

इकाई-13

अवर्गीकृत आँकड़ों के माध्य

इस इकाई के अध्ययन से निम्नलिखित की जानकारी होगी—

- (i) आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति और प्रकार
- (ii) समान्तर माध्य
- (iii) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता नहीं दी गई हो)।
- (iv) अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात करना जबकि पदों की बारंबारता दी गई हो।
प्रशिक्षु आँकड़ों को एकत्रित करना, उनको सारणीबद्ध करना तथा उन्हें दंड आलेखों के रूप में प्रदर्शित करने से परिचित हो चुके हैं। आँकड़ों का संग्रह, आलेखन और प्रस्तुतीकरण हमारे अनुभवों को संगठित करने और उनसे निष्कर्ष निकालने में हमारी सहायता करते हैं। प्रायः आप लोग समाचार-पत्रों, पत्रिकाओं, टेलीविजन तथा आस-पास निम्नांकित प्रकार की बातें सुनते और कहते रहते हैं—
 - (i) कक्षा में 6 छात्रों की औसत ऊँचाई 140 सेमी है।
 - (ii) क्रिकेट मैच में खेले गये मैचों में खिलाड़ियों द्वारा बनाये गये रनों का औसत 60 है।
 - (iii) फैक्टरी के मजदूरों की औसत मासिक आय ₹ 5000 है।
 - (iv) हिन्दी के एक टेस्ट में विद्यार्थियों के अंको का औसत 65 है।

वास्तव में उपरोक्त कथनों में कक्षा के प्रत्येक छात्रों की ऊँचाई 140 सेमी, खिलाड़ी द्वारा प्रत्येक मैच में बनाये गये रन 60, फैक्टरी के प्रत्येक मजदूर की मासिक आय ₹ 5000 तथा हिन्दी के टेस्ट में प्रत्येक विद्यार्थियों का अंक 65 नहीं है।

(i) आँकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति और प्रकार

आपने देखा कि उपरोक्त कथनों में ‘औसत’ शब्द का प्रयोग हुआ है। जैसे क्रिकेट मैच में खेले गये मैचों में खिलाड़ियों द्वारा बनाये गये रनों का औसत 60 है। इसका तात्पर्य यह कदापि नहीं है कि प्रत्येक मैच में खिलाड़ी द्वारा बनाये गये रन 60 है। किसी मैच में खिलाड़ी ने 60 से अधिक रन बनाए और किसी में 60 से कम रन बनाए। वास्तव में यह सब प्रतिनिधि संख्याएँ हैं जो समूह की न तो न्यूनतम मान वाली संख्याएँ हैं और न तो अधिकतम मान वाली। निश्चित ही ऐसी संख्याएँ अपने समूह के मध्य या उसके आस-पास की संख्याएँ होती हैं।

इस प्रकार आपने देखा कि ‘औसत’ एक ऐसी संख्या है जो आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति को दर्शाती है, क्योंकि औसत सबसे अधिक तथा सबसे कम मूल्य के आँकड़ों के बीच में होती है। इसलिए औसत आँकड़ों के एक समूह की केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है।

आँकड़ों में से किसी एक आँकड़े के आस-पास पाये जाने की उनकी प्रवृत्ति को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं।

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें मुख्यतः तीन प्रकार की होती हैं :

- (i) समांतर माध्य
- (ii) मध्यिका या माध्यक
- (iii) बहुलक

यहाँ पर हम लोग केवल समान्तर माध्य के बारे में चर्चा करेंगे।

(ii) समान्तर माध्य

आँकड़ों के एक समूह के लिए अधिकांशतः प्रयोग किए जाने वाला प्रतिनिधि मान समांतर माध्य है। संक्षेप में इसे माध्य भी कहते हैं।

उपरोक्त कथन को अच्छी प्रकार से समझने के लिए आइए एक उदाहरण की सहायता लेते हैं।

तीन बोरों में क्रमशः 50 किग्रा, 70 किग्रा तथा 90 किग्रा चावल हैं। यदि तीनों बोरों में बराबर चावल रखा जाए; तो प्रत्येक बोरे में कितना चावल होगा?

उपरोक्त स्थिति में प्रत्येक बोरे में बराबर चावल रखने के लिए स्पष्ट है कि हमें चावलों के मात्रा का माध्य निकालना पड़ेगा।

अतः समांतर माध्य = चावलों की कुल मात्रा/बोरों की संख्या

$$\begin{aligned} &= \frac{50 + 70 + 90}{3} \\ &= \frac{210}{3} \end{aligned}$$

$$= 70 \text{ किग्रा}$$

इस प्रकार प्रत्येक बोरे में 70 किग्रा गेहूँ होगा।

अतः औसत या समान्तर माध्य या केवल माध्य वह मान है जो दिये हुए पदों के योगफल में पदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

\therefore समांतर माध्य = सभी पदों का योगफल/पदों की संख्या

(iii) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता नहीं दी गयी)

यदि पदों का समूह $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ है जिसमें कुल पदों की संख्या n है, तो

$$\text{समान्तर माध्य} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

यहाँ Σ (सिग्मा), ग्रीक भाषा का एक अक्षर है जो योगफल का संकेत है।

उदाहरण 1. कक्षा 6 के 10 शिक्षार्थियों के भार (किग्रा) में क्रमशः 57, 43, 41, 39, 53, 49, 46, 46, 45 तथा 41 किग्रा है। उनके भार का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : समान्तर माध्य = कुल पदों का योग/पदों की संख्या

$$\begin{aligned} &= \frac{57 + 43 + 41 + 39 + 53 + 49 + 46 + 46 + 45 + 41}{10} \\ &= \frac{460}{10} \\ &= 46 \text{ किग्रा} \end{aligned}$$

अतः शिक्षार्थियों के भार का समान्तर माध्य 46 किग्रा है।

(iv) अवर्गीकृत आँकड़ों से समान्तर माध्य की गणना (जब बारंबारता दी गयी हो)

अभी तक आपने उन अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात किया जिसकी बारंबारता नहीं दी गई है। अब ऐसे अवर्गीकृत आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात करने की चर्चा करेंगे जिसकी बारंबारता दी गई है।

इस प्रकार के आँकड़ों का समान्तर माध्य हम निम्नलिखित चरणों द्वारा निकालते हैं—

(1) सबसे पहले प्रत्येक आँकड़ों व बारंबारता को सारणीबद्ध करके आँकड़ों को x तथा बारंबारता को f द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

(2) प्रत्येक पद में संगत बारंबारता से गुणा करते हैं।

(3) प्राप्त गुणनफल का योगफल ज्ञात करते हैं।

(4) बारंबारता का योगफल ज्ञात करते हैं।

(5) प्राप्त गुणनफलों के योगफल को बारंबारताओं के योगफल से भाग देते हैं। यही भागफल अभीष्ट समान्तर माध्य है।

यदि समूह के पद $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ हैं तथा उनकी संगत बारंबारता क्रमशः $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$ हैं तो

$$\begin{aligned}\text{समांतर माध्य} &= \frac{f_1 \times x_1 + f_2 \times x_2 + f_3 \times x_3 + \dots + f_n \times x_n}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_n} \\ &= \frac{\sum fx}{\sum f}\end{aligned}$$

उदाहरण 2. नीचे दी गई सारणी के आँकड़ों का समान्तर माध्य ज्ञात कीजिए—

पद <i>x</i>	4	6	8	10	12	14
बारंबारता <i>f</i>	3	4	2	2	6	8

हल :

पद <i>x</i>	बारंबारता <i>f</i>	$f \times x$
4	3	12
6	4	24
8	2	16
10	2	20
12	6	72
14	8	112
योग	25	256

$$\begin{aligned}\text{समान्तर माध्य} &= \frac{\sum fx}{\sum f} \\ &= \frac{256}{25} \\ &= 10.24\end{aligned}$$

सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. 8 से 17 तक की प्राकृतिक संख्याओं का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए?
2. प्रथम पाँच सम प्राकृतिक संख्याओं का समांतर माध्य सम है या विषम?
3. यदि 2, 3 और *A* का समांतर माध्य 3 है, तो *A* का मान क्या होगा?

मूल्यांकन

ਪਦ	5	7	8	12	14	16
ਬਾਰੋਂਬਾਰਤਾ	4	5	4	3	8	6

7. किसी कक्षा के 8 शिक्षार्थियों ने गणित की परीक्षा में क्रमशः 40, 42, 45, 50, 55, 60, 64, 70 तथा 80 अंक प्राप्त किए। शिक्षार्थियों के प्राप्ताकों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

8. 10 बालिकाओं के भार किग्रा में क्रमशः 41, 42, 43, 38, 35, 34, 42, 37, 40 तथा 36 किग्रा है। इनके भारों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए।

9. निम्नलिखित सारणी में 50 बालकों का भार किलोग्राम में दिया हुआ है। उनके भार का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

भार (किग्रा में)	52	42	45	40	46
बारंबारता	4	12	18	10	6

10. निम्नलिखित बारंबारता बंटन का समांतर माध्य ज्ञात कीजिए—

ऊँचाई (सेमी में)	142	143	144	145	146	147
बारंबारता	3	5	7	7	3	2

इकाई-14

आयतन एवं धारिता की संकल्पना तथा इकाइयाँ

यह इकाई बी.टी.सी. द्वितीय सेमेस्टर के इकाई संख्या-9 के पृष्ठ 55 से पृष्ठ 56 में सन्निहित है।

इकाई-15

घन, घनाभ की अवधारणा तथा इनका आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

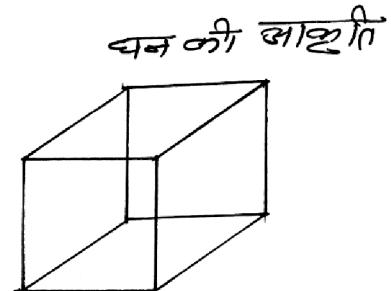
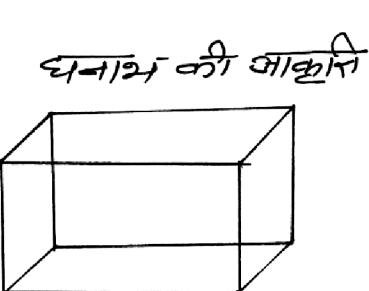
इस अध्याय में हम निम्नांकित बिन्दुओं की जानकारी प्राप्त करेंगे:

- घन, एवं घनाभ की अवधारणा
- घन एवं घनाभ का आयतन
- घन एवं घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

शिक्षक प्रशिक्षु को माचिस की डिब्बी दिखाकर घनाभ की आकृति का ज्ञान करा सकते हैं साथ ही उन्हें बतायें कि आलमारी, सन्दूक इत्यादि भी घनाभ हैं। प्रशिक्षुओं से घनाभ आकृति की अन्य वस्तुओं की जानकारी देने को कहें।

शिक्षक प्रशिक्षुओं को लूडो के पासे को दिखाकर घन की आकृति का ज्ञान करा सकते हैं।

अतः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई अलग-अलग माप की होती है तथा घन की लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई एक समान माप की होती है।



घनाभ और घन का आयतन

किसी भी वस्तु के द्वारा धेरे गये कुल स्थान की माप जिस भौतिक राशि के द्वारा की जाती है, उसे उस वस्तु का आयतन कहते हैं।

जिस प्रकार लम्बाई की इकाई सेमी या मीटर, क्षेत्रफल की इकाई वर्ग सेमी या वर्ग मीटर होती है, उसी प्रकार आयतन का मात्रक घन सेमी या घन मीटर होता है।

एक ऐसा घन जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी है, तो उस घन द्वारा धेरे गये कुल स्थान की माप 1 घन सेमी आयतन के रूप में व्यक्त की जाती है।

अर्थात् 1 घन सेमी आयतन, ऐसे घन का आयतन होता है, जिसके प्रत्येक कोर की लम्बाई 1 सेमी होती है।

प्रयास करें

1 घन मीटर आयतन का क्या अर्थ है?

