बी.टी.सी. (द्विवर्षीय) पाठ्यक्रमानुसार

(बेसिक टीचर सर्टीफिकेट)

सेवापूर्व शिक्षक प्रशिक्षुओं के लिए पाठ्यपुस्तक

गणित

तृतीय सेमेस्टर

राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्,

उ.प्र., लखनऊ

राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

संरक्षक – श्री हीरा लाल गुप्ता-आई.ए.एस, सचिव बेसिक शिक्षा, उ.प्र. शासन लखनऊ

परामर्श – श्रीमती शीतला वर्मा-आई.ए.एस., राज्य परियोजना निदेशक, उ.प्र. सभी के लिए शिक्षा परियोजना परिषद्, लखनऊ

निर्देशक – श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह, निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, उ.प्र. लखनऊ

समन्वयक – श्रीमती नीना श्रीवास्तव, निदेशक राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र. इलाहाबाद

लेखक – श्रीमती रागिनी श्रीवास्तव, श्रीमती मंजूषा गुप्ता, श्री कैलाश बाबू तथा श्री राकेश कुमार पाण्डेय।

कम्प्यूटर ले आउट-कॉमर्शियल प्रेस, इलाहाबाद

प्राक्कथन

समय-समय पर सामाजिक बदलाव और उसके अनुरूप आवश्यकताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षा-प्रणाली तथा पाठ्यक्रमों में भी संशोधन एवं युगानुरूप परिवर्तन करने की आवश्यकता शिक्षा-विदों द्वारा अनुभव किया जाना एक स्वाभाविक प्रक्रिया है। इसी के अन्तर्गत राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 तथा शिक्षक-शिक्षा की राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2009 के आलोक में उत्तर प्रदेश में प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों हेतु सेवापूर्व प्रशिक्षण की केन्द्र पुरोनिधानित शिक्षक-शिक्षा योजना लागू की गयी है। इसके अन्तर्गत बी.टी.सी. के दो वर्षीय पाठ्यचर्या का पुनरीक्षण कर समावेशी विभिन्न विषयों के पाठ्यक्रमों को समुन्नत किया गया है तथा प्रशिक्षु शिक्षकों से यह अपेक्षा की गयी है कि वे बिना किसी भय के शिक्षार्थियों के ज्ञानार्जन में उनकी सहायता कर सकें। नवीन पाठ्यचर्या एवं पाठ्यक्रमों के सन्निहित उद्देश्यों को दृष्टिगत कर राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद द्वारा विज्ञान एवं गणित विषयों की पाठ्य-पुस्तकों का सृजन किया गया है।

पाठ्यपुस्तकों की संरचना करते समय इस बात को विशेष महत्त्व देते हुए भरपूर प्रयास किया गया है कि प्रशिक्षित शिक्षक की ओजभरी वाणी में इतना आकर्षण एवं शक्ति हो कि वह शिक्षाग्रहण करने वाले प्रशिक्षणार्थियों के मन की समस्त दुविधाओं को दूर कर उनकी बुद्धि का पूरा लाभ उन्हें प्रदान कर सके तथा वह गुरुजनों को अपने माता-पिता के समान अपना सच्चा मार्गदर्शक समझकर उनके द्वारा प्रदत्त ज्ञान को प्राप्त कर सके।

विज्ञान और गणित विषय ही समाज को मानव जीवन को जीवन्त बनाने, उसे सब प्रकार के भौतिक सुखों से आप्लावित करने, भविष्य की सुखदयोजनाओं की संकल्पना करने, उसका ब्लू-प्रिन्ट तैयार कर उसे कार्यान्वित करने का सार्थक स्वप्न दिखाते हैं। इन स्वप्नों को साकार करने के बीज जब प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चों के उर्वर मन में बो दिया जाता है तथा शिक्षक की वाणी की ज्ञान गंगा जब उन्हें निरन्तर सींचती रहती है, तो उसी में से एक दिन रमन, जगदीश चन्द्रबोस जैसे महान वैज्ञानिक तथा रामानुजन, शकुन्तला जैसे महान गणितज्ञ पैदा होते हैं। यह मानकर चलिए कि हमारे विद्या मन्दिर के प्रत्येक बालक-बालिका के उर में एक वैज्ञानिक, एक गणितज्ञ सोया हुआ है, बस आवश्यकता है कि उसे कैसे जगायें, कैसे ऊर्जा स्थित करें और कैसे सृजनात्मकता के पाठ पढाये और कैसे उसे ज्ञान, बोध, अनुप्रयोग और कौशल के सारे गुर सिखायें कि वह आगे चलकर अपनी अद्भुत प्रतिभा से राष्ट्र को समुन्नत करने का बीड़ा उठा सके।

सीमित समयान्तर्गत गणित विषय की पाठ्यपुस्तक को आकर्षक कलेवर प्रदान करने में हमें श्री सर्वेन्द्र विक्रम बहादुर सिंह निदेशक, राज्य शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, उत्तर प्रदेश, लखनऊ का समय-समय पर जो अत्यन्त उपयोगी मार्ग दर्शन प्राप्त हुआ है, उसके लिए मैं उनके प्रति हार्दिक कृतज्ञता ज्ञापित करती हूँ। पाठ्य-पुस्तक के प्रणयन में लेखक मण्डल के सभी सदस्यों के अमूल्य सहयोग के लिए भी मैं उनके प्रति अपना आभार व्यक्त करती हूँ। शिक्षाविद् परामर्शदाताओं के सतत सहयोग से इस पाठ्यपुस्तक को निखारने में हमें जो सहयोग मिला है, उसके लिए भी मैं उन्हें धन्यवाद देती हूँ। मैं अपने संस्थान के सभी विद्वान सहयोगियों को भी हृदय से धन्यवाद देती हूँ जिनके अहर्निश परिश्रम के बल पर ही यह पाठ्यपुस्तक अन्तिम स्वरूप को ग्रहण कर सकी है।

सुधार और संशोधन की कोई सीमा नहीं होती है। मैं शिक्षा जगत के सभी सुधीजनों से अपेक्षा करती हूँ कि वे अपने सकारात्मक सुझावों से हमें अवश्य अवगत करायेंगे जिससे पाठ्य पुस्तक के अगले संस्करण को और अधिक ऊर्जावान एवं सार्थक बनाया जा सके।

श्रीमती नीना श्रीवास्तव
निदेशक
राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थान, उ.प्र., इलाहाबाद

विषय-सूची

इकाई-1

अनुपात, समानुपात, अनुलोम एवं प्रतिलोम समानुपात का अर्थ

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त निम्नांकित की जानकारी प्राप्त होगी—

* अनुपात एवं समानुपात के अर्थ
* अनुलोम एवं प्रतिलोम समानुपात का अर्थ

सर्वप्रथम हम अनुपात एवं समानुपात के विषय में चर्चा करेंगे।

प्रशिक्षुओं को पाँच-पाँच या सुविधाजनक किसी निश्चित संख्या के समूहों में बाँटे। प्रत्येक समूह के प्रशिक्षुओं से उनके गणित विषय (पूर्णांक 100) के प्राप्तांकों की सारिणी बनवाएँ।

अब एक समूह के प्राप्तांकों की सारिणी को श्यामपट्ट पर बनवाएँ।

प्रशिक्षुओं के नाम	**प्राप्तांक**
रमेश	40
मोहन	70
डेविड	65
इब्राहिम	67
रज़िया	80

एक दूसरे के प्राप्तांकों की तुलना करने के लिए निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) रमेश का प्राप्तांक मोहन के प्राप्तांक से कितना कम है?

(ii) रज़िया का प्राप्तांक, रमेश के प्राप्तांक का कितना गुना है?

रज़िया और रमेश के प्राप्तांकों में अनुपात

$$= 80 : 40$$

$$= \frac{80}{40}$$

$$= \frac{2}{1}$$

यहाँ पर प्रशिक्षु देखें कि रज़िया और रमेश के प्राप्तांकों के अनुपात को 2 : 1 के रूप में भी लिखा जा सकता है।

प्रशिक्षुओं को स्पष्ट करें कि रजिया और रमेश के प्राप्तांकों की तुलना भाग द्वारा की गई है। भाग का चिह्न ÷ अनुपात में : के रूप में प्रकट किया जाता है।

(iii) इसी प्रकार अन्य प्रशिक्षुओं के प्राप्तांकों का अनुपात ज्ञात करवाएँ।

प्रशिक्षुओं से निष्कर्ष निकलवाएँ कि—

> अनुपात दो संख्याओं की भाग द्वारा तुलना है जिससे ज्ञात होता है एक संख्या दूसरी संख्या की कितनी गुनी है या उसका कौन सा भाग है?

