一　简谐运动的描述和特征

1 物体受线性回复力作用 $F=-kx$ 平衡位置 $x=0$

2 简谐运动的动力学描述 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2x$

3 简谐运动的运动学描述 $x=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$v=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)$$

4 加速度与位移成正比而方向相反 $\boxed{a=-\omega^2x}$

5 三个特征量：振幅 A　决定于振动的能量；

角频率 ω　决定于振动系统的性质；

初相 φ　决定于起始时刻的选择.

实例： 弹簧振子 $\omega=\sqrt{k/m}$ 单摆 $\omega=\sqrt{g/l}$

二 相位 $\boxed{\omega t+\varphi}$

1 $\omega t+\varphi \rightarrow (x,v)$ 存在一一对应的关系；

2 相位在 $0\sim 2\pi$ 内变化，质点无相同的运动状态；

相差 $2n\pi$ (n为整数)质点运动状态全同.（周期性）

3 初相位 $\varphi\ (t=0)$ 描述质点初始时刻的运动状态.

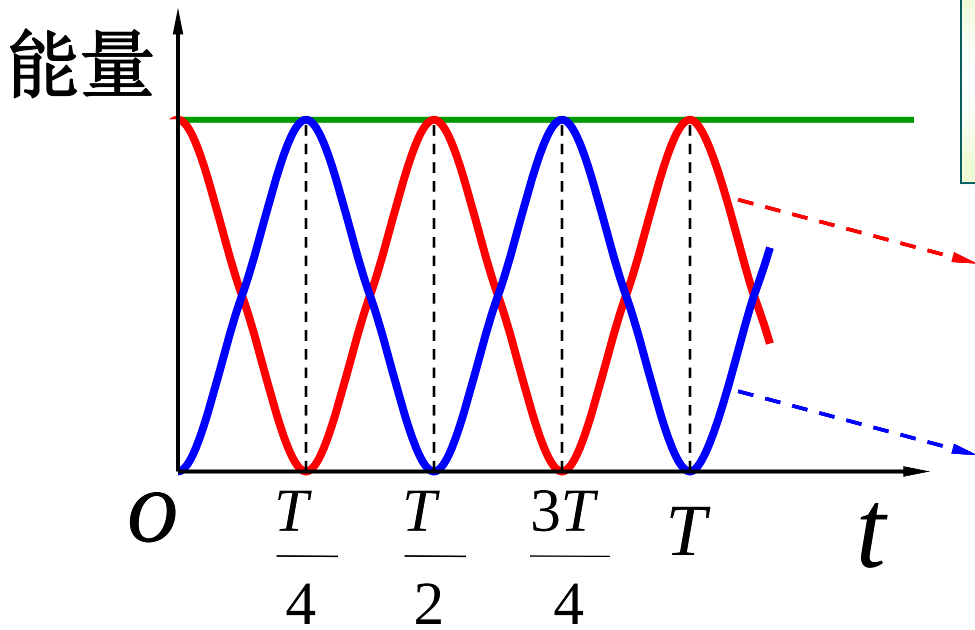
（φ 取 $[-\pi\rightarrow\pi]$ 或 $[0\rightarrow 2\pi]$）

4 对于两个同频率简谐运动相位差 $\boxed{\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1}$

三 简谐运动旋转矢量表示法

方法简单、直观，用于判断简谐运动的初相及相位，分析振动的合成问题.

四　简谐运动能量图



$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2\cos^2\omega t$$

$$E_k = \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2\omega t$$

五　两个同方向同频率简谐运动的合成

1　两个同方向同频率简谐运动合成后仍为简谐运动

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

$$\Delta\varphi=\begin{cases}2k\pi & A=A_1+A_2 \\ (2k+1)\pi & A=|A_1-A_2|\end{cases}$$

加强

减弱

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

2　两个同方向不同频率简谐运动合成

频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

$$\boxed{\nu=\nu_2-\nu_1}$$

拍频（振幅变化的频率）

3　相互垂直的两个频率简谐运动，合运动轨迹一般为椭圆，其具体形状等决定于两分振动的相差和振幅.