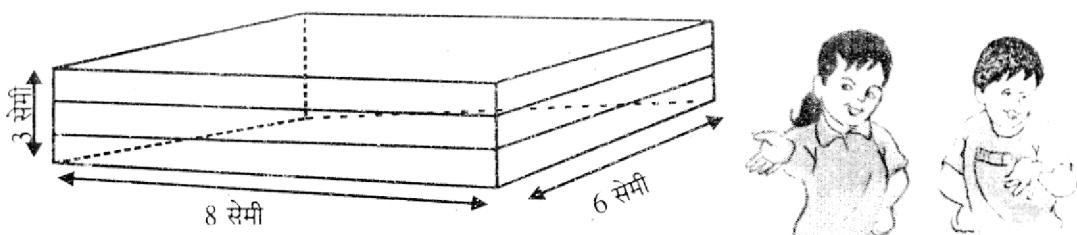
विशेष :

$$\begin{aligned} 1 \text{ घन मीटर} &= 1 \text{ मी}^2 \times 1 \text{ मी} \\ &= 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \\ &= 1000000 \text{ घन सेमी} = 10^6 \text{ घन सेमी} \end{aligned}$$

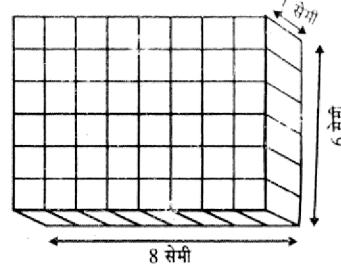
घन सेमी को सेमी³ भी लिखा जाता है, इसी प्रकार घन मीटर को मी³ लिखा जाता है।

क्रिया कलाप :

एक घनाभ के आकार का साबुन का टुकड़ा लीजिए, जिसकी लम्बाई 8 सेमी, चौड़ाई 6 सेमी व ऊँचाई 3 सेमी है। इसकी ऊँचाई को 3 बराबर भागों में बाँटिए। इनको किसी तेज चाकू से काटकर तीन पट्टियों को अलग कीजिए।



अब किसी पट्टी की लम्बाई को 8 समान भागों में बाँटकर पट्टियाँ प्राप्त कीजिए। इन आठ पट्टियों में प्रत्येक पट्टी को 6 समान भागों में बाँटिए। इस प्रकार प्राप्त घन सेमी के टुकड़ों को गिनिए।



प्रयास करें :

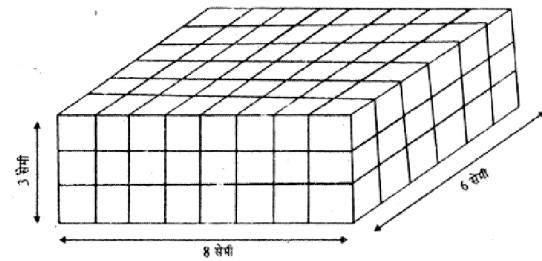
1. एक पट्टी में कुल कितने टुकड़े प्राप्त हुए?
2. प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई व ऊँचाई कितनी-कितनी है?
3. क्या प्रत्येक टुकड़े का आयतन घन के रूप में है?
4. साबुन के काटने पर कितनी पट्टियों प्राप्त होंगी?

हम देखेंगे कि कुल प्राप्त टुकड़े 48 हैं तथा प्रत्येक टुकड़े की लम्बाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई 1 सेमी है तथा प्रत्येक टुकड़ा घनाकार होगा।

क्या आप बता सकते हैं :

एक पट्टी का आयतन 1 सेमी कोर वाले कितने घनों के आयतन के बराबर होगा। एक पट्टी का आयतन कुल प्राप्त 48 घनाकार टुकड़ों के बराबर होगा अर्थात् एक पट्टी का आयतन 48 घन सेमी के बराबर होगा।

यदि प्राप्त तीनों पट्टियों को एक दूसरे के ऊपर रखें तो हमें पुनः साबुन का टुकड़ा पाश्वर्व में प्रदर्शित प्रकार का प्राप्त होगा।



इस प्रकार :

$$\begin{aligned}\text{साबुन का आयतन} &= 3 \times \text{एक पट्टी का आयतन} \\ &= 3 \times 48 \text{ घन सेमी} \\ &= 144 \text{ घन सेमी} \\ &= 8 \times 6 \times 3 \text{ घन सेमी} \\ &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई}\end{aligned}$$

इस प्रकार हम निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

$$\begin{aligned}\text{घनाभ का आयतन} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \times \text{ऊँचाई} \\ &= l \times b \times h\end{aligned}$$

जहाँ l = लम्बाई, b = चौड़ाई h = ऊँचाई

उपर्युक्त सूत्र की सहायता से साबुन या किसी घनाभ का आयतन उसे बिना काटे हुए ज्ञात किया जा सकता है।

घन के आयतन का सूत्र :

हम जानते हैं कि घन एक ऐसा घनाभ है, जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई परस्पर समान होती है। अतः घनाभ के आयतन के सूत्र में l , b , तथा h के स्थान पर घन की कोर (भुजा) a को प्रतिस्थापित करके घन के आयतन को ज्ञात करने का सूत्र प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पहुँचते हैं कि :

$$\text{घन का आयतन} = a \times a \times a = a^3$$

जहाँ a = घन की एक भुजा

इन्हें भी जानिए :

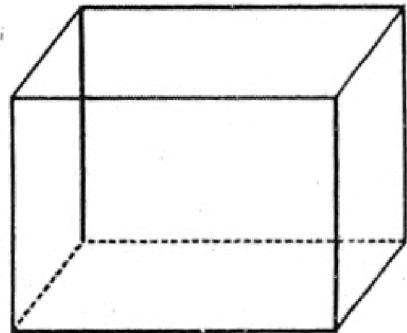
एक घन जिसकी कोर 10 सेमी अर्थात् 1 डेसी मी है, उसका आयतन कितना होगा?

$$\begin{aligned}\text{घन का आयतन} &= 10 \text{ सेमी} \times 10 \text{ सेमी} \times 10 \text{ सेमी} \\ &= 1000 \text{ सेमी}^3 \quad (1 \text{ घन डेसी मी}) \\ &= 1 \text{ लीटर}\end{aligned}$$

अतः 1000 घन सेमी आन्तरिक आयतन वाले बर्तन में जितना द्रव पदार्थ आता है, उसे 1 लीटर कहते हैं।

इस प्रकार

$$\begin{aligned}1 \text{ घन मी} &= 1000000 \text{ घन सेमी} \\ &= 1000 \text{ लीटर}\end{aligned}$$



इस प्रकार जिस बर्तन का आन्तरिक आयतन 1 घन मी होता है उसमें 1000 लीटर द्रव पदार्थ भरा जा सकता है।

प्रोजेक्ट कार्य

शिक्षक प्रशिक्षुओं से निम्नांकित क्रिया कलाप करने के लिये कहे :

- 1 सेमी भुजा की नाप (बाढ़ा नाप) का मिट्टी या चार्ट पेपर या पुराने ग्रीटिंग कार्ड से लगभग 50 घन बनायें।
- 1 सेमी चौड़ाई, 1 सेमी ऊँचाई एवं 2 सेमी लम्बाई (बाढ़ा नाप) के घनाभ चार्ट पेपर या पुराने ग्रीटिंग कार्ड से बनायें।
- 5 सेमी लम्बा, 3 सेमी चौड़ा तथा 2 सेमी ऊँचा (आन्तरिक नाप) एक ऊपर से खुला घनाभ चार्ट पेपर या ग्रीटिंग कार्ड से बनाकर उसको 1 सेमी भुजा के घनों से भरे। घनाभ को 30 घनों द्वारा भरा जायेगा।

$$\begin{aligned}\text{घनाभ का आयतन} &= 5 \times 3 \times 2 \\ &= 30 \text{ घन सेमी}\end{aligned}$$

इस प्रकार आयतन के सूत्र का सत्यापन होता है।

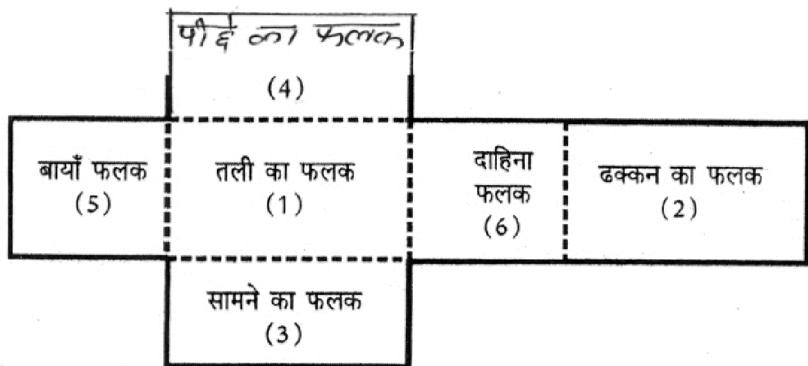
इसी प्रकार इस घनाभ को $1 \text{ सेमी} \times 1 \text{ सेमी} \times 2 \text{ सेमी}$

आकृति के घनाभों से भरकर देखे एवं आयतन के सूत्र का सत्यापन करें।

प्रशिक्षु अन्य विभिन्न नापों के घनाभ बनाकर इस क्रिया कलाप को करें।

घन एवं घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

शिक्षक प्रशिक्षुओं को माचिस की डिब्बी को खोलकर दिखायें



स्पष्ट है कि तली का फलक (1) ढक्कन का फलक (2) के सर्वांगसम हैं। इसी प्रकार सामने का फलक (3), पीछे के फलक (4) के सर्वांगसम हैं और बायाँ फलक, (5) दायें फलक (6) के सर्वांगसम हैं।

एक चाक के डिब्बे को खोलिए तथा स्पष्ट कीजिए कि इसमें छः आयताकार फलक हैं।

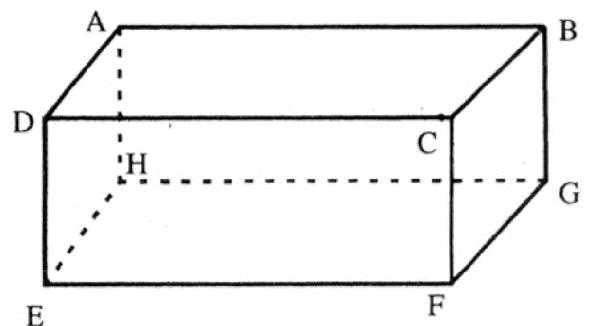
दियासलाई या चाक के डिब्बे में कुल छः फलक होते हैं। इन सभी फलकों के क्षेत्रफलों के योग को इनका सम्पूर्ण पृष्ठ कहते हैं।

1. घनाभ

पाश्वर्व चित्र को देखिए। इससे एक घनाभ की आकृति का आभास होता है। किसी तल पर ठोस आकृति को बनाना संभव नहीं है परन्तु हम उसकी आकृति का आभासी चित्र बनाकर संबंधित भागों को दर्शा सकते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि घनाभ में—

- आठशीर्ष होते हैं
- बारह कोरे होती है।
- छः फलके होती हैं, प्रत्येक फलक आयताकार होती है।
- ऊपरी फलक और निचला फलक (Bottom face) समुख फलकों का एक जोड़ा है।



- (v) बायें और दायें वाले फलक सम्मुख फलकों का दूसरा जोड़ा है।
- (vi) सामने और पीछे का फलक सम्मुख फलकों का तीसरा जोड़ा है।
- चित्र में ABCD ऊपरी फलक और EFGH निचला फलक है।
ADEH और CBGF क्रमशः बायें और दायें के फलक हैं।
ABGH और DCFE क्रमशः पीछे और सामने के फलक हैं।

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ

हमने देखा है कि बजार में बहुत सी वस्तुएँ टिन के चदर, दफ्ती के बाक्सों या मोटे कागजों के बाक्सों में पैक करके बेची जाती हैं। इनमें बहुत सी पैकिंग घनाभ के आकार की होती हैं। स्टील के बक्से, आलमारी आदि वस्तुएँ भी घनाभ के आकार की होती हैं। निर्माता के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि वह यह जाने कि इन वस्तुओं के निर्माण के लिए कितनी टिन का चदर, दफ्ती, मोटा कागज आदि लगेंगे। इसे जानने के लिए हमें सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात करना आवश्यक होता है।

अब निम्नांकित घनाभ को देखिए। घनाभ की लम्बाई l सेमी, चौड़ाई b सेमी और ऊँचाई h सेमी है। इस घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

उपर्युक्त चित्र में

ऊपरी और निचले फलकों के क्षेत्रफलों का योग

$$= (l \times b + l \times b) \text{ सेमी}^2$$

$$= 2lb \text{ सेमी}^2$$

बायें और दायें फलकों के क्षेत्रफलों का योगफल

$$= (b \times h + b \times h) \text{ सेमी}^2$$

$$= 2b h \text{ सेमी}^2$$

सामने और पीछे वाले फलकों के क्षेत्रफलों का योग

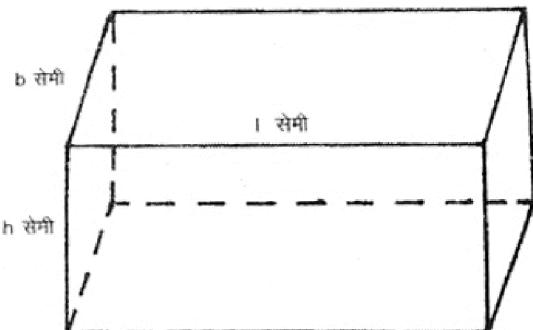
$$= (h \times l + h \times l) \text{ सेमी}^2$$

$$= 2hl \text{ सेमी}^2$$

घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = घनाभ के सभी फलकों का योग

$$= 2(lb + bh + hl) \text{ सेमी}^2$$

अतः



घनाभ का सम्पूर्ण पृष्ठ = 2 (लम्बाई × चौड़ाई + चौड़ाई × ऊँचाई + लम्बाई × ऊँचाई)
--

घन का सम्पूर्ण पृष्ठ

यह घन की आकृति है। घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई समान होने पर वह घन बन जाता है।

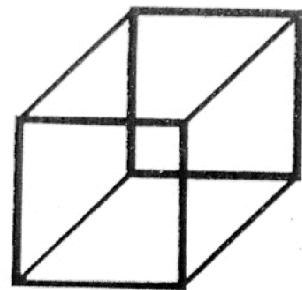
इसमें भी छः फलक हैं। सभी फलक वर्गाकार हैं। सभी फलक क्षेत्रफल में समान हैं।

