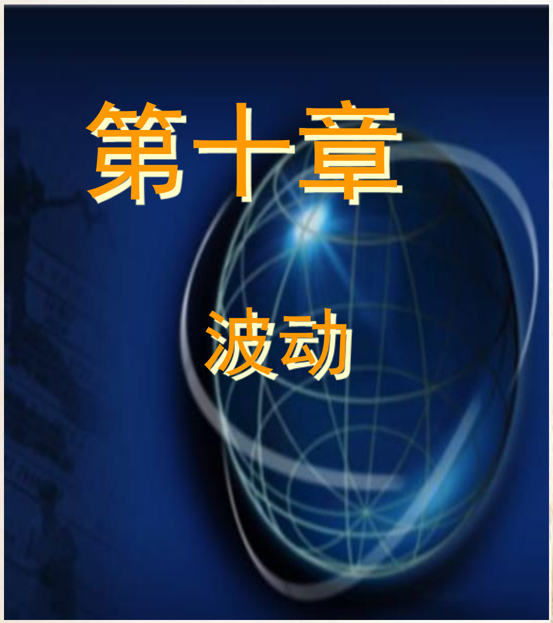
10-2 平面简谐波的波函数



第2节《平面简谐波的波函数》

一　理解机械波产生的条件.

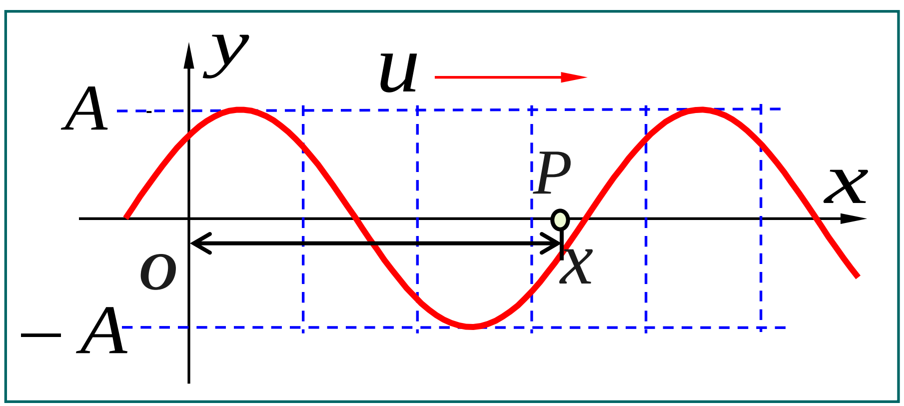
二　掌握由已知质点的简谐运动方程得出平面简谐波的波函数的方法.

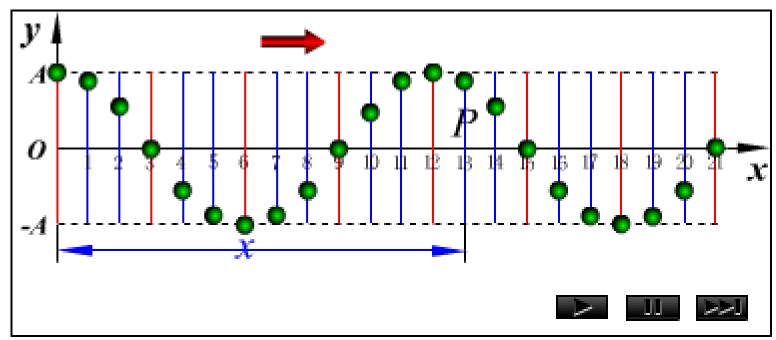
三　理解波函数的物理意义.