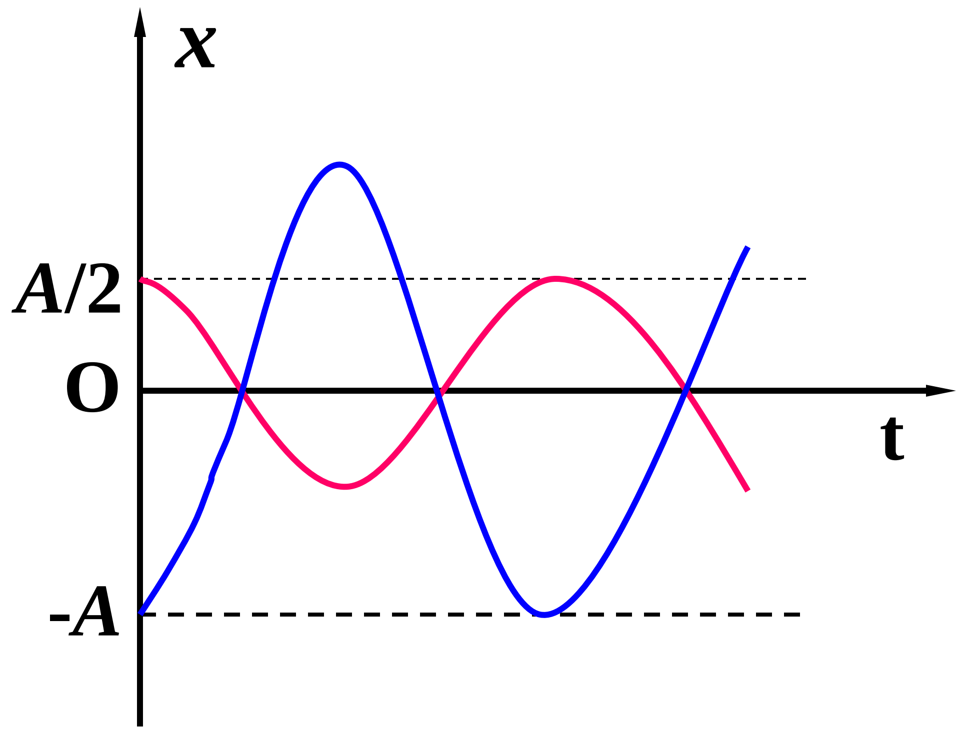
例 图中所画的是两个简谐振动的振动曲线. 若这两个简谐振动可叠加，则合成的余弦振动的初相为

（1） $3\pi/2$

（2） π

（3） $\pi/2$

（4） 0



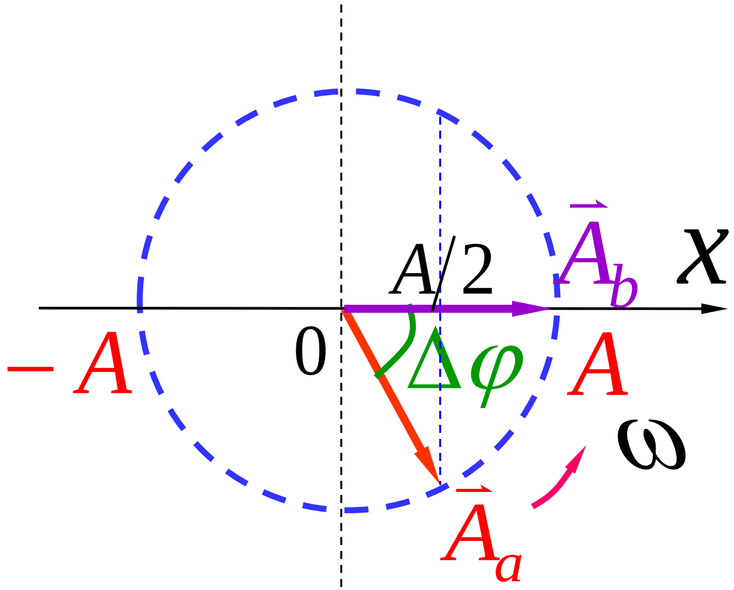
例 一质点作谐振动，周期为T，当它由平衡位置向 x 轴正方向运动时，从二分之一最大位移处到最大位移处这段路程所需要的时间为

（1）$T/4$　　（2）$T/12$

★（3）$T/6$　　（4）$T/8$

$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi}=\frac{\pi/3}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}$$

