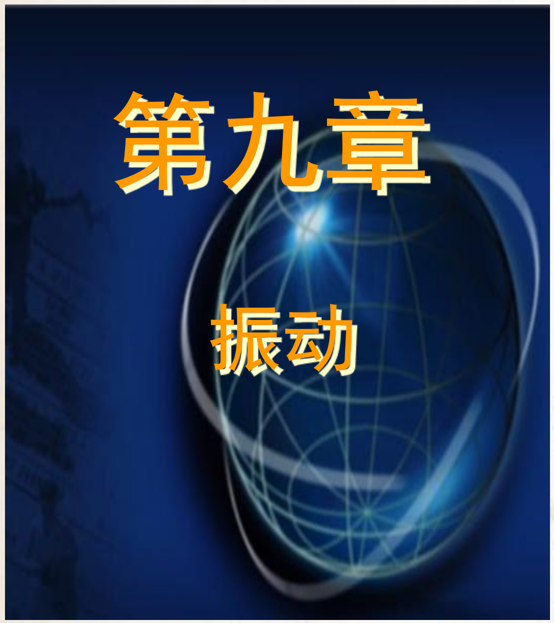
9-4 简谐运动的能量



第4节《简谐振动的能量》

一 了解简谐振动的能量特征.

二 理解能量特征的守恒量.

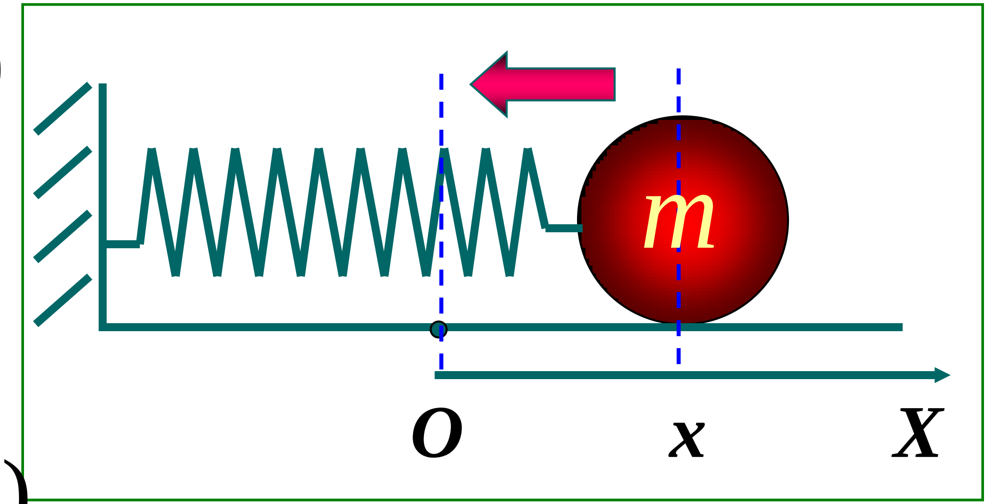
9-4 简谐振动的能量特征

（1） 动能（以弹簧振子为例）

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m[-\omega A\sin(\omega t+\varphi)]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

