一 机械波的基本概念

1 机械波产生条件：1）波源；2）弹性介质.

机械振动在弹性介质中的传播形成波，波是运动状态的传播，介质的质点并不随波传播.

2 描述波的几个物理量

- 波长 λ：一个完整波形的长度.
- 周期 T：波前进一个波长的距离所需要的时间.
- 频率 ν：单位时间内波动所传播的完整波的数目.
- 波速 u：某一相位在单位时间内所传播的距离.

$$\nu = 1/T \qquad u = \lambda/T = \lambda\nu \qquad \lambda = u/\nu = Tu$$

周期或频率只决定于波源的振动；波速只决定于媒质的性质.

◆ 波的图示法：波线 波面 波前.

3 横波、纵波

二 平面简谐波的波函数

1
$$
\begin{cases}
y(x,t)=A\cos[\omega(t\mp\frac{x}{u})+\varphi] \\
y(x,t)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}\mp\frac{x}{\lambda})+\varphi] \\
y(x,t)=A\cos(\omega t\mp kx+\varphi)
\end{cases}
$$

角波数 $k=2\pi/\lambda$

2 波函数的物理意义

三 波动的能量

1 在波动传播的媒质中，任一体积元的动能、 势能、总机械能均随时间作同步地周期性变化，机械能不守恒．波动是能量传递的一种方式．

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}=\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\mathrm{d}W=\mathrm{d}W_{\mathrm{k}}+\mathrm{d}W_{\mathrm{p}}=\rho\mathrm{d}VA^2\omega^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

2 平均能量密度： $\overline{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

3 平均能流密度（波强度）： $I=\overline{w}u=\frac{1}{2}\rho A^2\omega^2u$

4 声强级： $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$

$$L_I = \lg \frac{I}{I_0}$$ 贝尔（B）

$$L_I = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$ 分贝（dB）

四　惠更斯原理（作图法）

介质中波阵面上的各点都可以看作是发射子波的波源，而在其后的任意时刻，这些子波的包络就是新的波前.

五 波的叠加原理

1 波的干涉 $\begin{cases} A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi} \\ \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1-2\pi(r_2-r_1)/\lambda \end{cases}$

若 $\varphi_1=\varphi_2$ 则 $\Delta\varphi=-2\pi\delta/\lambda$ 波程差 $\delta=r_2-r_1$

$$\begin{cases} \delta=\pm k\lambda \quad k=0,1,2,\cdots \quad A=A_1+A_2 \\ \delta=\pm(k+1/2)\lambda \quad k=0,1,2,\cdots \quad A=|A_1-A_2| \\ \delta= \text{其他} \quad |A_1-A_2|<A<A_1+A_2 \end{cases}$$

2 驻波

驻波方程 $y=\boxed{2A\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}}\cos 2\pi\nu t$

$$x=\begin{cases}\pm k\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,\cdots \quad A_{\max}=2A \\ \pm(k+\dfrac{1}{2})\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,\cdots \quad A_{\max}=0\end{cases}$$

波腹

波节

相邻波腹（节）间距 $=\lambda/2$

相邻波腹和波节间距 $=\lambda/4$

3　相位跃变（半波损失）

当波从波疏介质垂直入射到波密介质， 被反射到波疏介质时形成波节. 入射波与反射波在此处的相位时时相反, 即反射波在分界处产生 π 的相位跃变, 相当于出现了半个波长的波程差，称半波损失.

六 多普勒效应

1）波源不动，观察者相对介质以速度 v_o 运动

$$\nu' = \frac{u \pm v_o}{u}\nu$$

（+）观察者向波源运动

（-）观察者远离波源

2）观察者不动，波源相对介质以速度 v_s 运动

$$\nu' = \frac{u}{u \mp v_s}\nu$$

（-）波源向观察者运动

（+）波源远离观察者

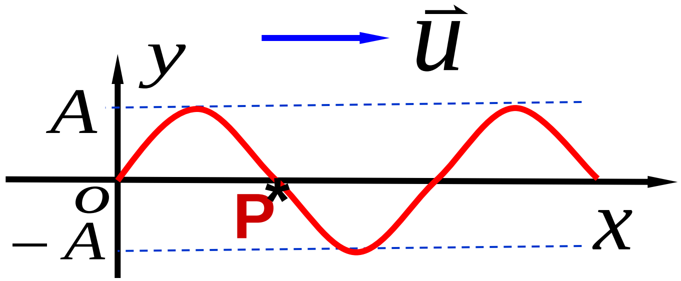
波源与观察者同时相对介质运动 (v_s, v_o)