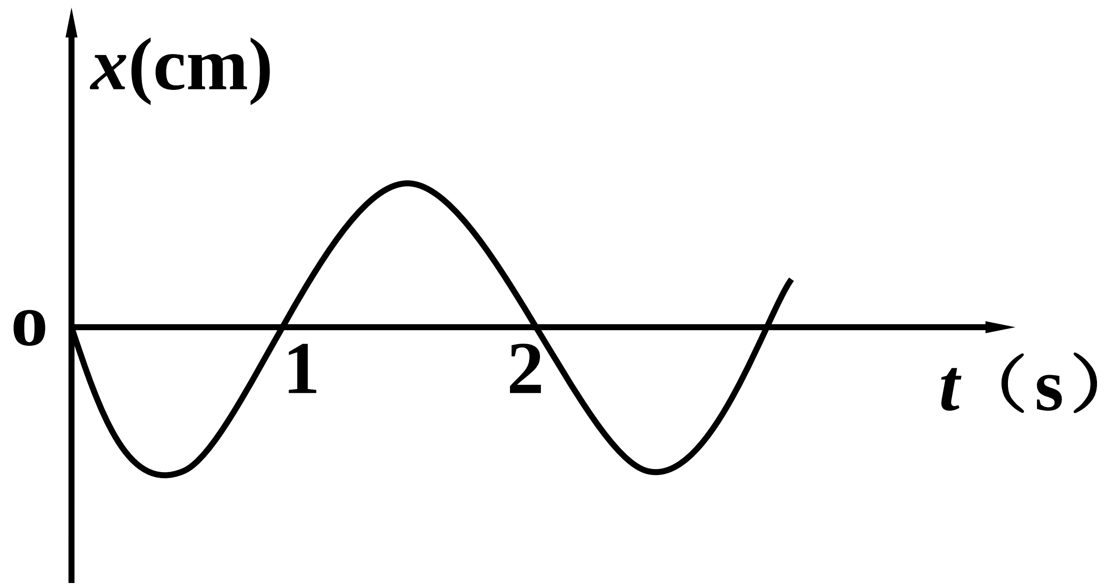
$$\Delta t=T/6$$



例 已知一谐振动曲线如图所示，由图确定：

（1）在 $k+1/2$ s时速度为零　（2）在 k s时动能最大

（3）在 $2k+1/2$ s时加速度取正的最大值



例 已知两个同方向的简谐振动：

$$x_1 = 0.04\cos(10t + \pi/3),$$

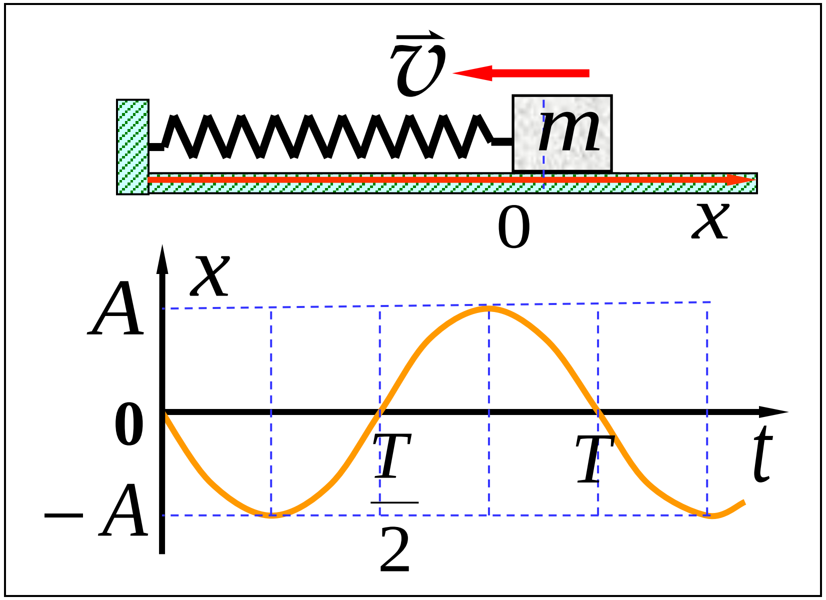
$$x_2 = 0.03\cos(10t + \varphi)$$

则（**1**） $x_1 + x_2$ 为最大时，φ 为 $\underline{\;2k\pi + \pi/3\;}$

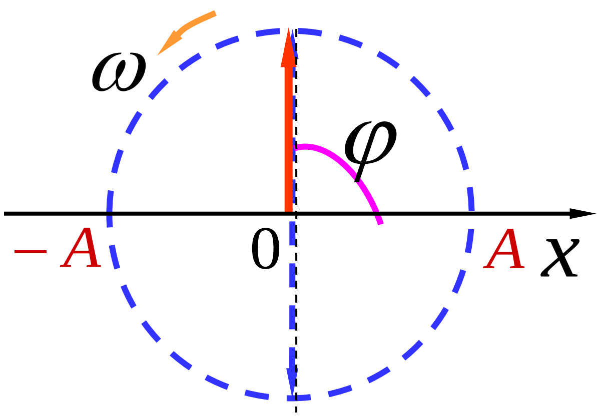
（**2**） $x_1 + x_2$ 为最小时，φ 为 $\underline{\;2k\pi + 4\pi/3\;}$