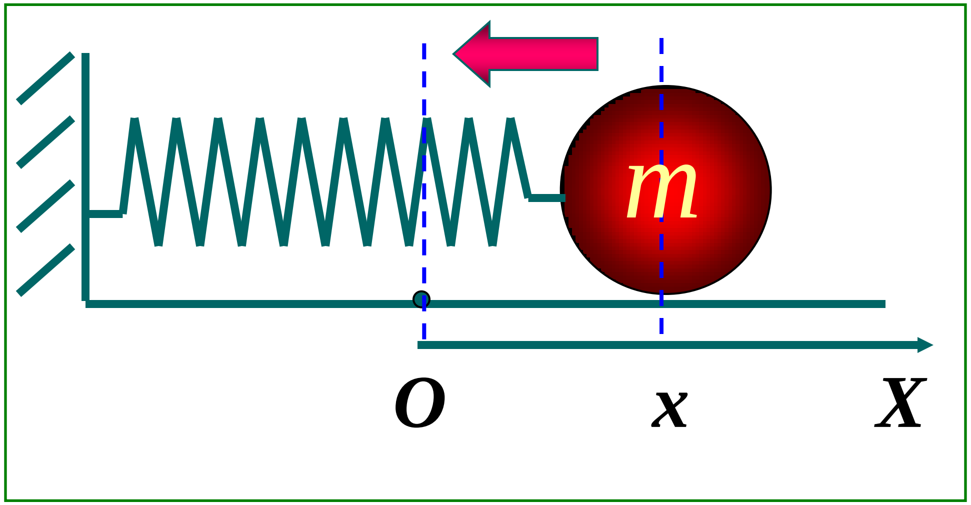


$$E_k = \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\phi)$$

（2）势能 $E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

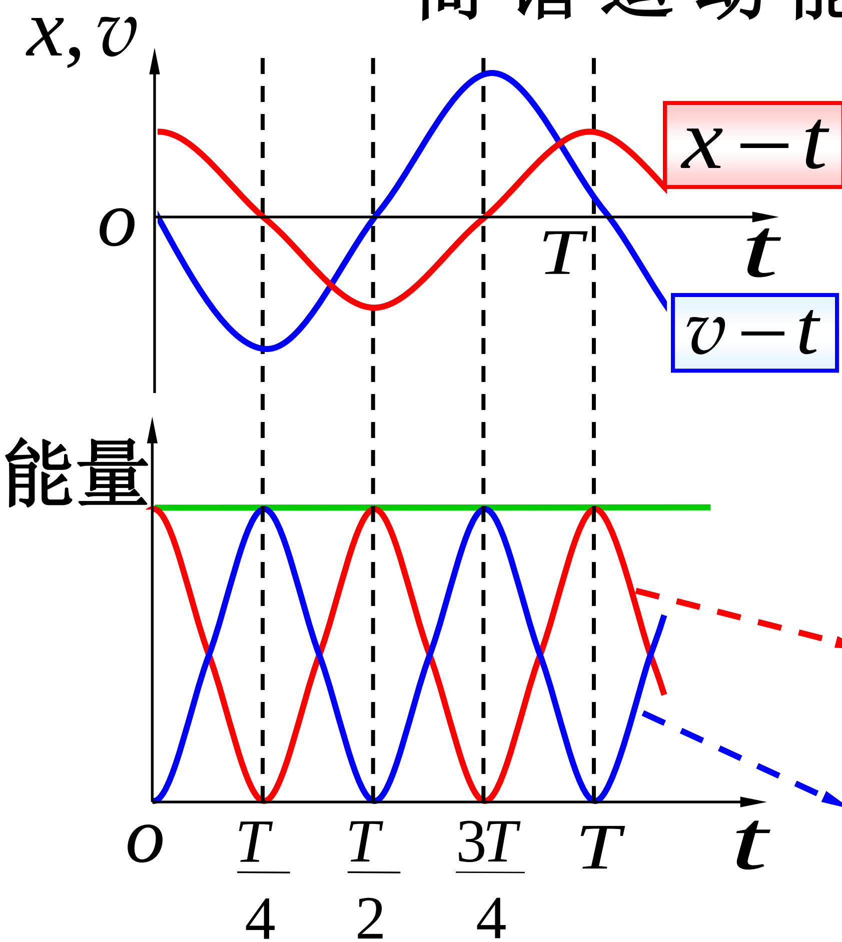
（3）机械能 $E=E_{\mathrm{k}}+E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}m\omega^2A^2=\frac{1}{2}kA^2$

线性回复力是保守力，作简谐运动的系统机械能守恒.



9-4 简谐运动的能量

简谐运动能量图



$$\varphi = 0$$

$$x = A\cos \omega t$$

$$v = -A\omega \sin \omega t$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