一　平面简谐波的波函数

设有一平面简谐波沿x轴正方向传播，波速为u，坐标原点o处质点的振动方程为

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$



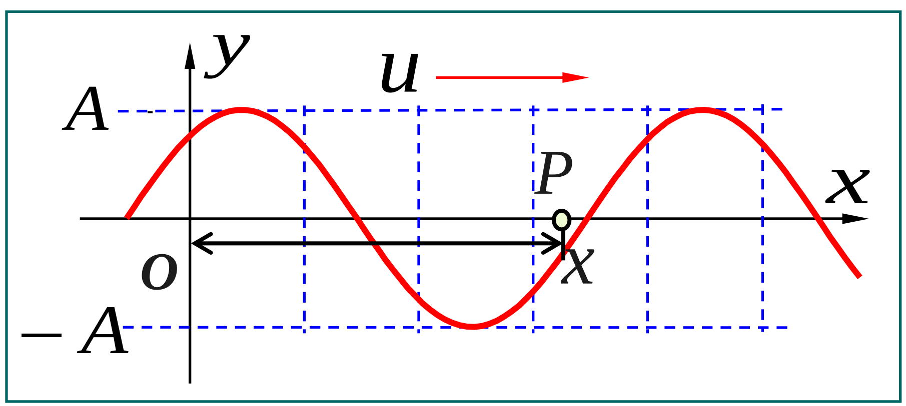


10-2 平面简谐波的波函数

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

y_O表示质点O在t时刻离开平衡位置的距离.

考察波线上P点(坐标x), P点比O点的振动落后$\Delta t = \dfrac{x}{u}$, P点在t时刻的位移是O点在$t-\Delta t$时刻的位移，由此得



10-2 平面简谐波的波函数

$$y_P = y_O(t-\Delta t) = A\cos\left[\omega\left(t-\Delta t\right)+\varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$$

由于P为波传播方向上任一点，因此上述方程能描述波传播方向上任一点的振动，具有一般意义，即为沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数，又称波动方程.

10-2 平面简谐波的波函数

利用 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ 和 $\lambda = uT$

可得波动方程的几种不同形式：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right]$$

波函数

$$y = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

质点的振动速度，加速度

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A\sin[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

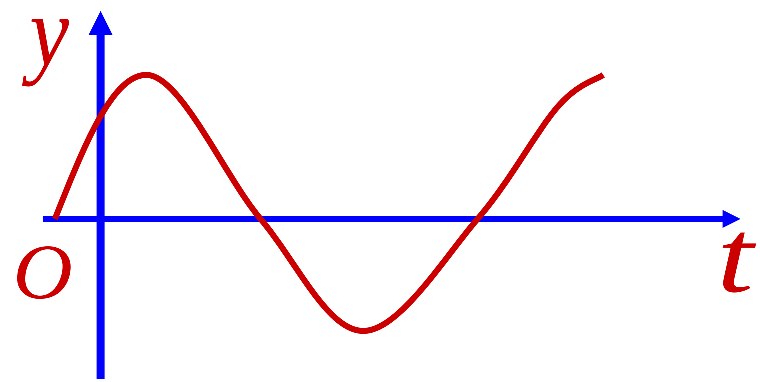
$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$$

