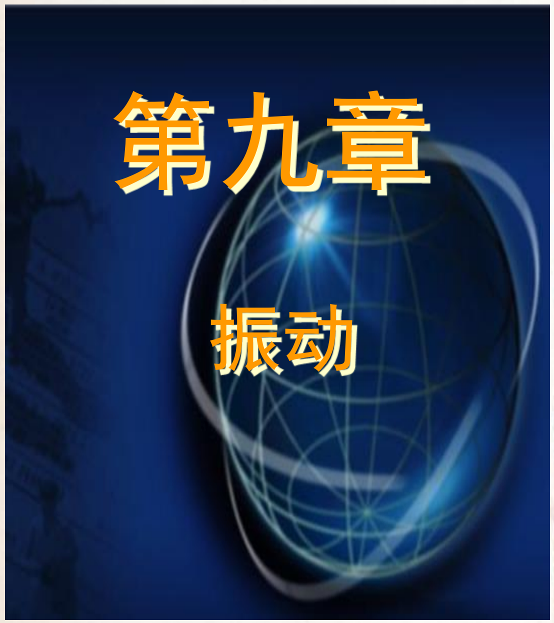
9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位



第1节《简谐运动》

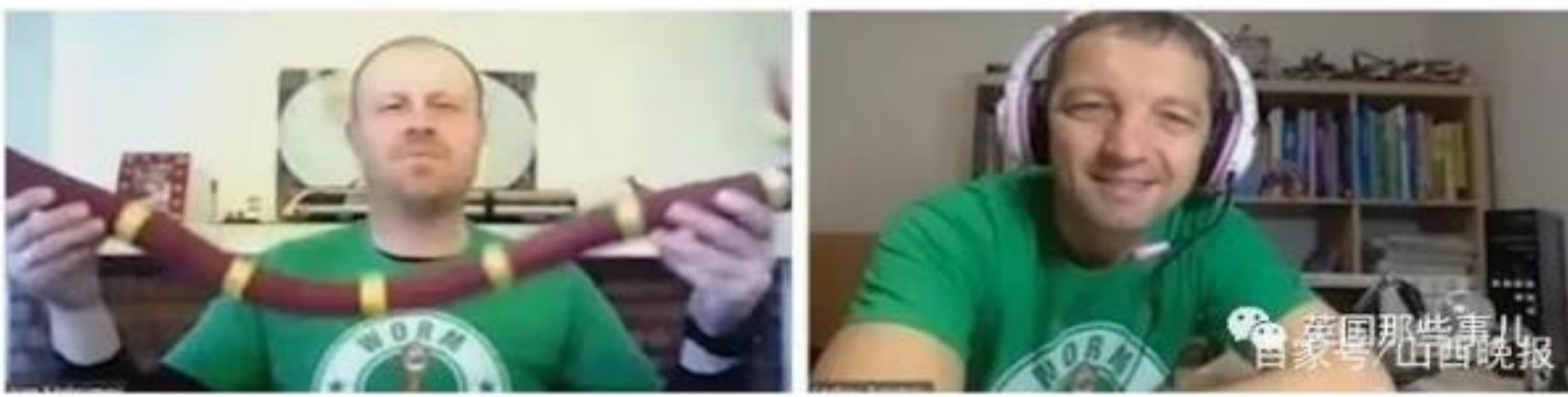
一 了解简谐振动的特征.

二 理解简谐运动的特征方程

5、物理奖：蚯蚓喝醉了也蹦迪

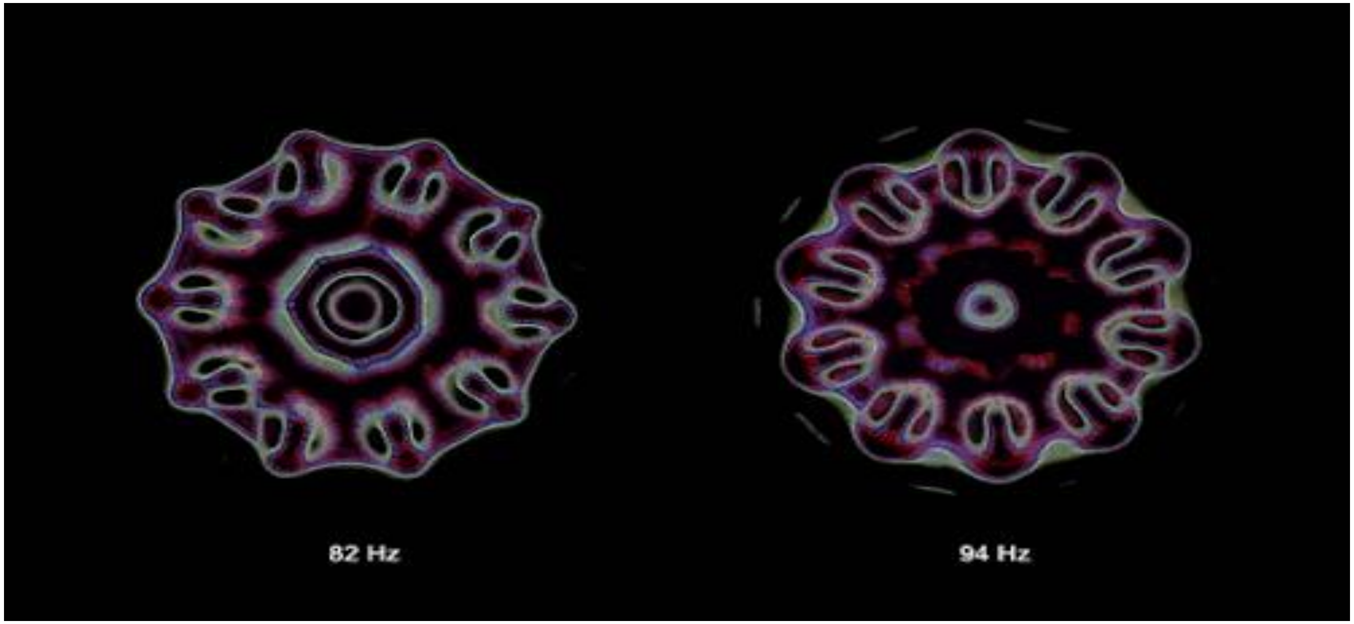
获奖的是两位澳大利亚的研究者，他们想研究蚯蚓能不能表现出法拉第波。

**for determining, experimentally,
what happens to the shape of a living earthworm
when one vibrates the earthworm**



回忆一下中学物理，液体上下振动会形成涟漪，也叫法拉第波，

9-1　简谐运动 振幅 周期和频率 相位



牛人法拉第曾在1831年首先发现，让装有液体的容器上下振动，在液体表面会形成非线性表面驻波。科学家称之为法拉第波。波托茨基以前振动液滴时发现液滴也发生像法拉第波样的振动。