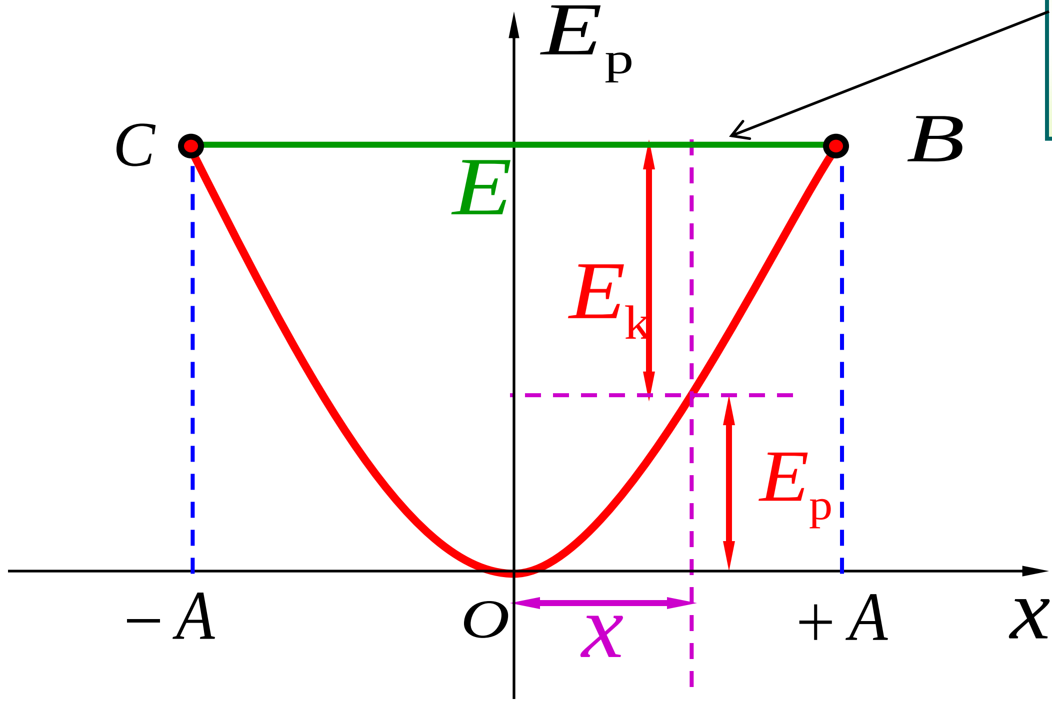
$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2 \omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2 \omega t$$

简谐运动能量守恒，振幅不变walt摆球振动试验

简谐运动势能曲线

$$E=\frac{1}{2}kA^2$$



能量守恒 $\xrightarrow{\text{推导}}$ 简谐运动方程

$$E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{常量}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2\right)=0$$

$$m\cancel{v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kx\frac{\cancel{\mathrm{d}x}}{\cancel{\mathrm{d}t}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0$$

例 质量为0.10 kg的物体，以振幅 $1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$ 作简谐运动，其最大加速度为 $4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，**求：**

（1） 振动的周期；

（2） 通过平衡位置的动能；

（3） 总能量；

（4） 物体在何处其动能和势能相等？

已知 $m=0.10\ \mathrm{kg}$，$A=1.0\times10^{-2}\ \mathrm{m}$，

$a_{\max}=4.0\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 求:（1）T；（2）$E_{\mathrm{k,max}}$

解（1）$a_{\max}=A\omega^2$ $\omega=\sqrt{\dfrac{a_{\max}}{A}}=20\ \mathrm{s^{-1}}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=0.314\ \mathrm{s}$$

（2）$E_{\mathrm{k,max}}=\dfrac{1}{2}mv_{\max}^2=\dfrac{1}{2}m\omega^2A^2$

$$=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{J}$$

已知 $m = 0.10\ \text{kg}$，$A = 1.0\times10^{-2}\ \text{m}$，

$a_{\text{max}} = 4.0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ 求:（3）E_{sum}；

（4）何处动势能相等?

解（3）$E_{\text{sum}} = E_{\text{k,max}} = 2.0\times10^{-3}\ \text{J}$

（4）$E_{\text{k}} = E_{\text{p}}$ 时 $E_{\text{p}} = 1.0\times10^{-3}\ \text{J}$

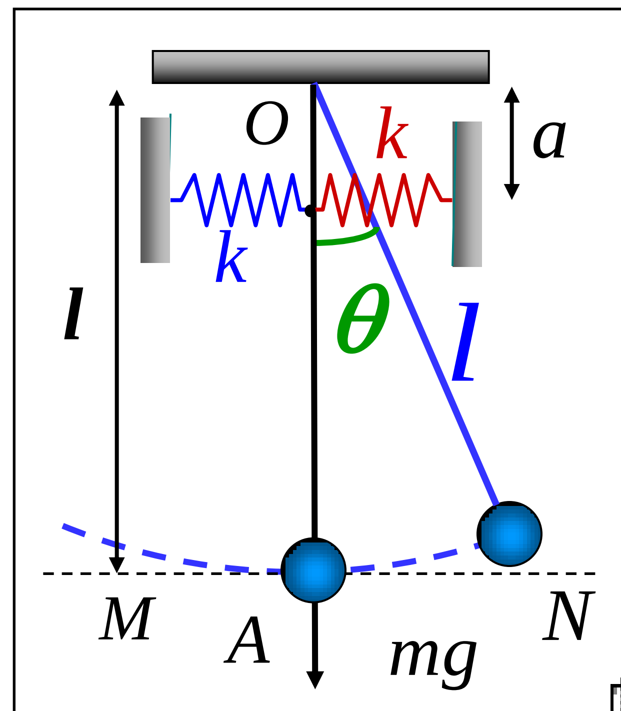
由 $E_{\text{p}} = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}m\omega^2x^2$