मान लिया घन की एक भुजा ' a ' है।

$$\text{एक फलक का क्षेत्रफल} = \text{भुजा}^2 = a^2$$

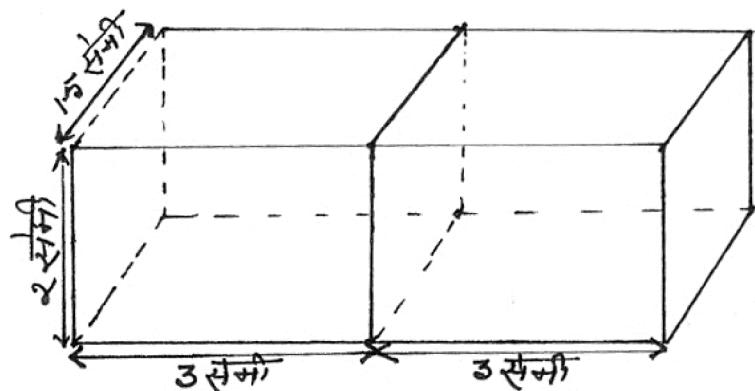
$$\text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 6 \times \text{फलक का क्षेत्रफल} = 6a^2$$

$$\text{घन का सम्पूर्ण पृष्ठ} = 6 \times \text{भुजा}^2 = 6a^2$$



मूल्यांकन

- नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई वाले घनाभों के आयतन ज्ञात कीजिए—
 - लम्बाई = 10 सेमी., चौड़ाई = 8 सेमी तथा ऊँचाई = 5 सेमी
 - लम्बाई = 14 सेमी, चौड़ाई = 12 सेमी तथा ऊँचाई = .007 मीटर
- नीचे दी गई भुजा की माप वाले घनों का आयतन ज्ञात कीजिए—
 - भुजा = .15 मी.
 - भुजा = 1.2 डेसी मी
 - भुजा = .02 डेका मीटर
- एक कमरे की लम्बाई 5 मी., चौड़ाई 450 सेमी तथा ऊँचाई 35 डेसी भी है। कमरे में कितनी घन मीटर हवा है।
- दो घन जिनकी भुजायें 3 सेमी एवं 9 सेमी हैं। इनके आयतन में क्या अनुपात होगा?
- एक मैदान की लम्बाई 30 मीटर तथा चौड़ाई 10 मीटर है। यदि मैदान पर 40 मिमी वर्षा हो, तो ज्ञात कीजिये कि मैदान पर कुल कितने लीटर पानी गिरा?
- एक ईंट की लम्बाई, चौड़ाई व मोटाई क्रमशः 25 सेमी. 10 सेमी एवं 7 सेमी है। एक 5 मीटर लम्बी, 3.5 मी ऊँची तथा 25 सेमी मोटी दीवार को बनाने में कितनी ईंट लगेंगी?
- एक घनाभाकार लकड़ी के टुकड़े का आयतन 336 घन सेमी है यदि टुकड़ा 8 सेमी लम्बा, 6 सेमी चौड़ा हो तो उसकी ऊँचाई ज्ञात करो।
- एक गते का डब्बा 75 सेमी लम्बा, 30 सेमी चौड़ा एवं 15 सेमी ऊँचा है, इसमें 15 सेमी लम्बाई, 10 सेमी चौड़ाई एवं 3 सेमी ऊँचाई के घनाभाकार कितने छोटे डब्बे रखे जा सकते हैं?

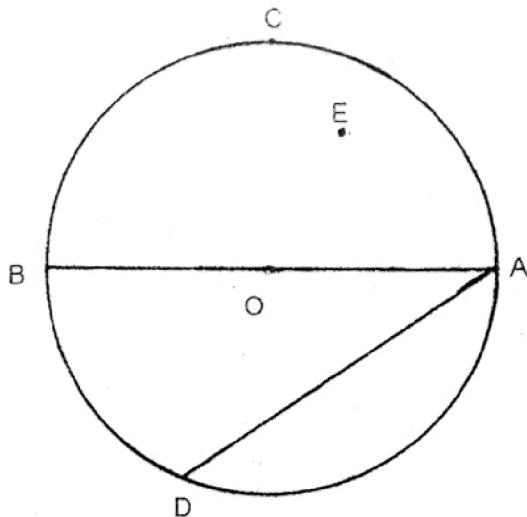


16. नीचे दी गई लम्बाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई वाले घनाभों का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए—
(i) लम्बाई = $5\frac{1}{2}$ सेमी, चौड़ाई = 1.7 सेमी, ऊँचाई = 3 सेमी
(ii) लम्बाई = 6 सेमी, चौड़ाई = 8.3 सेमी, ऊँचाई = 2.3 सेमी
17. नीचे दी गई भुजा की माप वाले घन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए—
(i) भुजा = 1.5 सेमी
(ii) भुजा = 18 सेमी
18. एक कमरे की लम्बाई 4 मीटर, चौड़ाई 3.5 मीटर और ऊँचाई 3 मीटर है। इस कमरे की चारों दीवारों का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
19. एक कमरे की लम्बाई 3.5 मीटर, चौड़ाई 2.5 मीटर एवं ऊँचाई 3 मीटर है। इसकी चारों दीवारों पर $\checkmark 3.5$ प्रति वर्ग मीटर की दर से सफेदी कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।
20. एक हाल की लम्बाई 60 फीट तथा चौड़ाई 40 फीट एवं ऊँचाई 20 फीट है। हाल की दो दीवारों पर $5 \text{ फीट} \times 7\frac{1}{2} \text{ फीट}$ के दो दरवाजे लगे हैं। कमरे की दीवारों पर $\checkmark 9$ प्रति फीट की दर से पेंटिंग कराने का क्या खर्च होगा?

इकाई-16

वृत्तखण्ड एवं त्रिज्या खण्ड की अवधारणा

निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O तथा त्रिज्या 3.0 सेमी है। रेखाखण्ड AO की सीधे में B तक बढ़ाया गया है। रेखाखण्ड AD वृत्त की जीवा है।

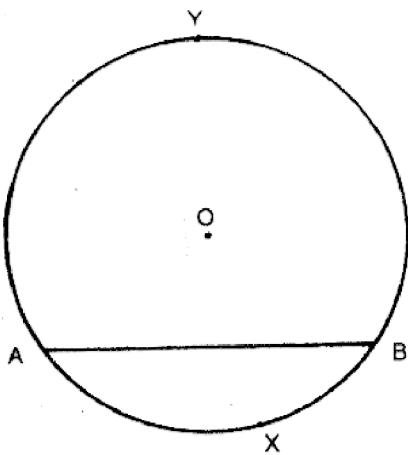


- (i) रेखाखण्ड AB को क्या कहते हैं?
- (ii) रेखाखण्ड AB और त्रिज्या OA में क्या सम्बन्ध हैं?
- (iii) वृत्त के भाग BC को क्या कहते हैं?
- (iv) वृत्त के भाग BCA को क्या कहते हैं?
- (v) बिन्दु E वृत्त के अन्तः क्षेत्र में है या बाह्य क्षेत्र में है?
- (vi) AO की नाप कितनी है?
- (vii) व्यास AB की नाप कितनी है?

AB वृत्त का व्यास है, जो त्रिज्या का दो गुना है। अतः $AB = 2OA$ । वृत्त के किसी भाग को चाप कहते हैं। चित्र में वक्र BC चाप है। वृत्त की सबसे बड़ी जीवा वृत्त की व्यास होती है। व्यास, वृत्त को दो समान भागों में विभक्त करता है। प्रत्येक भाग अर्धवृत्त कहलाता है। वक्र BCA तथा वक्र ADB अर्धवृत्त हैं। चित्र में OA वृत्त की त्रिज्या है तथा वृत्त का व्यास AB है।

वृत्तखण्ड

किसी त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए जिसका केन्द्र O है। उसमें एक जीवा AB खीचिए। इस वृत्त पर दो बिन्दु X और Y लीजिए।



- (i) जीवा AB द्वारा वृत्तीय क्षेत्र कितने भागों में विभक्त हो गया है?
(ii) प्रत्येक भाग को क्या कहते हैं?

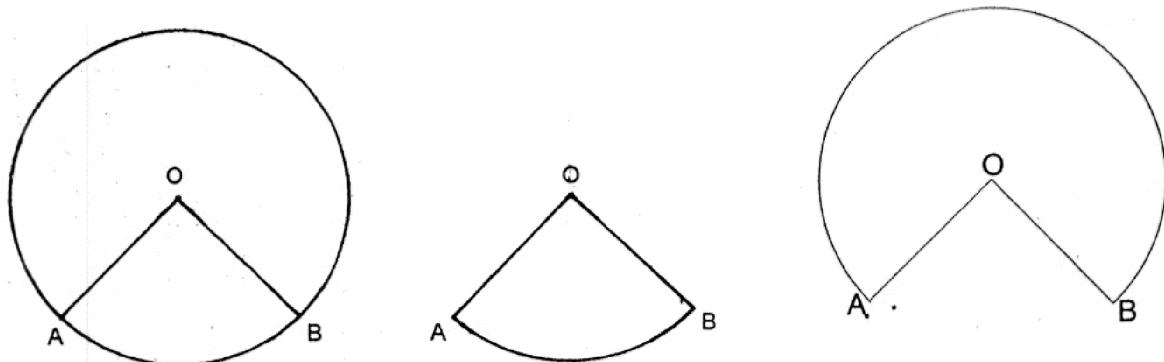
जीवा AB के द्वारा वृत्तीय क्षेत्र दो भागों AXB और AYB में विभाजित हो गया और प्रत्येक भाग को वृत्तखंड कहते हैं।

वृत्त के चाप और उसकी जीवा से धिरा हुआ क्षेत्र वृत्तखंड कहलाता है।

छोटे भाग को लघु वृत्तखंड और बड़े भाग को दीर्घ वृत्तखंड कहते हैं। चित्र में चाप AXB और जीवा AB से धिरा क्षेत्र लघु वृत्तखंड है, तथा चाप AYB और जीवा AB से धिरा क्षेत्र दीर्घ वृत्तखंड है।

त्रिज्यखंड

एक दफ्ती का गता लेकर उस पर 3.0 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खीचिए जिसका केन्द्र O है। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। OA एवं OB त्रिज्याएँ खीचिए। वृत्त को वृत्तीय क्षेत्र सहित गते से काटकर अलग कीजिए। अब सावधानी से A से O तक तथा B से O तक काटकर वृत्त क्षेत्र के AOB भाग को अलग कीजिए।



वृत्तीय क्षेत्र को काटकर निकाले गये भाग AOB को क्या नाम दिया जा सकता है? इस भाग को त्रिज्यखण्ड कहते हैं। शेष भाग भी एक त्रिज्यखण्ड है।

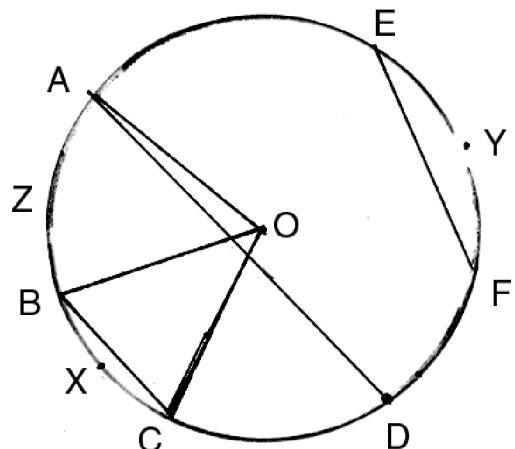
वृत्त के चाप तथा चाप के अन्त्य बिन्दुओं से जाने वाली त्रिज्याओं से घिरे क्षेत्र को त्रिज्य खण्ड कहते हैं।

क्रियाकलाप

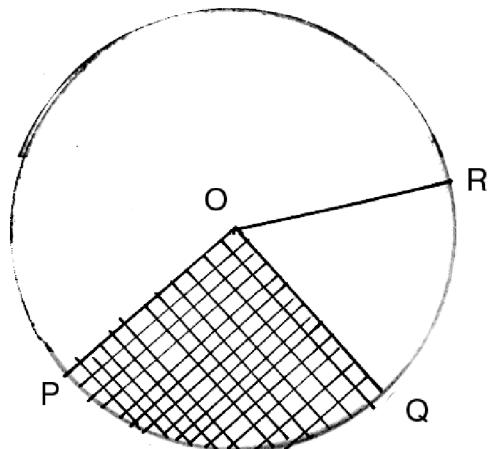
शिक्षक प्रशिक्षुओं से विभिन्न नाप की त्रिज्याओं से गते या मोटे कागज की वृत्ताकार चकती बनाने को कहें एवं इन वृत्ताकार चकतियों में वृत्तखण्ड एवं त्रिज्य खण्ड को अलग-अलग रंग से भरकर वृत्तखण्ड एवं त्रिज्य खण्ड की अवधारणा को स्पष्ट करें।

मूल्यांकन-

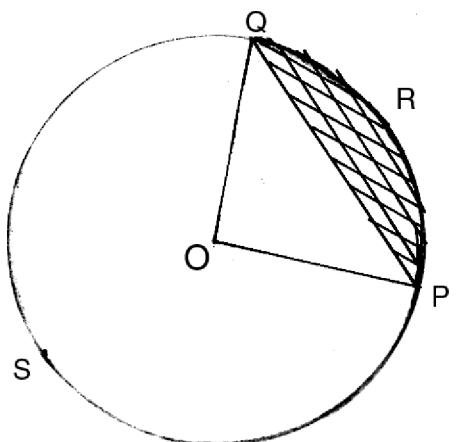
- पाश्व चित्र में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। OA, OB एवं OC वृत्त की त्रिज्यायें हैं। बिन्दु X, Y तथा Z वृत्त पर स्थित हैं। AD, EF एवं BC वृत्त जीवाएँ हैं। तीन त्रिज्य खण्डों एवं चार वृत्तखण्डों के नाम लिखो।



- पाश्व चित्र में छायांकित त्रिज्य खण्ड की त्रिज्याओं के नाम लिखिए।



3. पार्श्व चित्र में बिन्दु P, Q, R एवं S वृत्त पर स्थित हैं। छायांकित वृत्तखण्ड की जीवा तथा उसके संगत त्रिज्यखण्ड का नाम बताइए। चित्र में कितने वृत्त खण्ड हैं उनके नाम लिखिए।



इकाई-17

वृत्तखण्ड का कोण

पाश्वर्व चित्र में बिन्दु A, C, B एवं P वृत्त पर स्थित हैं। रेखा खण्ड AB वृत्त की जीवा है।

(i) चाप ACB एवं जीवा AB से घिरे क्षेत्र को क्या कहते हैं?