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

马克西莫夫
发现了几只
验时，我们
研究啥问题
怎样”时刻
体能形成法
月份Scient

研究者觉得，动物身体中包含大量的水，那么振动时会不会产生法拉第波呢？

他们于是选择蚯蚓当实验对象，先用酒精把蚯蚓灌醉，

然后放在一个塑料盘上，让盘子振动，

结果发现，蚯蚓真的像蹦迪一样振动起来，表现出法拉第波。

他
实
想
会
身
5
因

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

今年的各奖项获得者如下：
声学(ACOUSTICS) ：鳄鱼的叫声
该奖项的获得者为斯蒂芬·雷伯（Stephan Reber）、西村健（Takeshi Nishimura）、朱迪思·詹尼斯（Judith Janisch）、马克·罗伯逊（Mark Robertson）和特库姆塞·菲奇（Tecumseh Fitch。

心理学(PSYCHOLOGY): 眉毛或成最大赢家
该奖项获得者为MacEwan大学的Miranda Giacomin和多伦多大学的Nicholas O. Rul

和平(PEACE): 巴印“默契”半夜三更门

物理学(PHYSICS)：蚯蚓的振动
获奖者如上

经济学(ECONOMICS)：接吻的经济
该奖项获得者为阿伯泰大学（Abertay University）的克里斯托弗·D·沃特金斯（Christopher D.Watkins）

