इकाई-11
चर राशियों का गुणनखण्ड, दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड, द्विघातीय त्रिपदीय व्यंजकों का गुणनखण्ड

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित की जानकारी होगी—

(1) गुणनखण्ड की संकल्पना

(2) $(ax + ay)$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड

(3) समूह बनाकर व्यंजकों का गुणनखण्ड या $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड।

(4) दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड

(5) द्विघातीय त्रिपदीय व्यंजकों का गुणनखण्ड

(1) गुणनखण्ड की संकल्पना :

प्रशिक्षु प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखण्ड से पूर्व परिचित है। इस इकाई में आप लोग बीजीय व्यंजकों के गुणनखण्ड से परिचित होंगे।

आप जानते हैं कि एक प्राकृतिक संख्या को अन्य प्राकृतिक संख्याओं के गुणनखण्ड के रूप में कई प्रकार से लिख सकते हैं। जैसे—

(i) $25 = 1 \times 25$; $25 = 5 \times 5$

(ii) $30 = 1 \times 30$; $30 = 2 \times 15$; $30 = 3 \times 10$; $30 = 5 \times 6$

इस प्रकार आप देख रहे हैं कि 25 को 1 व 5 से तथा 30 को 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 से भाग देने पर भागफल शून्य प्राप्त होगा। इस प्रकार 5 को 25 का एक गुणनखण्ड तथा 2, 3, 5 संख्या 30 के अभाज्य गुणनखण्ड है।

जब कोई संख्या अभाज्य गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में लिखी रहती है तो यह उस संख्या का अभाज्य गुणनखण्ड रूप कहलाता है।

30 को अभाज्य गुणनखण्ड रूप में $2 \times 3 \times 5$ लिखते हैं। इसी प्रकार 105 का अभाज्य गुणनखण्ड रुप $3 \times 5 \times 7$ है। अब आप बीजीय व्यंजक $3x^2$, $7xy$, $2x^4y$ को गुणनफल रूप में कैसे लिखेंगे।

बीजीय व्यंजक को निम्नांकित प्रकार से लिखेंगे—

बीजीय $3x^2 = 1 \times 3 \times x \times x$

$7xy = 1 \times 7 \times x \times y$

$2x^4y = 1 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times y$

> ध्यान दीजिए कि 1 पद $3x^2$, $7xy$ तथा $2x^4y$ का एक गुणनखण्ड है, क्योंकि
>
> $3x^2 = 1 \times 3 \times x \times x$
>
> $7xy = 1 \times 7 \times x \times y$
>
> $2x^4y = 1 \times 2 \times x \times x \times x \times x \times y$
>
> वास्तव में, 1 प्रत्येक पद का एक गुणनखण्ड होता है। जब तक विशेष रूप से आवश्यक न हो, हम 1 को किसी भी पद का अलग से गुणनखण्ड नहीं लिखते हैं।

उपरोक्त बीजीय व्यंजकों के पद, गुणनखण्डों के गुणनफलों के रूप में लिखा गया है। अतः $3x^2$ के गुणनखण्ड 3 तथा x होंगे तथा $7xy$ के गुणनखण्ड 7, x तथा y है। इस प्रकार—

> किसी संख्या या बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड वे सभी संख्याएँ या व्यंजक हैं जिनका गुणनफल उस संख्या या बीजीय व्यंजक के बराबर है।

कुछ बीजीय व्यंजक गुणनखण्ड रूप में ही होते हैं जिन्हें देखकर ही गुणनखण्ड स्पष्ट ज्ञात कर सकते हैं। जैसे—

(i) $5x\ (y + 3) = 5 \times x \times (y + 3)$ के गुणनखण्ड 5, x तथा $(y + 3)$ है।

(ii) $3\ (y + 1)\ (y + 2) = 3 \times (y + 1) \times (y + 2)$ के गुणनखण्ड 3, $(y + 1)$ तथा $(y + 2)$ है।

(iii) $6x\ (x + 1)\ (x + 4) = 3 \times 2 \times x \times (x + 1) \times (x + 4)$ के गुणनखण्ड 3, 2, x; $(x + 1)$ तथा $(x + 4)$ है।

कई व्यंजक जैसे $8x + 8y$, $x^2 + 5x$ और $x^2 + 5x + 6$ आदि पर ध्यान दीजिए। इस प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड किस प्रकार से ज्ञात करेंगे।

इस प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए क्रमबद्ध विधियों का उपयोग करना होगा।

(2) $(ax + ay)$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड (सार्वगुणनखण्ड विधि)

क्रियाकलाप

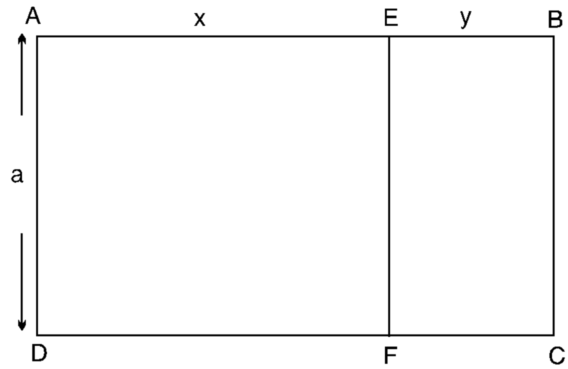
एक आयत $ABCD$ बनाइये जिसकी लम्बाई AB के दो भाग कीजिए। आयत के दोनों भाग की लम्बाई क्रमशः x तथा y है। मान लीजिए आयत की चौड़ाई a है।

आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल = आयत की लम्बाई × आयत की चौड़ाई

$= AB \times AD$

$= (x + y)\ a$

$= a\ (x + y)$



आप देख रहे हैं कि आयत $ABCD$ दो आयत $AEFD$ तथा आयत $EBCF$ में विभक्त है।

अतः आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल = आयत $AEFD$ का क्षेत्रफल + आयत $EBCF$ का क्षेत्रफल

$= x \times a + y \times a$

$= ax + ay$

स्पष्ट है कि आयत $ABCD$ का क्षेत्रफल दो स्थितियों में ज्ञात किया गया है। अतः

$a\ (x + y) = ax + ay$

या $ax + ay = a\ (x + y)$

अतः $ax + ay$ के गुणनखण्ड a और $(x + y)$ है।

उदाहरण 1. $6x + 6y + 6z$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $6x + 6y + 6z$ में प्रत्येक पद में 6 से गुणा किया गया है। अतः 6 सर्वनिष्ठ गुणनखण्ड है।