二　波函数的物理含义

1　x一定，t变化　$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi\right)$

令 $\varphi'=-\frac{2\pi}{\lambda}x+\varphi$

则　$y=A\cos(\omega t+\varphi')$

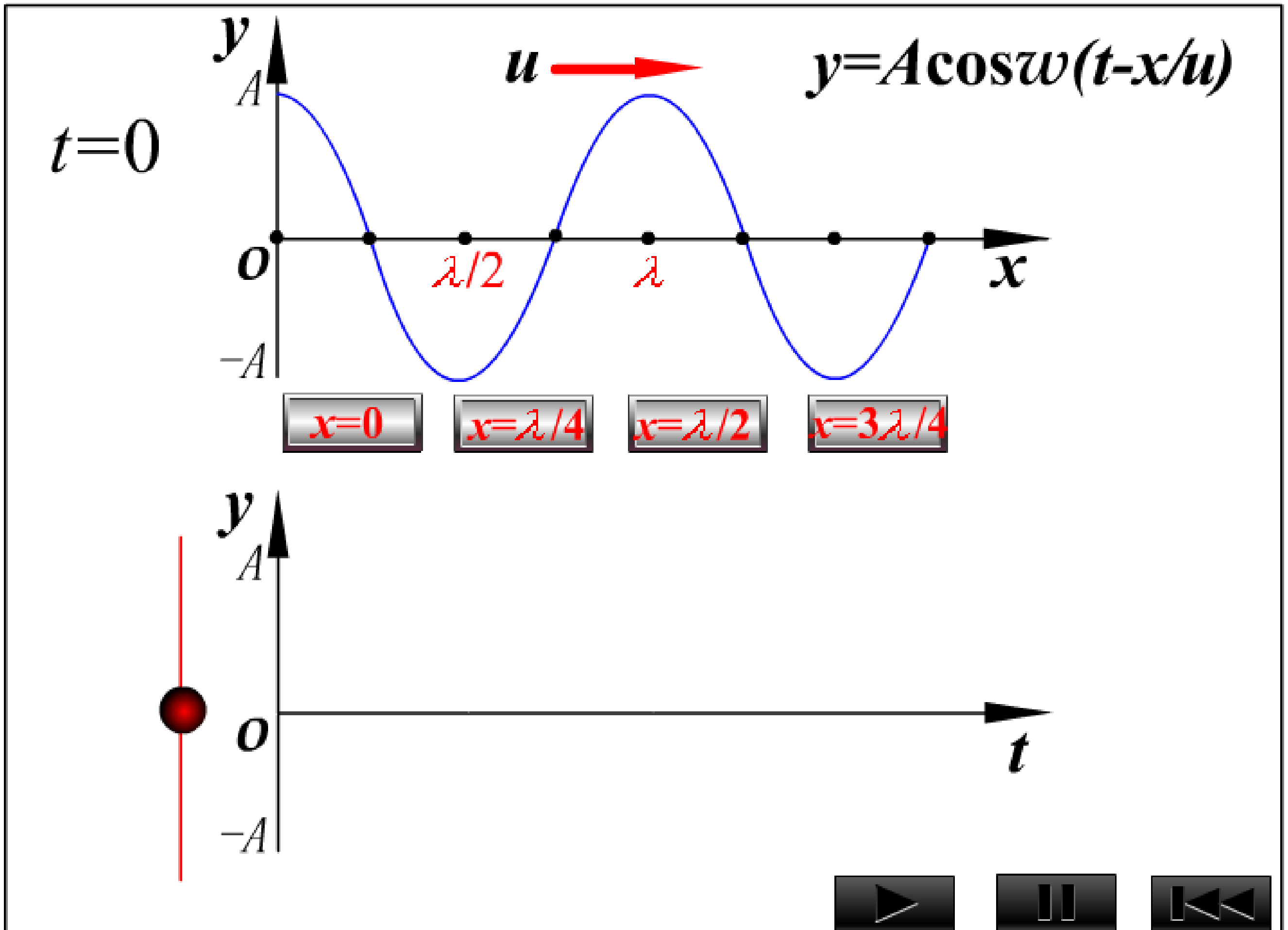


表示x点处质点的振动方程（y—t的关系）

$y(x,t)=y(x,t+T)$（波具有时间的周期性）

10-2 平面简谐波的波函数

波线上各点的简谐运动图



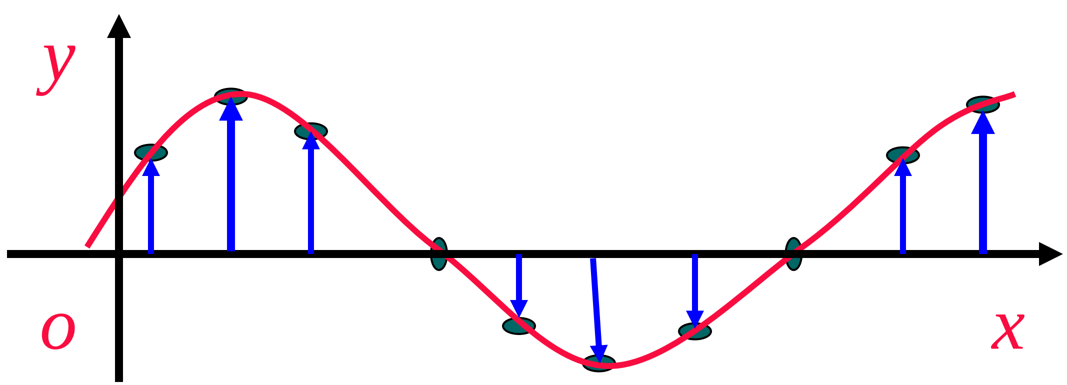