管理学(MANAGEMENT): 层层转包的杀手费

昆虫学(ENTOMOLOGY): 蜘蛛非昆虫
该奖项获得者为加利福尼亚大学河滨分校的退休研究员Richard S. Vetter。

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

因为一起房产纠纷，主犯花200万雇凶杀人，杀手A接下这单生意；

但杀手A没有自己动手，他留下一100万，用另外100万把生意外包给杀手B

接下来，杀手B外包给杀手C，杀手C外包给杀手D，杀手D又外包给杀手E，

经过层层扒皮，最后杀手E的酬金只剩10万。

杀手E既惦记这笔钱，但又觉得为了10万块犯下杀人案“不值”，

所以他找到“被害人”，跟对方商量拍下了假死的照片拿去交差，

后来“被害人”报警，抓住了5位杀手，他们都拿了钱，但谁都没动手干活。

一 简谐运动

1 机械振动

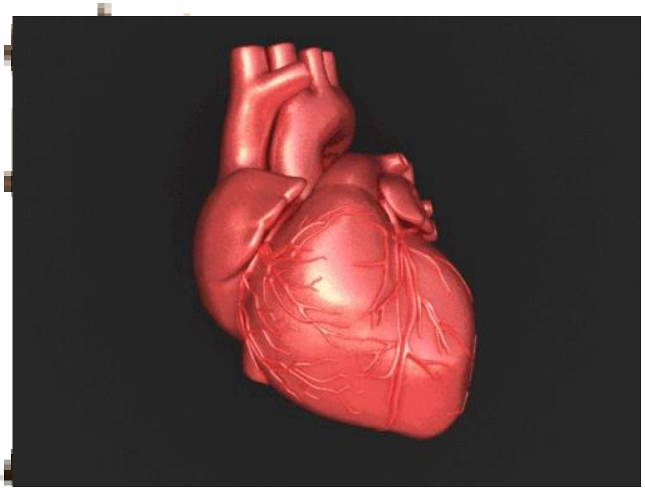
a 定义：物体或物体的某一部分在一定位置附近来回往复的运动

平衡位置

b 实例：

心脏的跳动，

钟摆，乐器， 地震等



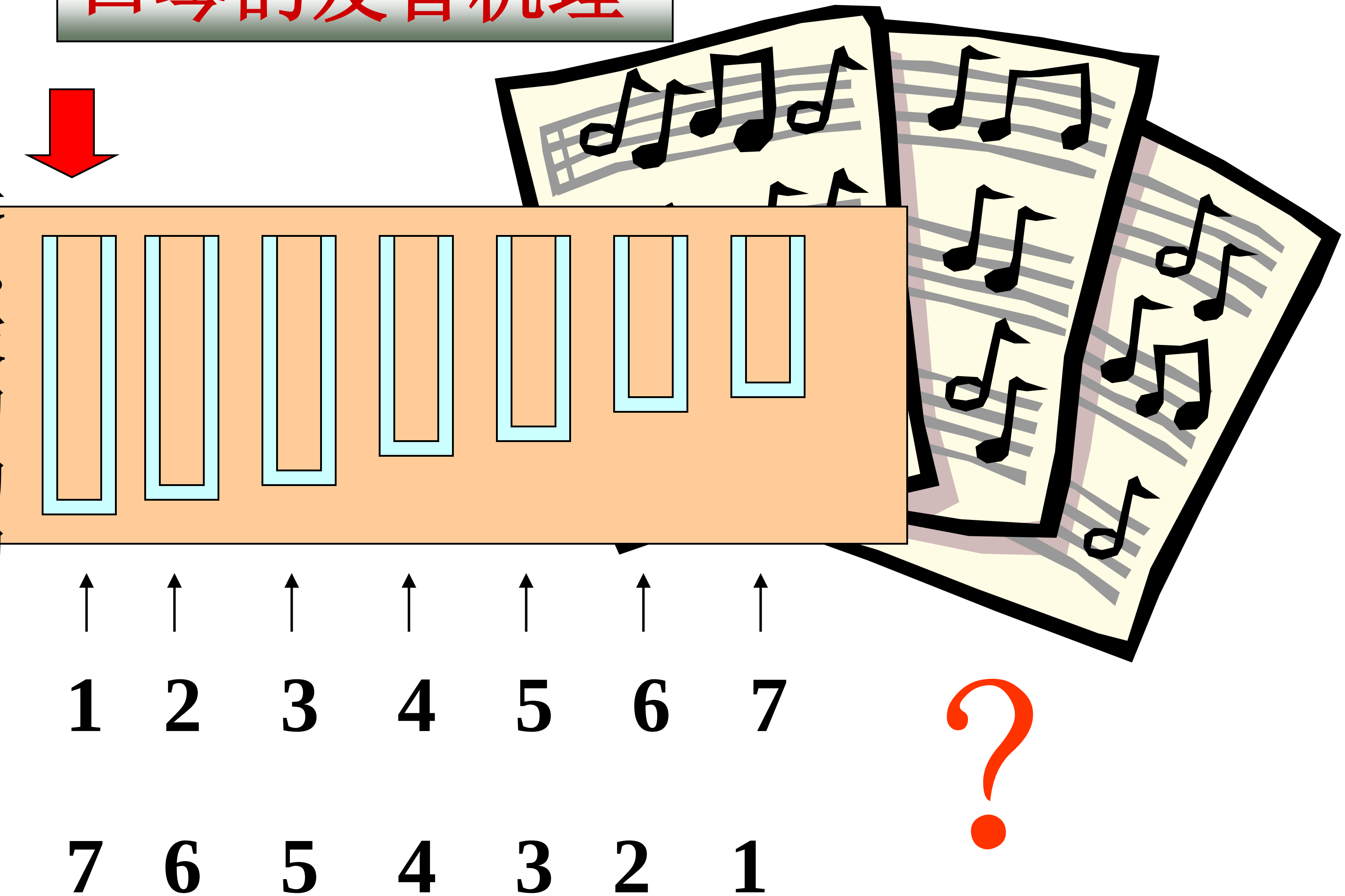
c 周期和非周期振动

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

口琴的发音机理

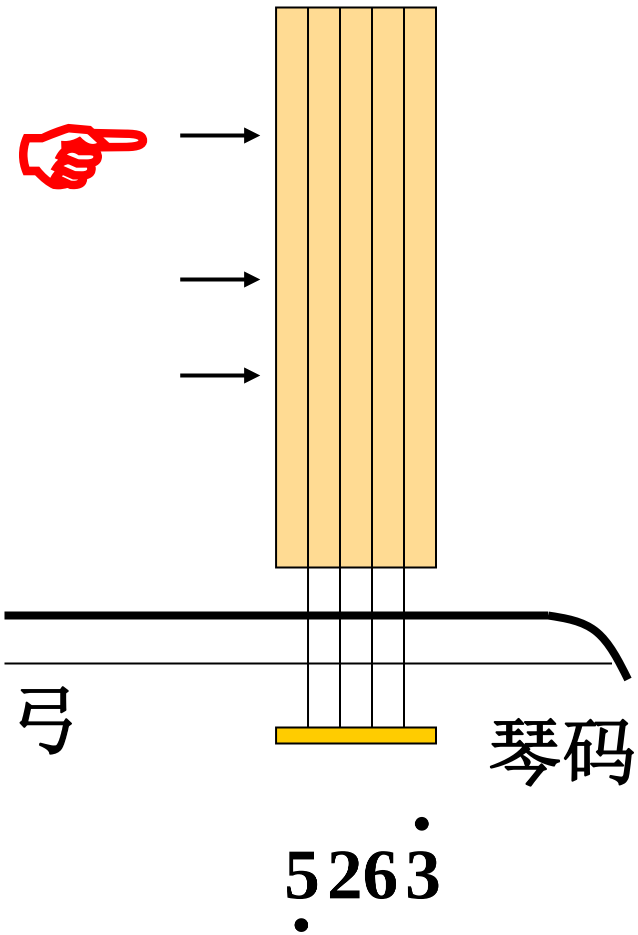
口琴发声是簧片振动以及琴格内被簧片带动的空气柱振动共同作用的结果

?