例 用旋转矢量法求初相位

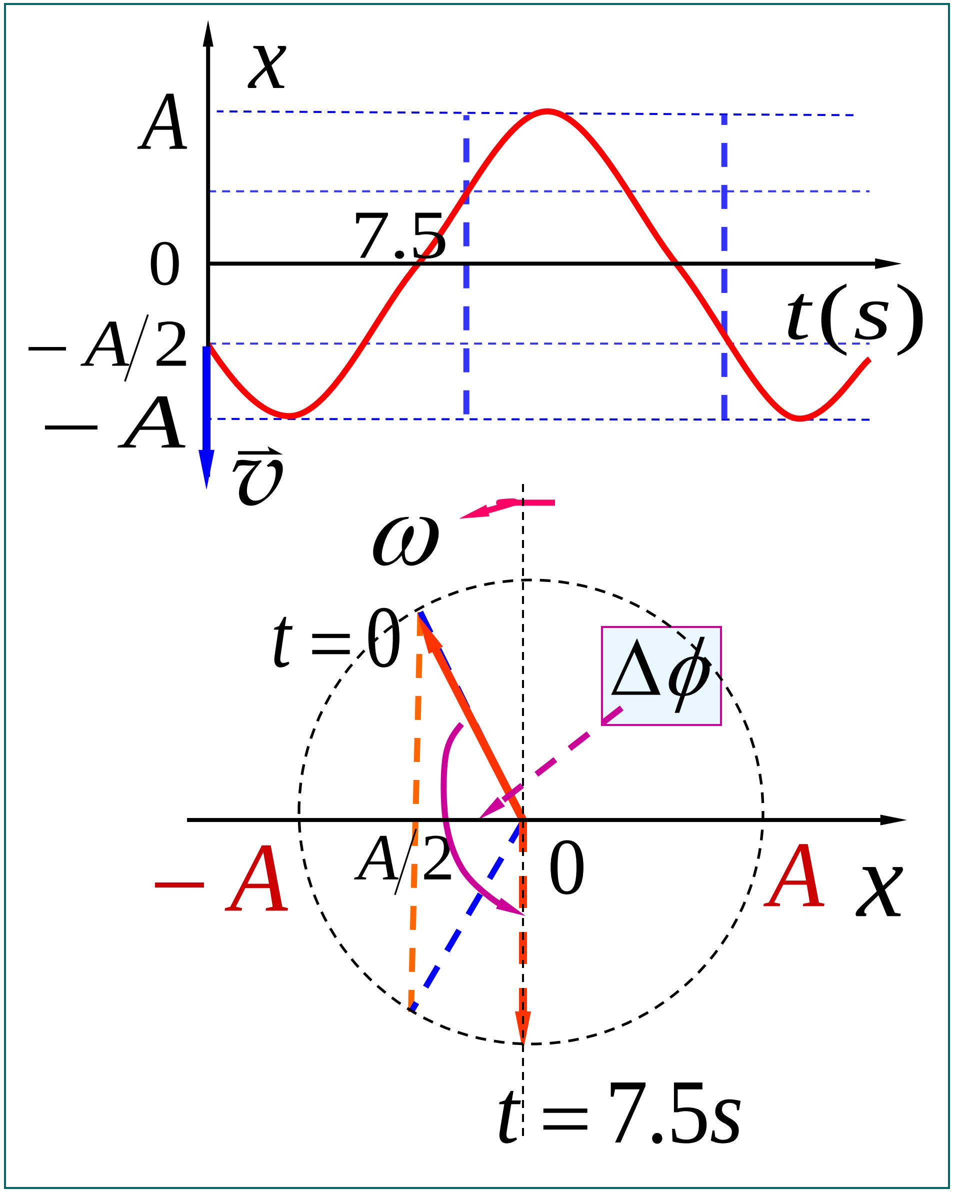
$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



$$t = 0 \quad x = 0 \quad v < 0$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$



例 一简谐运动的运动曲线如图所示，**求**振动周期．

$$t=0 \quad x=-\frac{A}{2} \quad v<0$$

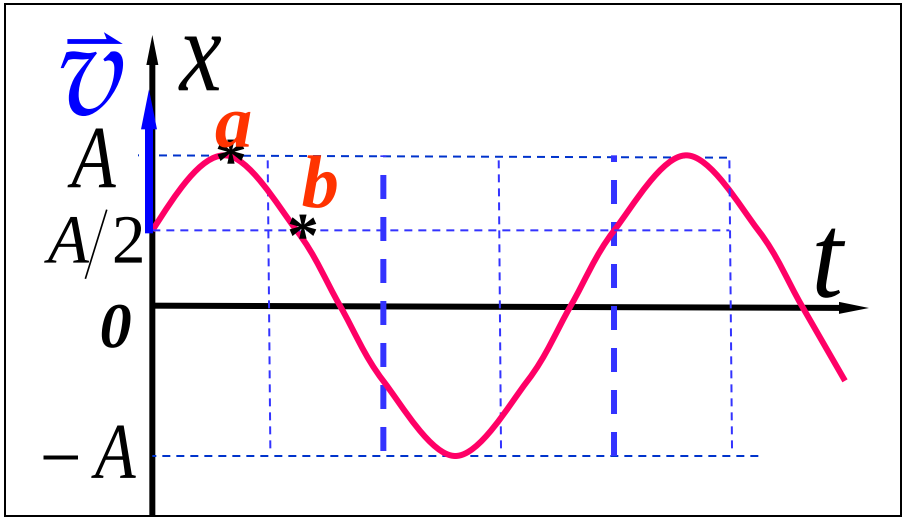
$$t=7.5\mathrm{s} \quad x=0 \quad v>0$$

$$\Delta\phi=5\pi/6$$

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi}=\frac{\Delta t}{T}=\frac{7.5}{T}$$