$$x^2 = \frac{2E_{\text{p}}}{m\omega^2} = 0.5\times10^{-4}\ \text{m}^2 \qquad x = \pm0.707\ \text{cm}$$

END

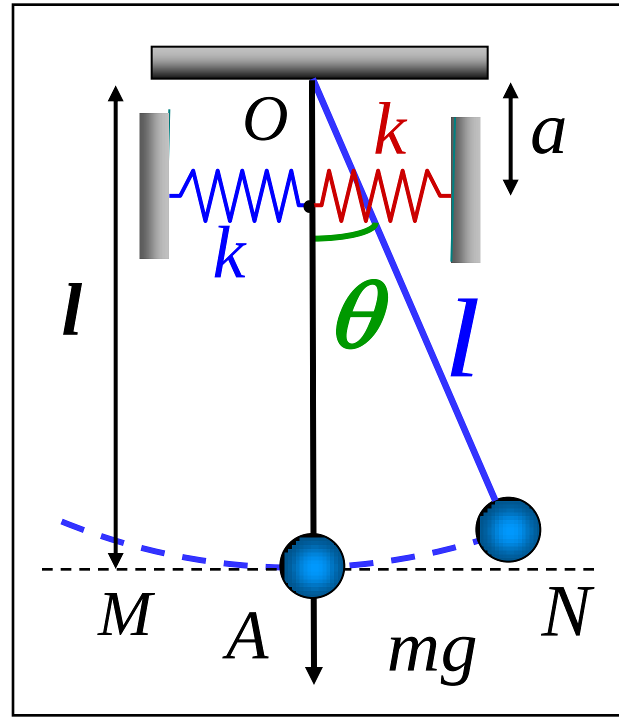
例 杆OA的质量可忽略，杆的一端用铰链连接,使杆在铅直 面内摆动，杆的另一端固定有质量为m 的摆球。当摆在铅直位置时,与摆连接的两根水平放置的轻弹簧都处于没有变形的状态, 假定摆在小角度摆动时，

θ角按照余弦规律随时间变化。试求当摆在铅直位置时的固有频率。两根弹簧的劲度系数均为k, 各种尺寸皆标在图上。



解 用机械能守恒定律较方便。

取水平面 MN 为重力零势能面，则摆在最低位置时具有的机械能 E_1 为



$$E_1 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_{\max})^2$$

摆到达最大偏离位置时，速度为零，取弹簧原长处为弹性势能的零势能点，θ 角很小时，摆的机械能 E_2 为

$$E_2 = mgl(1-\cos\theta_{\max}) + 2\times\frac{1}{2}k(a\theta_{\max})^2$$

$$= \frac{1}{2}mgl\,\theta_{\max}^2) + (ka\theta_{\max})^2$$

根据机械能守恒定律，得

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_{\max})^2 = \frac{1}{2}mgl\,\theta_{\max}^2) + (ka\theta_{\max})^2$$

摆角很小时，摆的运动为谐振动，则

$$\theta = \theta_{\max}\cos(2\pi\nu t + \varphi)$$

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta}_{\max})^2=\frac{1}{2}mgl\theta_{\max}^2)+(ka\theta_{\max})^2 \qquad (1)$$

$$\theta=\theta_{\max}\cos(2\pi\nu t+\varphi)$$

$$\therefore\dot{\theta}=-\theta_{\max}\cdot 2\pi\nu\sin(2\pi\nu t+\varphi)$$

$\therefore\dot{\theta}_{\max}=-2\pi\nu\theta_{\max}$ 代入 (1) 式，得

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mgl+2ka^2}{ml^2}}$$