9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

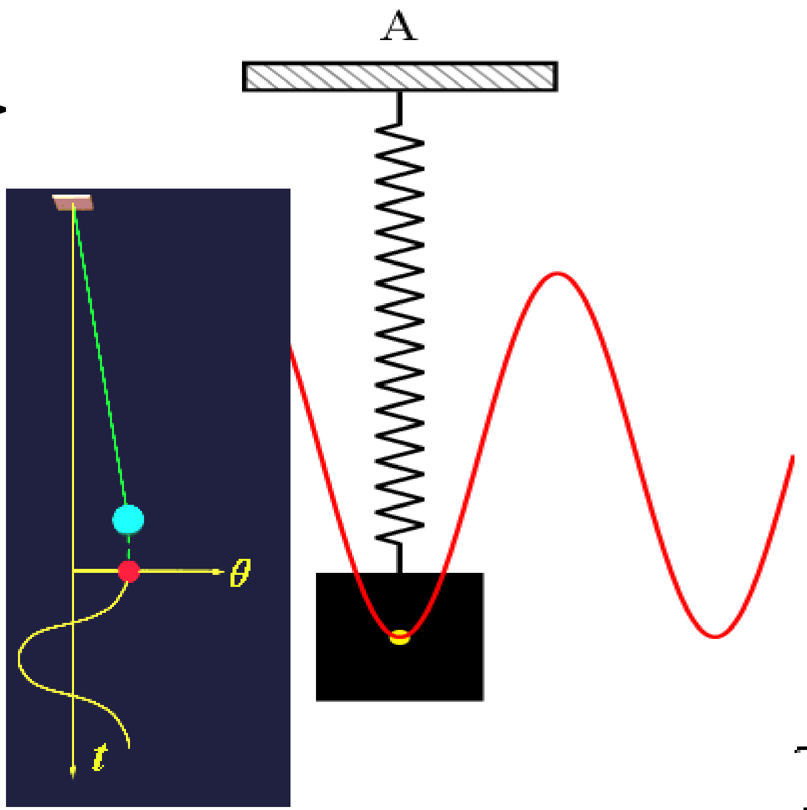
提琴弦线的振动



2 简谐振动

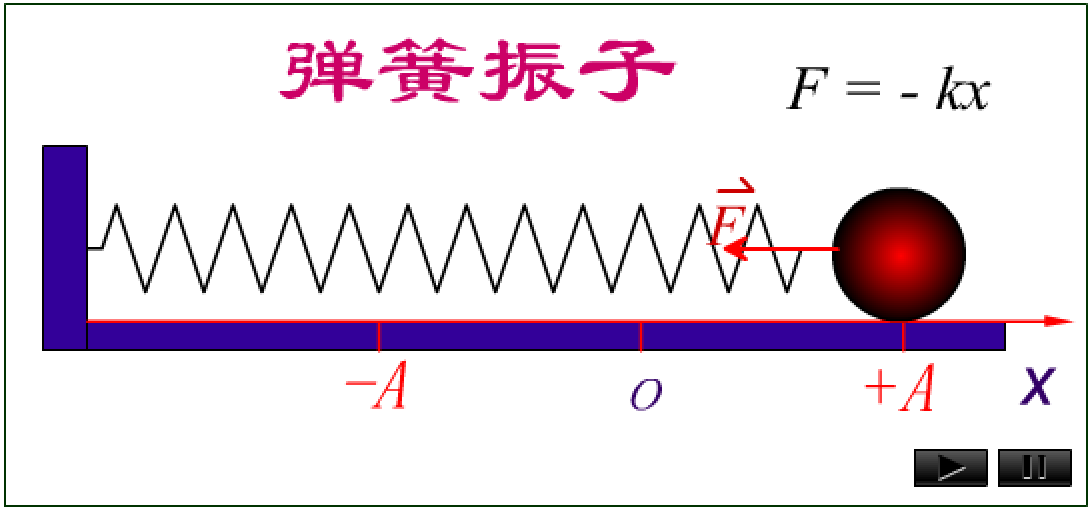
◆ **简谐运动** 最简单、最基本的振动

简谐运动 ⟷ 合成 / 分解



谐振子 作简谐运动的物体

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

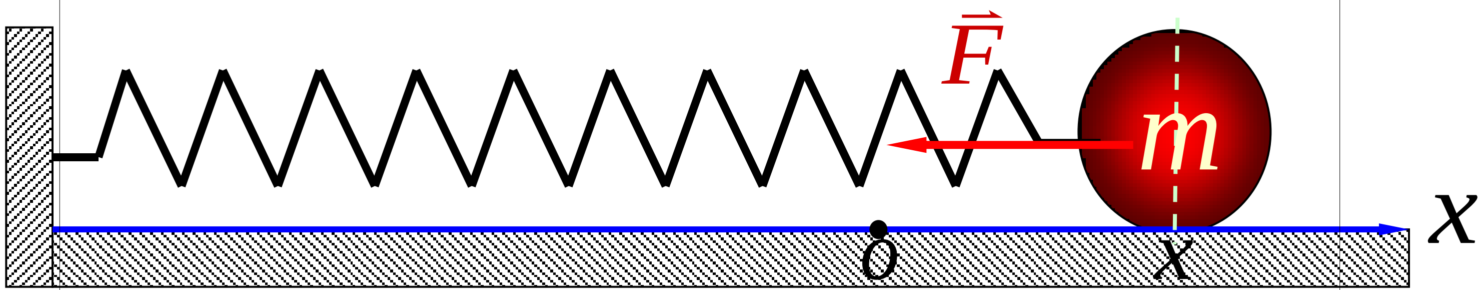


振动的成因

a 回复力

b 惯性

3 弹簧振子的运动分析



$$F=-kx=ma$$

令 $\omega^2=\dfrac{k}{m}$

得 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2 x$

即 $a=-\omega^2 x$

具有加速度 a 与位移的大小x成正比,而方向相反特征的振动称为**简谐运动**

解方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

简谐运动的微分方程

(高等数学二阶微分方程)

设初始条件为:

$t = 0$ 时，$x = x_0$ ， $v = v_0$

解得 $x = \boxed{A}\cos(\omega t + \boxed{\varphi})$ 简谐运动方程

积分常数，根据初始条件确定

由 $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ ⟵ 简谐运动方程

得 $$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

其中 $$\begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \left(\dfrac{v_0}{\omega}\right)^2} \\ \varphi = \arctan\left(-\dfrac{v_0}{\omega x_0}\right) \end{cases}$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$