$\therefore\ 6x + 6y + 6z = 6\ (x + y + z)$

अर्थात् व्यंजक के गुणनखण्ड क्रमशः 6 तथा $(x + y + z)$ है।

उदाहरण 2. $4x + 12y + 24a$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक $4x + 12y + 24a = 4 \times x + 4 \times 3 \times y + 4 \times 6 \times a$

$= 4\ (x + 3y + 6a)$ ($\because$ 4 सार्वनिष्ठ गुणनखण्ड है)।

अर्थात् व्यंजक के गुणनखण्ड क्रमशः 4 तथा $(x + 3y + 6a)$ है।

उदाहरण 3. $6x^2y + 3xy^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $6x^2y + 3xy^2 = \underline{3} \times 2 \times \underline{x} \times x \times \underline{y} + \underline{3} \times \underline{x} \times y \times \underline{y}$

$= 3\ x \times y \times (2x + y)$ ($\because 3xy$ सार्वनिष्ठ गुणनखण्ड है)

अतः व्यंजक के गुणनखण्ड $3, x, y$ तथा $(2x + y)$ है।

(3) व्यंजक $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ के प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड (समूह बनाकर)

व्यंजक $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$ में चार पद हैं। इन चार पदों में कोई भी गुणनखण्ड सर्वनिष्ठ नहीं हैं। अतः इस व्यंजक का गुणनखण्ड करने के लिए पदों का समूह बनाते हैं। प्रथम दो पदों को एक साथ लेने पर उसमें a उभयनिष्ठ है तथा अन्तिम दोनों पदों में b उभयनिष्ठ है। इस प्रकार—

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 &= (ax^2 + ay^2) + (bx^2 + by^2) \\ &= a\,(x^2 + y^2) + b\,(x^2 + y^2) \quad [\text{पुनः } (x^2 + y^2) \text{ उभयनिष्ठ है}] \\ &= (x^2 + y^2)\,(a + b) \end{aligned}$$

इस प्रकार इस व्यंजक का गुणनखण्ड $(x^2 + y^2)$ तथा $(a + b)$ है।

इस व्यंजक को आप अन्य प्रकार से भी हल कर सकते हैं। आप $(ax^2 + bx^2)$ तथा $(ay^2 + by^2)$ के समूह बना लें। प्रथम समूह में x^2 उभयनिष्ठ है तथा द्वितीय समूह में y^2 उभयनिष्ठ है। इस प्रकार—

$$\begin{aligned} ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 &= (ax^2 + bx^2) + (ay^2 + by^2) \\ &= x^2\,(a + b) + y^2\,(a + \mathrm{b}) \quad [\text{पुनः } (a + b) \text{ उभयनिष्ठ है।}] \\ &= (a + b)\,(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

अतः व्यंजक का गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(x^2 + y^2)$ है।

इस प्रकार आपने देखा कि दोनों विधियों से गुणनखण्ड करने पर, उक्त व्यंजक का गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(x^2 + y^2)$ है।

उदाहरण 4. व्यंजक $x^2 + yz + xy + xz$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक $x^2 + yz + xy + xz$ में पहले और तीसरे पद क्रमशः x^2 और xy में x उभयनिष्ठ गुणनखण्ड हैं तथा दूसरे और चौथे पद में z उभयनिष्ठ हैं। अतः व्यंजक के पदों को इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह का एक खण्ड उभयनिष्ठ हो। इस प्रकार

$$\begin{aligned} x^2 + yz + xy + xz &= (x^2 + xy) + (yz + xz) \\ &= x\,(x + y) + z\,(y + x) \\ &= x\,(x + y) + z\,(x + y) (\because\ x + y = y + x) \\ &= (x + y)\,(x + z) \qquad \{(x + y) \text{ उभनिष्ठ है}\} \end{aligned}$$

उदाहरण 5. $3a^2 - xa^2 + yb^2 - 3b^2 + 4ca^2 - 4cb^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक में छः पद है। पहले पद तथा चौथे पद में 3 उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है, दूसरे पद $-xa^2$ और तीसरे पद $+xb^2$ में x उभयनिष्ठ है, पाँचवें पद $4ca^2$ तथा छठें पद $(-4cb^2)$ में $4c$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।

$\therefore$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के अनुसार समूह बनाने पर

व्यंजक $3a^2 - xa^2 + xb^2 - 3b^2 + 4ca^2 - 4cb^2 = (3a^2 - 3b^2) + (-xa^2 + xb^2) + (4ca^2 - 4cb^2)$

$= 3\ (a^2 - b^2) - x\ (a^2 - b^2) + 4c\ (a^2 - b^2)$

$= (a^2 - b^2)\ (3 - x + 4c)$ $\{(a^2 - b^2$ उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है$\}$

उपरोक्त व्यंजक में ध्यान दें कि प्रथम पद व द्वितीय पद में a^2 उभयनिष्ठ है, चतुर्थ व तृतीय पद में b^2 उभयनिष्ठ तथा पाँचवें और छठें पद में $4c$ उभयनिष्ठ है। परन्तु इनका समूह बनाने से व्यंजक का गुणनखण्ड नहीं निकाला जा सकता है। विचार करके बताइये कि ऐसा क्यों?

उपर्युक्त उदाहरणों से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि :

> चार पदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड करते समय हम उन्हें दो समूहों में इस प्रकार व्यवस्थित करते हैं कि प्रत्येक समूह में एक खण्ड उभयनिष्ठ हो। इन समूहों के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को एक गुणनखण्ड के रूप में लेते हुए अन्य गुणनखण्ड को यथास्थान रखकर अग्रिम क्रिया करते हैं।

(4) दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक के गुणनखण्ड

दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक अर्थात् $a^2 - b^2$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम व्यंजक को व्यवस्थित करने की आवश्यकता होगी। जैसे–

$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2$(एक ही पद ab को घटाने तथा जोड़ने पर)

$= (a^2 - ab) + (ab - b^2)$ (समूह बनाने पर)

$= a\ (a - b) + b\ (a - b)$

$= (a - b)\ (a + b)$

अतः $(a - b)$ तथा $(a + b)$, व्यंजक $a^2 - b^2$ के दो गुणनखण्ड हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजक का गुणनखण्ड उन वर्गों के वर्गमूल के योग तथा उनके अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है।