अनुपात के सम्बन्ध में आवश्यक बातें—

1. अनुपात का कोई मात्रक नहीं होता है।
2. अनुपात केवल दो सजातीय राशियों के परिमाणों में होता है।
3. अनुपात के दोनों पदों में एक ही संख्या से गुणा करने या भाग करने से अनुपात के मान में अन्तर नहीं आता है।
4. अनुपात निकालने के लिए अनुपाती पदों को एक ही इकाई में बदलना आवश्यक होता है।

यथा 225 सेमी : 2 मी = 225 सेमी : 200 सेमी

= 9 : 8

समानुपात

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न करवाएँ—

1. गणित की एक पुस्तक का मूल्य = ` 50 है।
   (i) दो पुस्तकों का कितना मूल्य होगा?
   (ii) पुस्तकों की संख्या में क्या अनुपात है?
   (iii) पुस्तकों के मूल्यों में क्या अनुपात है?

पुस्तकों की संख्या दो गुनी होने पर मूल्य भी, दो गुना अर्थात् ` 100 हो जायेगा।

1 पुस्तक : 2 पुस्तक = ` 50 : ` 100

या 1 : 2 = 50 : 100

2. मोहन साइकिल से 2 घण्टे में 20 किमी. जाता है।
   (i) उसी चाल से वह 3 घण्टे में कितनी दूरी तय करेगा?

(ii) समय में क्या अनुपात है?

(iii) दूरी में क्या अनुपात होगा?

समय में अनुपात = 2 घण्टा : 3 घण्टा

= 2 : 3

∵ समय डेढ़ गुना हो गया है।

∴ चली गई दूरी भी डेढ़ गुना होगी।

अर्थात् 3 घण्टे में चली गई दूरी

$= 20 \times \frac{3}{2}$ किमी

= 30 किमी

2 घण्टा : 3 घण्टा = 20 किमी : 30 किमी

इस प्रकार,

2 : 3 = 20 : 30

जब दो अनुपात समान हों, तो उनसे समानुपात (सम + अनुपात) बनता है।

समानुपात का चिह्न : : है।

2 : 3 : : 20 : 30 में समानुपात के बाह्य पद 2 और 30 तथा मध्य पद 3 और 20 है।

अनुलोम समानुपात :

1. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रकार की सारिणी बनवाएं जिसमें गणित की पुस्तकों की संख्या और उनके मूल्य अंकित हों—

पुस्तकों की संख्या	1	2	3	4	5	6	7
पुस्तकों के मूल्य में रुपयों की संख्या	6	12	18	24	30	36	42
अनुपात	1 : 6	2 : 12 या, 1 : 6	3 : 18 या, 1 : 6	4 : 24 या, 1 : 6	5 : 30 या, 1 : 6	6 : 36 या, 1 : 6	7 : 42 या 1 : 6

उक्त सारिणी के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) पुस्तकों की संख्या दो गुनी होने पर उनका मूल्य किस अनुपात में बढ़ता है?

इसी प्रकार अन्य प्रश्न पूछ कर यह निष्कर्ष निकालें कि पुस्तकों की संख्या बढ़ने पर पुस्तकों के मूल्य में उसी अनुपात में वृद्धि होती है। अतः पुस्तकों की संख्या तथा उनके मूल्य में अनुलोम सम्बन्ध है। इसे तीरों द्वारा निम्नांकित ढंग से व्यक्त किया जाता है—

पुस्तक की संख्या	मूल्य
1 ↓	6 ↓
2	12

> जब दो राशियाँ इस प्रकार से हों कि एक के बढ़ने पर दूसरी राशि में उसी अनुपात में वृद्धि हो अथवा एक के घटने पर दूसरी राशि में भी इसी अनुपात में कमी हो, तो ये राशियाँ अनुलोमानुपाती कहलाती हैं।

2. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न के विषय में चर्चा करें।

एक रेलगाड़ी 2 घण्टे में 120 किमी दूरी तय करती है। उसी चाल से वह 5 घण्टे में कितनी दूरी तय कर लेगी?

समय (घण्टे में)	दूरी (किमी में)
2 ↓	120 ↓
5	x

मान लिया कि रेलगाड़ी 5 घण्टे में x किमी दूरी तय करेगी। समय और दूरी अनुलोमानुपाती राशियाँ हैं।

अतः $2 : 5 :: 120 : x$

या $2 \times x = 5 \times 120$

$\therefore \quad x = \dfrac{5 \times 120}{2}$

या $x = 300$

अतः गाड़ी 5 घण्टे में 300 किमी. दूरी तय करेगी।

प्रतिलोम समानुपात :

1. प्रशिक्षुओं से निम्नलिखित प्रकार की सारिणी बनवाएँ जिसमें किसी काम को पूरा करने में मजदूरों की संख्या तथा दिनों की संख्या दी हो—

मजदूर	दिन
10	30
15	20
20	15
30	10

उक्त सारिणी के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न पूछें—

(i) 10 मजदूर किसी काम को 30 दिन में पूरा करते हैं। मजदूरों की संख्या दो गुनी होने पर दिनों की संख्या में क्या अनुपात हुआ?

(ii) मजदूरों की संख्या तीन गुनी होने पर दिनों की संख्या में क्या अनुपात हुआ?

प्रशिक्षुओं के उत्तरों के आधार पर निष्कर्ष निकलवाएँ कि मजदूरों की संख्या जिस अनुपात में बदलती है। उसी के प्रतिलोम अनुपात में दिनों की संख्या भी बदलती है। अतः मजदूरों की संख्या और दिनों की संख्या में प्रतिलोम सम्बन्ध है।

इसे तीरों द्वारा निम्नांकित ढंग से व्यक्त किया जाता है—

मजदूरों की संख्या		दिनों की संख्या	
10	$\downarrow$	30	$\uparrow$
20		15	

जब दो राशियाँ इस प्रकार से सम्बन्धित हों कि एक राशि के बदलने पर दूसरी राशि उसी के प्रतिलोम अनुपात में बदलती हो तो ये राशियाँ प्रतिलोमानुपाती कहलाती हैं।

2. प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल करवाएँ :

एक बस इलाहाबाद से लखनऊ की दूरी 30 किमी/घण्टे की चाल से 7 घण्टे में तय करती है। इसी दूरी को वापसी बस किस चाल से 5 घण्टे में तय कर लेगी?

मान लिया बस की अभीष्ट चाल $= x$ किमी/घण्टे

चाल (किमी/घण्टा)		समय (घण्टे)	
30	$\downarrow$	7	$\uparrow$
x		5	

चाल और समय में प्रतिलोम सम्बन्ध है।

$\therefore \quad \frac{30}{x} = \frac{5}{7}$

या, $\quad x = \frac{30 \times 7}{5} = 42$

$\therefore$ बस की अभीष्ट चाल = 42 किमी/घण्टा

मूल्यांकन

1. सरलतम रूप में अनुपात ज्ञात कीजिए—

   (i) 2 का 4 से   (ii) 15 का 3 से

   (iii) 50 पैसे का ` 3 से   (iv) 2 घण्टे का 30 मिनट से

2. कौन सा अनुपात बड़ा है?

