骨牌模擬

作者：劉沛穎
系級：物理學系 一年級
學號：B04202035
指導教授：石明豐

一、研究目的

探討骨牌之間的碰撞，以及其中的動能、重力位能、散失能量和傳遞速度之情形。

二、研究方法

先討論只有兩個骨牌的情況，畫出力學分析圖，由碰撞前的角動量推導出碰撞後的角動量。並用程式模擬，調整骨牌間距、初始動能以及不同的排列情形，研究這些變因對骨牌傳遞速率造成的影響。

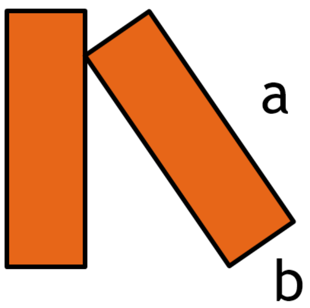
三、研究過程

(一) 初始設定

1. 地面上靜摩擦係數極大足以**使骨牌無法滑動**
2. 骨牌表面非常光滑
3. 骨牌之間的碰撞為**非彈性碰撞**(有能量散失)
4. 每一塊骨牌之質量**皆相同**且密度均勻
5. 骨牌與骨牌之間的距離皆相同(直線型骨牌)
6. 考慮重力作用

(二) 原理推導

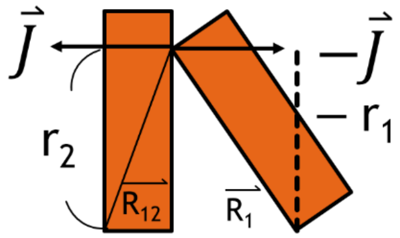
1. 一維直線型骨牌(1D)



碰撞前角速度 w_1, w_2

碰撞後角速度 x, y

$$I = \frac{M(a^2 + b^2)}{3}$$



由角衝量=角動量的變化量，得：

$$I\overrightarrow{w_1} + \overrightarrow{R_1} \times (-\vec{J}) = I\vec{x}$$

$$I\overrightarrow{w_2} + \overrightarrow{R_{12}} \times \vec{J} = I\vec{y}$$

let

$$\overrightarrow{R_1} \times (-\vec{J}) = r_1|\vec{J}|$$

$$\overrightarrow{R_{12}} \times \vec{J} = r_2|\vec{J}|$$

簡化後

$$x = w_1 + \frac{r_1|\vec{J}|}{I} \ldots (1)$$

$$y = w_2 + \frac{r_2|\vec{J}|}{I} \ldots (2)$$

碰撞前後造成的能量散失為ΔE

$$\Delta E = \frac{1}{2}I({w_1}^2 + {w_2}^2 - x^2 - y^2) = \mu\frac{|\vec{J}|^2}{2M} \ldots (3)$$

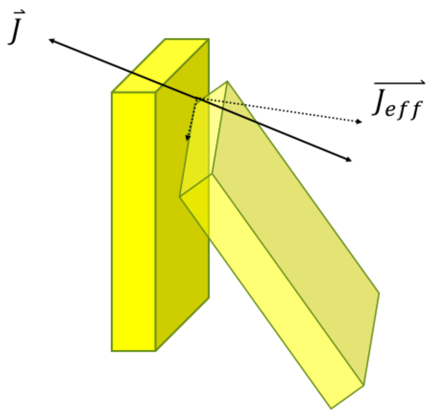
其中 μ 為碰撞吸收係數

將(1)、(2)式代入(3)式，得：

$$|\vec{J}| = \frac{-2I\,(r_1w_1 + r_2w_2)}{{r_1}^2 + {r_2}^2 + \frac{I}{M}\mu}$$

將$|\vec{J}|$代回(1)、(2)式即可得到碰撞後的角速度 x,y

2. 二維轉彎型骨牌(2D)