उदाहरण 6. व्यंजक $x^2 - 100$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : सर्वप्रथम व्यंजक को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लिखते हैं।

$$x^2 - 100 = (x)^2 - (10)^2$$

अब वर्गों $(x)^2$ तथा $(10)^2$ के वर्गमूल क्रमशः x तथा 10 ज्ञात करते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखण्ड के सूत्र का प्रयोग करके दिये गये व्यंजक के गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$x^2 - 100 = (x)^2 - (10)^2$

$= (x - 10)\ (x + 10)$

अतः व्यंजक $(x^2 - 100)$ के दो गुणनखण्ड क्रमशः $(x - 10)$ तथा $(x + 10)$ है।

उदाहरण 7. $36x^2 - 25y^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $36x^2 - 25y^2 = (6x)^2 - (5y)^2$

$= (6x - 5y)\ (6x + 5y)$

अतः $(6x - 5y)$ तथा $(6x + 5y)$ व्यंजक के दो गुणनखण्ड हैं।

उदाहरण 8. $4a^2 - b^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $4a^2 - b^2 = (2a)^2 - (\mathrm{b})^2$

$= (2a + b)\ (2a - b)$

अतः $(2a + \mathrm{b})$ तथा $(2a - b)$ व्यंजक के दो गुणनखण्ड हैं।

उदाहरण 9. $72a^2 - 98b^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $72a^2 - 98b^2 = 2 \times 36a^2 - 2 \times 49ab^2$

$$= 2\{36a^2 - 49b^2\}$$
$$= 2\{(6a)^2 - (7b)^2\}$$
$$= 2(6a + 7b)(6a - 7b)$$

अतः व्यंजक के तीन गुणनखण्ड क्रमशः 2, $(6a + 7b)$ तथा $(6a - 7b)$ है।

उदाहरण 10. $144x^2 - 1$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $144x^2 - 1 = (12x)^2 - (1)^2$

$= (12x + 1)\ (12x - 1)$

इस प्रकार व्यंजक के दो गुणनखण्ड $(12x + 1)$ तथा $(12x - 1)$ हैं।

उदाहरण 11. $x^4 - y^4$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $x^4 - y^4 = (x^2)^2 - (\mathrm{y}^2)^2$

$= (x^2 + y^2)\ (x^2 - y^2)$

$= (x^2 + y^2)\ [(x^2 - y^2]$

$= (x^2 + y^2)\ (x + y)\ (x - y)$

अतः व्यंजक के तीन गुणनखण्ड $(\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)$, $(x + y)$ तथा $(x - y)$ हैं।

उदाहरण 12. $\frac{49}{x^2} - \frac{y^2}{36}$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{49}{x^2}-\frac{y^2}{36}=\left(\frac{7}{x}\right)^2-\left(\frac{y}{6}\right)^2$

$=\left(\frac{7}{x}+\frac{y}{6}\right)\left(\frac{7}{x}-\frac{y}{6}\right)$

अतः व्यंजक के दो गुणनखण्ड $\left(\frac{7}{x}+\frac{y}{6}\right)$ तथा $\left(\frac{7}{x}-\frac{y}{6}\right)$ हैं।

(5) $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड

प्रथम विधि—सर्वसमिका का प्रयोग करके

आप सभी जानते हैं कि $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

इस सर्वसमिका को निम्नांकित रूप में भी लिख सकते हैं।

$a^2 + 2ab+b^2 = (a + b)^2$

$= (a + b). (a + b)$

अतः $a^2 + 2ab + b^2$ व्यंजक का गुणनखण्ड $(a +b)$ तथा $(a + b)$ है।

द्वितीय विधि—समूह बनाकर

प्रशिक्षु समूह बनाकर व्यंजकों का गुणनखण्ड करना सीख चुके हैं। अतः $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखण्ड समूह बनाकर ज्ञात करेंगे।

चूँकि $a^2\ 2ab + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$

$= (a^2 + ab) + (ab + b^2)$

$= a\ (a + b) + b\ (a + b)$

$= (a + \text{b})\ (a + b)$

अतः $a^2 + 2ab + b^2$ के गुणनखण्ड $(a + b)$ तथा $(a + b)$ है।

उदाहरण 13. $x^2 + 10x + 25$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका का प्रयोग करने पर—

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \times x \times 5 + (5)^2$

$= (x + 5)^2$

$= (x + 5)\ (x + 5)$ $\qquad [\because a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2]$

अतः $x^2 + 10x + 25$ का गुणनखण्ड $(x + 5)$ तथा $(x + 5)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 5x + 5x + 25$

$$= (x^2 + 5x) + (5x + 25)$$
$$= x(x + 5) + 5(x + 5)$$
$$= (x + 5)(x + 5)$$

अतः $x^2 + 10x + 25$ के गुणनखण्ड $(x + 5)$ तथा $(x + 5)$ है।

उदाहरण 14. $a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{9}$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा—

$$a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{9}=a^2+2\times a\times\frac{4}{3}+\left(\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=\left(a+\frac{4}{3}\right)^2$$
$$=\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a+\frac{4}{3}\right)$$

अतः $a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{9}$ के गुणनखण्ड $\left(a+\frac{4}{3}\right)$ तथा $\left(a+\frac{4}{3}\right)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$$a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{9}=a^2+\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}a+\frac{16}{9}$$
$$=\left(a^2+\frac{4}{3}a\right)+\left(\frac{4}{3}a+\frac{16}{9}\right)$$
$$=a\left(a+\frac{4}{3}\right)+\frac{4}{3}\left(a+\frac{4}{3}\right)$$
$$=\left(a+\frac{4}{3}\right)\left(a+\frac{4}{3}\right)$$

अतः $a^2+\frac{8}{3}a+\frac{16}{9}$ व्यंजक के गुणनखण्ड $\left(a+\frac{4}{3}\right)$ तथा $\left(a+\frac{4}{3}\right)$ है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि $a^2 + 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड प्रत्येक विधि से $(a + b)$ तथा $(a + b)$ है।

(6) व्यंजक $(a^2 - 2ab + b^2)$ के रूप में व्यंजकों का गुणनखण्ड

प्रथम विधि—सर्वसमिका का प्रयोग करके–

आप जानते हैं कि

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

इस सर्वसमिका को आप निम्नांकित रूप में भी लिख सकते हैं कि

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$
$$= (a - b)(a - b)$$

अतः $a^2 - 2ab + b^2$ का गुणनखण्ड $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