   (i) 3 : 5 और 5 : 8 में

   (ii) 2 : 7 और 6 : 8 में

   (iii) 40 पैसे : ` 2 और 60 पैसे : ` 4 में

3. एक आयताकार कमरे की लम्बाई और चौड़ाई में 5 : 4 का अनुपात है। यदि कमरे की लम्बाई 15 मीटर हो तो चौड़ाई होगी :

   (i) 10 मीटर   (ii) 12 मीटर

   (iii) 9 मीटर   (iv) 18 मीटर

4. यदि 6, 18, x, 15 समानुपात में है तो x का मान होगा—

   (i) 3   (ii) 5

   (iii) 6   (iv) 8

5. एक विद्यालय में 250 बच्चे पढ़ते हैं, जिनमें से 70 बच्चे प्रदूषित जल पीने से बीमार पड़ गये। स्वस्थ और बीमार बच्चों की संख्या में अनुपात ज्ञात कीजिए।

6. मोहन ने ` 70 में 10 किग्रा अमरूद बेचे तथा श्याम ने 5 किग्रा अमरूद ` 35 में बेचे। किसका अमरूद सस्ता है? यदि ऐसा है तो वे किस भाव में अमरूद बेच रहे हैं? क्या दोनों अमरूद एक ही भाव में बचे रहे हैं।

———

इकाई-2
समानुपाती राशियों में बाह्य पदों एवं मध्य पदों के गुणनफल में सम्बन्ध

इस इकाई के अध्ययनोपरान्त हमें निम्नांकित की जानकारी होगी—

(1) समानुपात के पदों में सम्बन्ध

प्रशिक्षु सर्वप्रथम निम्नांकित सारणी को ध्यान से देखें—

क्रमांक	समानुपाती पद	बाह्य पदों का गुणनफल	मध्य पदों का गुणनफल	क्या बाह्य पदों का गुणनफल = मध्यपदों का गुणनफल
1.	1 : 2 : : 4 : 8	8	8	हाँ
2.	5 : 6 : : 15 : 18			
3.	3 : 4 : : 24 : 32			
4.	2.5 : 2.4 : : 7.5 : 7.2			
5.	2 : 5 : : 4 : 10			

उक्त सारिणी से प्रशिक्षु यह निष्कर्ष निकालें कि

> बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के बराबर होता है।

उक्त निष्कर्ष के आधार पर प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल कराएँ—

(i) संख्याएँ 3, 9, 9, 27 समानुपात में है या नहीं।

$3 \times 27 = 81$

$9 \times 9 = 81$

या, $3 \times 27 = 9 \times 9$

$\therefore$ 3, 9, 9, 27 समानुपात में है।

(ii) $30 : 45 :: 16 : x$ में x का मान निकालिए।

$30 \times x = 45 \times 16$

या, $x = \dfrac{45 \times 16}{30}$

या, $x = 24$

(iii) एक पार्क की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात 5 : 3 है। यदि पार्क की लम्बाई 95 मी. हो, तो उसकी चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

मान लिया कि पार्क की चौड़ाई x मी. है।

$\because$ पार्क की लम्बाई : पार्क की चौड़ाई = 5 : 3

$\therefore$ $95 : x = 5 : 3$

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

या, $95 \times 3 = x \times 5$

या, $x = \frac{95 \times 3}{5} = 57$ मी

$\therefore$ पार्क की चौड़ाई 57 मी है।

प्रशिक्षु लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात ज्ञात करें और उत्तर की जाँच करें।

मूल्यांकन :

1. निम्नांकित प्रश्न में सत्य/असत्य कथन है—

   समानुपात पदों 20 : 30 : : 60 : 90 में

   (i) 20 और 60 मध्य पद हैं।

   (ii) 30 और 90 बाह्य पद हैं।

   (iii) 20 और 30 बाह्य पद हैं।

   (iv) 30 और 60 मध्य पद हैं।

2. नीचे लिखे समानुपाती पदों में x का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $x : 10 : : 20 : 40$ (ii) $16 : 8 : : 8 : x$

   (iii) $30 : 120 : : x : 300$ (iv) $2.5 : x : : 1.25 : 2.5$

3. 25, 75, 500, 1000 समानुपात में नहीं है क्योंकि :

   (i) यहाँ कोई वाह्य पद नहीं है।

   (ii) वाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल नहीं है।

   (iii) वाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

   (iv) मध्य पदों का गुणनफल 3750 है।

4. एक विद्यालय के लड़के और लड़कियों ने अलग-अलग 2 : 3 के अनुपात में पौधा लगाये। यदि विद्यालय में कुल 1500 पौधे लगाये गए हों तो लड़के और लड़कियों द्वारा लगाये गए पौधों की संख्या अलग-अलग निकालिए।

5. रमेश ने ` 80 में 2 किग्रा. सेब बेचा और मोहन ने 5 किग्रा सेब ` 200 में बेचा। क्या दोनों ने एक ही भाव में सेब बेचे?

———

इकाई-3
घातांक की अवधारणा

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी होगी—

1. घातीय संकेतन में आधार एवं घातांक।
2. घाताकों के नियम (धनात्मक आधार पर)

प्रशिक्षु, संख्या 1000000000 पर विचार करें।

पृथ्वी का द्रव्यमान 597 000 000 000 000 000 000 000 0 किग्रा. है।

अब आप लोग देख रहे हैं कि ऐसी संख्याओं को सरलता से नहीं पढ़ा जा सकता है।

इस प्रकार की ऐसी अन्य दूसरी बहुत बड़ी संख्याओं का पढ़ना, समझना एवं अन्तर ज्ञात करना और उनकी तुलना करना कठिन है। अतः इन संख्याओं को सरलता से पढ़ने और समझने तथा आपस में तुलना करने के लिए हम घातांकों का प्रयोग करते हैं।

घातांक

बड़ी संख्याओं का संक्षिप्त रूप निम्नवत् हैं—

$100000 = 10^5$

यहाँ पर 10^5 संक्षिप्त संकेतन है जो कि गुणनफल $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ को व्यक्त करता है। 10^5 को पढ़ा जाता है, "10 के ऊपर घात पाँच या 10 की घात पाँच।"

यहाँ 10 आधार (base) और 5 घातांक (Power of Index) कहलाता है।

10^5 को 100,000 का घातांकीय रूप (Exponential form) कहा जाता है।

प्रशिक्षुओं से 64 और 81 को घात के रूप में व्यक्त करने के विषय में चर्चा करें।

घातीय संकेतन में आधार एवं घातांक

प्रशिक्षु निम्नांकित सारणी को देखें :

घातीय संकेतन (घात) रूप	अर्थ (गुणा रूप)	मान	आधार	घातांक
2^3	$2 \times 2 \times 2$	8	2	3
3^2	3×3	9	3	2
5^6	$5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$	15625	5	6

उपर्युक्त सारणी को देखने के बाद प्रशिक्षुओं को अन्य संख्याओं के घातांक इत्यादि पर विचार करने को कहे।

प्रशिक्षुओं से पूर्णांकों की भाँति ही किसी परिमेय संख्या के द्वारा कई बार गुणन को या घातीय संकेतन द्वारा व्यक्त करने के विषय में अवगत करायें।

जैसे—$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$

यहाँ पर आधार $=\frac{2}{3}$ और घातांक 5 है, तथा इसे $\frac{2}{3}$ की घात 5 पढ़ते हैं।

अब किसी निश्चित संख्या के स्थान पर यदि सामान्य रूप में a को आधार लेते हैं, तो संख्या को निम्नलिखित रूप में व्यक्त करते हैं—

$a \times a \times a = a^3$ (इसे a की घात 3 या a का घन पढ़ेंगे)

$a \times a \times a \times a \times a = a^5$ (इसे a की घात 5 पढ़ेंगे)

अब प्रशिक्षु निम्नांकित सारणी के निष्कर्ष पर पहुँचता है—

1. n कोई प्राकृतिक संख्या होने पर, (धन पूर्णांक)^n = धन पूर्णांक
3. n विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, [ऋण पूर्णांक]^n = ऋण पूर्णांक
4. n सम प्राकृतिक संख्या होने पर $(-1)^n = 1$
5. n विषम प्राकृतिक संख्या होने पर, $(-1)^n = -1$

घातांकों का नियम

प्रशिक्षुओं को निम्नांकित घातांकों के नियम से अवगत करायें :

नियम 1.—एक ही आधार वाली घातीय संख्याओं का गुणन।

आइए, $2^3 \times 2^4$ का मान ज्ञात करते हैं।

$2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

$2^3 \times 2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^7$

या $2^3 \times 2^4 = 2^{(3+4)}$

$= 2^7$

आपको यहाँ पर ध्यान से देखने पर यह प्राप्त होता है कि 2^3 और 2^4 का आधार समान है और घातांकों का योगफल 7 है। अतः हम व्यापक रूप से कह सकते हैं कि—

यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धन पूर्णांक हों, तो $a^m \times a^n = a^{m+n}$

विशेष : $2^3 \times 3^2$ या $3^5 \times 5^3$ प्रकार के घातांकों पर ध्यान दीजिए। क्या आप इन्हें जोड़ सकते हैं?