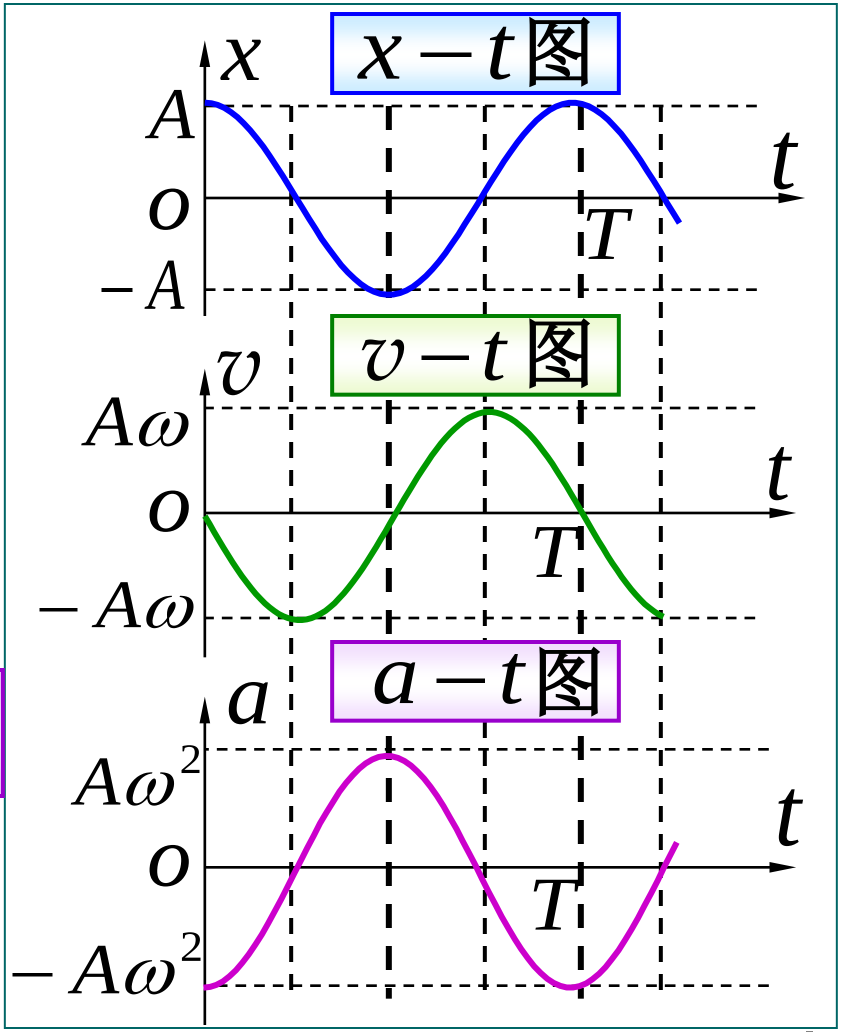
$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$ 取 $\varphi = 0$

$$\boxed{v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)}$$

$$=A\omega\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

$$\boxed{a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)}$$

$$=A\omega^2\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

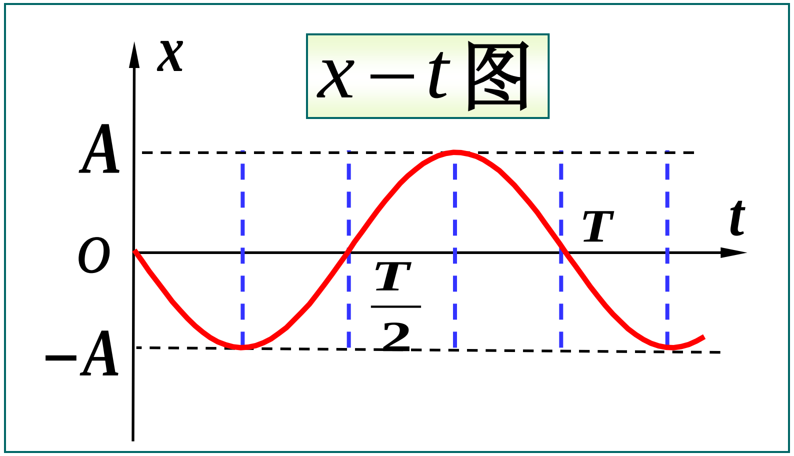


简谐运动方程(*Simple Harmonic Motion)

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \phi) = A\cos(2\pi\nu t + \phi)$$

二 振幅

$$A = |x_{\max}|$$



三 周期、频率

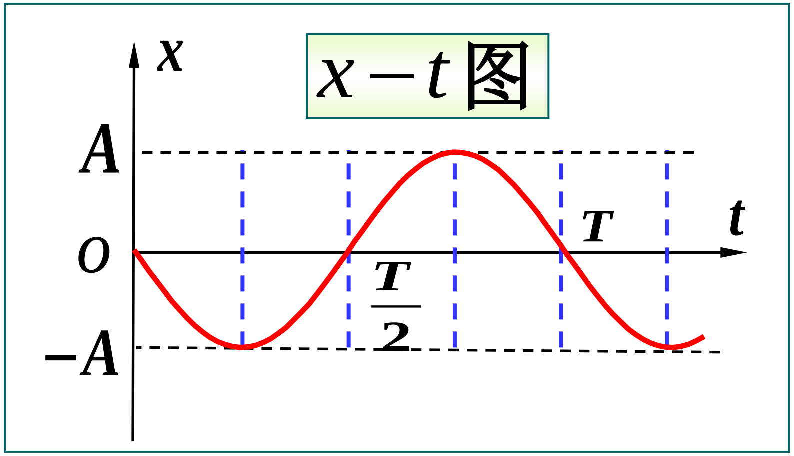
$$x = A\cos(\omega t + \phi) \qquad = A\cos[\omega(t+T)+\phi]$$

◆ 周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

注意

弹簧振子周期

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



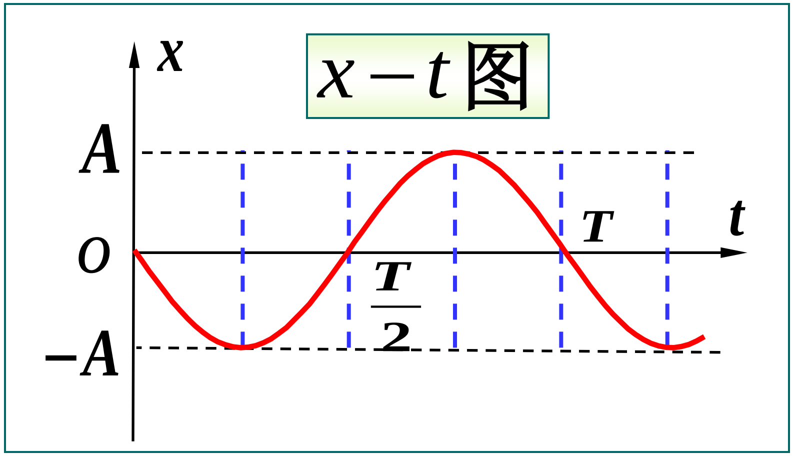
9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

$$x = A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos[\omega(t+T)+\varphi]$$