$$T=18\mathrm{s}$$

例 已知谐振动的 A、T，求 1）如图简谐运动方程， 2）到达 a、b 点运动状态的时间．



解法一

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

从图上可知

$$t = 0, x = \frac{A}{2}, v > 0$$

$$\frac{A}{2} = A\cos\varphi$$

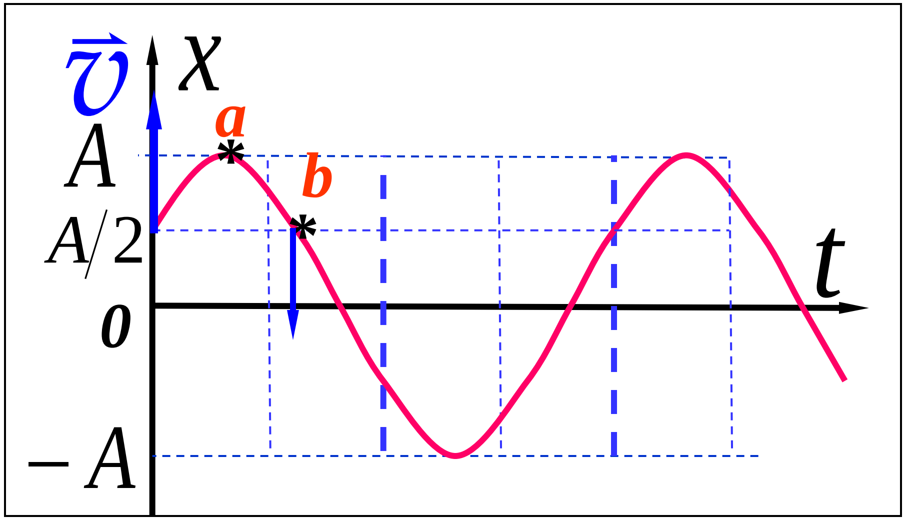
$$\cos\varphi = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \pm\frac{\pi}{3} \text{ 或 } (\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3})$$

$$\because v_0 > 0, \sin\varphi < 0$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{3} \text{ 或 } \frac{5\pi}{3}$$

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$



$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$A = A\cos(\omega t_a - \pi/3)$$

$$\omega t_a - \frac{\pi}{3} = 0, 2\pi, 4\pi \cdots$$

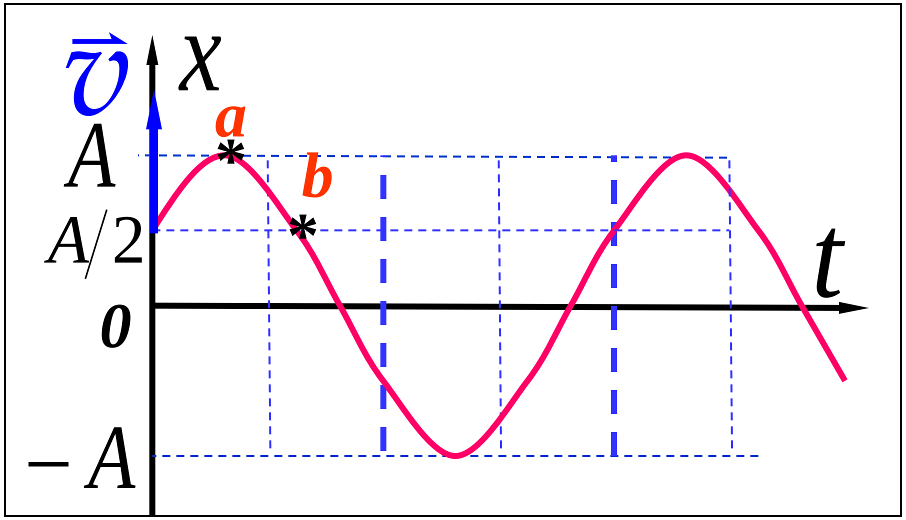
$$\because (\omega t_a - \frac{\pi}{3}) - \varphi < 2\pi$$