इन घातांकों के आधार समान नहीं हैं। अतः इन घातांकों को नहीं जोड़ा जा सकता।

नियम 2 : एक ही आधार वाली घातांकीय संख्याओं का विभाजन :

उदाहरण : $2^7 \div 2^3$ को ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} 2^7 \div 2^3 &= \frac{2^7}{2^3} = \frac{2\times2\times2\times2\times2\times2\times2}{2\times2\times2} \\ &= 2\times2\times2\times2 \\ &= 2^4 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 2^7 \div 2^3 = 2^4$

इस प्रकार

$$2^7 \div 2^3 = \frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4$$

अतः यदि a एक शून्येतर धनात्मक परिमेय संख्या तथा m और n कोई दो धनात्मक पूर्णांक हों, जहाँ $m > n$ तो $a^m \div a^n = a^{(m-n)} = \frac{1}{a^{n-m}}$

प्रशिक्षु a^0 के मान पर विचार करें।

आप देखेंगे कि a^0 का मान 1 प्राप्त होता है। जहाँ पर a एक शून्येतर परिमेय संख्या है।

टिप्पणी : हम जानते हैं कि 0 से भाग परिभाषित नहीं है, अतः 0^0 परिभाषित नहीं है, क्योंकि

$0^0 = 0^{n-n} = \frac{0^n}{0^n}$ में भाजक शून्य है।

अतः 0^0 परिभाषित नहीं है।

नियम 3 : किसी घात वाली संख्या की भी घात ज्ञात की जा सकती है।

जैसे—$\left[(5)^4\right]^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\left[(5)^4\right]^3 &= (5)^4 \times (5)^4 \times (5)^4 \\ &= (5\times5\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5)\times(5\times5\times5\times5) \\ &= 5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5\times5 \\ &= 5^{12} = 5^{(4\times3)}\end{aligned}$$

अर्थात् $\left[(5)^4\right]^3 = 5^{4\times3}$

इसी प्रकार, $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\right)$

$$= \frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7}$$

$$= \left(\frac{4}{7}\right)^6 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$$

अर्थात् $\left[\left(\frac{4}{7}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{4}{7}\right)^{2\times3}$

उपर्युक्त से यह निष्कर्ष प्राप्त होता है कि यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा **m** और **n** कोई धन पूर्णांक हों, तो

$$(a^m)^n = a^{m\times n}$$

नियम 4 : पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का गुणन

क्या आप $2^4 \times 3^4$ को सरल कर सकते हैं?

ध्यान दीजिए कि यहाँ पर दोनों पदों के घातांक समान हैं किन्तु आधार अलग हैं।

देखें, $2^4 \times 3^4 = ?$

$$2^4 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

& $\quad 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$

$$\therefore \quad 2^4 \times 3^4 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$$
$$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$$
$$= (2 \times 3)^4$$

अर्थात् $2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4$

इसी प्रकार,

$$\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7}\right) \times \left(\frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}\right)$$
$$= \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{5}{7} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9} \times \frac{8}{9}$$
$$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right) \times \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)$$
$$= \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)^3$$

अर्थात् $\left(\frac{5}{7}\right)^3 \times \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \left(\frac{5}{7} \times \frac{8}{9}\right)^3$

उपर्युक्त उदाहरणों से यह निष्कर्ष निकलता है कि :

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा m एक धन पूर्णांक हो, तो
>
> $$a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

नियम 5 : पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं का भाग।

देखिए :

$$8^6 \div 9^6 = \frac{8^6}{9^6} = \frac{8\times8\times8\times8\times8\times8}{9\times9\times9\times9\times9\times9}$$

$$= \frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}\times\frac{8}{9}$$

$$= \left(\frac{8}{9}\right)^6$$

अर्थात् $$8^6 \div 9^6 = \frac{8^6}{9^6} = \left(\frac{8}{9}\right)^6$$

इसी प्रकार

$$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \frac{\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\times\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\times\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}$$

$$= \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\right)^3$$

अर्थात् $$\left(\frac{4}{3}\right)^3 \div \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3}{\left(\frac{5}{6}\right)^3} = \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{6}}\right)^3$$

इसी प्रकार अन्य उदाहरण लेकर प्रशिक्षु स्वयं हल करने का प्रयास करें।

उपर्युक्त अन्य उदाहरणों से यह निष्कर्ष मिलता है कि :

> यदि a और b कोई दो शून्येतर परिमेय संख्याएँ हों तथा n एक धन पूर्णांक हों,
>
> तो, $a^n \div b^n = \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ तथा $b^n \div a^n = \dfrac{b^n}{a^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$.

अभी तक तुमने घातांक को पूर्णांक रूप में पढ़ा है।

अब, हम किसी संख्या के घातांक भिन्न के रूप में चर्चा करेंगे।

$\because \quad 7 \times 7 = 49$

$\therefore \quad$ 7 का वर्ग, 49 है।

अर्थात्, यदि $7^2 = 49$

तब $\quad 7 = \sqrt{49}$

सामान्य रूप में,

$$a^m \times a^m = a$$

या $\quad a^{2m} = a^1$

घातांकों की तुलना करने पर,

$$2m = 1$$

या $\quad m = \frac{1}{2}$

अतः $\quad \boxed{a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}}$

इसी प्रकार $\quad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

$$a^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a}$$

सामान्य रूप में,

$$\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}}$$

उदाहरण (1) : $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $a^{-\frac{1}{3}} \times 2a^{-\frac{1}{2}} = 2a^{-\frac{1}{3}} \times a^{-\frac{1}{2}}$

$$= 2a^{-\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 2a^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$$

$$= 2a^{-\frac{5}{6}}$$

उदाहरण (2) : $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}} = 2a^{-2} \div a^{-\frac{3}{2}}$

$$= 2a^{-2} \times a^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2a^{-2+\frac{3}{2}}$$

$$= 2a^{-\frac{1}{2}}$$

या, $\dfrac{2a^{-2}}{a^{-\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{a^{2-\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{a^{\frac{1}{2}}}$ या $\dfrac{2}{\sqrt{a}}$

उदाहरण (3) : $(243)^{\frac{3}{5}}$ का मान ज्ञात करना है।

अब, $(243)^{\frac{3}{5}} = (3^5)^{\frac{3}{5}} = 3^3 = 27$

मूल्यांकन :

1. $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ का मान है—

(i) $\frac{32}{243}$ (ii) $-\frac{32}{243}$

(iii) $\frac{10}{15}$ (iv) $-\frac{10}{15}$

2. 3125 का घाती संकेतन है—

(i) 5^2 (ii) 5^5

(iii) 5^3 (iv) 5^4

3. 2 की घात 7 का मान है—

(i) 49 (ii) 14

(iii) 128 (iv) 32

4. $3^{12} \times 3^7 \div 3^{25}$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. $(-1)^{49} \div (-1)^{25}$ का मान बताइए।

6. $4 \times 5^2 + 5 \times 4^2$ का मान क्या होगा?

7. $\left(\frac{4}{9}\right)^3 \times \left(\frac{4}{9}\right)^4 \div \left(\frac{4}{9}\right)^5$ का मान बताइये।

8. $(64)^{-2/3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-4

पूर्णांक तथा परिमेय संख्याओं को (धनात्मक आधार पर) घातांक रूप में लिखना

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी होगी :

1. परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना।
2. धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक
3. बड़ी एवं छोटी संख्याओं को घातांकीय रूप में व्यक्त।

परिमेय संख्याओं को घात के रूप में व्यक्त करना :

हम जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ के रूप की होती है, जहाँ p, q पूर्णांक होते हैं तथा $q \neq 0$; इस प्रकार सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ हैं।

देखिए,

$$2 = \frac{2}{1} = \left(\frac{2}{1}\right)^1, 3 = \frac{3}{1} = \left(\frac{3}{1}\right)^1, \frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^1,$$

इसी प्रकार,

$6 = (6)^1,\ 8 = 8^1,\ 8 = (2)^3$

$$-\frac{27}{125} = \left(-\frac{27}{125}\right)^1 \quad \text{और} \quad \frac{-27}{125} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)}{5\times5\times5} = \left(\frac{-3}{5}\right)^3$$

$$\frac{16}{625} = \left(\frac{16}{625}\right)^1, \frac{16}{625} = \left(\frac{4}{25}\right)^2 \quad \text{तथा} \quad \frac{16}{625} = \left(\frac{2}{5}\right)^4$$

ध्यान दें, जिस संख्या को घात रूप में केवल एक ही प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है, उसका घातीय संकेतन (घात रूप) अद्वितीय होता है।