- **频率** $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

- **圆频率**

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$



周期和频率仅与振动系统本身的物理性质有关

例如，心脏的跳动80次/分

周期为 $T = \frac{1}{80}(\text{min}) = \frac{60}{80}(\text{s}) = 0.75\,\text{s}$

频率为 $\nu = 1/T = 1.33\,\text{Hz}$

动物的心跳（次/分）

大象	25~30	马	40~50
猪	60~80	兔	100
松鼠	380	鲸	8

昆虫翅膀振动的频率（Hz）

雌性蚊子	355~415
雄性蚊子	455~600
苍　　蝇	330
黄　　蜂	220

四 相位 $\boxed{\omega t+\varphi}$

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

相位 (位相) $\Phi(t)=\omega t+\varphi$

初相位 φ　$t=0$时，$\Phi(t)=\varphi$

相位的意义: 表征任意时刻（t）物体振动状态（相貌）． 物体经一周期的振动，相位改变 2π ．

五 常数 A 和 φ 的确定

$$\begin{cases} x = A\cos(\omega t + \varphi) \\ v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

初始条件 $t = 0 \quad x = x_0 \quad v = v_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{v_0^2}{\omega^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{-v_0}{\omega x_0} \end{cases}$$

对给定振动系统，周期由系统本身性质决定，振幅和初相由初始条件决定.