由於初始設定地面靜摩擦係數極大，所以側向的衝量會被地面所吸收。

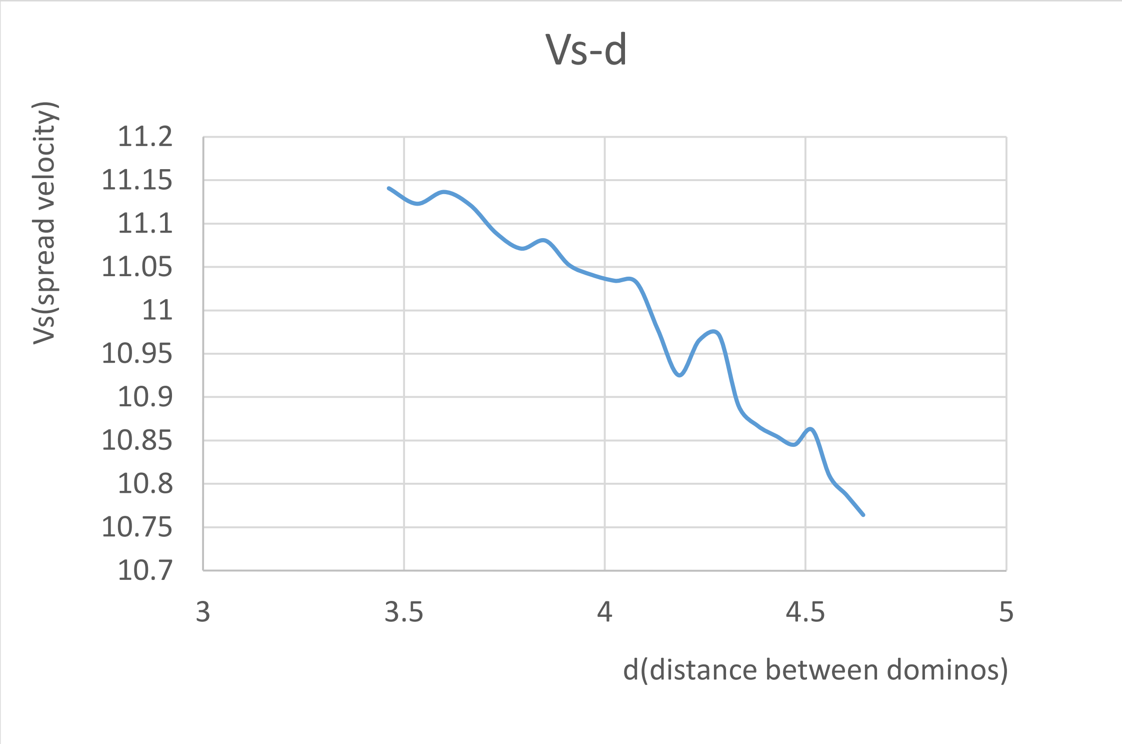
所以：

$$x = w_1 + \frac{r_1|\overrightarrow{J_{eff}}|}{I}$$

$$y = w_2 + \frac{r_2|\vec{J}|}{I}$$

(三) 傳遞速率

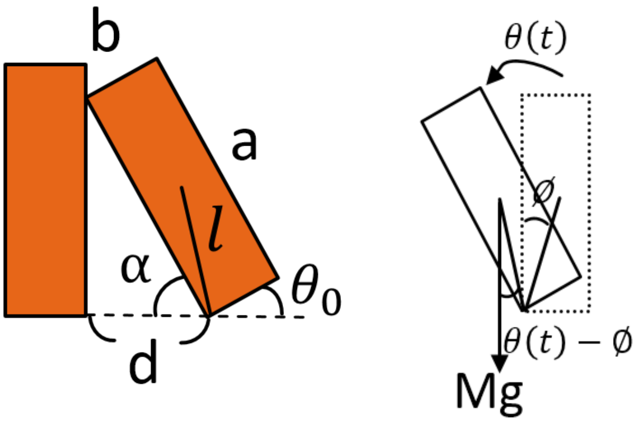
1. 改變骨牌間距



此為穩定後的傳遞速率，由圖形可知間距越小，傳遞速率越快；間距越大，傳遞速率越慢。

用物理方法推導傳遞速率與骨牌間距的關係：定義：$\mathrm{Vs(d)} = \frac{b+d}{T(d)}$，

為了簡化傳遞速率公式，利用第一個骨牌撞到第二個骨牌的傳遞速率來進行分析。其中 b+d 為骨牌波形所前進的距離，$T(d)$為第一個骨牌撞到第二個骨牌所經過的時間（當$\theta = \theta_0$時），其中T隨不同的間距 d 而有所改變。



$$l = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{d}{a}\right)$$

$$\emptyset = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\tau = \mathrm{I} \cdot \alpha = \mathrm{Mg}l \sin(\theta(t) - \emptyset)$$

$$v = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{Mgl}{I} \sin(\theta(t) - \emptyset)$$