द्वितीय विधि—समूह बनाकर

व्यंजक $a^2 - 2ab + b^2$ का गुणनखण्ड समूह बनाकर भी ज्ञात कर सकते हैं।

$$a^2 - 2ab + b^2 = a^2 - ab - ab + b^2$$
$$= (a^2 - ab) - (ab - b^2)$$
$$= a(a - b) - b(a - b)$$
$$= (a - b)(a - b)$$

अतः $a^2 - 2ab + b^2$ के गुणनखण्ड $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

उदाहरण 15. $x^2 - 24x + 144$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा–

$$x^2 - 24x + 144 = x^2 - 2 \times x \times 12 + (12)^2$$
$$= (x - 12)^2$$
$$= (x - 12)(x - 12)$$

अतः $x^2 - 24x + 144$ का गुणनखण्ड $(x - 12)$ तथा $(x - 12)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा–

$$x^2 - 24x + 144 = x^2 - 12x - 12x + 144$$
$$= (x^2 - 12x) - (12x - 144)$$
$$= x(x - 12) - 12(x - 12)$$
$$= (x - 12)(x - 12)$$

अतः $x^2 - 24x + 144$ का गुणनखण्ड $(x - 12)$ तथा $(x - 12)$ है।

उदाहरण 16. $4x^2 - 12xy + 9y^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : (i) सर्वसमिका के प्रयोग द्वारा—

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2. (2x) . (3y) + (3y)^2.$

जो $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है। अतः सूत्र के $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के अनुसार

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x)^2 - 2. (2x). (3y) + (3y)^2$$
$$= (2x - 3y)^2$$
$$= (2x - 3y) (2x - 3y)$$

इस प्रकार व्यंजक के दो गुणनखण्ड $(2x - 3y)$ तथा $(2x - 3y)$ है।

(ii) समूह विधि द्वारा—

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 = 4x^2 - 6xy - 6xy + 9y^2$$
$$= (4x^2 - 6xy) - (6xy - 9y^2)$$
$$= 2x (2x - 3y) - 3y (2x - 3y)$$
$$= (2x - 3y) (2x - 3y)$$

अतः $4x^2 - 12xy + 9y^2$ का गुणनखण्ड $(2x - 3y)$ तथा $(2x - 3y)$ है।

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि $a^2 - 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड प्रत्येक विधि से (सर्वसमिका का प्रयोग तथा समूह बनाकर) $(a - b)$ तथा $(a - b)$ है।

(7) $x^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड

आइए, अब चर्चा करें कि हम एक चर वाले व्यंजकों, जैसे $x^2 + 8x + 12$, $x^2 - x - 6$, $y^2 + 2y - 15$, इत्यादि के गुणनखण्ड किस प्रकार कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि ये व्यंजक $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ तथा $(a^2 - b^2)$ के प्रकार के नहीं है। परन्तु यह व्यंजक $x^2 + (a + b) x + ab$ के रूप का है। अतः $x^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का गुणनखण्ड सर्वसमिका $x^2 + (a + b) x + ab = (x + a) (x + b)$ की सहायता से ज्ञात कर सकते हैं।

व्यंजक $x^2 + bx + c$ के प्रकार के बीजीय व्यंजक के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए, हम c (अर्थात अचर पद) के दो गुणनखण्ड m और n इस प्रकार ज्ञात करते हैं कि

$mn = c$ और $m + n = b$ हो।

तब इस व्यंजक को निम्नांकित रूप से लिखते हैं—

$$x^2 + bx + c = x^2 + (m + n) x + mn$$
$$= x^2 + mx + nx + mn$$
$$= (x^2 + mx) + (nx + mn)$$
$$= x (x + m) + n (x + m)$$

$= (x + m) (x + n)$ जो कि वांछित गुणनखण्ड है।

उदाहरण 17. $x^2 + 6x + 8$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $x^2 + 6x + 8$ का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए अचर पद 8 के ऐसे दो गुणनखण्ड निकालते हैं जिन्हें गुणा करने पर 8 तथा जोड़ने पर 6 आए। अतः हम देखते हैं कि $8 = 4 \times 2$ और $4 + 2 = 6$ है।

इसलिए
$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= x^2 + (4 + 2)\, x + 4 \times 2 \\ &= x^2 + 4x + 2x + 4 \times 2 \\ &= (x^2 + 4x) + (2x + 4 \times 2) \\ &= x\,(x + 4) + 2\,(x + 4) \\ &= (x + 4)\,(x + 2) \end{aligned}$$

अतः $x^2 + 6x + 8$ के दो गुणनखण्ड $(x + 4)$ तथा $(x + 2)$ हैं।

उदाहरण 18. $y^2 - 4y - 12$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : व्यंजक $y^2 - 4y - 12$ की तुलना $\{x^2 + (a + b)\, x + ab\}$ से करने पर $a + b = -4$ तथा $ab = -12$

चूँकि $ab = -12$ से स्पष्ट है कि a और b में से एक ऋणात्मक है तथा $a + b = -4$ का अर्थ है कि बड़े संख्यात्मक मान वाला ऋणात्मक है। अतः दोनों सम्बन्धों को सन्तुष्ट करने के लिए अचर पद 12 के दो गुणनखण्ड 2 व -6 होंगे। अतः -12 के दो गुणनखण्ड -6 और 2 है। अतः इस प्रकार हम देखते हैं कि :

$$ab = -12 = -6 \times 2; \; a + b = -4 = -6 + 2$$

अतः
$$\begin{aligned} y^2 - 4y - 12 &= y^2 - 6y + 2y - 12 \\ &= (y^2 - 6y) + (2y - 12) \\ &= y\,(y - 6) + 2\,(y - 6) \\ &= (y - 6)\,(y + 2) \end{aligned}$$

अतः $y^2 - 4y - 12$ के गुणनखण्ड $(y - 6)$ तथा $(y + 2)$ है।

(8) $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखण्ड

अब तक आप प्रशिक्षुओं ने $x^2 + bx + c$ प्रकार के त्रिपदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड करना सीखा है। अब आप $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का गुणनखण्ड ज्ञात करना सीखेंगे।

दोनों प्रकार के व्यंजकों में क्या अन्तर है?