讨论

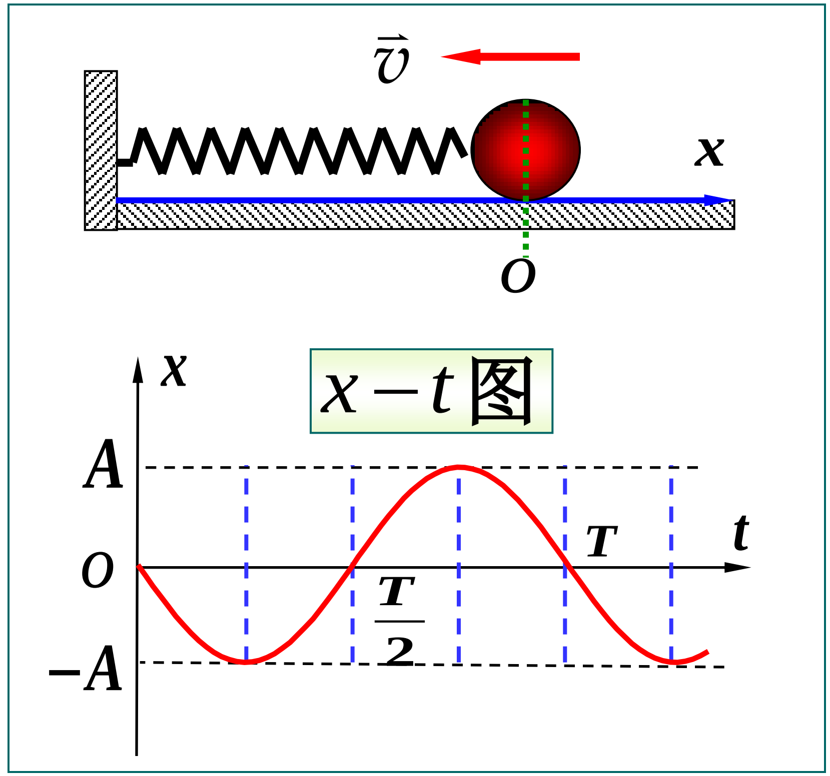
已知 $t=0, x=0, v_0<0$ 求 φ

$$0=A\cos\varphi \Rightarrow \varphi=\pm\frac{\pi}{2}$$

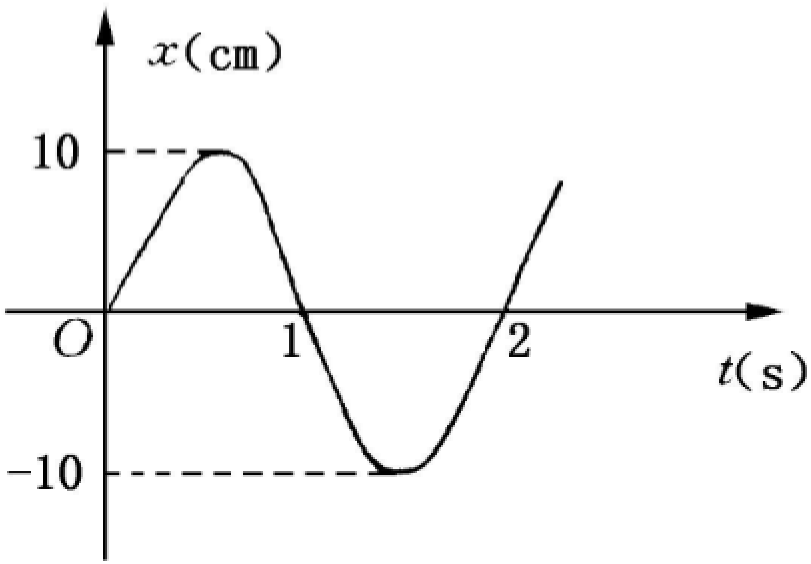
$$\because v_0=-A\omega\sin\varphi<0$$

$$\therefore \sin\varphi>0$$ 取 $$\varphi=\frac{\pi}{2}$$

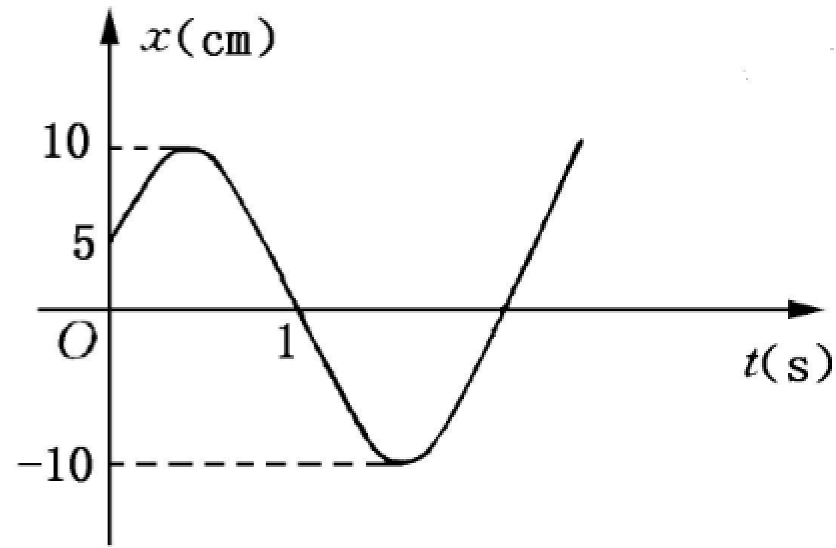
$$x=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$



求以下图像的振动方程？ $x = A\cos(\omega t + \phi)$



(a)



(b)

$$x = 0.1\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \phi\right)$$

$$T = 2, \phi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = 0.1\cos(\omega t + \phi)$$

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{3}, \phi_1 = \frac{\pi}{2},$$

Expression Methods of SHM

1. Analytical method

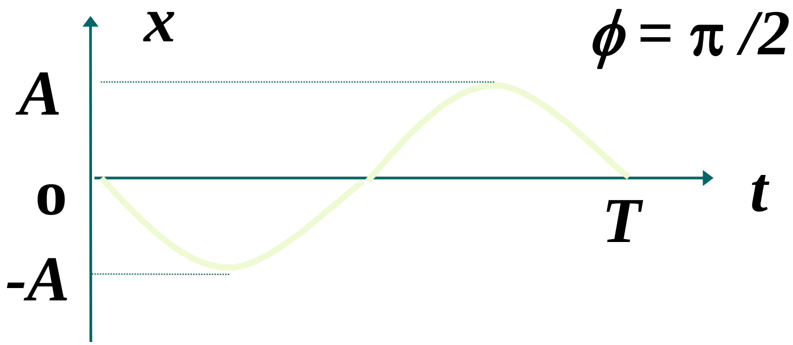
$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

from

Given expression $\Rightarrow$ A、T、ϕ

Given A、T、$\phi \Rightarrow$ **expression**

2. Curve method



Given curve $\Rightarrow$ A、T、ϕ

Given A、T、$\phi \Rightarrow$ **curve**

Example:

A particle is in SHM along x axis, A=0.12m, T=2s. When t = 0, x_o= 0.06m, and $\upsilon > 0$ (moves along positive x direction). Try to find out: (1) The expression of this SHM; (2) $t = T/4$, x=? υ =? and a=? (3) At what time will the particle pass the "O" first time?

Answer:

(1) $x = 0.12\cos(\pi t - \pi/3)$ (m)

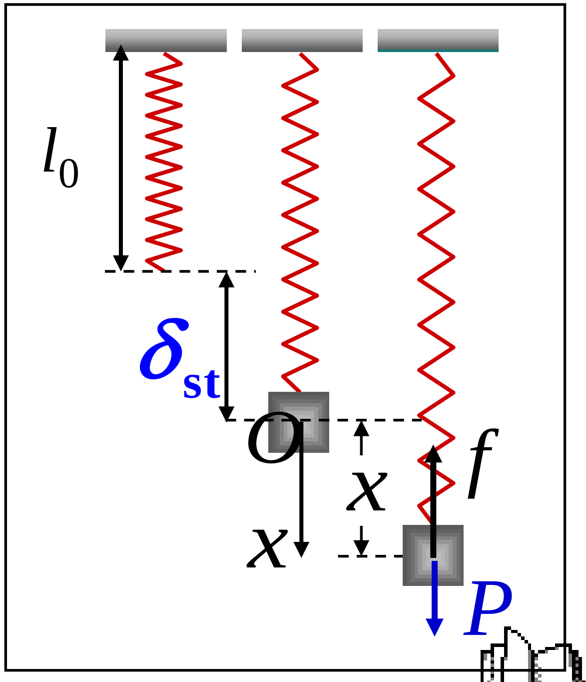
(2) $\upsilon = -0.12\pi \sin(\pi t - \pi/3) = -0.188$ m/s

$a = -0.12\pi^2 \cos(\pi t - \pi/3) = -1.03$ m/s^2

(3) $$t = \frac{5\pi/6}{\omega} = 0.83\ s$$

例 一劲度系数为 k 的轻质弹簧，上端固定，下端悬挂一质量为m的物体M。平衡是，弹簧将伸长一段距离 δ_{st}，称为静止变形，见图。如果再用手拉物体，然后无初速地释放。

试写出物体M的运动微分方程，并确定它的运动规律。



解 以物体 M 为研究对象，它共受重力 P 和弹性回复力 f 两个力的作用。

当物体处于平衡位置时

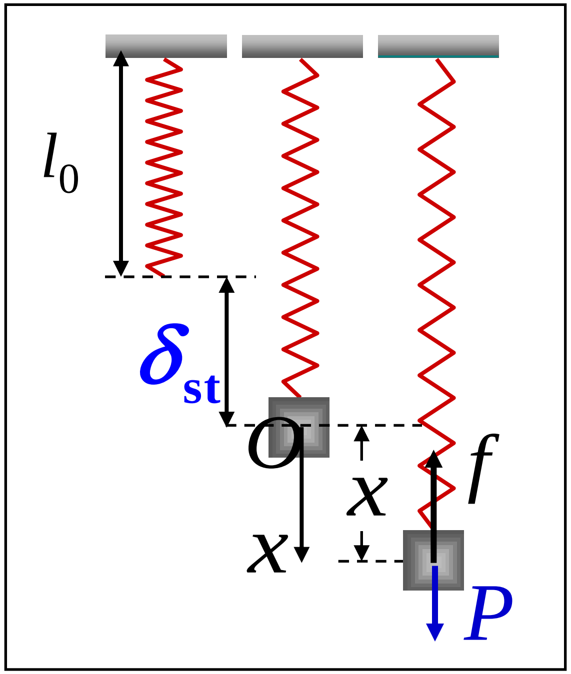
$$mg - k\delta_{st} = 0$$

$$\therefore \quad \delta_{st} = mg / k$$

在运动过程中，物体所受的合力F_R为

$$F_R = mg - k(\delta_{st} + x)$$

$$= -kx$$



根据牛顿第二定律，得

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=F_\mathrm{R}=-kx \qquad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{k}{m}x$$