10-2 平面简谐波的波函数

2　t一定　x变化 $y = A\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right)$

令　$\varphi'' = \omega t + \varphi = C$（定值）

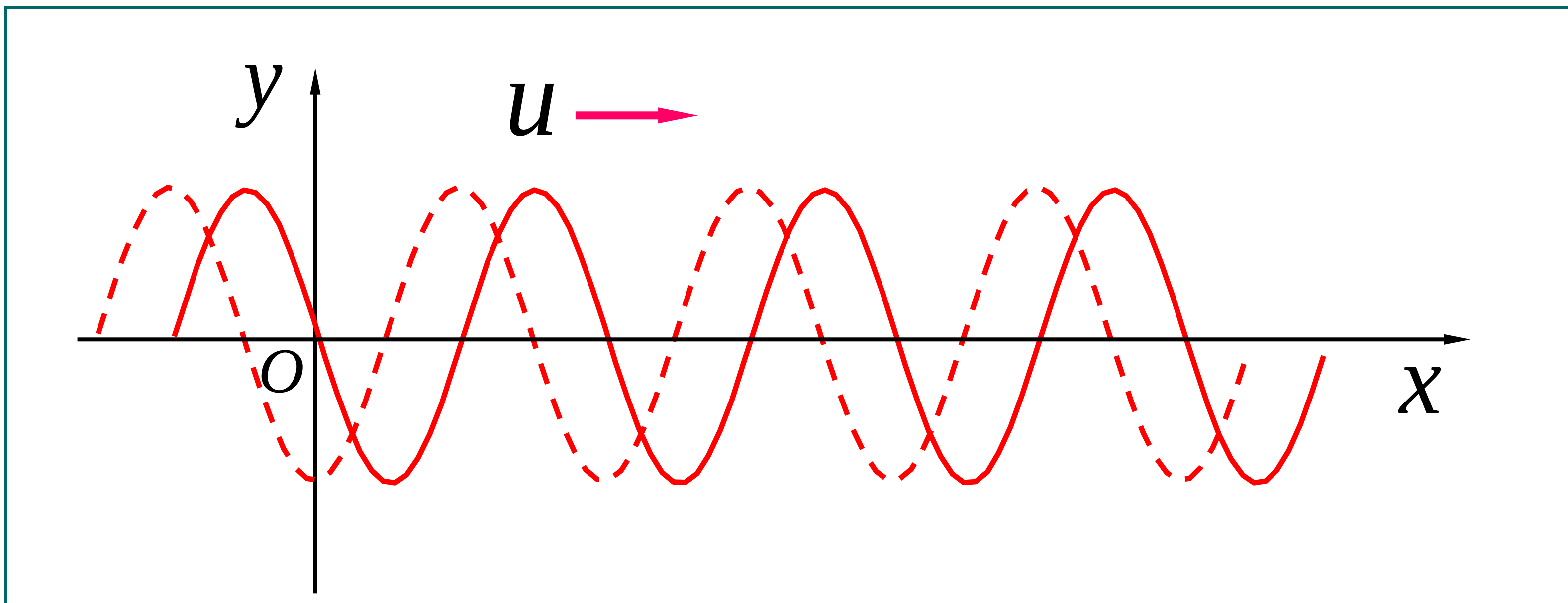
则　$y = A\cos\left[-\dfrac{2\pi x}{\lambda} + \varphi''\right]$

该方程表示t时刻波传播方向上各质点的位移，即t时刻的波形（y — x的关系）



3 x、t都变

方程表示在不同时刻各质点的位移，即不同时刻的波形，体现了波的传播.