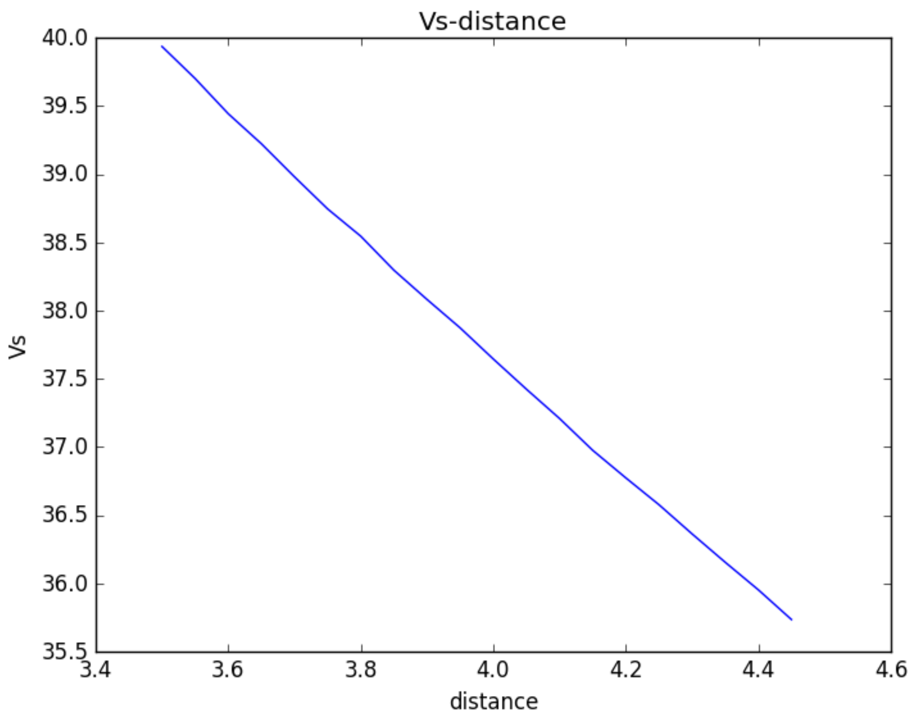
$$\frac{Mgl}{I} = \frac{Mg\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}}{\frac{M(a^2 + b^2)}{3}} = \frac{3g}{4l}$$

$$\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dt}} = \frac{3g}{4l} \sin(\theta(t) - \emptyset)$$