$$\boxed{\nu' = \frac{u \pm v_o}{u \mp v_s}\nu}$$

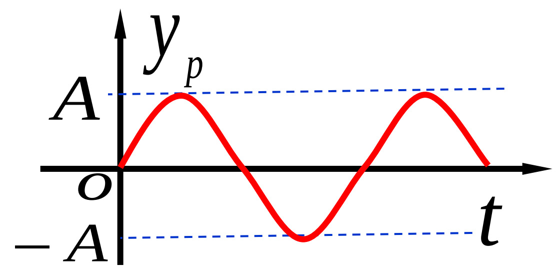
v_o 观察者向波源运动 $+$，远离 $-$.

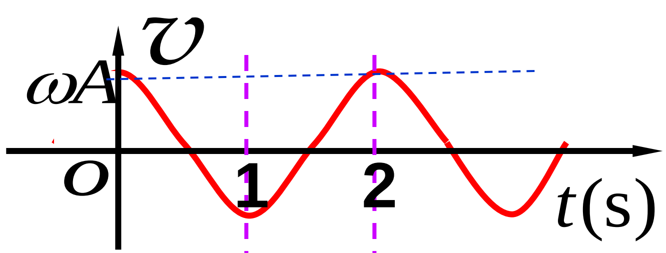
v_s 波源向观察者运动 $-$，远离 $+$.