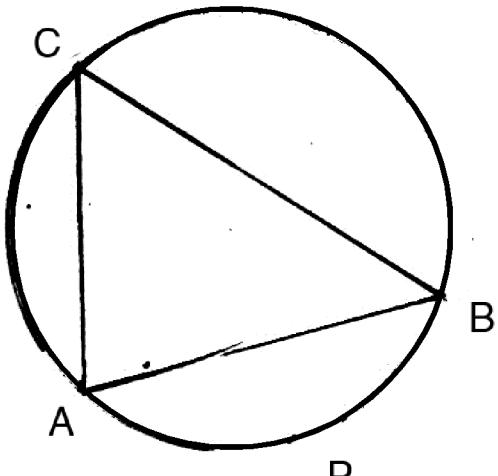
(ii) यह क्षेत्र वृत्तखण्ड ACB कहलाता है।

इस वृत्तखण्ड ACB में $\angle ACB$ स्थित है, यह वृत्तखण्ड ACB का कोण कहलाता है।

(iii) $\angle CAB$ किस वृत्तखण्ड का कोण है?

(iv) $\angle ABC$ किस वृत्तखण्ड में स्थित है।

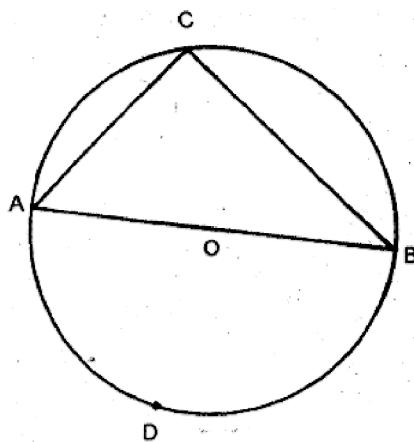
(v) चित्र में क्या वृत्तखण्ड APB में कोई कोण है?



अर्धवृत्त का कोण

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसका एक व्यास AOB खींचिए। वृत्त पर दो बिन्दु C और D लीजिए। C को A और B से मिलाइए।

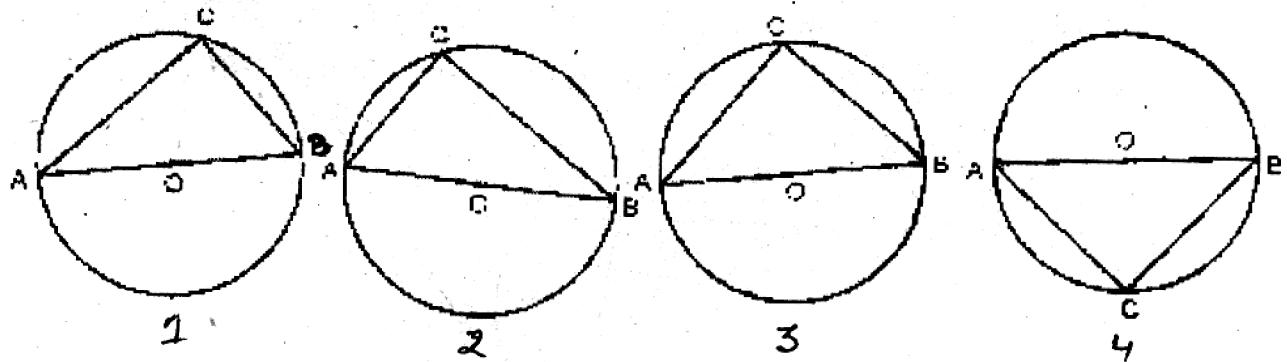
अर्धवृत्त ACB में बने कोण का नाम बताइए।



हम जानते हैं कि चाप ACB एक अर्धवृत्त है। AB व्यास है। $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण है। $\angle ACB$ की माप क्या होगी? $\angle ACB$ को नापिए। आप देखेंगे कि $\angle ACB = 90^\circ$ ।

क्रिया-कलाप :

1. एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इसमें व्यास AOB खींचिए। इस प्रकार बने एक अर्धवृत्त में बिन्दु C लीजिए। रेखाखण्ड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया है। $\angle ACB$ नापिए तथा अन्तर $90^\circ - \angle ACB$ ज्ञात कीजिए।



तीन अन्य विभिन्न नाप की त्रिज्याओं के अर्धवृत्तों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

अर्धवृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$90^\circ - \angle ACB$
1.		
2.		
3.		
4.		

आप देखेंगे कि प्रत्येक बार $90^\circ - \angle ACB$ का मान 0 या लगभग शून्य है।

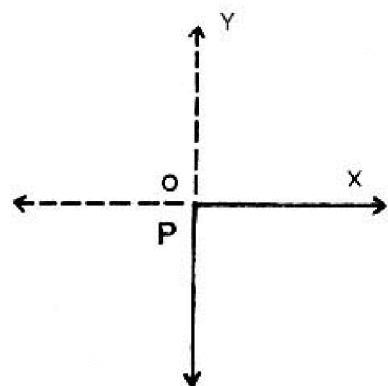
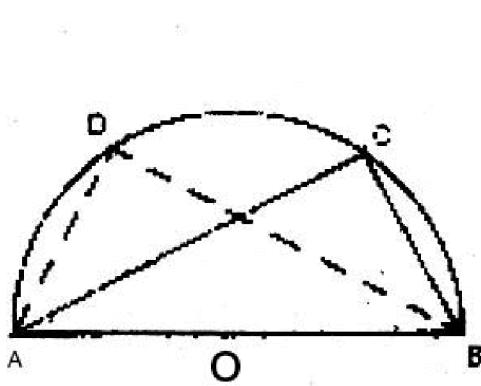
$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

अतः हमने देखा कि

अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

कागज मोड़ने व अध्यारोपण का क्रिया-कलाप 2 :

AB व्यास पर एक अर्धवृत्त बनाइए। अर्धवृत्त पर एक बिन्दु C लीजिए। रेखाखण्ड AC और BC खींचिए। इस प्रकार $\angle ACB$ अर्धवृत्त का कोण बन गया।



अब एक ट्रेसिंग पेपर लीजिए। इसे दो बार मोड़कर एक समकोण बनाइए। मान लीजिए $\angle XPY$ समकोण है। $\angle XPY$ को $\angle ACB$ पर इस प्रकार अध्यारोपित कीजिए कि बिन्दु P, बिन्दु C पर पड़े और भुजा PX, भुजा CA पर पड़े। अब क्या PY, भुजा CB पर पड़ती है? हम देखेंगे कि वास्तव में PY, CB पर पड़ती है। इस प्रकार $\angle XPY$, $\angle ACB$ को पूरा-पूरा ढँक लेता है।

$$\therefore \angle ACB = \angle XPY$$

$$\text{परन्तु } \angle XPY = 90^\circ$$

$$\therefore \angle ACB = 90^\circ$$

इसी प्रकार अर्धवृत्त पर एक अन्य बिन्दु D लीजिए। AD और BD को मिलाकर अर्धवृत्त का कोण $\angle ADB$ बनाइए और $\angle XPY$ को $\angle ADB$ पर अध्यारोपित कीजिए। क्या $\angle XPY$, $\angle ADB$ को पूरा-पूरा ढँक लेता है? हम देखेंगे कि $\angle XPY$, $\angle ADB$ को ढँक लेता है।

$$\angle ADB = \angle XPY = 1 \text{ समकोण}$$

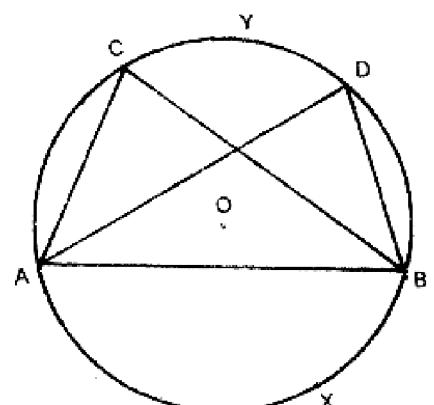
अतः अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

एक ही वृत्तखण्ड के कोण

शिक्षक प्रशिक्षुओं को निम्नांकित क्रिया-कलाप करने को कहें

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। इसमें जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो चापों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD एवं BD को खींच दीजिए।

इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही चाप AYB के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखण्ड के कोण हैं। ये दोनों कोण एक ही चाप AYB को अन्तःखण्डित करते हैं।

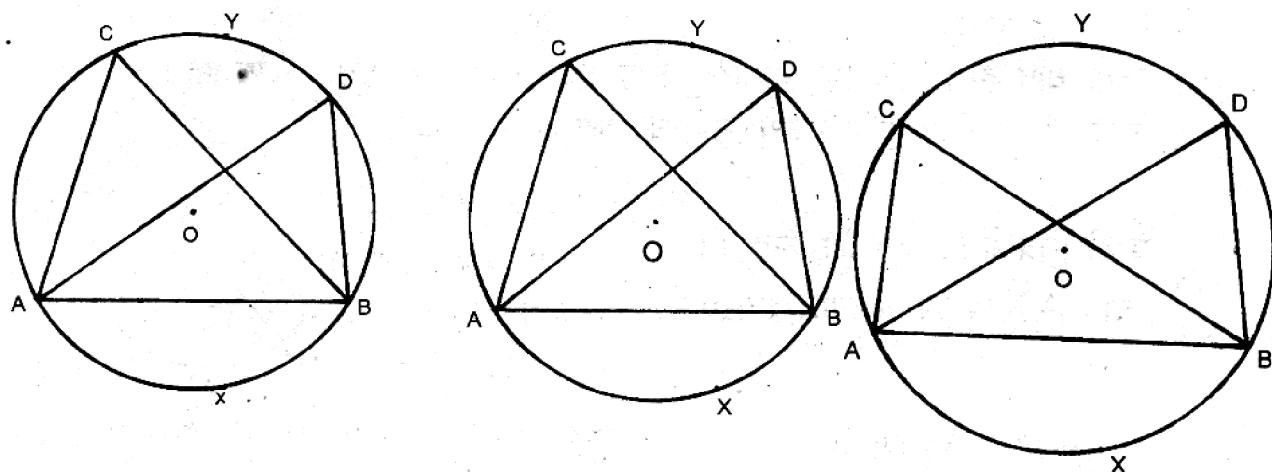


अतः यदि दो या दो से अधिक कोण किसी वृत्त के एक ही चाप को अन्तःखण्ड करते हों और उनके शीर्ष उसी चाप पर हों, तो उन्हें एक ही चाप के अन्तर्गत कोण या एक ही वृत्तखण्ड के कोण कहते हैं।

एक ही वृत्तखण्डों के कोणों में सम्बन्ध

क्रियाकलाप :

बिन्दु O को केन्द्र मानकर एक वृत्त खींचिए। इसमें एक जीवा AB खींचिए। इस प्रकार वृत्त दो भागों AXB और AYB में बँट गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, AD, BC एवं BD को खींच दीजिए। इस प्रकार $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखण्ड AYB के कोण बन गए।



$\angle ACB$ और $\angle ADB$ को नापिए तथा $\angle ACB - \angle ADB$ ज्ञात कीजिए। इसी प्रकार दो अन्य वृत्त अलग नाप की त्रिज्या में खींचकर उपर्युक्त प्रक्रिया को दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$\angle ADB$	$\angle ACB - \angle ADB$
1.			
2.			
3.			