$$\theta(0) = 0, v(0) = 5$$

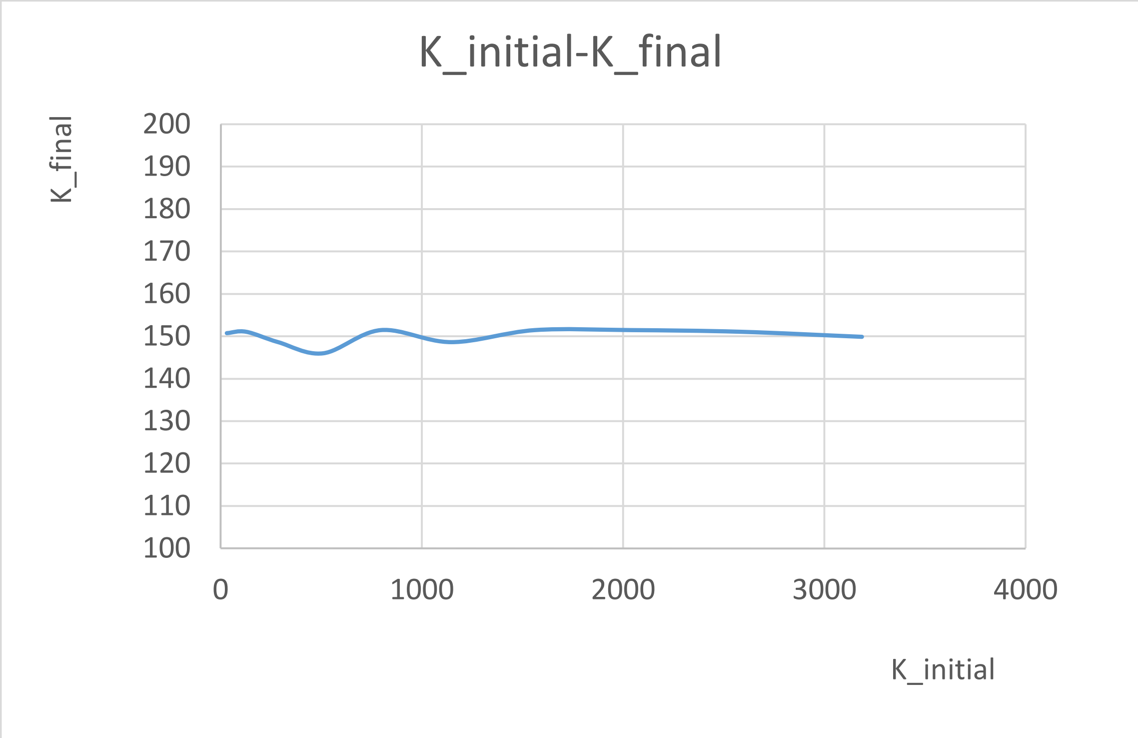
在不同的間距 d，計算當 $\theta = \theta_0$時的$T(d)$，再代入$\mathrm{Vs(d)} = \frac{b+d}{T(d)}$

用 python 畫出 Vs-d 的圖形：



由此可推得一樣的結論間距 d 越小，傳遞速率越快；間距 d 越大，傳遞速率越慢。就直觀來看，間距 d 越大，雖然骨牌轉動時，單位時間內在 x 分量造成的平均位移更小(使 Vs 變小)，類似圓周運動投影成簡諧運動的概念，但同時也受更多重力加速(使 Vs 變大)，但顯然是前者造成的影響較後者大的多。