例 如图一向右传播的简谐波在 $t = 0$ 时刻的波形，已知周期为 2 s，则 P 点处质点的振动速度与时间的关系曲线为：

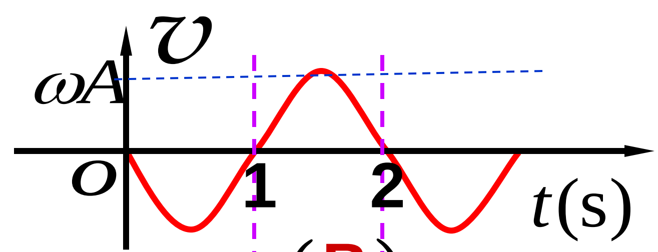


P 点振动图

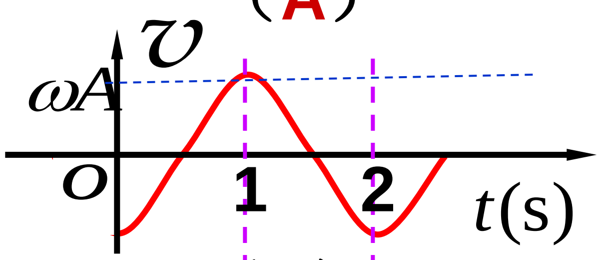




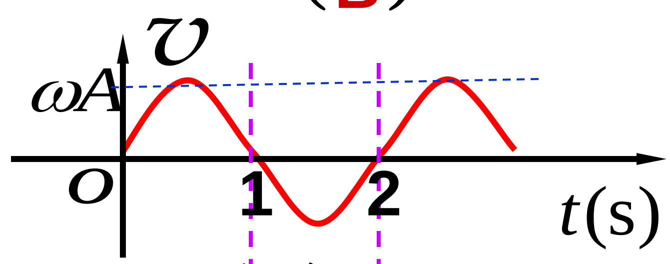
（A）



（B）

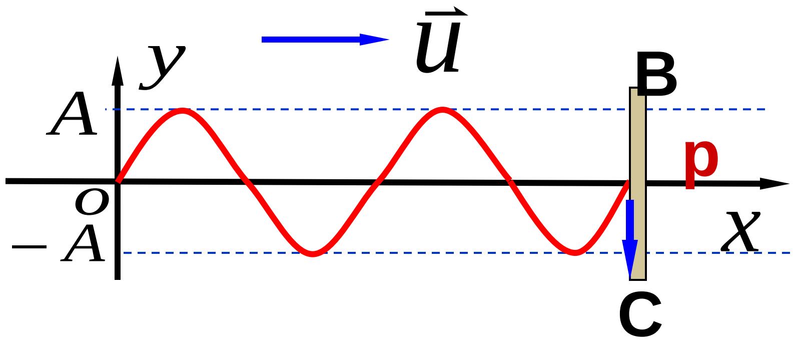


（C）



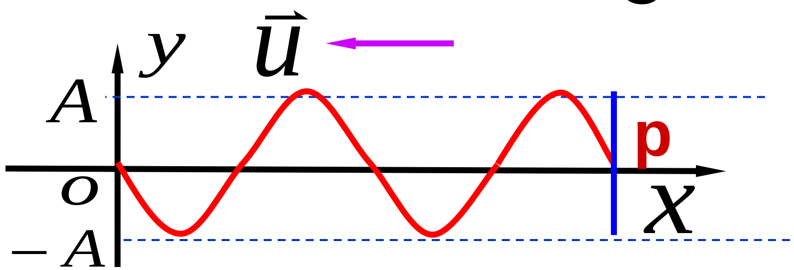
（D）

例 如图一向右传播的简谐波在 t 时刻的波形BC为**波密**媒质的反射面，则反射波在 t 时刻的波形图为：

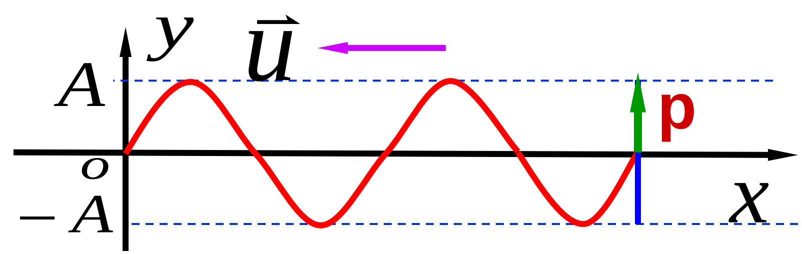


答：（B）

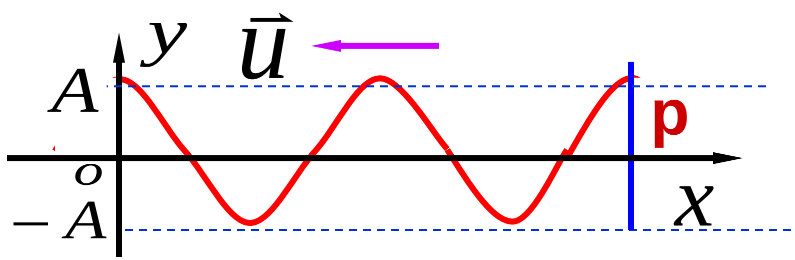
P 点两振动反相



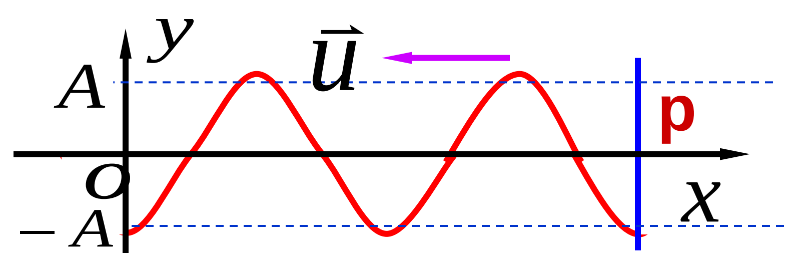
（A）



（B）



（C）



（D）

例　一平面简谐波动在弹性媒质中传播时，在传播方向上媒质中某质元在负的最大位移处，则它的能量是

（1）动能为零，势能最大　（2）动能为零，势能为零

（3）动能最大，势能最大　（4）动能最大，势能为零

例　在驻波中，两个相邻波节间各质点的振动

（1）振幅相同，相位相同　（2）振幅不同，相位相同

（3）振幅相同，相位不同　（4）振幅不同，相位不同

例 一平面机械波沿 x 轴负方向传播，已知 $x=-1\text{m}$ 处质点的振动方程为 $y=A\cos(\omega t+\varphi)$，若波速为 u 求此波的波函数.