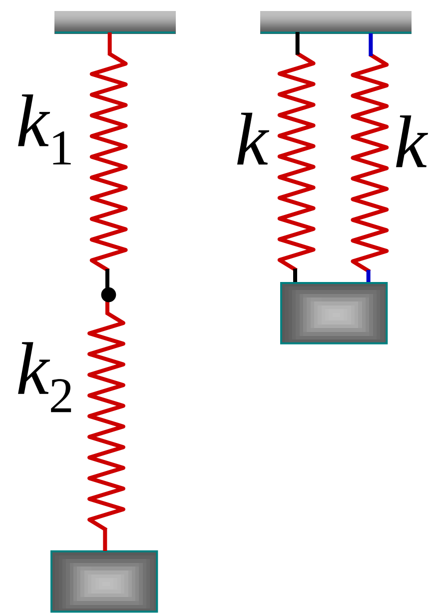
令 $\omega^2=k/m=g/\delta_\mathrm{st}$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$ 简谐振动

$$T=2\pi\sqrt{\delta_\mathrm{st}/g} \qquad \nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{g/\delta_\mathrm{st}}$$

例 一重为P的物体用两根弹簧竖直悬挂，各弹簧的劲度系数标明在图上,求图示两种情况下，系统沿竖直方向振动的固有频率。

解 对两弹簧串联情况，弹簧的静止形变为



$$\delta_{st} = \frac{P}{k_1} + \frac{P}{k_2} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} P$$

即弹簧串联的等效劲度系数为

$$k_1 k_2 /(k_1 + k_2)$$

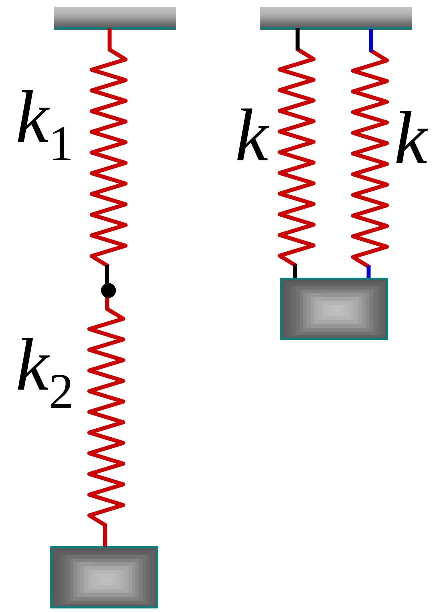
所以，系统的固有频率为

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{gk_1k_2}{P(k_1+k_2)}}$$

同理，对两弹簧并联情况

$$\delta_{st} = P/2k$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2gk}{P}}$$



例单摆的运动分析。

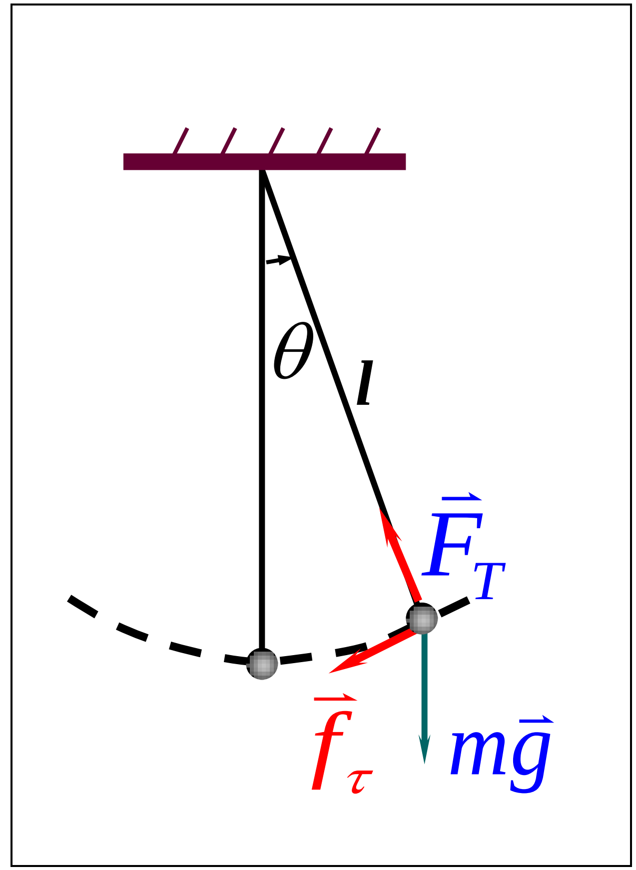
取逆时针方向为角位移θ的正向，重力的切向力

$$f_\tau = -mg\sin\theta$$

在θ很小时， $\sin\theta \approx \theta$

故 $$f_\tau = -mg\theta$$

摆球的切向加速度 $a_\tau = l\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$



由牛顿第二定律，得 $ml\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}=-mg\theta$

或 $$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\theta=0$$

与弹簧振子的微分方程比较

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x=0$$

在角位移θ很小时，单摆的振动是简谐运动。

9-1 简谐运动 振幅 周期和频率 相位

角频率 $$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

周期 $$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

频率 $$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$