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle ACB - \angle ADB$ का मान्य शून्य या लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक स्थिति में $\angle ACB = \angle ADB$ ।

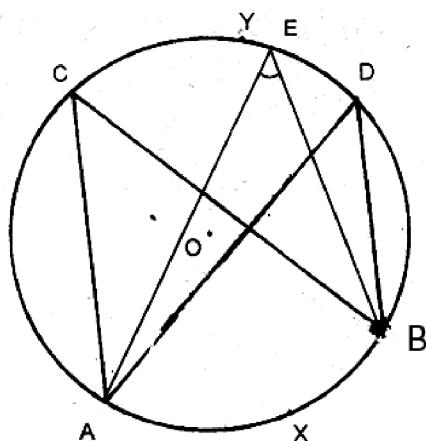
अतः एक ही वृत्तखण्ड के कोण या एक ही चाप के अन्तर्गत कोण समान होते हैं।

उपर्युक्त तथ्य का सत्यापन निम्नलिखित क्रिया-कलाप द्वारा भी कीजिए।

कागज मोड़ने एवं अध्यारोपण का क्रिया-कलाप :

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O हो। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। इस प्रकार वृत्त दो चापों AXB और AYB में विभक्त हो गया। चाप AYB पर दो बिन्दु C और D लीजिए। रेखाखण्डों AC, BC, AD और BD को खींच दीजिए।

जिससे $\angle ACB$ और $\angle ADB$ एक ही वृत्तखण्ड AYB के कोण बन गए हैं।



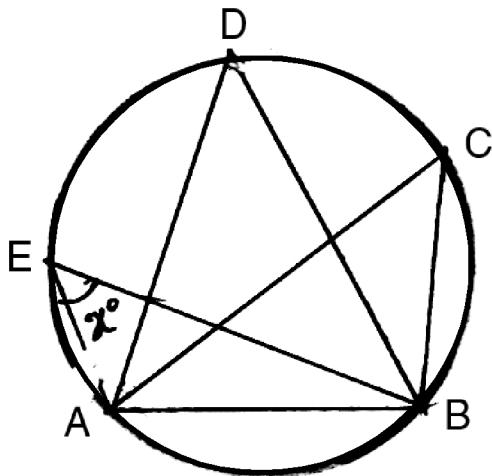
अब ट्रेसिंग कागज पर $\angle ACB$ को ट्रेस करके, इसे $\angle ADB$ पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु C, बिन्दु D पर और भुजा CA, भुजा DA पर पड़े। अब देखिए कि क्या $\angle ACB$ कोण $\angle ADB$ तथा भुजा CB, भुजा DB पर पड़ती है? हम देखेंगे कि भुजा CB, भुजा DB पर ही पड़ती है। अतः $\angle ACB = \angle ADB$ ।

अब $\angle ACB$ की ट्रेस कापी इस प्रकार घुमाइए कि बिन्दु C, चाप AYB पर रहे तथा CA सदैव A से जाए तो, हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में CB बिन्दु B से ही होकर जाएगी। अतः चाप AYB पर यदि अन्य बिन्दु D तथा बिन्दु E है, तो $\angle AEB = \angle ACB$ तथा $\angle ADB = \angle ACB$ । इस प्रकार $\angle ACB = \angle ADB = \angle AEB$ है।

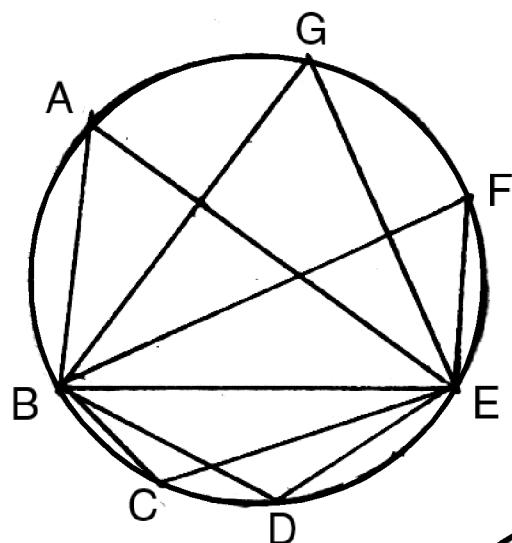
स्पष्ट है कि एक ही वृत्तखण्ड के कोण समान होते हैं।

मूल्यांकन :

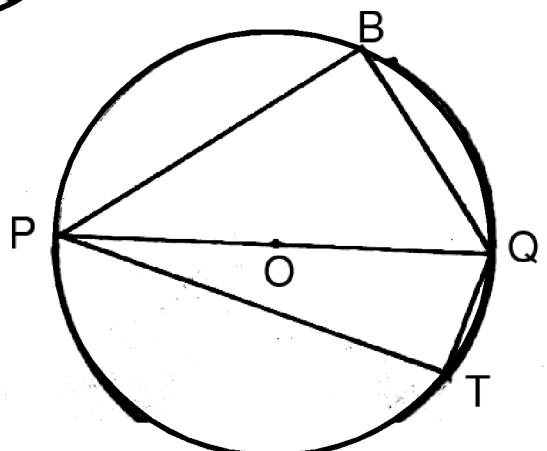
1. निम्नांकित आकृति में $\angle BEA = x^\circ$ तो $\angle BDA$ तथा $\angle BCA$ के मान बताइए।



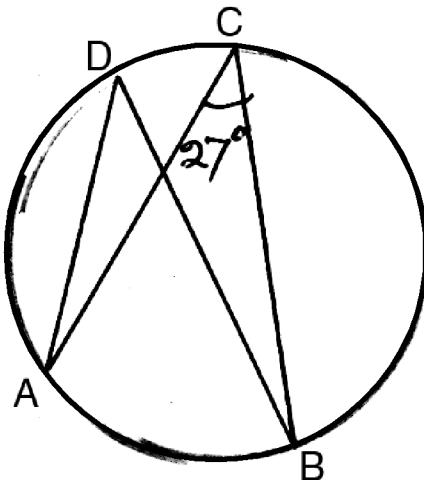
2. निम्नांकित चित्र में एक ही वृत्त खण्ड में स्थित कोणों के नाम बताइए।



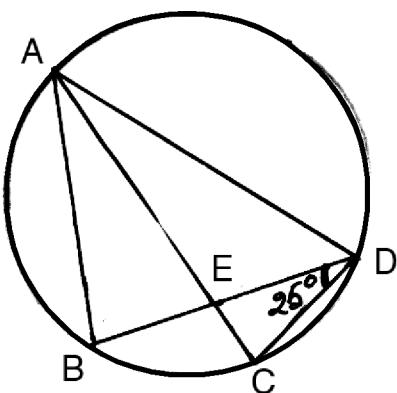
3. समुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle QRP$ तथा $\angle PTQ$ का मान बताइए। दोनों कोणों में क्या सम्बन्ध है?



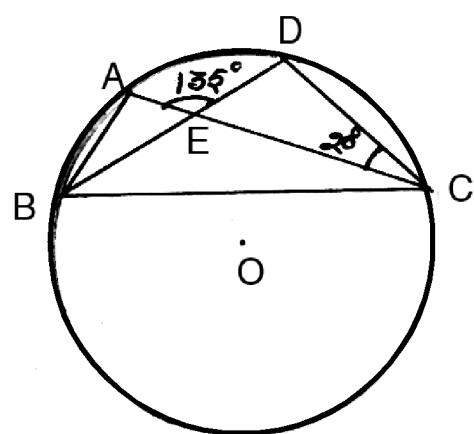
4. निम्नांकित चित्र में $\angle ADB$ का मान क्या है?



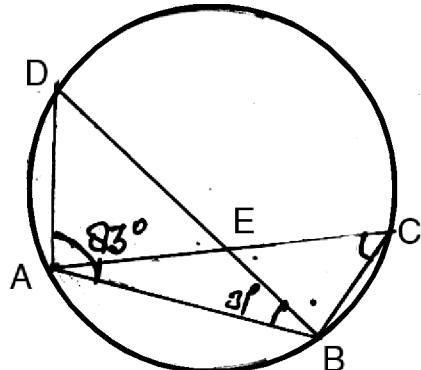
5. निम्नांकित चित्र में $\angle DAB$ का अर्द्धक AEC है। यदि $\angle CDB = 25^\circ$ तो $\angle DAB$ का मान बताओ।



6. निम्नांकित चित्र में $\angle AED = 135^\circ$ तथा $\angle ACD = 20^\circ$ है, जो $\angle CAB$ का मान बताओ।

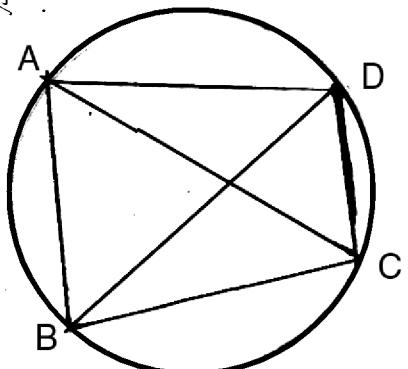


7. निम्नांकित चित्र में $\angle ABD = 31^\circ$ तथा $\angle DAB = 83^\circ$ तो $\angle BDA$ तथा $\angle BCA$ का मान बताओ।

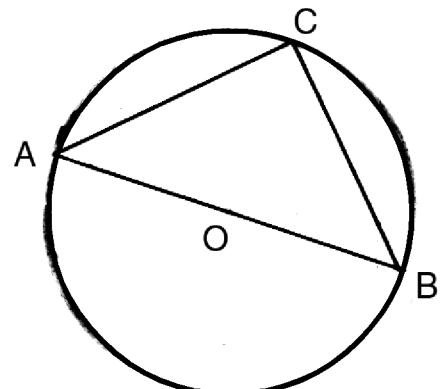


8. समुख चित्र में बने कोणों में सत्य/असत्य कथनों को छाँटिए :

- (i) $\angle BDC = \angle BAC$
- (ii) $\angle BDC = \angle BCA$
- (iii) $\angle ACB = \angle ADB$
- (iv) $\angle BDA = \angle CDB$
- (v) $\angle ACD = \angle DBA$

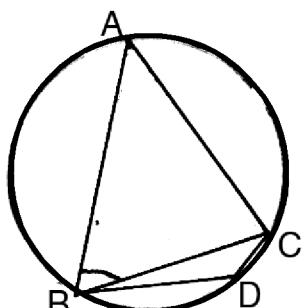


9. समुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है तथा जीवा $AC =$ जीवा BC तो $\angle CAB$ तथा $\angle CBA$ का मान बताओ।



10. समुख चित्र में लघु चाप BDC का अन्तर्गत कोण बताओ।

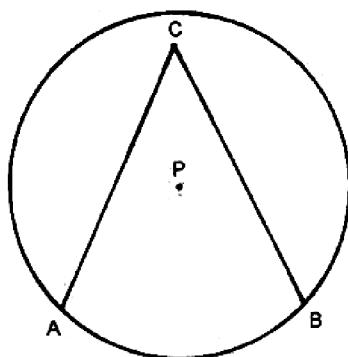
— — —



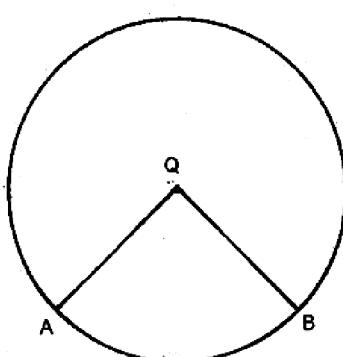
इकाई-18

वृत्त के चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र तथा परिधि पर बने कोणों का सम्बोध एवं इनका पारस्परिक सम्बन्ध।

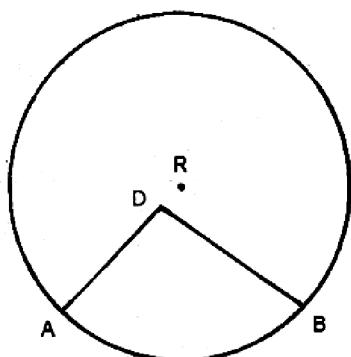
चाप के समुख केन्द्र पर बना कोण : तीन वृत्त हैं जिनके केन्द्र क्रमशः P , Q तथा R हैं। प्रत्येक वृत्त में लघु चाप AB के समुख कोण बनाए गये हैं।



(i)



(ii)



(iii)

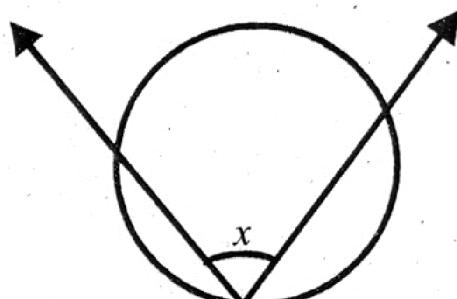
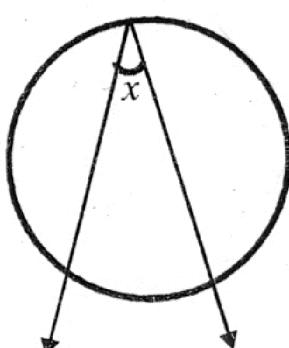
उपर्युक्त वृत्तों में किस वृत्त में लघु चाप AB के समुख केन्द्र पर कोण बना है?