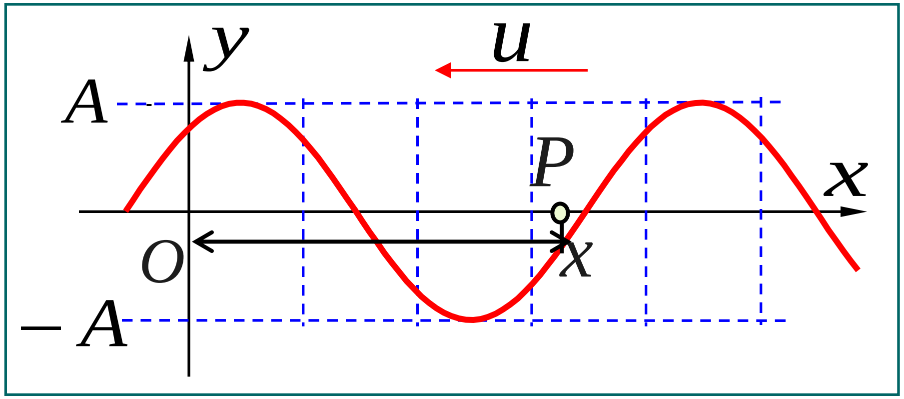


4 沿 $-x$ 轴方向传播的波动方程

如图，设 O 点振动方程为

$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi)$$

P 点振动比 O 点超前了 $\Delta t = \dfrac{x}{u}$



10-2 平面简谐波的波函数

故P点的振动方程（波动方程）为：

$$y = y_o(t+\Delta t) = A\cos[\omega(t+\frac{x}{u})+\varphi]$$

对波动方程的各种形式，应着重从物理意义上去理解和把握.

从实质上看：波动是振动的传播.

从形式上看：波动是波形的传播.

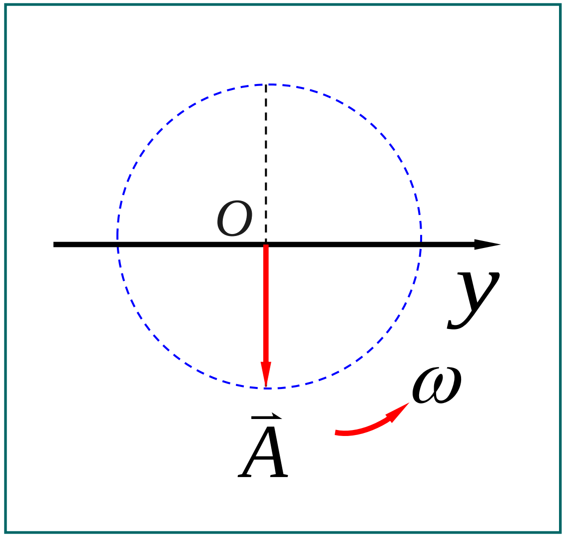
例1 一平面简谐波沿 Ox 轴正方向传播，已知振幅$A=1.0\ \mathrm{m}$,$T=2.0\ \mathrm{s}$,$\lambda=2.0\ \mathrm{m}$. 在 $t=0$ 时坐标原点处的质点在平衡位置沿 Oy 轴正向运动. 求：(1) 波动方程；(2) $t=1.0\ \mathrm{s}$波形图；(3) $x=0.5\ \mathrm{m}$ 处质点的振动规律并作图.