जैसे— $\frac{5}{12} = \left(\frac{5}{12}\right)^1, 6 = 6^1, 3 = 3^1, 15 = 15^1$ इत्यादि।

यदि किसी संख्या को भिन्न-भिन्न आधारों पर घात रूप में व्यक्त किया जा सके तो उसका घातीय संकेतन अद्वितीय नहीं होता है।

जैसे—परिमेय संख्या 729 को आधार 3 और 9 के घातीय संकेतनों में देखिए—

$729 = 3^6$; आधार 3, घात 6

$729 = 9^3$; आधार 9, घात 3

$729 = (27)^2$; आधार 27, घात 2

अतः उपर्युक्त उदारहणों से हम पाते हैं कि—

1. किसी भी परिमेय संख्या को उसके घात 1 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जैसे— $a = (a)^1$।
2. सभी अभाज्य संख्याओं का घातीय संकेतन अद्वितीय होता है।
3. भाज्य संख्याओं में कुछ का घातीय संकेतन अद्वितीय और कुछ का अद्वितीय नहीं होता।

पुनः देखिए,

$$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

तथा $$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3\times3}$$

अतः $$\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{2^5}{3^5}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\left(\frac{3}{7}\right)^6$$

या, $$\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7}=\frac{3\times3\times3\times3\times3\times3}{7\times7\times7\times7\times7\times7}$$

$$=\frac{3^6}{7^6}$$

इसी प्रकार,

$$\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\frac{p}{q}\times\ldots m \text{ बार } =\left(\frac{p}{q}\right)^m$$

तथा $\dfrac{p\times p\times p\times \ldots m \text{ बार}}{q\times q\times q\times \ldots m \text{ बार}}=\dfrac{p^m}{q^m}$

अतः $\left(\dfrac{p}{q}\right)^m=\dfrac{p^m}{q^m}.$

इस तथ्य का उपयोग करके हम किसी परिमेय संख्या के घातीय संकेतन (घात रूप) को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार कुछ परिमेय संख्याओं को किसी परिमेय संख्या के घात रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$10^0=\frac{10}{10}=1$$

इसी प्रतिरूप को आगे बढ़ाने पर,

$$10^{-1}=\frac{1}{10}$$
$$10^{-2}=\frac{1}{10\times 10}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}$$
$$10^{-3}=\frac{1}{10\times 10\times 10}=\frac{1}{10^3}=\frac{1}{1000}$$

ध्यान दीजिए जब 10 का घातांक 1 कम होता है तब मान, पूर्व मान का $\frac{1}{10}$ वाँ भाग हो जाता है।

अतः $10^{-1}=\dfrac{1}{10},\ 10^{-2}=\dfrac{1}{10^2},10^{-3}=\dfrac{1}{10^3}$ ।

इसी प्रकार,

$$3^3=3\times 3\times 3=27$$
$$\frac{3^3}{3}=\frac{3\times 3\times 3}{3}=\frac{27}{3}$$
$$3^{3-1}=3^2=3\times 3=9$$
$$\frac{3^2}{3}=\frac{3\times 3}{3}=\frac{9}{3}$$
$$3^{2-1}=3=3$$

$$\frac{3^1}{3} = \frac{3}{3}$$

$$3^{1-1} = 3^0 = 1$$

इन प्रतिरूपों से हम कह सकते हैं

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

$$3^{-3} = \frac{1}{3^3}$$

जैसे— $\left(\frac{6}{7}\right)^3 = \frac{6^3}{7^3} = \frac{216}{343}$

और $\frac{216}{343} = \frac{6\times6\times6}{7\times7\times7} = \left(\frac{6}{7}\right)^3$

ध्यान दें, पृथक आधार किन्तु समान घातांक वाली संख्याओं के गुणन सूत्र $a^m \times b^m = (a\times b)^m$ का उपयोग करके भी कुछ परिमेय संख्याओं को घातीय संकेतन (घात रूप) में व्यक्त कर सकते हैं, जैसे—

$$(27\times343) = 3^3 \times 7^3 = (3\times7)^3 = (21)^3$$

धनात्मक एवं ऋणात्मक घातांक :

घातांक (–1) का अर्थ :

देखिए, $3\times\frac{1}{3} = 1$ या $3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$5\times\frac{1}{5} = 1,$ या $5 = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)}$

$\frac{3}{7}\times\frac{7}{3} = 1,$ या $\frac{3}{7} = \frac{1}{7/3}$

इसी प्रकार यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो, तो

$$a \times \frac{1}{a} = 1, \quad \text{या} \quad a = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)}$$

हम जानते हैं कि ऐसी परिमेय संख्याएँ जिनका गुणनफल 1 के बराबर होता है, एक दूसरे की गुणात्मक प्रतिलोम (Inverse) अथवा व्युत्क्रम (Reciprocal) कहलाती है। अतः उपर्युक्त उदाहरणों में 3 का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{3}$ का गुणात्मक प्रतिलोम 3 होगा।

आप जानते हें कि $10^2 = 10 \times 10 = 100$

$$10^1 = \frac{10 \times 10}{10} = \frac{100}{10}$$

निष्कर्ष :

> किसी शून्येतर परिमेय संख्या a के लिए $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ जहाँ m एक धनात्मक संख्या है।
>
> a^{-m}, a^m का गुणात्मक प्रतिलोम है।

हम जानते हैं कि a के गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{a}$ को a^{-1} भी लिखा जाता है। इसे 'a की घात (-1)' अथवा 'a व्युत्क्रम पढ़ते हैं, इसी प्रकार 3 का गुणात्मक प्रतिलोम 3^{-1}, 9 का गुणात्मक प्रतिलोम 9^{-1} है तथा $\frac{4}{5}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$ अथवा $\frac{5}{4}$ है।

अतः $\frac{1}{3} = 3^{-1}, \frac{1}{9} = 9^{-1}, \frac{5}{4} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-1}$

इसी प्रकार,

$$3 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}, 9 = \left(\frac{1}{9}\right)^{-1}, \frac{4}{5} = \left(\frac{5}{4}\right)^{-1}.$$

पुनः देखिए,

$$5 \times \frac{1}{5} = 1$$

$\therefore$ $\frac{1}{5} = 5$ का व्युत्क्रम

$$= (5)^{-1}$$

अर्थात् $5 = \frac{1}{1/5}$

अर्थात् $\frac{1}{2^3} = (2^3)^{-1} = 2^{-3}$

व्यापक रूप में हम देखते हैं कि

$$a^{-n} \times a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

या $a^{-n} \times a^n = 1$

अतः $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ और $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

उपर्युक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकलता है कि—

1. किसी शून्येतर परिमेय संख्या की (-1) घात, उस संख्या के गुणात्मक प्रतिलोम (व्युत्क्रम) के बराबर होता है।
2. यदि a एक शून्येतर परिमेय संख्या हो तथा n कोई धन पूर्णांक हो तो a^n का गुणात्मक प्रतिलोम a^{-n} होता है और इसे 'a की घात $(-n)$ पढ़ते हैं।

टिप्पणी : 0^{-n} परिभाषित नहीं है क्योंकि $0^{-n} = \frac{1}{0^n}$

दायें पक्ष में भाजक $0^n = 0$ और हम जानते हैं कि 0 से भाग परिभाषित नहीं हैं।

विशेष : किसी भी संख्या को 1.0 और 10.0 के बीच की एक दशमलव संख्या (जिसमें 1.0 सम्मिलित है परन्तु 10.0 सम्मिलित नहीं है) और 10 की किसी घात के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। संख्या के इस रूप को उसका 'मानक रूप' या 'वैज्ञानिक संकेतन' कहते हैं।

इस प्रकार

मानक रूप या वैज्ञानिक संकेतन में व्यक्त संख्याएँ $k \times 10^n$ के रूप में लिखी जाती है जहाँ $1 \le k < 10$ तथा n एक पूर्णांक होता है और k एक दशमलव संख्या होती है।

मूल्यांकन :

1. $3^{-2} \times 3^5$ का मान होगा—

   (i) 3 (ii) 9 (iii) $\frac{1}{27}$ (iv) 27

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^2$ का मान होगा—

   (i) 2 (ii) 4 (iii) 8 (iv) 16

3. $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$ का मान बताइये।

4. $\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^0 + \left(\frac{3}{5}\right)^1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2\right\} \div \left(\frac{7}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

5. $\left(\frac{7}{9}\right)^2 \div \left(\frac{14}{3}\right)^2$ को सरल कर मान ज्ञात कीजिए।