दोनों प्रकार के व्यंजकों की तुलना करने पर स्पष्ट है कि $ax^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक a है जबकि $x^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक 1 है।

अतः $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्यायें m और n प्राप्त करते हैं कि $m + n = b$ तथा $mn = ac$

इस प्रकार m और n संख्यायें ज्ञात करके व्यंजक $ax^2 + bx + c$ का गुणनखण्ड व्यंजक $x^2 + bx + c$ के तरीके से ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 19. $2x^2 + 13x + 15$ के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : $2x^2 + 13x + 15$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्याएँ m तथा n ज्ञात करना है कि

$m + n = 13$ तथा $mn = 2 \times 15 = 30$

स्पष्टतः $m = 10$ तथा $n = 3$ उपयुक्त संख्याएँ हैं।

अतः
$$\begin{aligned} 2x^2 + 13x + 15 &= 2x^2 + (10 + 3)\ x + 15 \\ &= 2x^2 + 10x + 3x + 15 \\ &= (2x^2 + 10x) + (3x + 15) \\ &= 2x\ (x + 5) + 3\ (x + 5) \\ &= (x + 5)\ (2x + 3) \end{aligned}$$

इस प्रकार $(x + 5)$ तथा $(2x + 3)$ व्यंजक $2x^2 + 13x + 15$ के दो गुणनखण्ड है।

उदाहरण 20. $3x^2 + 7x - 6$ का गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $3x^2 + 7x - 6$ के गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए ऐसी दो संख्या m तथा n चाहिए कि :

$m + n = 7$ तथा $mn = 3 \times -6 = -18$

चूँकि $9 + (-2) = 7$ तथा $9 \times (-2) = -18$

अतः $m = 9$ और $n = -2$ उपयुक्त संख्याएँ हैं।

इस प्रकार
$$\begin{aligned} 3x^2 + 7x - 6 &= 3x^2 + \{9 + (-2)\}x - 6 \\ &= 3x^2 + \{9 + (-2)\}x - 6 \\ &= 3x^2 + 9x - 2x - 6 \\ &= (3x^2 + 9x) - (2x + 6) \\ &= 3x\ (x + 3) - 2\ (x + 3) \\ &= (x + 3)\ (3x - 2) \end{aligned}$$

अतः $3x^2 + 7x - 6$ के गुणनखण्ड $(x + 3)$ तथा $(3x - 2)$ है।

मूल्यांकन

1. $3xy + 9y$ का गुणनखण्ड है—

   (i) $3x$ (ii) $3xy$

   (iii) $3y(x + 3)$ (iv) $3x(y + 3)$

2. $100^2 - 10^2$ का मान है—

   (i) 110 (ii) 90

   (iii) 1000 (iv) 9900

3. $(1 - x^2)$ का एक गुणनखण्ड है—

   (i) $(1 - x)$ (ii) $(x - 1)$

   (iii) $x + 2$ (iv) इनमें से कोई नहीं

4. $64a^2 - 225b^2$ का गुणनखण्ड है—

   (i) $(8a + 15b)(8a - 15b)$ (ii) $(15a + 8b)(8a - 15b)$

   (iii) $(8a + 15b)(15a - 8b)$ (iv) इनमें से कोई नहीं

5. $25x^2 - 30xy + 9y^2$ का गुणखण्ड है—

   (i) $(5x + 3y)(5x - 3y)$ (ii) $(5x - 3y)^2$

   (iii) $(3x - 5y)^2$ (iv) $(5x + 3y)^2$

6. $27a^2b + 18ab^2$ के गुणनखण्ड कीजिए।

7. $18x^3 + 12x^4 - 10x^2$ का गुणनखण्ड कीजिए।

8. $p(p - 1) + 2(p - 1) + x(p - 1)$ का गुणनखण्ड कीजिए।

9. $a^3 - a^2 - ab + a + b - 1$ का गुणनखण्ड कीजिए।

10. $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

11. $x^2 - 12xy + 36y^2$ का गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए।

12. निम्नलिखित को गुणनखण्ड की सहायता से सरल कीजिए—

    (i) $\frac{4x-4y}{7y-7x}$ (ii) $\frac{a^2b+b^2a}{a+b}$

    (iii) $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ (iv) $\frac{3x^2-3y^2}{4x+4y}$

13. निम्नलिखित के मान गुणनखण्ड की सहायता से ज्ञात कीजिए—

(i) $101 \times 55 + 99 \times 55$ (ii) $7 \times 45 + 9 \times 7 + 14 \times 18$

14. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

(i) $9x^2 + 6x + 1$ (ii) $x^2 + 3x + \frac{9}{4}$ (iii) $36 + 12x + x^2$

15. निम्नांकित के गुणनखण्ड ज्ञात कीजिए—

(i) $x^3 - 144x$ (ii) $9a^2 - \frac{25}{9a^2}$

(iii) $(a + b)^2 - (a - b)^2$

(iv) $x^4 - 625$ (v) $16a^4 - 81b^4$

(vi) $25\,(a - 5b)^2 - 4\,(a - 3b)^2$

16. निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए—

(i) $x^2 - 18x + 65$ (ii) $3x^5 - 18x^4 - 48\,x^3$

(iii) $a^2\,b^2 - 3ab - 18$ (iv) $2x^2 + 7x + 5$

(v) $12x^3 - 14x^2 - 10x$.

———

इकाई-12
बीजगणितीय व्यंजकों में एकपदीय तथा द्विपदीय व्यंजकों से भाग

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित बिन्दुओं की जानकारी होगी—

(i) एकपदी का एक अन्य एकपदी से भाग

(ii) एक बहुपद का एक एकपदी से भाग

(iii) बहुपद का बहुपद से विभाजन

(iv) बहुपद का द्विपदीय व्यंजक से विभाजन

प्रशिक्षु बीजीय व्यंजकों के जोड़, घटाने एवं गुणा से पूर्व परिचित हैं। इस इकाई में आप लोग बीजीय व्यंजकों को एक पदीय तथा द्विपदीय व्यंजकों से विभाजन की प्रक्रिया से परिचित होंगे।

आप लोग जानते हैं कि विभाजन, गुणन की प्रतिलोम संक्रिया है। इस प्रकार $4 \times 3 = 12$ से $12 \div 3 = 4$ या $12 \div 4 = 3$ प्राप्त होता है।

यही हम बीजीय व्यंजकों के विभाजन (या भाग देने) के लिए भी कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

(i) $3x \times 5x^3 = 15x^4$

अतः $15x^4 \div 3x = 5x^3$

या $15x^4 \div 5x^3 = 3x$

(ii) $6y\ (y + 7) = 6y^2 + 42y$

अतः $(6y^2 + 42y) \div 6y = y + 7$

या $(6y^2 + 42y) \div (y + 7) = 6y$

अब हम ध्यानपूर्वक देखेंगे कि एक व्यंजक को अन्य व्यंजक से किस प्रकार विभाजित किया जा सकता है।