चित्र वृत्त (ii) में लघु चाप AB के समुख केन्द्र पर $\angle AOB$ बना है।

किसी चाप के अन्त्य बिन्दुओं को केन्द्र से मिलाने वाली त्रिज्याओं से बने कोण को उस चाप के समुख केन्द्र पर बना कोण कहते हैं।

अन्तर्गत कोण (Inscribe angle)

ध्यान दें

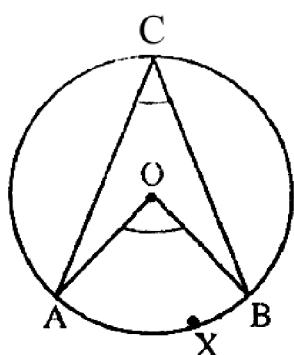
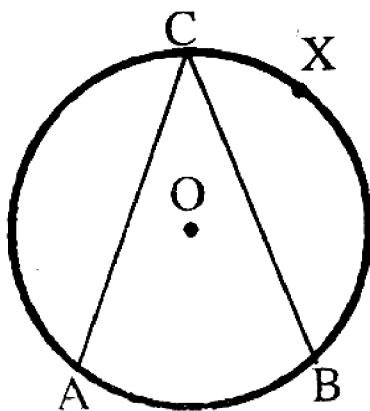


उपर्युक्त चित्रों में ध्यान दे कि $\angle x$ का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु तथा इस कोण की दोनों भुजाएँ वृत्त को दो अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं। इस प्रकार का बना $\angle x$ अन्तर्गत कोण कहलाता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि

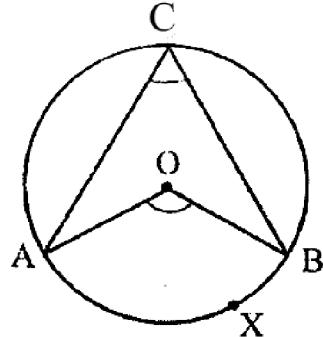
कोई कोण वृत्त का अन्तर्गत कोण होता है यदि उस कोण का शीर्ष वृत्त का एक बिन्दु हो तथा उस कोण की भुजाएँ वृत्त को अलग-अलग बिन्दुओं पर काटती हैं।

याद रखें :

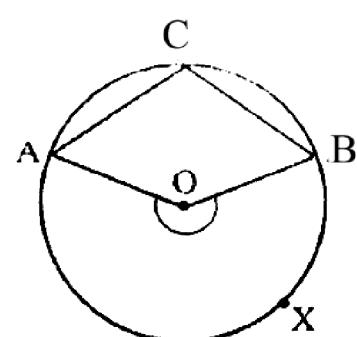
पार्श्वचित्र में O केन्द्र का एक वृत्त है। इसके दीर्घचाप AXB पर एक बिन्दु C है। रेखाखंड CA तथा CB खींचे गये हैं। इस प्रकार $\angle ACB$ दीर्घचाप AXB का अन्तर्गत कोण है। इसे इस प्रकार भी कह सकते हैं कि दीर्घ चाप AXB का अन्तर्गत कोण $\angle ACB$ लघुचाप AB द्वारा वृत्त के शेष भाग के बिन्दु C पर बना कोण है।



(i)



(ii)



(iii)

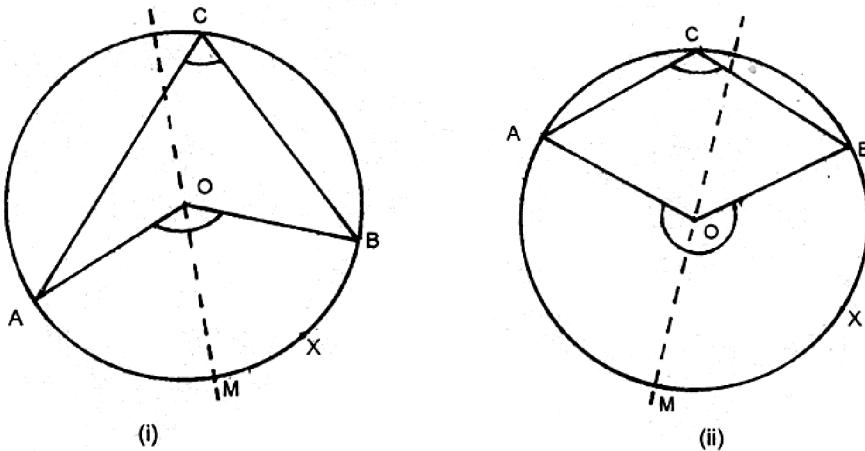
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्र (1) के अनुसार एक वृत्त जिसका केन्द्र ' O ' है खींचिए तथा उस पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB पर बिन्दु X तथा दीर्घचाप AB पर बिन्दु C लीजिए। AC , BC , AO एवं BO रेखाखंडों को मिलाइए जिससे अन्तर्गत कोण ACB तथा केन्द्र पर $\angle AOB$ बन गये। $\angle ACB$ तथा $\angle AOB$ को नापिए।

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर उपर्युक्त प्रक्रिया चित्र (ii) और (iii) के अनुसार दोहराइए। अपनी अभ्यास पुस्तिका पर प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	$\angle ACB$	$\angle AOB$	$\angle AOB - 2 \angle ACB$
(i)			
(ii)			
(iii)			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में $\angle AOB - 2 \angle ACB$ शून्य या लगभग शून्य है। अतः प्रत्येक अवस्था में, $\angle AOB = 2 \angle ACB$ ले सकते हैं।

इन्हें भी कीजिए और सोचिए : निम्नांकित चित्र (i) की भाँति अभ्यास पुस्तिका के पृष्ठ पर एक वृत्त खींचिए और उसका केन्द्र O मानिए। वृत्त पर दो बिन्दु A और B लीजिए। लघु चाप AB में कोई बिन्दु X लीजिए तथा वृत्त के शेष भाग पर बिन्दु C लीजिए। रेखाखंडों AC, BC, AO एवं BO को खींचिए। इस प्रकार चाप AXB द्वारा अन्तरित $\angle ACB$ अन्तर्गत कोण तथा $\angle AOB$ केन्द्र पर अन्तरित कोण हैं।



एक ट्रेसिंग पेपर पर चित्र (i) को ट्रेस कीजिए। इस प्रकार इस कागज पर भी O केन्द्र वाला वृत्त तथा $\angle AOB$ और $\angle ACB$ बन गये। कागज को ऐसा मोड़िए कि चाप AXB का मध्य बिन्दु M प्राप्त हो जाए। इस प्रकार $\angle AOB$ दो कोणों $\angle AOM$ तथा $\angle MOB$ में विभक्त हो गया।

इस प्रकार $\angle AOM = \angle MOB$ क्योंकि OM पर आकृति को मोड़ने पर OA भुजा, OB को ढक लेती है। अतः $\angle AOM = \angle MOB = \frac{1}{2} \angle AOB$ अब कागज पर बने $\angle AOM$ को अभ्यास पुस्तिका पर बने $\angle ACB$ पर रखिए। हम देखेंगे कि ये दोनों कोण एक दूसरे को ढक लेते हैं।

$$\therefore \angle ACB = \angle AOM$$

$$\text{परन्तु } \angle AOM = \frac{1}{2} \angle AOB$$

$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

यही प्रक्रिया चित्र (ii) के लिए दोहराइए। हम देखेंगे कि

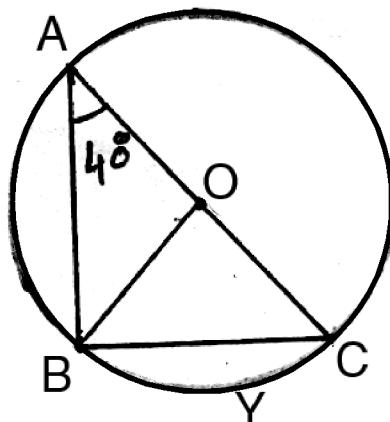
$$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$$

अतः

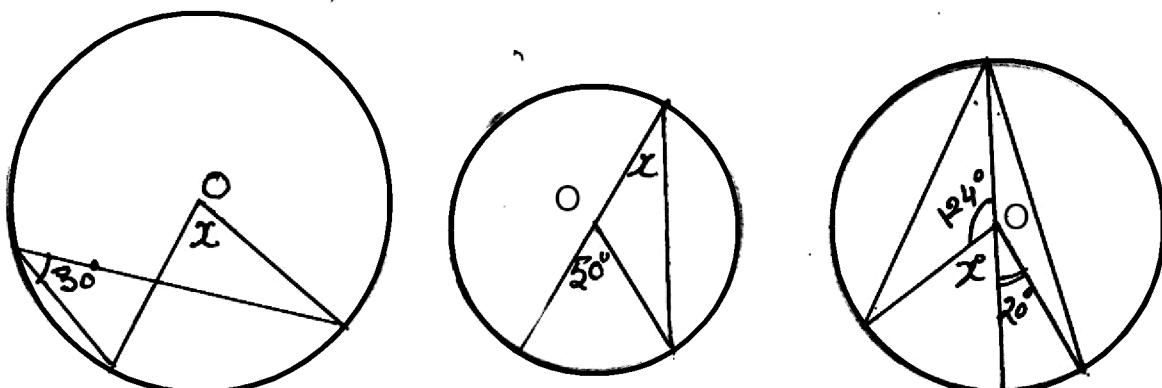
एक चाप द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण, उसी चाप द्वारा वृत्त के शेष भाग में स्थित किसी बिन्दु पर अन्तरित कोण का दो गुना होता है।

मूल्यांकन :

- चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। चाप BYC का अंशमाप बताइए।



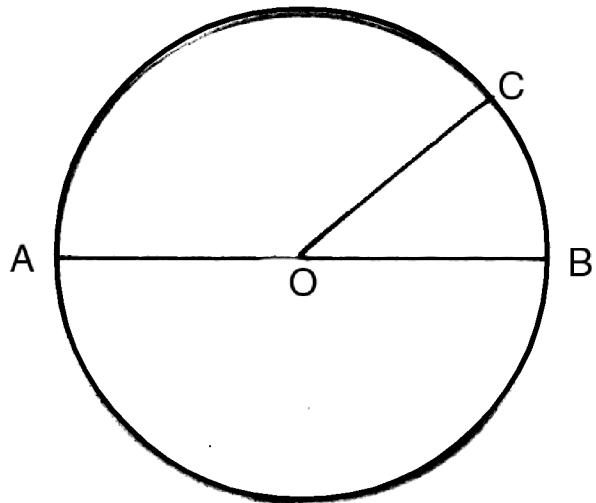
- निम्नांकित वृत्तों में प्रत्येक का केन्द्र O है। प्रत्येक में x का मान बताओ।



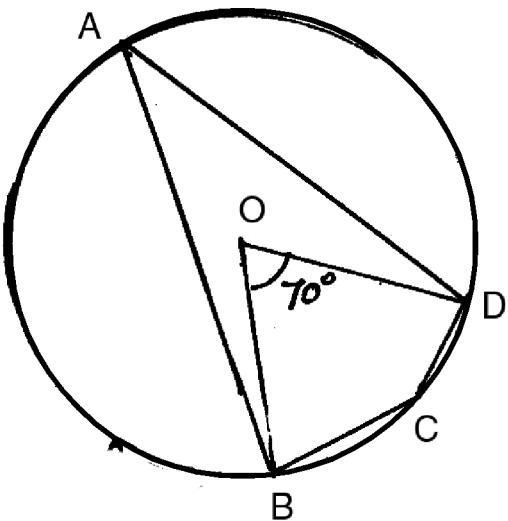
3. समुख चित्र में वृत्त का केन्द्र O है। AOB वृत्त का व्यास और $\angle COB = 40^\circ$ ज्ञात कीजिए :

- (i) दीर्घचाप BC का अंशमाप
- (ii) दीर्घ चाप AC का अंशमाप
- (iii) लघु चाप AC का अंशमाप
- (iv) अर्धवृत्त ACB का अंशमाप

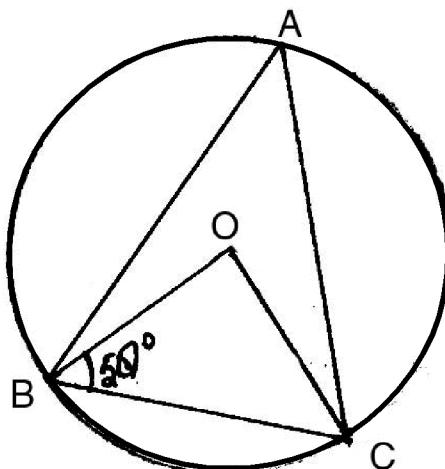
4. वृत्त की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। इस जीवा द्वारा दीर्घ वृत्तखंड में अन्तरित कोण का मान बताइए।



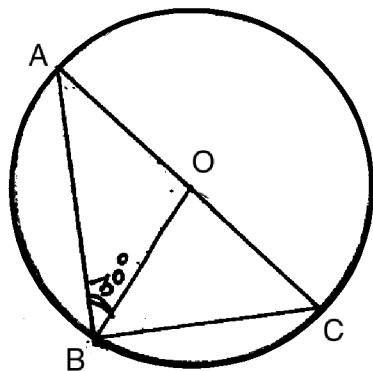
5. समुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle DOB = 70^\circ$, $\angle BCD$ का माप बताइए।