6. $8^{(5-5)}$ का मान बताइये।

7. $9^3 \div 27$ का मान बताइये।

6. $\left(\frac{6}{3}\right) \div 18$ का मान ज्ञात कीजिए।

———

इकाई-5

सरल व चक्रवृद्धि ब्याज की संकल्पना

इस इकाई के अध्ययनोपरांत हमें निम्नांकित की जानकारी प्राप्त होगी :

* साधारण ब्याज
* चक्रवृद्धि ब्याज

प्रशिक्षुओं से निम्नांकित प्रश्न हल करवायें—

एक गाँव में मोहन ने साहूकार से 100 रुपये उधार लिया तो उसे ` 5 हर महीने अतिरिक्त धन देना होता है। इस अतिरिक्त धन (` 5) का दूसरा नाम ब्याज है। यदि एक महीने में ` 100 पर ` 5 ब्याज देना पड़े तो

एक वर्ष में ` 100 पर ` 60 ब्याज देना होगा।

इसका अर्थ है कि ब्याज की वार्षिक दर 60% हुई।

यहाँ पर उधार लिया या उधार दिया गया रुपया 'मूलधन' कहलाता है।

अब मोहन को एक वर्ष के बाद ` 160 साहूकार को देना पड़ेगा। यही राशि मिश्रधन कहलाती है अर्थात्

$$\boxed{\text{मिश्रधन} = \text{मूलधन} + \text{ब्याज}}$$

या ब्याज = मिश्रधन – मूलधन

इस प्रकार हमें ब्याज के लिए निम्नांकित सूत्र प्राप्त होता है :

$$\boxed{\text{ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}}$$

उपर्युक्त सूत्र से प्राप्त ब्याज को 'साधारण ब्याज' कहते हैं।

साधारण ब्याज निम्नांकित तीन बातों पर निर्भर करता है—

1. कितना रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् मूलधन।
2. कितने समय के लिए रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् समय।
3. किस ब्याज दर पर रुपया जमा किया या उधार लिया, अर्थात् ब्याज दर।

प्रशिक्षुओं से उपर्युक्त प्रकार के अन्य प्रश्न उनसे स्वयं करवायें।

चक्रवृद्धि ब्याज : आज बाजार में ऋण वितरण कराने वाली कई संस्थाएँ हैं। ये संस्थाएँ उपभोक्ता से ब्याज पर भी ब्याज सहित अपने धन की वसूली करती हैं। यहाँ पर चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में चर्चा करेंगे।

हम जानते हैं—

साधारण ब्याज ज्ञात करने में प्रतिवर्ष का ब्याज समान होता है।

meeOeejCe yÙeepe $= \dfrac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

जब कोई व्यक्ति किसी महाजन से निश्चित अवधि (जैसे 2 वर्ष) के लिए ब्याज की वार्षिक दर पर धन उधार लेता है और पहले वर्ष के अन्त में ब्याज न जमा करने पर पहले वर्ष के ब्याज को मूलधन में जोड़ देते हें, तो उस दशा में पहले वर्ष का जो मिश्रधन होता है, वह दूसरे वर्ष के लिए मूलधन हो जाता है और फिर इस नये मूलधन पर दूसरे वर्ष का ब्याज निकालते हैं, यह ब्याज दूसरे वर्ष के मूलधन में जोड़ने पर दूसरे वर्ष का मिश्रधन प्राप्त हो जाता है।

दूसरे वर्ष के मिश्रधन का पहले वर्ष के मूलधन से अन्तर ही चक्रवृद्धि ब्याज होता है।

आइये चक्रवृद्धि ब्याज की चर्चा करते हैं।

` 500 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन सारणी को देखते हुए ज्ञात करें।

मूलधन (रुपये)	दर (% वार्षिक)	समय (वर्ष)	ब्याज (` में)	मिश्रधन
500	10	पहले वर्ष	50	550
550	10	दूसरे वर्ष	55	605

यहाँ पर,

2 वर्ष के बाद चक्रवृद्धि ब्याज = ` 605 – ` 500

= ` 105

हम देखते हैं कि 2 वर्ष का साधारण ब्याज

$$= \frac{500 \times 10 \times 2}{100}$$

= `t100

चक्रवृद्धि ब्याज का मान ` 105 आया है।

2 वर्ष का साधारण ब्याज ` 100 आया है।

दोनों ब्याजों का अन्तर = ` 105 – ` 100 = ` 5

यह ब्याज प्रथम वर्ष के ब्याज ₹ 50 का ब्याज है।

ब्याज पर ब्याज की गणना करने पर ब्याज $= \dfrac{50 \times 10 \times 1}{100}$

$= ₹\ 5$

आप देखेंगे कि दूसरे वर्ष के ब्याज की गणना में पहले वर्ष के ब्याज पर भी ब्याज की गणना की गयी। अतः ब्याज की इस प्रणाली को 'ब्याज पर ब्याज' या 'चक्रवृद्धि ब्याज' कहते हैं तथा इस प्रकार प्राप्त मिश्रधन को 'चक्रवृद्धि मिश्रधन' कहते हैं।

उपर्युक्त से निम्नांकित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं—

1. समान धन, समान समय और समान वार्षिक दर होने पर 1 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज का मान, साधारण ब्याज के बराबर होता है।
2. चक्रवृद्धि ब्याज की गणना में पहले वर्ष का मिश्रधन, दूसरे वर्ष का मूलधन होता है।
3. चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन – मूलधन

चक्रवृद्धि मिश्रधन एवं चक्रवृद्धि ब्याज के लिये सूत्र प्राप्त करना :

₹ 200 का 7% वार्षिक दर से चार वर्ष बाद चक्रवृद्धि मिश्रधन निम्नांकित चरणों द्वारा प्राप्त किया जायेगा।

(a) एक वर्ष बाद ब्याज $= ₹\ \dfrac{200 \times 7}{100} = ₹\ 14$

एक वर्ष बाद मिश्रधन $= ₹\ (200 + 14) = ₹\ 214$

अतः एक वर्ष बाद मूलधन $= \dfrac{₹\ 214}{₹\ 200} = 1.07$ गुना (₹ 200) बढ़ गया।

अर्थात एक वर्ष पश्चात् 1.07 गुना बढ़ गया।

अर्थात एक वर्ष पश्चात मिश्रधन = ₹ 200 × 1.07

$= ₹\ 200\ (1 + .07)$

$= ₹\ 200\left(1 + \dfrac{7}{100}\right)$

$= ₹\ 214$

(b) जब दूसरे वर्ष का ब्याज ज्ञात किया जायेगा तब मूलधन ₹ 214 अर्थात् ₹ $200\left(1 + \dfrac{7}{100}\right)$ होगा।

दूसरे वर्ष का ब्याज (चक्रवृद्धि ब्याज) $= ₹\ \dfrac{200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)\times 7}{100} = ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)\times\dfrac{7}{100}$

दो वर्ष बाद मिश्रधन (चक्रवृद्धि मिश्रधन) $= ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right) + ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)\times\dfrac{7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)\left[1+\frac{7}{100}\right]$$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

अतः दो वर्ष पश्चात् मूलधन (₹ 200) बढ़ गया $= \dfrac{₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2}{₹\ 200}$

$$= \left(1+\frac{7}{100}\right)^2$$

अर्थात् दो वर्ष पश्चात् मिश्रधन $= 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2$

(c) तीसरे वर्ष के लिये मूलधन $= ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2$ होगा।

तीन वर्ष बाद ब्याज $= ₹\ \dfrac{200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2\times 7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\times\frac{7}{100}$$

तीन वर्ष बाद मिश्रधन (चक्रवृद्धि मिश्रधन) $= ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2 + ₹\ 200\left(1+\dfrac{7}{100}\right)^2\dfrac{7}{100}$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^2\left[1+\frac{7}{10}\right]$$

$$= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^3$$

इसी प्रकार चार वर्ष पश्चात् चक्रवृद्धि मिश्रधन $= ₹\ 200\left(1+\frac{7}{100}\right)^4$

उपर्युक्त चरणों से प्राप्त चक्रवृद्धि मिश्रधन के लिये प्राप्त सूत्र (formula) को निम्नांकित प्रकार से प्रदर्शित करते हैं।

चक्रवृद्धि मिश्रधन = मूलधन $\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$