(i) एकपदी का एक अन्य एकपदी से विभाजन

(a) $8x^3 \div 2x$ पर विचार कीजिए।

हम $8x^3$ और $2x$ को गुणनखण्ड के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$8x^3 = 2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x$

$2x = 2 \times x$

अब हम $8x^3$ के गुणनखण्डों के समूह बनाते हैं।

$8x^3 = 2 \times x\ (2 \times 2 \times x \times x) = 2x \times 4x^2$

इस प्रकार $8x^3 \div 2x = 4x^2$

उपर्युक्त विभाजन को इस प्रकार से भी हल कर सकते हैं।

$$\begin{aligned} 8x^3 \div 2x &= \frac{8x^3}{2x} \\ &= \frac{2 \times 2 \times 2 \times x \times x \times x}{2 \times x} \\ &= 2 \times 2 \times x \times x \\ &= 4x^2 \end{aligned}$$

(b) आइए अब एक पद $15\ x^2y^3$ में एक पद $-3xy$ से भाग देने की क्रिया को सीखेंगे।

चूँकि $15\ x^2y^3 = (-\ 3xy) \times (-5xy^2)$

अतः $15x^2y^3 \div (-3xy) = -\ 5xy^2$

अर्थात् $\dfrac{15x^2y^3}{-3xy} = -5xy^2$

ध्यान दें, $\dfrac{15}{-3} = -5$ और $\dfrac{x^2y^3}{xy} = xy^2$

इस प्रकार एक पद में एक पद से भाग देते समय निम्नांकित नियमों की सहायता लेते हैं—

1. दो एकपदीय व्यंजकों के भागफल का गुणांक, उन व्यंजकों के गुणांकों का भागफल होता है।

उदाहरणार्थ, उपर्युक्त में $\dfrac{15}{-3} = -5$ तथा $\dfrac{8}{2} = 4$

2. दो एकपदीय व्यंजकों के भागफल का चर अंश उन एकपदीय व्यंजकों के चर अंशों का भागफल होता है। उदाहरणार्थ उपर्युक्त में $\dfrac{x^2y^3}{xy} = xy^2$ तथा $\dfrac{x^3}{x} = x^2$

प्रयास कीजिए—

उदाहरण 1. निम्नलिखित विभाजन कीजिए–

(i) $-20\ x^5 \div 4x$ (ii) $24a^3b^2 \div 3a^2b$

(iii) $7x^2y^2z^2 \div 14xy$ (iv) $42x^6y^3 \div -7x^2y^2$

(v) $-32p^3q^4 \div (-8\ pq^2)$

(ii) एक बहुपद में एकपदी से भाग

आइए एक त्रिपद $21x^2 + 24x^3 - 9x$ में एकपदीय व्यंजक $3x$ से भाग पर विचार करें। इस भाग की क्रिया को निम्नांकित दो प्रक्रमों में करते हैं।

प्रक्रम 1— भाज्य के पदों को घातों के अवरोही क्रम में पुनर्व्यवस्थित करते हैं, जैसे–

भाज्य $= 21x^2 + 24x^3 - 9x$

$= 24x^3 + 21x^2 - 9x$

प्रक्रम 2— अब बहुपद के प्रत्येक पद को दिये गये एकपदी व्यंजक $3x$ से नियमानुसार भाग देते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि :

$$24x^3 + 21x^2 - 9x \div 3x = \frac{24x^3}{3x} + \frac{21x^2}{3x} - \frac{9x}{3x}$$
$$= 8x^2 + 7x - 3$$

टिप्पणी : भाजक के एकपदी होने की दशा में भाज्य को अवरोही क्रम में व्यवस्थित किये बिना भी प्रक्रम 2 के अनुसार भाग दिया जा सकता है। भाग देने पर प्रत्येक दशा में भागफल समान होगा। विचार करके इसका सत्यापन करिये।

प्रयास कीजिए :

उदाहरण 2. निम्नलिखित का भागफल ज्ञात कीजिए—

(i) $8x^2 + 20x^4 - 12x^3 \div 4x^2$ (ii) $32\ (x^2yz + xy^2z + xyz^2) \div 8xyz$

(iii) $5x^4 + 15x^2 - 4x \div 5x$(iv) $4x^5 + 5x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x \div (-2x)$

(iii) बहुपद का बहुपद से विभाजन

बहुपद व्यंजक $55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ को बहुपद $11x\ (x - 8)$ से भाग देने पर विचार कीजिए। बहुपद व्यंजक $55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2)$ के गुणनखण्ड करने पर, हमें प्राप्त होता है :

$55\ (x^4 - 5x^3 - 24x^2) = 5 \times 11 \times x^2\ (x^2 - 5x - 24)$

$= 5 \times 11 \times x^2\ [x^2 - 8x + 3x - 24]$

$= 5 \times 11 \times x^2\ [(x^2 - 8x) + (3x - 24)]$

$= 5 \times 11 \times x^2 [x (x - 8) + 3 (x - 8)]$

$= 5 \times 11 \times x^2 (x - 8) (x + 3)$

अतः $55(x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 11x(x-8) = \dfrac{5 \times 11 \times x^2 (x-8)(x+3)}{11x(x-8)}$

$= 5 \times x \times (x+3)$

$= 5x(x+3)$

आइये अब निम्नलिखित उदाहरण द्वारा उपरोक्त क्रिया को और स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3. निम्नलिखित का विभाजन कीजिए—

(i) $24 (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x (x - 3)$

(ii) $25x (3x^6 - 13x^5 + 4x^4) \div 5x^2 (x - 4)$

(iii) $44 (x^4 - 5x^3 - 24x^2) \div 44x (x + 3)$

हल: (i) $24 (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x (x - 3)$

भाज्य $= 24 (x^3 - 7x^2 + 12x)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x (x^2 - 7x + 12)$

(24 के गुणनखण्ड तथा कोष्ठक में से सार्वगुणनखण्ड x बाहर करने पर)

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x [x^2 - 4x - 3x + 12]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x [(x^2 - 4x) - (3x - 12)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x [x (x - 4) - 3 (x - 4)]$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x (x - 4) (x - 3)$

अतः $24 (x^3 - 7x^2 + 12x) \div 8x (x - 3)$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x (x - 4) (x - 3) \div 8x (x - 3)$