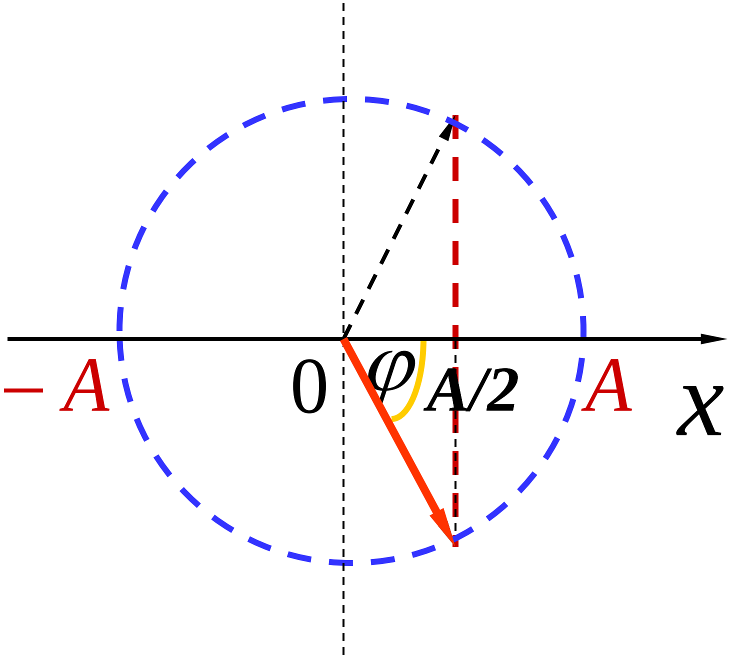
$$\frac{A}{2} = A\cos(\omega t_b - \pi/3)$$

$$\omega t_b - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3} \cdots$$

$$\therefore \frac{2\pi}{T} t_a - \frac{\pi}{3} = 0 \qquad \boxed{t_a = \frac{T}{6}}$$

$$\because (\omega t_b - \frac{\pi}{3}) - \varphi < 2\pi \quad \therefore \frac{2\pi}{T} t_b - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \qquad \boxed{t_b = T/3}$$





解法二

用旋转矢量法求初相位

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

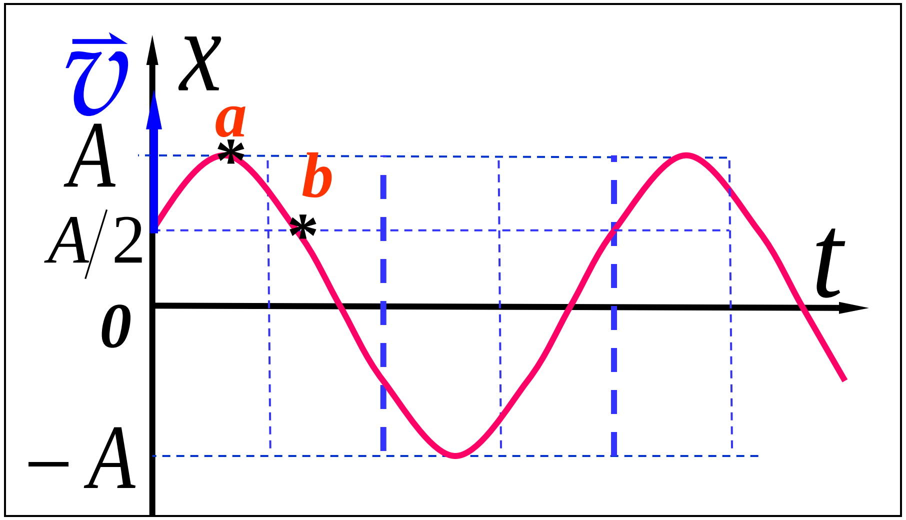
$$t = 0, x = \frac{A}{2}, v > 0$$

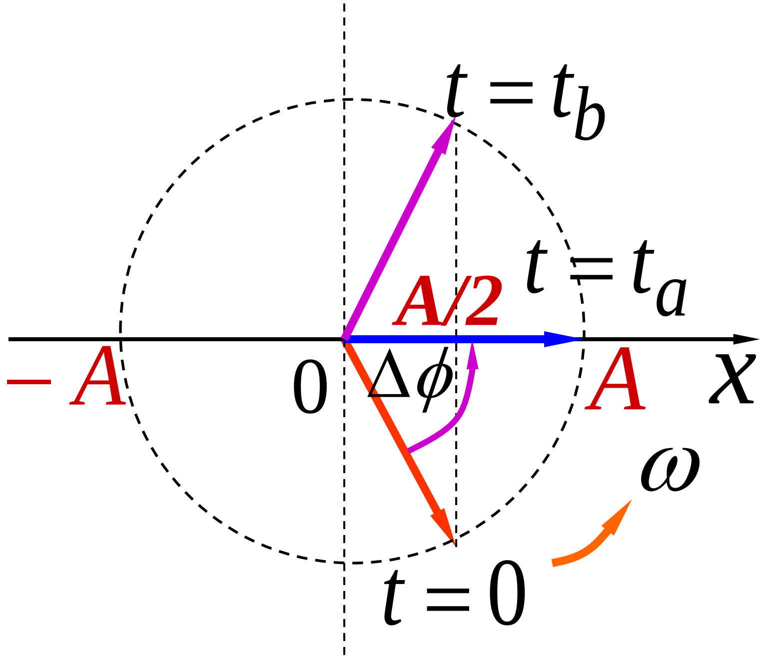
矢量位于x轴下方时 $v > 0$

$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

机械振动习题课选讲例题





$$x = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{3})$$

$$\Delta\phi = 0-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{3}-(-\frac{\pi}{3}) = \frac{2\pi}{3}$$