1. यदि चक्रवृद्धि मिश्रधन (Compound Amount) = A

मूलधन (Principle Amount) = P

समय (time) = n

दर (Rate) = r ब्याज की दर = r

अतः $\boxed{A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n}$

n वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज = चक्रवृद्धि मिश्रधन − मूलधन

$$= P\left\{\left(1+\frac{r}{100}\right)^n - 1\right\}$$

मूल्यांकन :

1. ₹ 400, 3 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से उधार दिया गया। ब्याज होगा—

   (i) ₹ 70 (ii) ₹ 72 (iii) ₹ 40 (iv) ₹ 82

2. ₹ 500 का 3 वर्ष का किस ब्याज की वार्षिक दर पर उसका साधारण ब्याज A हो जाता है।

   (i) 10% (ii) 12% (iii) 15% (iv) 20%

3. 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का मिश्रधन ₹ 560 है। मूलधन है—

   (i) ₹ 400 (ii) ₹ 500 (iii) ₹ 600 (iv) ₹ 450

4. किस वार्षिक ब्याज की दर से 10 वर्ष में किसी धन का मिश्रधन तीन गुना हो जाएगा—

(i) ` 15 (ii) ` 20 (iii) ` 25 (iv) ` 18

5. वार्षिक ब्याज दर ज्ञात कीजिए यदि मूलधन ` 100 समय 1 वर्ष और मिश्रधन ` 107 हो।

6. किस वार्षिक साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में किसी धन का मिश्रधन चार गुना हो जाएगा?

7. एक किसान ने ` 2,400, 12% वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिया। उसने $2\frac{1}{2}$ वर्ष बाद ` 1,200 तथा एक गाय देकर उधार चुका दिया। गाय का मूल्य ज्ञात कीजिए।

8. करीम बाग लगाने के लिए बैंक से ` 15000 का ऋण लेता है। बैंक पौधों की खरीद के लिए ऋण का 20% छूट देने के बाद शेष धनराशि पर 9% वार्षिक साधारण ब्याज लेता है। 4 वर्ष बाद करीम पूरा ऋण अदा करने के लिए बैंक को कितना धन देगा?

———

इकाई-6

सरल ब्याज, सूत्र तथा चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

इस इकाई को पढ़ने से आप को निम्नलिखित की जानकारी होगी।

- सरल ब्याज
- सरल ब्याज का सूत्र
- चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

प्रायः यह देखने में आता है कि किसी भी व्यक्ति का व्यावहारिक जीवन में उधार के लेन-देन के बिना कार्य करना बहुत कठिन होता है उधार लेन-देन की प्रक्रिया बैंकों, सहकारी समितियों या किसी व्यक्ति द्वारा की जाती है क्या आप जानते हैं कि उधार के लेन-देन में कुछ शर्त होती हैं? आपको ज्ञात होना चाहिए कि उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले के सामने कुछ शर्त रखता है। जिसके अन्तर्गत उधार देने वाला व्यक्ति उधार लेने वाले से वार्षिक या मासिक की दर से प्रति रुपये 100.00 पर कुछ रुपया अधिक लेता है। जब कोई व्यक्ति जितनी धनराशि उधार देता है, वह मूलधन कहलाता है शर्त की अवधि पूर्ण होने पर जो धन चुकता करता है वह मिश्रधन कहलाता है और मूलधन से अधिक दिया गया धन ब्याज कहलाता है।

सरल ब्याज—जमा की गई अथवा उधार ली गई धनराशियों से जो अधिक धन दिया जाता है या लिया जाता है उसे ब्याज कहते है। एक निश्चित मूलधन पर जब प्रत्येक अवधि का ब्याज समान होता है तो उसे साधारण ब्याज या सरल ब्याज कहते है।

सरल ब्याज का सूत्र—किसी धन का ब्याज हम ऐकिक नियम द्वारा निकाल सकते है परन्तु सरल ब्याज को निकालने की दूसरी विधि सूत्र का प्रयोग करके सरल ब्याज निकाला जाता है सरल ब्याज निकालने का सूत्र निम्नलिखित है।

$$\text{सरल ब्याज} = \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$$

जमा की गई धनराशि अथवा उधार ली गई धनराशि को मूलधन कहते हैं।

जिस निश्चित अवधि के लिए धन जमा रहता है या उधार या ऋण रहता है उस अवधि को समय कहते हैं।

100 रुपये के मूलधन पर एक वर्ष के लिए प्राप्त ब्याज को ब्याज दर कहते हैं ब्याज दर को % (प्रतिशत) के रूप में व्यक्ति करते हैं।

ब्याज दर को केवल दर भी लिखकर प्रयोग करते है।

ब्याज की दरें प्रतिशत तिमाही प्रतिशत छमाही अथवा प्रति रुपया प्रति मास के रूप में भी प्रयुक्त होती है।

उदाहरण :

रुपया 500 के लिए 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का साधारण ब्याज बताइए।

हल :

मूल धन = 500 रुपये

समय = 2 वर्ष

वार्षिक ब्याज की दर = 4%

प्रथम विधि

100 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज = 4 रुपये

1 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{4}{100}$ रुपये

500 रुपये पर 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{500 \times 4}{100}$ रुपये

500 रुपये पर 2 वर्ष का ब्याज $= \frac{500 \times 4 \times 2}{100}$

अतः साधारण ब्याज = 40 रुपये

द्वितीय विधि

1 वर्ष का साधारण ब्याज = 500 रुपये का 4%

$= \frac{500 \times 4}{100} = 20$ रुपये

2 वर्ष का साधारण ब्याज = 20×2 = 40 रुपये

चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र एवं अनुप्रयोग

हम साधारण ब्याज के बारे में जानकारी एवं साधारण ब्याज के सूत्र का प्रयोग कर साधारण ब्याज निकालना सीख चुके है अब हम चक्रवृद्धि ब्याज के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगें।

चक्रवृद्धि मिश्रधन—मूलधन पर मिले ब्याज को यदि मूलधन में जोड़ दिया जाए तो वह मिश्रधन कहलाता है।

चक्रवृद्धि मिश्रधन का सूत्र—

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन}\left(1+\frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$$

उदाहरण 1. किस साधारण ब्याज की दर से 20 वर्षों में किसी धन का मिश्रधन चार गुना हो जायेगा?

हल—माना कि मूलधन = ₹ 100 है

मिश्रधन =मूलधन का चार गुना = ₹ 400

ब्याज = 400 – 100 = ₹ 300

$\because$ ₹ 100 पर 20 वर्ष का ब्याज = ₹ 300

$\therefore$ ₹ 100 पर 1 वर्ष का ब्याज $= \dfrac{300}{20}$

= ₹ 15

अतः वार्षिक ब्याज दर = 15% **उत्तर**

उदाहरण 2. 6% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का मिश्रधन 560 रुपये है तो मूलधन बताइए।

हल— $\because$ ₹ 100 पर 1 वर्ष का ब्याज = ₹ 6

$\therefore$ ₹ 100 पर 2 वर्ष का ब्याज = 2 × 6 = ₹ 12

मिश्रधन = ₹ 100 + ₹ 12 = ₹ 112

$\because$ ₹ 112 मिश्रधन हैं तो मूलधन = ₹ 100

$\therefore$ ₹ 1 मिश्रधन है तो मूलधन = ₹ $\dfrac{100}{12}$

₹ 560 मिश्रधन है तो मूलधन = ₹ $\dfrac{100\times560}{112}=500$ **उत्तर**

उदाहरण 3. ₹ 100 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्षों के चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज का कितना अन्तर होगा।

हल— मूलधन = ₹ 100

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$= \frac{100 \times 10 \times 2}{100}$

= ` 20

चक्रवृद्धि ब्याज $= \text{मूलधन} \times \left[\left\{ 1 + \frac{\text{दर}}{100} \right\}^{\text{समय}} - 1 \right]$

$$= 100 \times \left[\left\{ 1 + \frac{10}{100} \right\}^{2} - 1 \right]$$

$$= 100 \times \left[\left\{ 1 + \frac{1}{10} \right\}^{2} - 1 \right]$$

$$= 100 \times \left[\left\{ \frac{11}{10} \right\}^{2} - 1 \right]$$

$$= 100 \times \left[\frac{11}{10} \times \frac{11}{10} - 1 \right]$$

$$= 100 \times \left[\frac{121}{100} - 1 \right]$$

$$= 100 \times \left[\frac{121 - 100}{100} \right]$$

= ` 21

चक्रवृद्धि ब्याज और साधारण ब्याज में अन्तर = 21 – 20 = ` 1 **उत्तर**

उदाहरण 4.किस धन का 10% वार्षिक ब्याज की दर से एक वर्ष का साधारण ब्याज ` 1000 है।

हल— दर = 10% वार्षिक

समय = 1 वर्ष

साधारण ब्याज = ` 1000

साधारण ब्याज $= \frac{\text{मूलधन} \times \text{दर} \times \text{समय}}{100}$

$$\text{मूलधन} = \frac{\text{साधारण ब्याज} \times 100}{\text{दर} \times \text{समय}}$$

$$= \frac{1000 \times 100}{10 \times 1}$$

= ` 10000

अतः मूलधन = ` 10000 है। **उत्तर**

उदाहरण 5. ` 500 का 10% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल— मूलधन = ` 500