$= \dfrac{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times x(x-4)(x-3)}{8x(x-3)}$

$= 3(x-4)$

(ii) $\dfrac{25x(3x^6 - 13x^5 + 4x^4)}{5x^2(x-4)} = \dfrac{5 \times 5 \times x \times x^4 (3x^2 - 13x + 4)}{5 \times x^2 \times (x-4)}$

$= \dfrac{5 \times 5 \times x \times x^4 [3x^2 - 12x - x + 4]}{5 \times x^2 \times (x-4)}$

$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4[(3x^2 - 12x) - (x - 4)]}{5 \times x^2 \times (x - 4)}$$
$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4[3x(x - 4) - 1(x - 4)]}{5 \times x^2 \times (x - 4)}$$
$$= \frac{5 \times 5 \times x \times x^4 (x - 4)(3x - 1)}{5 \times x^2 \times (x - 4)}$$
$$= 5x^3(3x - 1)$$

(iii) $$\frac{44(x^4 - 5x^3 - 24x^2)}{44x(x+3)} = \frac{44 \times x^2(x^2 - 5x - 24)}{44x(x+3)}$$
$$= \frac{44 \times x^2[x^2 - 8x + 3x - 24]}{44 \times x \times (x+3)}$$
$$= \frac{44 \times x^2 \times [(x^2 - 8x) + (3x - 24)]}{44 \times x \times (x+3)}$$
$$= \frac{44 \times x^2 \times [x(x-8) + 3(x-8)]}{44 \times x \times (x+3)}$$
$$= \frac{44 \times x^2 \times (x-8)(x+3)}{44 \times x \times (x+3)}$$
$$= x(x-8)$$

(iv) बहुपद में द्विपद से भाग

प्रथम स्थिति : शून्य शेषफल

अब हम लोग बहुपद $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ में द्विपद $(x + 3)$ से भाग देने पर विचार करेंगे तथा भागफल एवं शेषफल पर भी चर्चा करेंगे।

बहुपद $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ में द्विपद $(x + 3)$ से भाग करने के क्रियापद निम्नांकित हैं—

(i) भाज्य तथा भाजक के पदों को x (चर) के अवरोही घात के क्रम में लिखते हैं। तद्नुसार भाज्य $2x^4 + 7x^2 + 8x^3 + 4x + 3$ को $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ तथा भाजक $(x + 3)$ को यथावत् $(x + 3)$ लिखा जायेगा।

(ii) भाजक $x + 3$ के प्रथम पद x से भाज्य के प्रथम पद $2x^4$ में भाग देते हैं। इस प्रकार $2x^4 \div x = 2x^3$ भागफल का प्रथम पद है।

(iii) अब भाजक $(x + 3)$ में भागफल के प्रथम पद $2x^3$ से गुणा करके गुणनफल $(x + 3) \times 2x^3 = 2x^4 + 6x^3$ को भाज्य में से घटाते हैं। इस प्रकार

$2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3 - 2x^4 - 6x^3 = 2x^3 + 7x^2 + 4x + 3$

(iv) शेष $2x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ को नवीन भाज्य के रूप में लेकर भाजक $(x + 3)$ से भाग करते हैं। नवीन भाज्य के प्रथम पद में पुनः उपरोक्त क्रिया step (ii) व Step (iii) दोहराते हैं।

उपर्युक्त क्रियापदों को समग्र रूप से निम्नांकित ढंग से प्रदर्शित करते हैं।

$$
\begin{array}{r|l}
x+3) & 2x^4+8x^3+7x^2+4x+3\,(\,2x^3+2x^2+x+1 \\
 & \underline{2x^4+6x^3} \\
 & 2x^3+7x^2+4x+3 \\
 & \underline{-2x^3 \pm 6x^3} \\
 & x^2+4x+3 \\
 & \underline{-x^2 \pm 3x} \\
 & x+3 \\
 & \underline{-x \pm 3} \\
 & 0
\end{array}
$$

इस प्रकार उपरोक्त क्रियाविधि में आपने देखा कि बहुपद $2x^4 + 8x^3 + 7x^2 + 4x + 3$ को द्विपद $(x + 3)$ से भाग देने पर भागफल $2x^3 + 2x^2 + x + 1$ तथा शेषफल शून्य प्राप्त होता है।

इस प्रकार विचार करके बताइये कि ऐसा विभाजन जिसमें शेषफल शून्य प्राप्त होता है, भाज्य भाजक तथा भागफल में क्या सम्बन्ध होगा?

ध्यान देने योग्य बिन्दु :

यदि एक बहुपद (भाज्य) में दूसरे बहुपद (भाजक) से भाग करने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो, तो इस प्रकार भाजक तथा प्राप्त भागफल, भाज्य के गुणनखण्ड होते हैं।

उदाहरण 4. $10x^3 - 39x^3 + 41x - 15$ में $(2x - 5)$ से भाग दीजिए।

हल : भाज्य $= 10\ x^3 - 39x^2 + 41x - 15$

भाजक $= 2x - 5$

$$
\begin{array}{r|l}
2x-5) & 10x^3-39x^2+41x-15\,(\,5x^2-7x+3 \\
 & 10x^3-25x^2 \\
 & \underline{-\quad\ +} \\
 & -14x^2+41x-15
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
-14x^2+41x-15 \\
-14x^2+35x \\
+ \qquad - \\
\hline
\quad 6x-15 \\
\quad 6x-15 \\
\quad - \quad + \\
\hline
\qquad 0
\end{array}
$$

अतः भागफल $= 5x^2 - 7x + 3$

शेषफल $= 0$

चूँकि शेषफल शून्य है। इसलिए भाजक $(2x - 5)$ तथा भागफल $5x^2 - 7x + 3$ भाज्य $10x^3 - 39x^2 + 41x - 15$ का गुणनखण्ड होगा।

अतः भाज्य, भाजक तथा भागफल में निम्नलिखित सम्बन्ध है—

भाज्य = भाजक $\times$ भागफल

द्वितीय स्थिति : शून्येत्तर शेषफल

उपर्युक्त उदाहरण में भाग की क्रियाओं में शेषफल शून्य प्राप्त होता है। ऐसी स्थिति में आप देखते हैं कि भाज्य, भाजक से पूर्णतः विभाज्य है। अब हम लोग ऐसी स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें शेषफल शून्य न हो। ऐसी स्थिति में भाग की क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि शेषफल, भाजक से कम घातांक का बहुपद नहीं हो जाता है। आइये, बहुपद $15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$ में $3x - 6$ से भाग देने की प्रक्रिया पर विचार करेंगे।