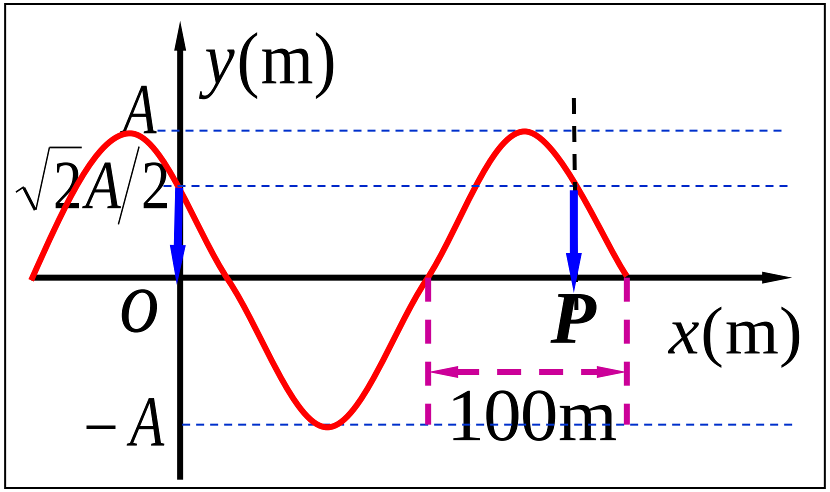
解： 波函数 $y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi']$

$$\because x=-1\text{m} \quad y=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\omega(t-\frac{1}{u})+\varphi'=\omega t+\varphi \qquad \varphi'=\varphi+\frac{\omega}{u}$$

$$y=A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\frac{\omega}{u}+\varphi]$$

例 一平面简谐波在 $t=0$ 时刻的波形图如图，设频率 $\nu=250\text{Hz}$ ，且此时 P 点的运动方向向下，求 1）该波的波函数;



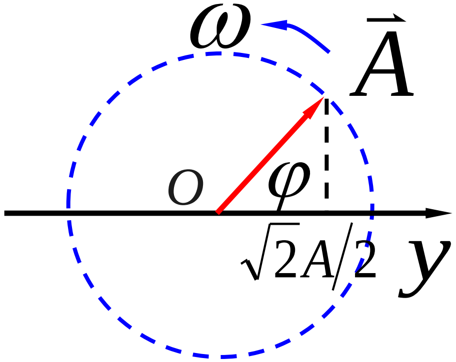
解： $\nu=250\text{Hz}$

$\lambda=200\text{m}$

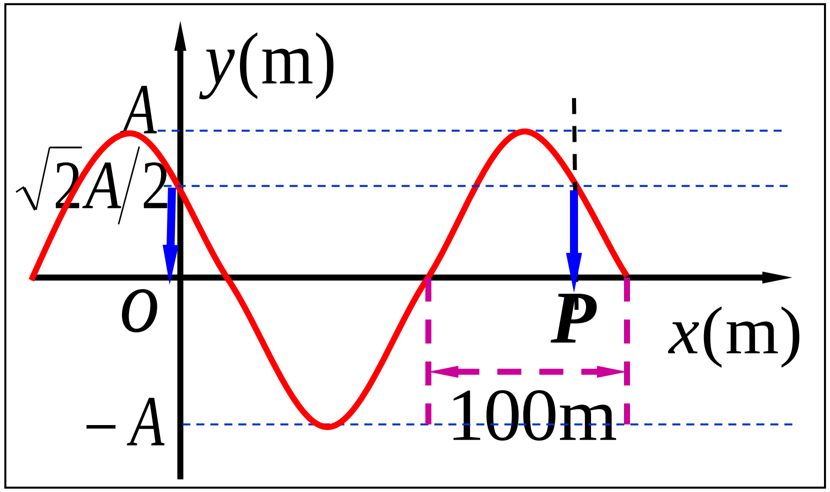
$\because v_p<0$

$\therefore$ 波向 X 轴负向传播

$$y=A\cos[2\pi(250t+\frac{x}{200})+\varphi]$$



$\because t=0, x=0 \quad y=\frac{\sqrt{2}A}{2} \quad v<0 \qquad \therefore \varphi=\frac{\pi}{4}$



2）求在距原点 **O** 为100m处质点的振动方程与振动速度表达式.