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

$$\text{चक्रवृद्धि} = \text{मूलधन} \times \left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$$

$$= 500 \times \left\{1 + \frac{10}{100}\right\}^2$$

$$= 500 \times \left\{1 + \frac{1}{10}\right\}^2$$

$$= 500 \times \left\{\frac{11}{10}\right\}^2$$

$$= 500 \times \frac{11}{10} \times \frac{11}{10}$$

$$= 5 \times 121$$

= ` 605 **उत्तर**

उदाहरण 6. ` 200 का 2 वर्ष का 10% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल— मूलधन = ` 200

दर = 10% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left[\left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}} - 1\right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{ 1 + \frac{10}{100} \right\}^2 - 1 \right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{ 1 + \frac{1}{10} \right\}^2 - 1 \right]$$

$$= 200 \times \left[\left\{ \frac{11}{10} \right\}^2 - 1 \right]$$

$$= 200 \times \left[\frac{121}{100} - 1 \right]$$

$$= 200 \times \left[\frac{121 - 100}{100} \right]$$

$$= 200 \times \frac{21}{100}$$

$$= 2 \times 21$$

= ` 42 **उत्तर**

उदाहरण 7. ज्ञात कीजिए कि किस धन का 2 वर्ष में 4% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ` 676 हो जायेगा।

हल— दर = 4% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

मिश्रधन = ` 676

माना कि अभीष्ट धन अर्थात् मूलधन ` P है।

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left[1 + \frac{\text{दर}}{100} \right]^{\text{समय}}$$

$$676 = P \times \left[1 + \frac{4}{100} \right]^2$$

$$676 = P \times \left[1 + \frac{1}{25} \right]^2$$

$$676 = P \times \left[\frac{25 + 1}{25} \right]^2$$

$$676 = P \times \left[\frac{26}{25} \right]^2$$

$$676 = P \times \frac{676}{625}$$

$$P = \frac{676 \times 625}{676}$$
$$P = 625$$

अतः अभीष्ट धन P = ` 625 **उत्तर**

उदाहरण 8. ज्ञात कीजिए कि कितने प्रतिशत वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से ` 400 का 2 वर्ष में मिश्रधन 441 रुपया हो जायेगा?

हल— मूलधन = ` 400

मिश्रधन = ` 441

समय = 2 वर्ष

माना कि चक्रवृद्धि ब्याज की दर $R\%$ वार्षिक है।

$$\text{चक्रवृद्धि मिश्रधन} = \text{मूलधन} \times \left\{1 + \frac{\text{दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$$

$$441 = 400 \times \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\frac{441}{400} = \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\left\{\frac{21}{20}\right\}^2 = \left\{1 + \frac{R}{100}\right\}^2$$
$$\frac{21}{20} = 1 + \frac{R}{100}$$
$$\frac{21}{20} - 1 = \frac{R}{100}$$
$$\frac{1}{20} = \frac{R}{100}$$
$$R = 5$$

अतः चक्रवृद्धि ब्याज की दर = 5% है। **उत्तर**

उदाहरण 9. एक नगर की जनसंख्या प्रतिवर्ष 10% बढ़ जाती है। यदि इस समय नगर की जनसंख्या 140000 है, तो 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल— नगर की वर्तमान जनसंख्या = 140000

नगर की जनसंख्या में वृद्धि की दर = 10% वार्षिक

समय = 3 वर्ष

अतः 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या = नगर की वर्तमान जनसंख्या $\times\left\{1+\frac{\text{वृद्धि की दर}}{100}\right\}^{\text{समय}}$

$$
\begin{aligned}
&= 140000\times\left\{1+\frac{10}{100}\right\}^3\\
&= 140000\times\left\{1+\frac{1}{10}\right\}^3\\
&= 140000\times\left\{\frac{11}{10}\right\}^3\\
&= 140000\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\times\frac{11}{10}\\
&= 140\times 1331\\
&= 186340
\end{aligned}
$$

अतः 3 वर्ष बाद नगर की जनसंख्या = 186340 **उत्तर**

उदाहरण 10. एक नगर की जनसंख्या में प्रतिवर्ष 5% कमी हो जाती है। यदि नगर की वर्तमान जनसंख्या 3610 है, तो 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल— नगर की वर्तमान जनसंख्या = 3610

नगर की जनसंख्या में कमी की दर = 5% वार्षिक

समय = 2 वर्ष

माना 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या x थी।

नगर की वर्तमान जनसंख्या = 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या $\times\left[1-\frac{\text{कमी की दर}}{100}\right]^{\text{समय}}$

$$
\begin{aligned}
3600 &= x\times\left\{1-\frac{5}{100}\right\}^2\\
3610 &= x\times\left\{1-\frac{1}{0}\right\}^2\\
3610 &= x\times\left\{\frac{19}{20}\right\}^2\\
3610 &= x\times\frac{19}{20}\times\frac{19}{20}\\
x &= \frac{3610\times 20\times 20}{19\times 19}\\
&= 10\times 20\times 20\\
&= 4000
\end{aligned}
$$

अतः 2 वर्ष पूर्व नगर की जनसंख्या = 4000 **उत्तर**

उदाहरण 11. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष 5% की दर से कम हो रही है। यदि गाँव की वर्तमान जनसंख्या 3610 हो, तो 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या बताइए।

हल— गाँव की वर्तमान जनसंख्या $A = 3610$

प्रतिवर्ष कमी की दर $r\% = 5\%$

समय $(n) = 2$ वर्ष

मान लिया 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $= P$

$$A = P\left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$$

या, $$3610 = P\left(1 - \frac{5}{100}\right)^2 = P\left(\frac{19}{20}\right)^2$$

या, $$P \times \frac{19}{20} \times \frac{19}{20} = 3610$$

या, $$P = \frac{3610 \times 20 \times 20}{19 \times 19} = 10 \times 20 \times 20 = 4000$$

अतः 2 वर्ष पूर्व की गाँव की जनसंख्या 4000 थी। **उत्तर**

वैकल्पिक विधि :

गाँव की वर्तमान जनसंख्या $P = 3610$

प्रतिवर्ष कमी की दर $= r\%$

अर्थात् वृद्धि की दर $= -r\%$

प्रश्नानुसार, $-r\% = 5\%$

अतः $r = -5$

समय 2 वर्ष पूर्व अर्थात् $n = -2$

अतः यदि 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या A हो, तो

$$\begin{aligned}
A &= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^{n} \\
&= P\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-2} \\
&= 3610\left(1-\frac{5}{100}\right)^{-2} \\
&= \frac{3610}{\left(1-\frac{5}{100}\right)^{2}} \\
&= \frac{3610}{\frac{95}{100}\times\frac{95}{100}} \\
&= \frac{3610\times100\times100}{95\times95} \\
&= 2\times100\times20 \\
&= 40\times400 \\
&= 4000
\end{aligned}$$

अतः 2 वर्ष पूर्व की जनसंख्या 4000 थी। **उत्तर**

मूल्यांकन :

1. 100 रुपये पर 2 वर्ष का 3% वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज कितना होगा।
2. 400 रुपये पर 3 वर्ष का वार्षिक ब्याज की दर से ब्याज तथा मिश्रधन ज्ञात कीजिए।
3. 7200 रुपये का 3 वर्ष का ब्याज 1080 रुपये है ब्याज की दर बताइए।
4. 10% वार्षिक ब्याज की दर से कितने समय 200 रुपये का तीन गुना हो जायेगा।
5. 400 रुपये का 5% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
6. 500 रुपये का 4% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज एवं साधारण ब्याज के अन्तर ज्ञात कीजिए।

———