भाज्य $= 15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$

भाजक $= 3x - 6$

$$
3x-6\,\big)\; 15x^3-20x^2+13x-12 \;\big(5x^2+\frac{10}{3}x+11
$$

$$
\begin{array}{l}
-15x^3-30x^2 \\
\qquad\quad + \\
\hline
10x^2+13x-12 \\
10x^2-20x \\
- \quad + \\
\hline
33x-12 \\
33x-66 \\
- \quad + \\
\hline
\qquad 54
\end{array}
$$

भागफल $= 5x^2 + \frac{10}{3}x + 11$

शेषफल $= 54$

उपरोक्त भाग की क्रिया से प्राप्त भागफल, शेषफल, भाजक एवं भाज्य में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 5. $9x^3 - 45x^2 + 71x - 40$ में $(3x - 8)$ से भाग देकर भागफल तथा शेषफल ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{l}
3x-8)\ 9x^3-45x^2+71x-40\ (3x^2-7x+5 \\
\quad\quad 9x^3-24x^2 \\
\quad\quad\ \ -\quad\ + \\
\hline
\quad -21x^2+71x-40 \\
\quad -21x^2+56x \\
\quad\ \ +\quad\quad - \\
\hline
\quad\quad\quad 15x-40 \\
\quad\quad\quad 15x-40 \\
\quad\quad\quad -\quad + \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 0 \\
\hline
\end{array}
$$

भागफल $= 3x^2 - 7x + 5$

शेषफल $= 0$

उदाहरण 6. $15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6$ में $(3x - 2)$ से भाग देकर, भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल में सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{l}
3x-2)\ 15x^4-16x^3+9x^2-\frac{10}{3}x+6\ \left(5x^3-2x^2+\frac{5}{3}x\right. \\
\quad\quad 15x^4-10x^3 \\
\quad\quad -\quad\ + \\
\hline
\quad\quad\quad -6x^3+9x^2-\frac{10}{3}x+6 \\
\quad\quad\quad -6x^3+4x^2 \\
\quad\quad\quad +\quad\quad - \\
\hline
\quad\quad\quad\quad 5x^2-\frac{10}{3}x+6 \\
\quad\quad\quad\quad 5x^2-\frac{10}{3}x \\
\quad\quad\quad\quad -\quad + \\
\hline
\quad\quad\quad\quad\quad 6 \\
\hline
\end{array}
$$

उपर्युक्त भाग में $15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6$ भाज्य, $(3x - 2)$ भाजक, $5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x$ भागफल तथा 6 शेषफल है।

भाजक $\times$ भागफल $= (3x-2)\left(5x^3 - 2x^2 + \frac{5}{3}x\right)$

$$= 15x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 10x^3 + 4x^2 - \frac{10}{3}x$$

$$= 15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x$$

भाजक $\times$ भागफल $+$ शेषफल $= 15x^4 - 16x^3 + 9x^2 - \frac{10}{3}x + 6 =$ भाज्य

इस प्रकार भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल $+$ शेषफल

मूल्यांकन

1. $x^2 + 2x + 3$ में $(x + 1)$ से भाग देने पर शेषफल होगा—
   (i) 2 (ii) -2
   (iii) 4 (iv) 0
2. $x^4 + 3x^2 + x$ में x से भाग देने पर भागफल होगा—
   (i) $x^3 + 3x + 1$ (ii) $x^3 + 1$
   (iii) $x^3 + 3x + 2$ (iv) $x^3 + 2x + 1$
3. $25x^3y^5$ में $5xy$ से भाग देने पर भागफल है—
   (i) $25x^4y^4$ (ii) $5x^2y^4$
   (iii) $5x^4y^2$ (iv) $5x^4y^6$
4. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—
   (i) $28x^4 \div 84x$ (ii) $12a^8b^8 \div (-6a^6b^4)$
   (iii) $77p^2q^2r^2 \div 11pqr^2$ (iv) $34x^3y^4z^4 \div 51x^2y^2z^2$
5. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—
   (i) $9x^2y^2(3z - 24) \div 27xy(z - 8)$

(ii) $10y\ (6y + 21) \div 5\ (2y + 7)$

(iii) $96\ abc\ (3a - 12)\ (5b - 30) \div 108\ (a - 4)\ (b - 6)$

(iv) $z\ (5z^2 - 80) \div 5z\ (z + 4)$

6. निम्नलिखित को निर्देशानुसार भाग दीजिए—

(i) $52xyz\ (x + y)\ (y + z)\ (x + z) \div 26.xy\ (y + z)\ (x + z)$

(ii) $20\ (x + 4)\ (x^2 + 5x + 3) \div 5\ (x + 4)$

7. निम्नलिखित विभाजन कीजिए—

(i) $9x^5 + 12x^4 - 6x^2 \div 3x^2 + 2x$

(ii) $x^5 + y^5 \div (x + y)$

(iii) $3x^3 + 4x^2 + 5x + 18 \div (x + 2)$

8. निम्नांकित प्रश्नों में भाग देकर भाज्य, भाजक, भागफल तथा शेषफल को सारणी में लिखिए :

(i) $6x^5 - 28x^3 + 3x^2 + 30x - 9$ में $(2x^2 - 6)$ से

(ii) $21x^2 + 15x - 20$ में $3x - 4$ से

(iii) $34x - 22x^3 - 12x^4 - 10x^2 - 75$ में $(3x + 7)$ से

(iv) $x^2 + 7x + 14$ में $(x + 3)$ से

9. प्रश्न 8 में प्राप्त सारणी की सहायता से प्रत्येक प्रश्न के लिए सत्यापन कीजिए कि:

भाज्य $=$ भाजक $\times$ भागफल $+$ शेषफल

10. भाग संक्रिया द्वारा ज्ञात कीजिए कि क्या :

(i) $(x + 6);\ x^2 - x - 42$ का एक गुणनखण्ड है?

(ii) $x^2 + 3;\ x^5 - 9x$ का एक गुणनखण्ड है?

(iii) $y - 4;\ y\ (5y^2 - 80)$ का एक गुणनखण्ड है?

(iv) $(4x - 3),\ 4x^2 - 13x - 12$ का एक गुणनखण्ड है?

(v) $(3x - 6),\ 15x^3 - 20x^2 + 13x - 12$ का एक गुणनखण्ड है?

———