2. 改變初始動能

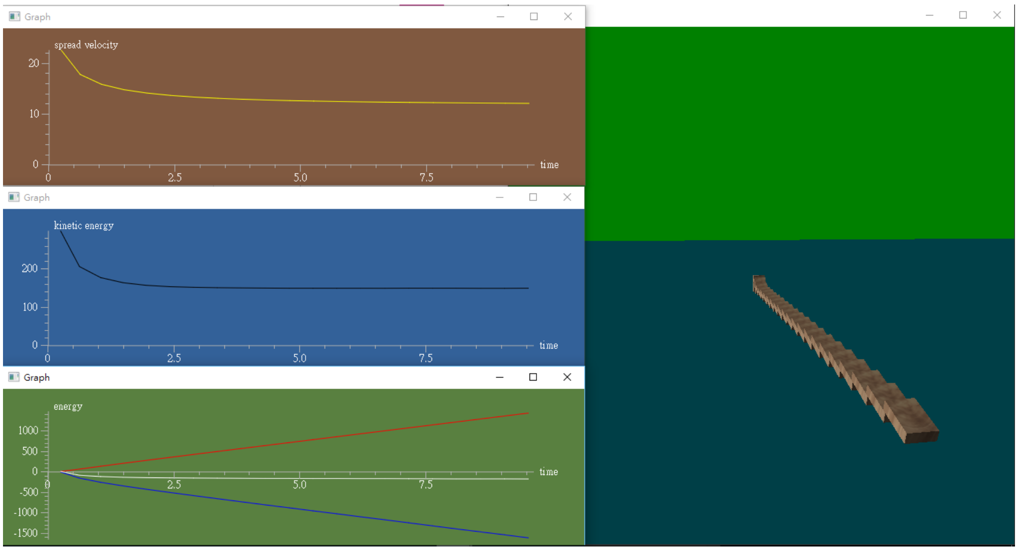


由圖形可知初始動能不影響最終動能，因為初始設定地面靜摩擦係數無限大，所以不論初始動能有多大，末動能都會達到一個穩定值。

3. 不同排列情形

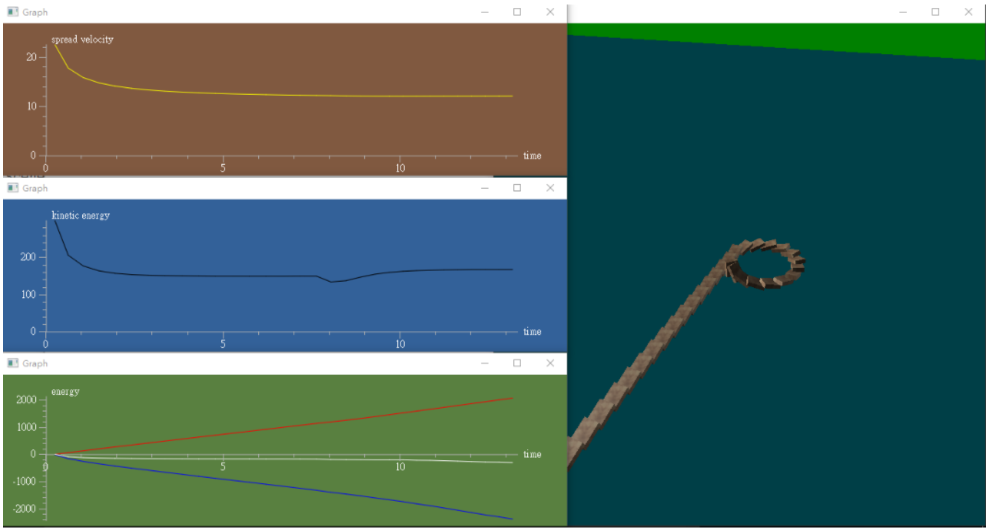
以直線型骨牌當作對照組，將其他型的傳遞速率與直線型做比較。

(1) 直線型(1D)

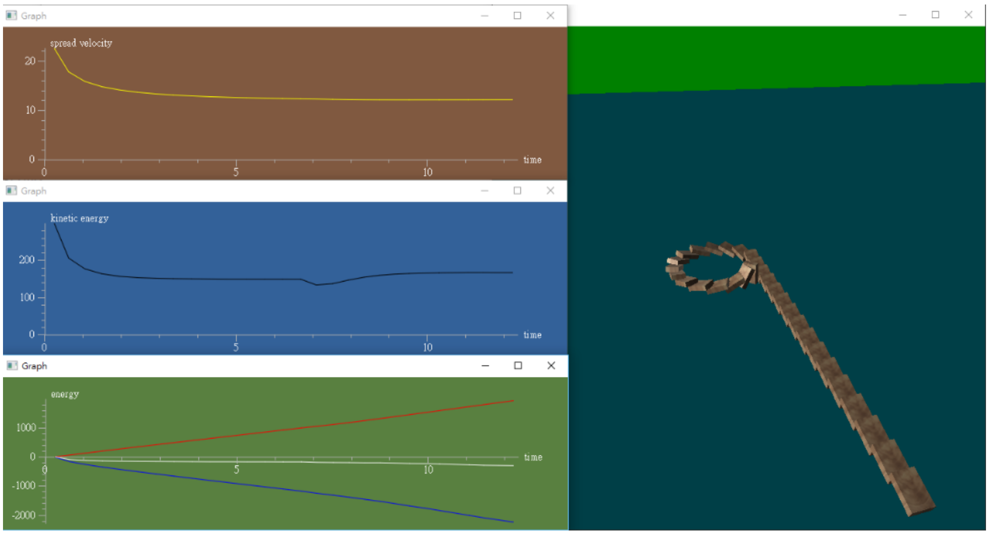


(2) 轉彎型(2D)

