्ञात कीजिए।  
 $A = \{4, 5, 6, 7, 9\}$ ,  $s \{3, 4, 5, 6\}$  को वैन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।