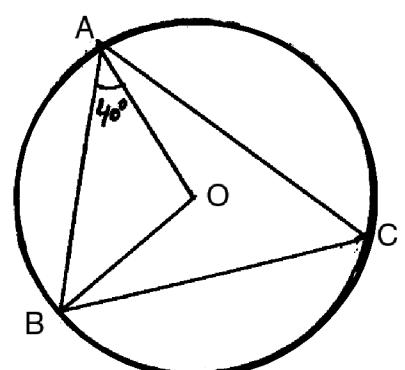
6. समुख आकृति में वृत्त का केन्द्र O है। $\angle OBC = 58^\circ$ तो $\angle CAB$ का मान बताइए।



7. समुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है $\angle COB$ का मान बताइए।

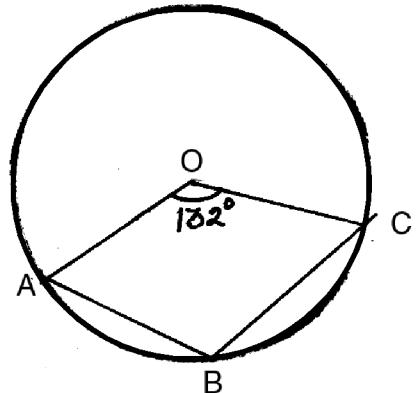


8. समुख चित्र में $\angle OAB = 40^\circ$ जबकि O वृत्त का केन्द्र हैं, तो $\angle BCA$ का मान बताइए।

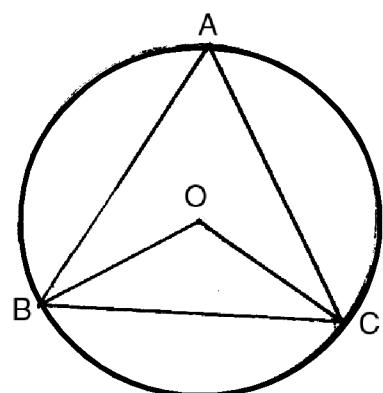


9. समुख चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। $\angle COA = 132^\circ$ तो वृत्त में बने $\angle ABC$ का मान होगा।

- (i) 228°
- (ii) 264°
- (iii) 114°
- (iv) 48°



10. वृत्त का केन्द्र O है। ABC का समबाहु त्रिभुज है। $\angle OBC$ का मान बताओ।

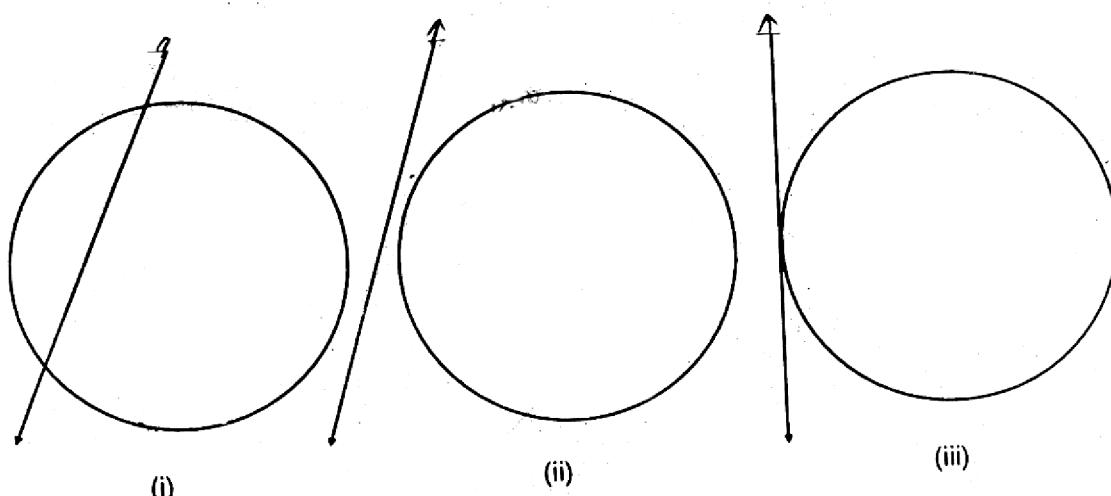


इकाई-19

वृत्त की छेदक रेखा, स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु की अवधारणा

छेदिका, स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु :

यदि एक ही तल में एक वृत्त और एक रेखा है, तो रेखा वृत्त को कितने बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती है? इस सम्बन्ध में केवल तीन संभावनाएँ हो सकती हैं, जो निम्नलिखित हैं :

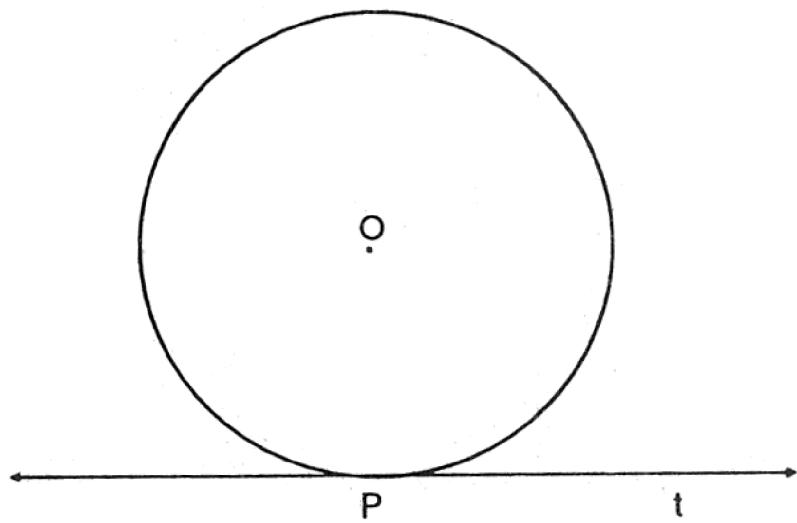


1. रेखा वृत्त को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है, जैसा कि चित्र (i) में दिखाया गया है।
 2. रेखा, वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करती है, जैसा कि चित्र (ii) में दिखाया गया है।
 3. रेखा, वृत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, जैसा कि चित्र (iii) दिखाया गया है।
- प्रथम स्थिति में रेखा, वृत्त की छेदिका कहलाती है।

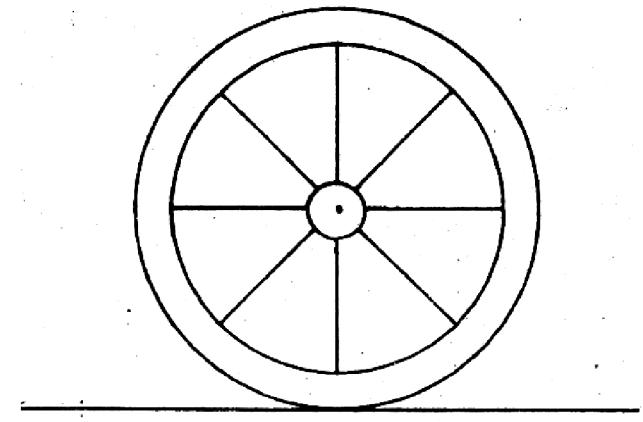
अतः किसी वृत्त की छेदिका वह रेखा है जो उस वृत्त को दो भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। तृतीय स्थिति में रेखा, वृत्त की स्पर्श रेखा कहलाती है।

इस प्रकार किसी वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो उस वृत्त को केवल एक ही बिन्दु पर काटती है।

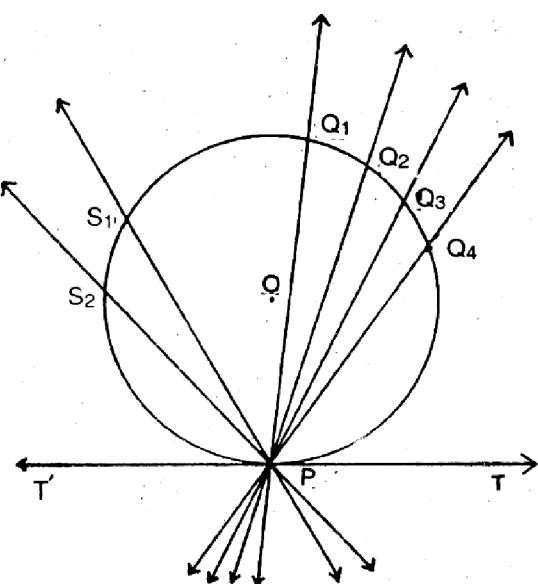
किसी वृत्त की स्पर्श रेखा उस वृत्त के जिस बिन्दु से होकर जाती है, उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैं। यह स्पर्श रेखा वृत्त का केन्द्र से लगती है। इसका केन्द्र वृत्त का केन्द्र है। इसका केन्द्र वृत्त का केन्द्र है।



वृत्त, वृत्त की स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से सम्बन्धित कुछ उदाहरण हम अपने पास-पड़ोस में देख सकते हैं। जैसे रेलवे लाइन पर खड़ी रेलगाड़ी को देखिए। रेलगाड़ी के पहिए की रिम एक वृत्त है पटरी वृत्त की स्पर्श रेखा है और पहिया जिस बिन्दु पर पटरी को स्पर्श करता है, वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु है।



छेदक रेखाओं का समूह और स्पर्श रेखा :



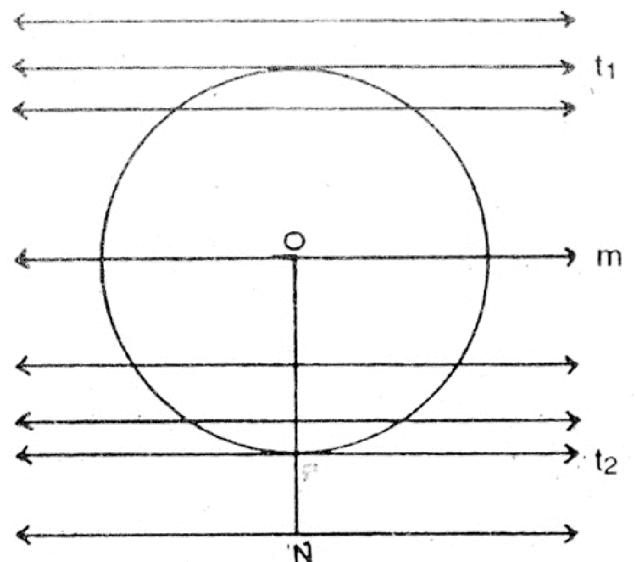
मान लीजिए कि एक वृत्त का केन्द्र O है। वृत्त पर कोई बिन्दु P है। वृत्त के तल में P से होकर जाने वाली रेखाओं के समूह पर विचार कीजिए। इन रेखाओं में से एक को छोड़कर प्रत्येक वृत्त को उसके बिन्दु P के अतिरिक्त एक और बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है।

इस प्रकार P से होकर जाती हुई छेदक रेखाओं का एक समूह है। इनमें से कुछ छेदक रेखाएँ वृत्त को फिर से P के दाईं ओर Q_1, Q_2, Q_3 तथा Q_4 बिन्दुओं पर काटती हैं जबकि कुछ अन्य छेदक रेखाएँ P के बायाँ ओर S_1 तथा S_2 बिन्दुओं पर काटती हैं।

P से होकर जाने वाली रेखाओं में से केवल एक रेखा ऐसी है, जो वृत्त को P के अतिरिक्त किसी अन्य बिन्दु पर नहीं काटती है। यह वृत्त की स्पर्श रेखा $T'PT$ है।

समान्तर रेखाओं का समूह और स्पर्श रेखा (स्पर्श रेखाएँ) :

पार्श्वांकित चित्र में वृत्त के तल में समान्तर रेखाओं का समूह खींचा गया है। इस समूह में केवल एक रेखा m ऐसी है जो वृत्त के केन्द्र O से होकर जाती है। यह रेखा वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है। इसके अतिरिक्त ऐसी और भी कई रेखाएँ हैं जो वृत्त को दो भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर काटती हैं, जबकि ऐसी बहुत सी रेखाएँ हैं, जो वृत्त को नहीं काटती हैं। दो रेखाएँ t_1 और t_2 ऐसी रेखाएँ हैं जो वृत्त को केवल एक बिन्दु (अथवा दो सम्पादी बिन्दुओं) पर ही काटती हैं। ये दोनों वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।



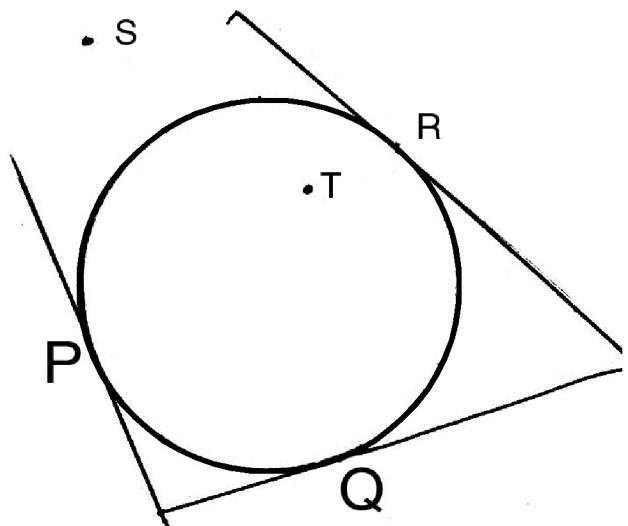
मान लीजिए कि वृत्त के केन्द्र O से इस समूह की किसी रेखा की दूरी p है और वृत्त की त्रिज्या r है तो हम पाते हैं कि