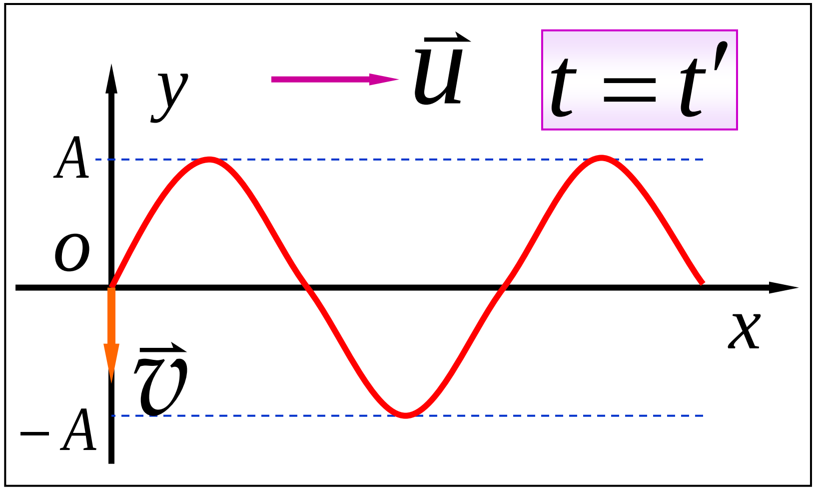
$$\nu = 250\text{Hz} \quad \lambda = 200\text{m}$$

$$y = A\cos[2\pi(250t + \frac{x}{200}) + \frac{\pi}{4}]$$

$$x = 100\text{m}, y = A\cos(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -500\pi A\sin(500\pi t + \frac{5\pi}{4})$$

例 一简谐波沿 ox 轴**正**向传播，已知振幅、频率和速度分别为 A, ν, u，设 $t = t'$ 时的波形曲线如图，**求 1**）$x = 0$ 处质点振动方程；**2**）该波的波函数.



解： $y_o = A\cos(2\pi\nu t + \varphi)$

$$t = t', x = 0 \quad y = 0 \quad v < 0$$

$$2\pi\nu t' + \varphi = \frac{\pi}{2}$$

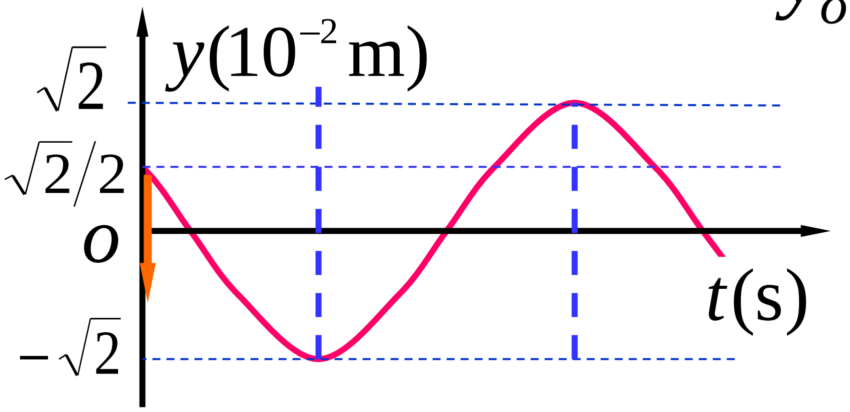
$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\pi\nu t' \qquad y_o = A\cos[2\pi\nu(t - t') + \frac{\pi}{2}]$$

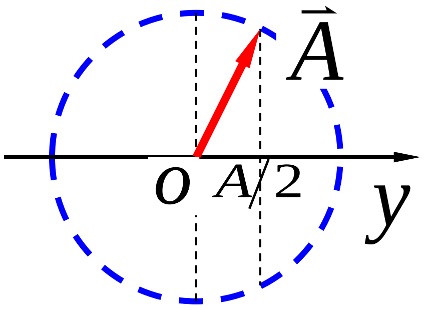
波函数

$$y = A\cos[2\pi\nu(t - t' - \frac{x}{u}) + \frac{\pi}{2}]$$

例 一简谐波沿 Ox 轴正向传播，$\lambda = 4\text{m}, T = 4\text{s}$ 已知 $x=0$ 点振动曲线如图，求 1）$x=0$ 点振动方程、2）波函数。