①往右

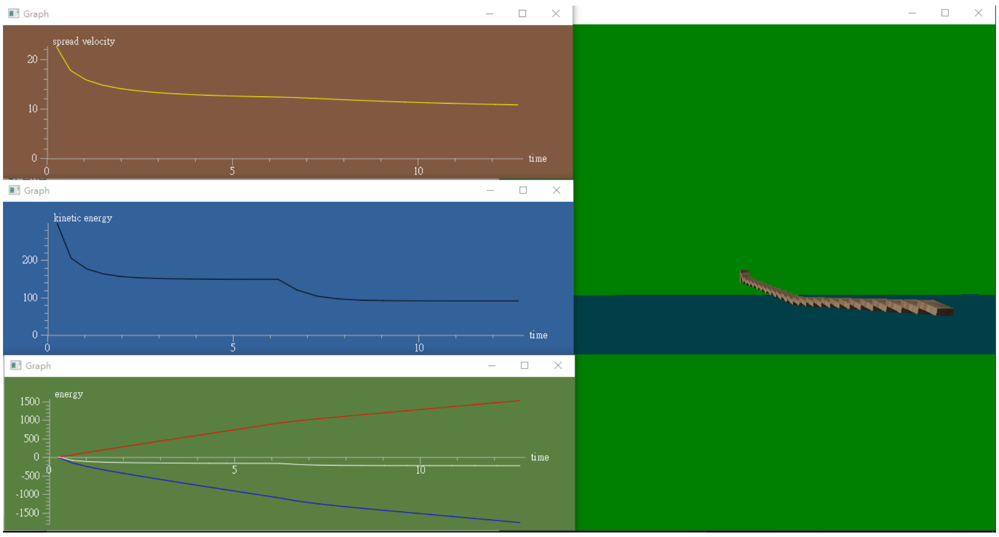


②往左

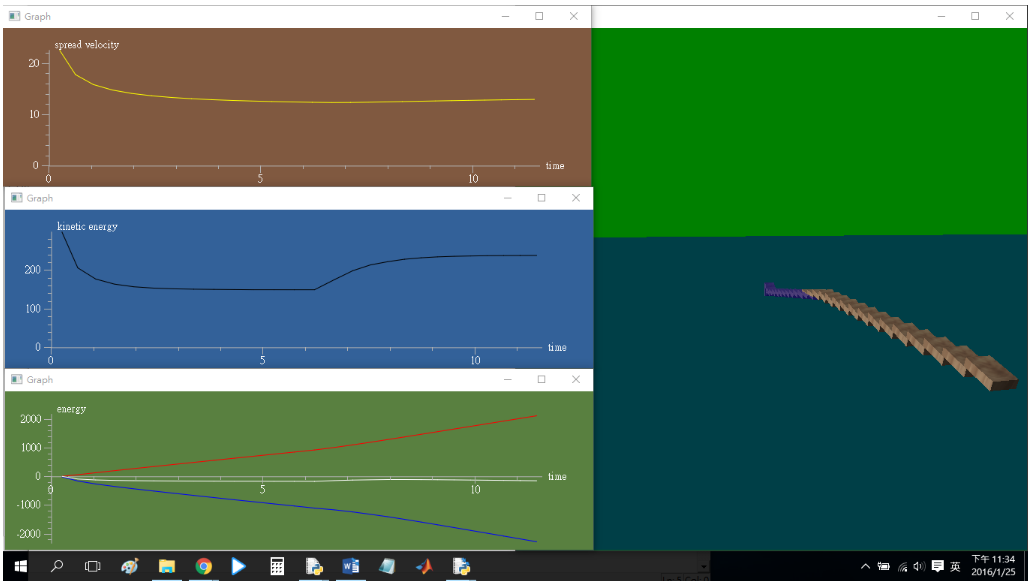


(3) 階梯型(3D)

①往上



②往下



四、研究結果

(一) ΔK =重力對系統作正功+地面對系統作負功 (功能定理)

(二) 影響骨牌的傳遞速率得主要因素：

1. 骨牌間距 d：距離越近傳遞速率越快。
2. 排列方式(傳遞速率與直線型做比較)：
   (1) 向上—傳遞速率變慢(因為重力作功變少)。
   (2) 向下—傳遞速率變快(因為重力作功變多)。
   (3) 轉彎—無明顯變化(因為重力作的正功多一點，地面作的負功也多一點)

五、參考文獻

1. 吳思鋒，「骨牌傾倒機制的量測與分析」」(臺北：國立臺灣師範大學物理學系碩士論文， 2008)，頁 8-19。