$$t_a = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = \frac{T}{6}$$

$$t_b = \frac{\Delta\phi}{2\pi}T = \frac{T}{3}$$

例 求两个同方向同频率的简谐振动的合振幅

$$x_1 = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(\omega t - \pi/6)$$

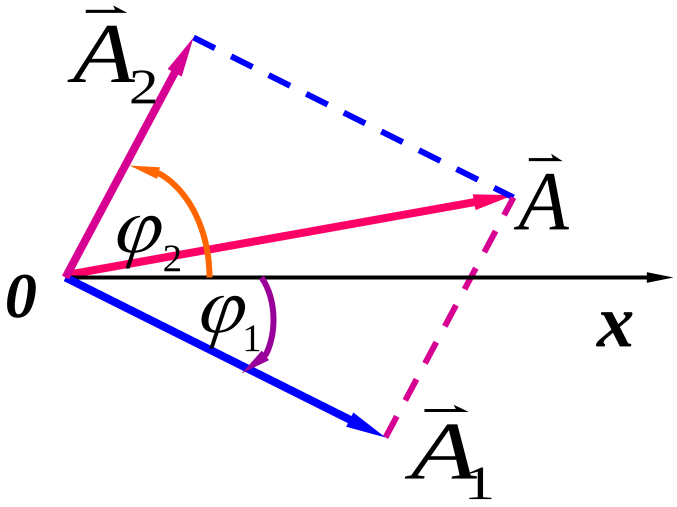
$$x_2 = (4\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(\omega t + \pi/3)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{3} - (-\frac{\pi}{6}) = \frac{\pi}{2}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

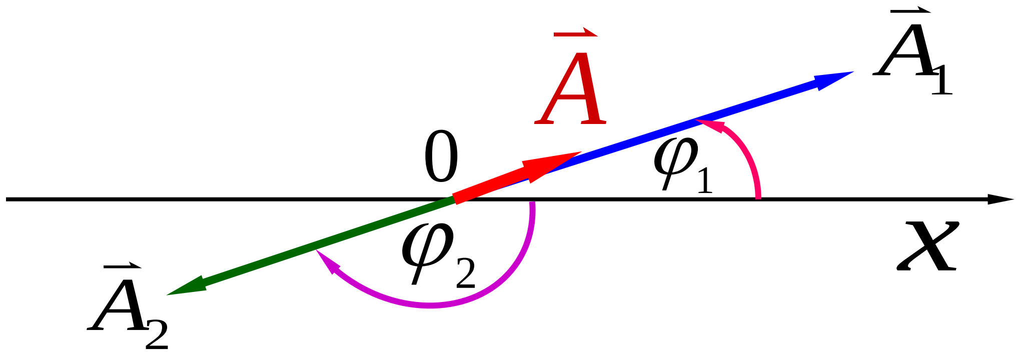
$$= 5\times10^{-2}\,\mathrm{m}$$



例 一质点同时参与两个在同一直线上的简谐振动，求合振动的振幅和初相位。

$$x_1 = (4\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$

$$x_2 = (3\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t - 5\pi/6)$$

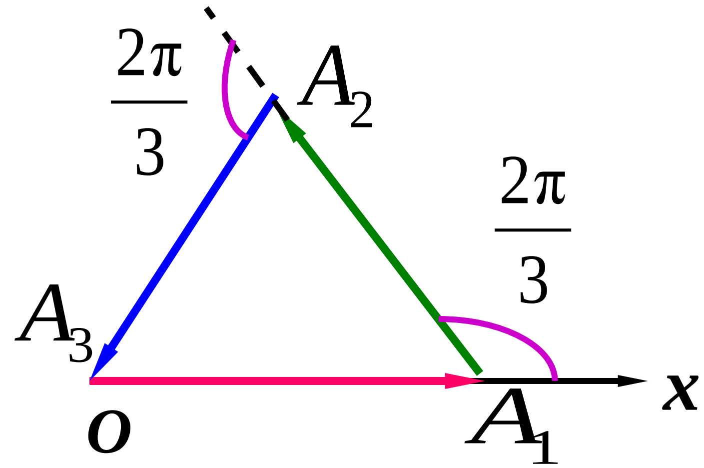


$$\Delta\varphi = \pi \qquad A = 1\times 10^{-2}\,\mathrm{m} \qquad \varphi = \varphi_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$x = (1\times 10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(2\mathrm{s}^{-1}t + \pi/6)$$