$$y_o = \sqrt{2}\times10^{-2}\cos(2\pi\frac{t}{4}+\varphi)\text{m}$$





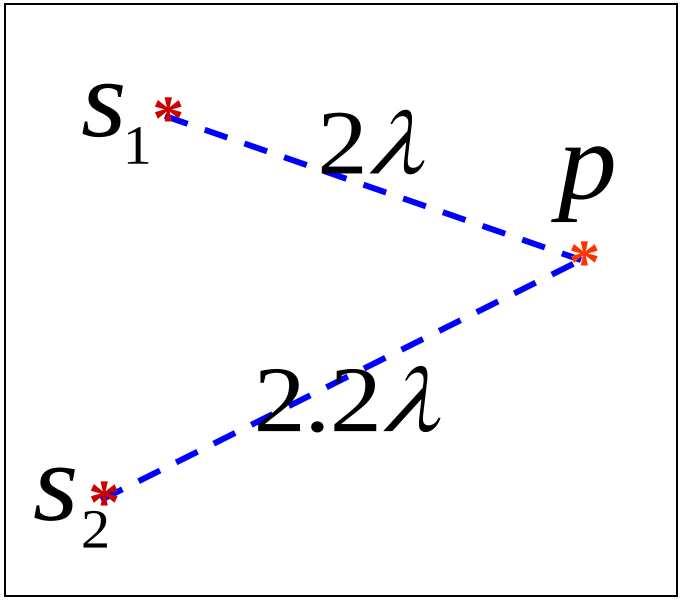
$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{3}}$$

$$\boxed{t=0, x=0 \quad y = A/2 \quad v<0}$$

波函数

$$y = \sqrt{2}\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{4}-\frac{x}{4})+\frac{\pi}{3}]\text{m}$$

例 S_1, S_2 为两相干波源，它们的振动方向均垂直于画面并发出波长为 λ 的简谐波，P 点是两列波相遇区域中的一点，距离如图，P 点发生相消干涉，S_1 的振动方程为 $y_1 = A\cos(2\pi t + \pi/2)$ **求** S_2的振动方程.



解 $y_2 = A\cos(2\pi t + \varphi)$

$$y_{1p} = A\cos(2\pi t + \frac{1}{2}\pi - 4\pi)$$

$$y_{2p} = A\cos(2\pi t + \varphi - 4.4\pi)$$

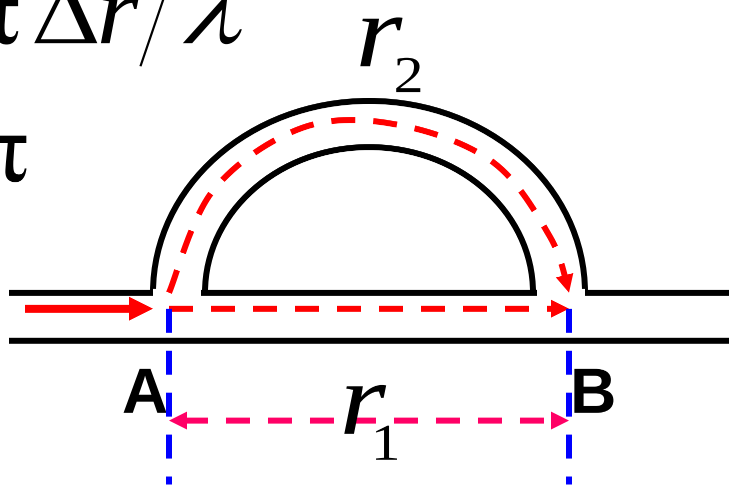
$$(\varphi - 4.4\pi) - (-3.5\pi) = \pm\pi$$

$$\varphi = \begin{cases} 1.9\pi \\ -0.1\pi \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_2 = A\cos(2\pi t + 1.9\pi) \\ y_2 = A\cos(2\pi t - 0.1\pi) \end{cases}$$