- (i) यदि $p < r$ तो रेखा वृत्त की छेदक रेखा होती है।
- (ii) यदि $p > r$ तो रेखा वृत्त को नहीं काटती है, और
- (iii) यदि $p = r$ तो रेखा वृत्त की स्पर्श रेखा होती है।

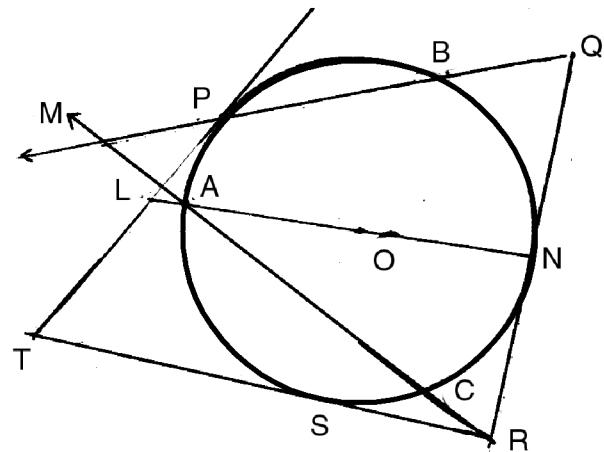
स्थिति (iii) वृत्त की त्रिज्या का अन्य बिन्दु और स्पर्श बिन्दु दोनों एक ही हैं। t_1 तथा t_2 वृत्त की स्पर्श रेखाएँ हैं।

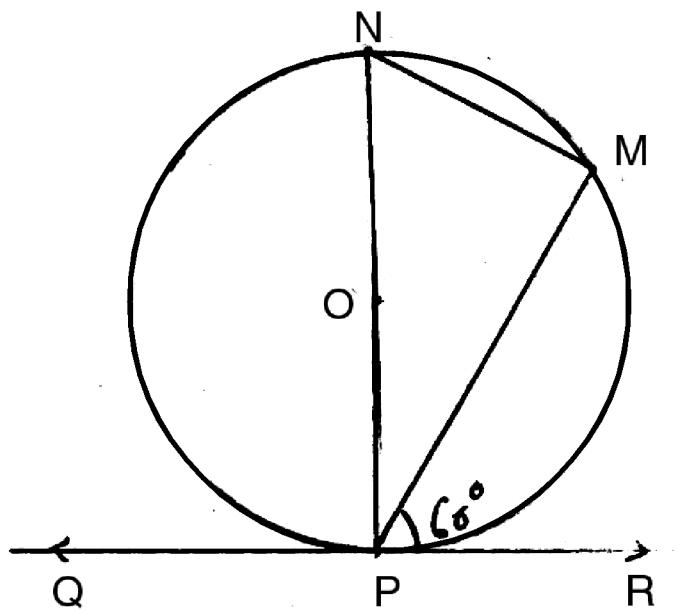
मूल्यांकन :

1. पार्श्व चित्र में बिन्दु S से वृत्त पर वृत्त की कितनी छेदक रेखाएँ खींची जा सकती हैं तथा वृत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ हैं स्पर्श बिन्दु कौन-कौन से हैं।



2. पार्श्व चित्र में वृत्त का केन्द्र O है, कुछ रेखा खंड खींचे गये हैं ज्ञात कीजिए वृत्त की
- तीन छेदक रेखाएँ
 - तीन स्पर्श रेखाएँ
 - वृत्त का व्यास
 - दो स्पर्श बिन्दु
 - छेदक रेखा MR पर स्थित वे बिन्दु जो वृत्त पर भी स्थित हैं।
 - तीन जीवाएँ
3. केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त की स्पर्श रेखा l है जो वृत्त को P पर स्पर्श करती है। यदि रेखा l पर स्थित कोई बिन्दु Q है, तो निम्नांकित कथनों से सत्य अथवा असत्य कथन छाँटिए :
- $OQ > r$
 - $OQ < r$
 - $OP = r$
 - $OQ = r$
 - $OP < r$
 - $OP > r$
4. 3.0 सेमी त्रिज्या का वृत्त खींचिए। इस वृत्त के अभ्यन्तर (वृत्त के अन्दर) एक बिन्दु लीजिए। ज्ञात कीजिए कि क्या P से होकर जाती हुई वृत्त की स्पर्श रेखा खींची जा सकती है?
5. निम्नांकित चित्र में वृत्त का केन्द्र O है तथा QPR वृत्त की स्पर्श रेखा है तथा PN , वृत्त का व्यास है। $\angle MPR = 60^\circ$ तो $\angle PNM$ का मान बताओ।





6. निम्नांकित कथनों में सत्य/असत्य को बताइए।

- (i) वृत्त की कोई स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु से खींची गयी त्रिज्या एक दूसरे पर लम्ब होते हैं।
 - (ii) किसी वृत्त की छेदिका उस वृत्त के दो से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
 - (iii) किसी वृत्त की स्पर्श रेखा, उस वृत्त को केवल दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।
-

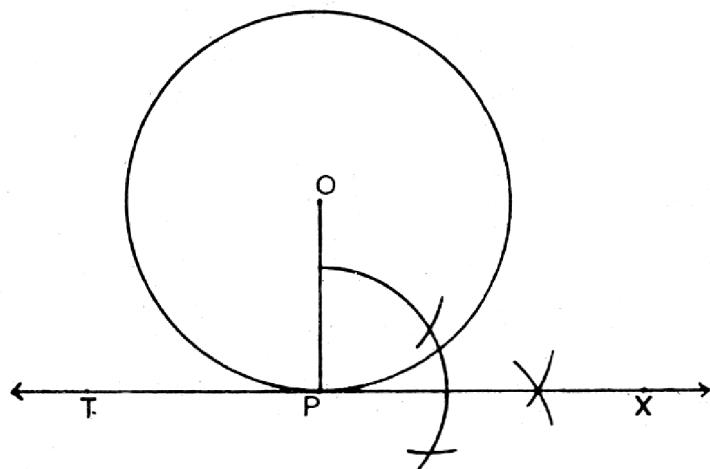
इकाई-20

वृत्त पर दिये गये बिन्दु से स्पर्श रेखा खींचना

किसी वृत्त पर दिये हुए बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना जबकि बिन्दु वृत्त पर स्थित हो:

दिया है : O केन्द्र का एक वृत्त है। वृत्त पर स्थित एक बिन्दु P है।

अभीष्ट : बिन्दु P से होकर जाती हुई वृत्त की स्पर्श रेखा खींचना जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करे।

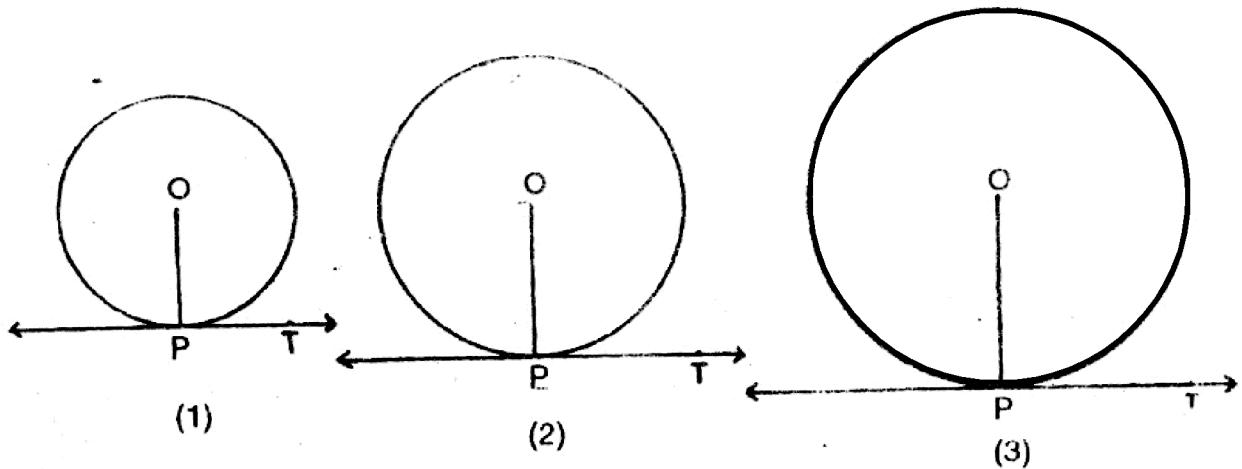


- रचना : 1. रेखाखंड OP खींच दीजिए।
 2. बिन्दु P से रेखाखंड OP पर लम्ब PX खींच दीजिए।
 3. XP को T तक बढ़ा दीजिए। इस प्रकार XT वृत्त की स्पर्श रेखा हुई जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती है।

स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से खींची गयी त्रिज्या परस्पर लम्ब होती है; (प्रयोगात्मक सत्यापन)

क्रियाकलाप : भिन्न-भिन्न केन्द्रों और भिन्न-भिन्न त्रिज्याओं के तीन वृत्त खींचिए। सुविधा के लिए सभी वृत्तों के केन्द्रों को O से नामांकित कीजिए।

पहले वृत्त पर एक बिन्दु P लीजिए। बिन्दु P से वृत्त की स्पर्श रेखा PT खींचिए जो वृत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती हो। रेखाखंड OP खींचिए और $\angle OPT$ को नापिए तथा $90^\circ - \angle OPT$ का मान ज्ञात कीजिए।



यह प्रक्रिया अन्य दो वृतों के लिए दोहराए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सूचीबद्ध कीजिए।

वृत की क्रम संख्या	$\angle OPT$	$90^\circ - \angle OPT$
1.		
2.		
3.		

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $90^\circ - \angle OPT$ का मान शून्य है या लगभग शून्य है।

अतः

वृत में किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से होकर जाती हुई त्रिज्या परस्पर लम्ब होती हैं।

मूल्यांकन :

- 2 सेमी त्रिज्या का वृत खीचिए। माना वृत का केन्द्र O है। इस वृत पर दो त्रिज्यायें OA और OB इस प्रकार खीचिये कि $\angle AOB = 120^\circ$ । पुनः बिन्दु A और B पर स्पर्श रेखायें खीचिये। माना ये स्पर्श रेखायें M बिन्दु पर मिलती हैं अब $\angle AMB$ नापिये।
- 3 सेमी का एक वृत खीचिये। वृत पर एक बिन्दु A लीजिए। बिन्दु A पर स्पर्श रेखा खीचिए। रचना की सम्पूर्ण विधि लिखिए।
- निम्नांकित चित्र में वृत का केन्द्र O है। PQ वृत की बिन्दु T पर स्पर्श रेखा है। AT तथा TB वृत की जीवाएँ हैं तथा $\angle ATB = 90^\circ$ यदि $\angle COB = 62^\circ$ तो

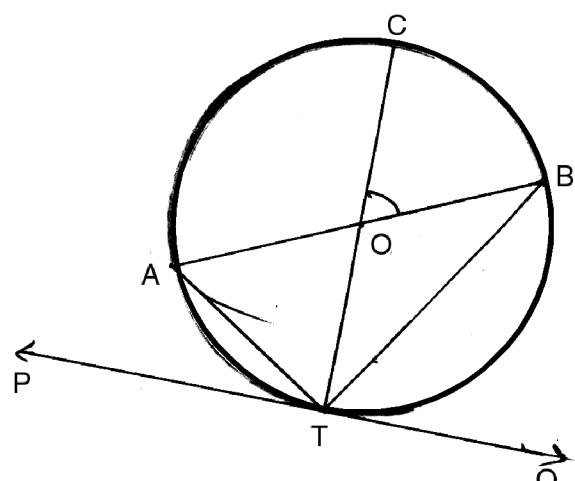
(i) $\angle CTB$

(ii) $\angle BTQ$

(iii) $\angle CTA$

(iv) $\angle ATP$

ज्ञात कीजिए।



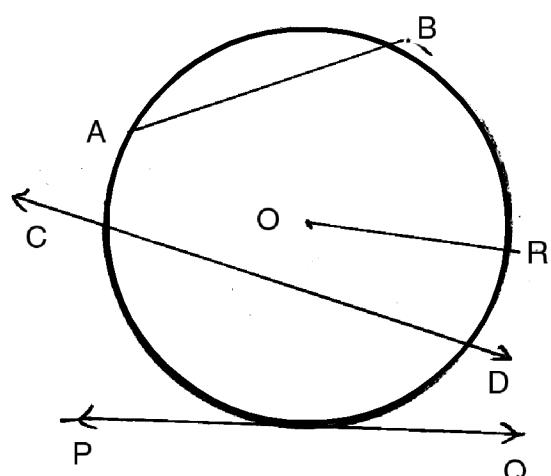
4. पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। चित्र से निम्नलिखित में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

(i) रेखा खण्ड AB वृत्त की है।

(ii) रेखाखण्ड OR वृत्त की है।

(iii) रेखा CD वृत्त की है।

(iv) रेखा PQ वृत्त की है।



5. पार्श्व चित्र में PQ वृत्त का व्यास है PR तथा QS इस वृत्त पर क्रमशः बिन्दु P तथा Q पर स्पर्श रेखाएँ हैं। क्या $RPIISQ$?