例 已知如下的三个简谐振动，求合振动.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos \omega t \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{2\pi}{3}) \\ x_3 = A_3 \cos(\omega t + \dfrac{4\pi}{3}) \end{cases}$$



已知 $A_1 = A_2 = A_3$

$\Delta\varphi = \dfrac{2\pi}{3}$ $N = 3$

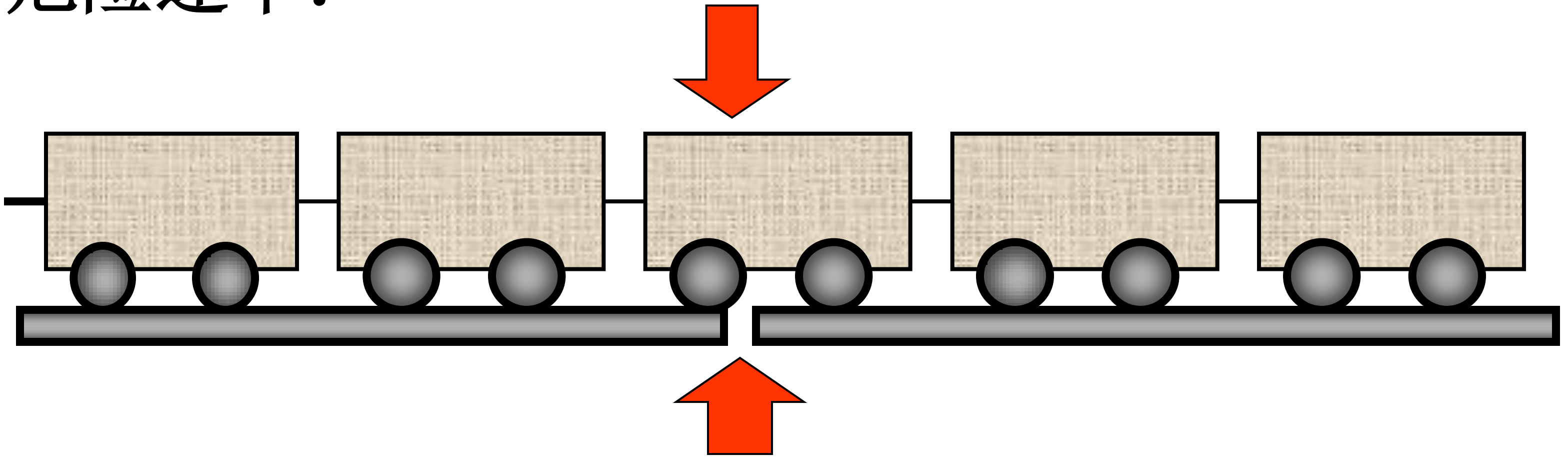
求： $x_1 + x_2 + x_3$

$N\Delta\varphi = 2\pi$ $A = 0$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

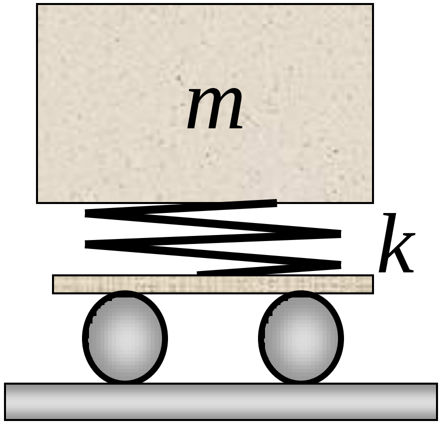
火车的危险速率与轨长

例 车轮行驶到两铁轨接缝处时，受到一次撞击，使车厢受迫振动． 当车速达某一速率时（使撞击频率与车厢固有频率相同）发生激烈颠簸，这一速率即为危险速率．设车厢总负荷为 $m = 5.5 \times 10^4\ \mathrm{kg}$，车厢弹簧每受力 $F = 9.8 \times 10^3\ \mathrm{N}$ 被压缩 $\Delta x = 0.8\ \mathrm{mm}$，铁轨长 $L = 12.6\ \mathrm{m}$，**求** 危险速率．



已知：$m = 5.5\times10^4\,\mathrm{kg}$；受力 $F = 9.8\times 10^3\,\mathrm{N}$，

压缩 $\Delta x = 0.8\ \mathrm{mm}$；铁轨长 $L = 12.6\ \mathrm{m}$，



解：$F = k\Delta x \Rightarrow k = \dfrac{F}{\Delta x}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m\Delta x}{F}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{55\times10^3\times0.8\times10^{-3}}{9.8\times10^3}}\mathrm{s} = 0.42\ \mathrm{s}$$

$$v = \frac{L}{T} = \frac{12.6}{0.42} = 30.0(\mathrm{m\cdot s^{-1}}) = 108\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$$

➢ 长轨有利于高速行车，无缝轨能避免受迫振动.