例： 干涉消声器结构原理图，当发电机噪声经过排气管达到 A 时分成两路在 B 点相遇，声波干涉相消，若频率 $\nu = 300\text{Hz}$，则弯管与直管的长度差至少应为多少？（声波的速度 $u = 340\text{m/s}$）

$$\Delta\varphi = 2\pi(r_2 - r_1)/\lambda = 2\pi\Delta r/\lambda$$



干涉相消时 $\Delta\varphi = (2k+1)\pi$

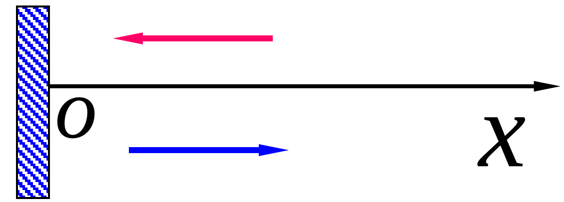
$$k = 0, \pm1, \pm2, \cdots$$

$$\Delta r = (2k+1)\lambda/2$$

$$k = 0 \quad (\Delta r)_{\min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{u}{2\nu} = 0.57\text{m}$$

实际应用时，常将不同频率的消声器串接在一起。

例 已知在固定端 $x=0$ 处反射波的波函数（反射波无能量损失）$y_2 = A\cos 2\pi(\nu t - x/\lambda)$，求入射波波函数、驻波方程和波节位置。



解： $y_1 = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$

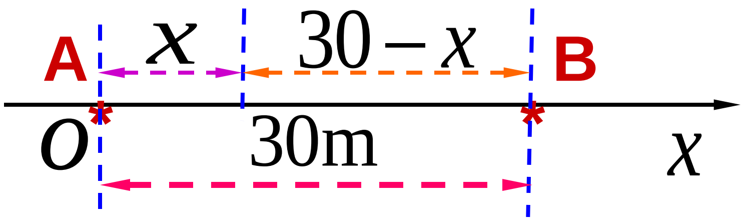
$$\because x=0 \quad \begin{cases} y_{2o} = A\cos 2\pi \nu t \\ y_{1o} = A\cos(2\pi \nu t + \pi) \end{cases} \quad \therefore \varphi = \pi$$

$$y_1 = A\cos[2\pi(\nu t + \frac{x}{\lambda}) + \pi]$$

$$y = y_1 + y_2 = 2A\cos(2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2})\cos(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2})$$

波节位置 $2\pi\frac{x}{\lambda} + \frac{\pi}{2} = (k+\frac{1}{2})\pi \quad x = k\frac{\lambda}{2} \quad k = 0,1,\cdots$

例 两相干波源位于同一介质中的 A、B 两点，其振幅相同，频率皆为 100 Hz，B 比 A 的相位超前 π，若 A、B 相距 30.0 m，波速为 400 m/s，试求 AB 连线上因干涉而静止的点的位置.



解: 1）A 点左侧

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{r_B-r_A}{\lambda}=-14\pi$$

全部加强

2）B 点右侧

$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{r_B-r_A}{\lambda}=16\pi$$

全部加强

3）A、B 两点间

$$\varphi_B-\varphi_A=\pi$$

$$\lambda=\frac{u}{\nu}=4\text{m}$$

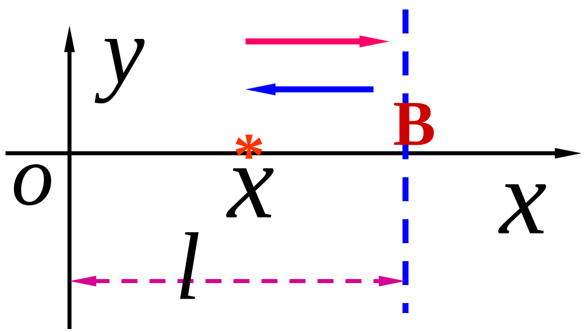
$$\Delta\varphi=\varphi_B-\varphi_A-2\pi\frac{(30-x)-x}{\lambda}=(2k+1)\pi$$

$$x=(15+2k)\text{m}\quad k=0,\pm1,\pm2\cdots\pm7$$

例 已知弦线上入射波在 $x=l$ 处发生反射，反射点为自由端，若波在传播和反射过程中振幅不变，入射波波函数为 $y_1 = A\cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$，求反射波波函数.

解 入射波和反射波在 **B** 点振动同相位（自由端）

$$\begin{cases} y_{1B} = A\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{l}{\lambda}) \\ y_{2B} = A\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{l}{\lambda}) \end{cases}$$



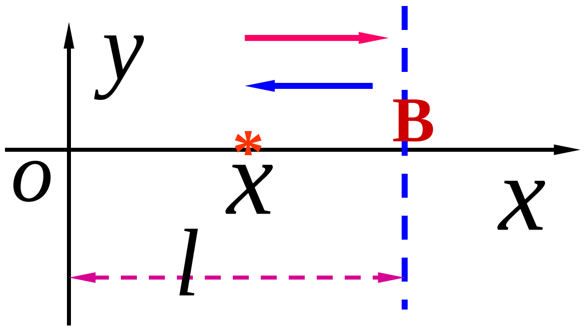
反射波在 x 点振动 $y_{2x} = A\cos(\omega t - 2\pi\dfrac{l}{\lambda} - \boxed{2\pi\dfrac{l-x}{\lambda}})$

反射波波函数 $y_2 = A\cos(\omega t + 2\pi\dfrac{x}{\lambda} - 4\pi\dfrac{l}{\lambda})$

例 已知弦线上入射波在 $x = l$ 处发生反射，反射点为自由端，若波在传播和反射过程中振幅不变，入射波波函数为 $y_1 = A\cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$，求反射波波函数.

解： 入射波和反射波在 **B** 点振动同相位（自由端）

$$y_1 = A\cos(\omega t - 2\pi x/\lambda)$$

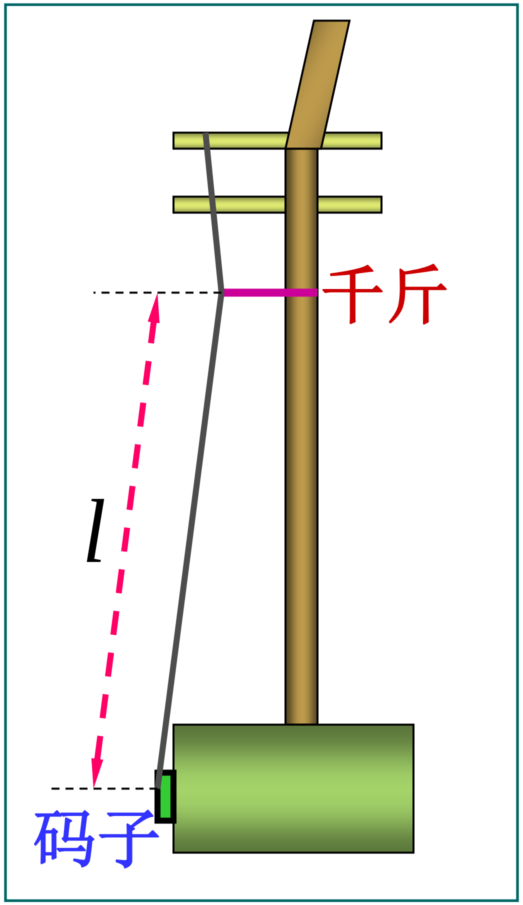


反射波在*o*点振动与入射波在*o*点振动相位落后

$$\Delta\phi = \varphi_{反} - \varphi_{入} = -2\pi\frac{2l}{\lambda} - 0 = -2\pi\frac{2l}{\lambda}$$

反射波波函数 $y_2 = A\cos(\omega t + 2\pi\frac{x}{\lambda} - 4\pi\frac{l}{\lambda})$

例 如图二胡弦长 $l=0.3\,\mathrm{m}$，张力 $T=9.4\mathrm{N}$. 密度 $\rho=3.8\times10^{-4}\ \mathrm{kg/m}$. 求弦所发的声音的**基**频和**谐**频.



解： 弦两端为固定点，是**波节**.

$$l=n\frac{\lambda}{2}\quad n=1,2,\cdots$$

频率 $\nu=\dfrac{u}{\lambda}=\dfrac{nu}{2l}$ 波速 $u=\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$

基频 $n=1\quad \nu_1=\dfrac{1}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}=262\ \mathrm{Hz}$

谐频 $n>1\quad \nu_n=\dfrac{n}{2l}\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}$