解 (1) 写出波动方程的标准式

$$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi]$$

10-2 平面简谐波的波函数

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\boxed{\varphi}]$$



$$t = 0 \quad x = 0$$

$$y = 0, v = \frac{\partial y}{\partial t} > 0 \quad \boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$$

$$y = \cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]\,(\mathrm{m})$$

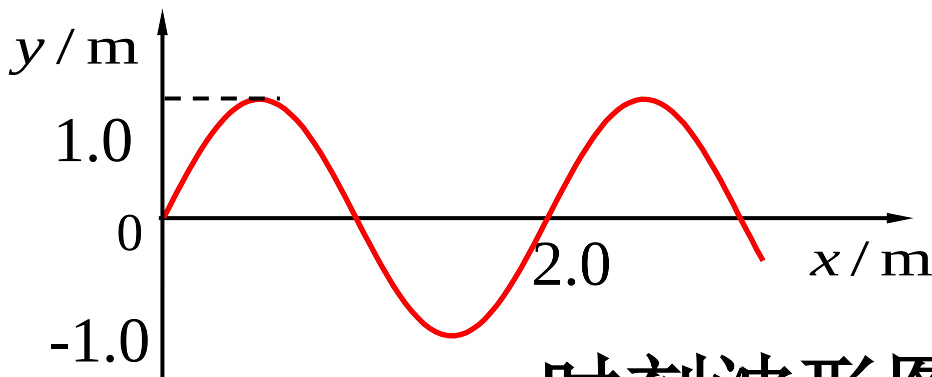
(2) 求 $t=1.0\text{s}$ 波形图

$$y=1.0\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$$y=(1.0)\cos[\frac{\pi}{2}-\pi x]$$

$$=\sin \pi x \quad (\text{m})$$

$t=1.0\text{ s}$
波形方程



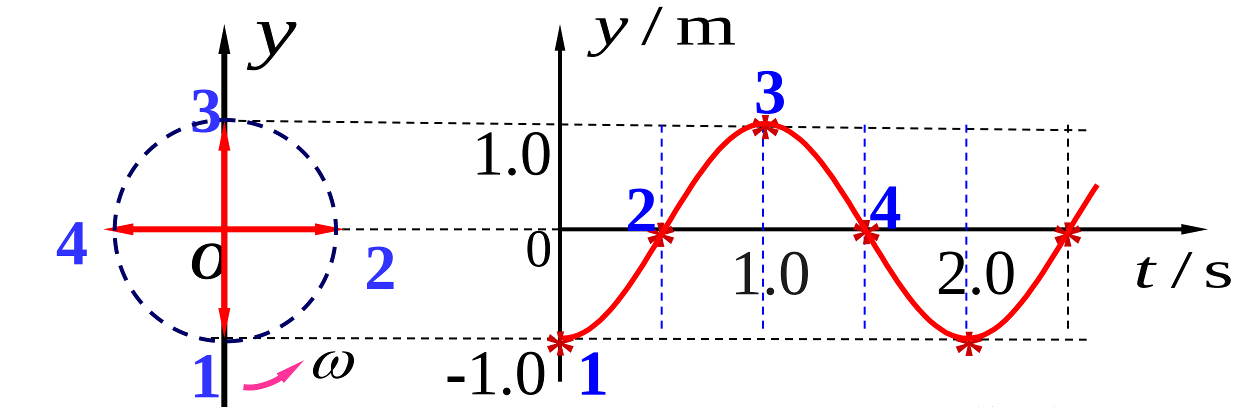
$t=1.0\text{ s}$ 时刻波形图

(3) $x=0.5\text{m}$ 处质点的振动规律并作图

$$y=(1.0)\cos[2\pi(\frac{t}{2.0}-\frac{x}{2.0})-\frac{\pi}{2}]$$

$x=0.5\text{m}$ 处质点的振动方程

$$y=\cos[\pi t-\pi]\ (\text{m})$$



$x=0.5\,\text{m}$ 处质点的振动曲线

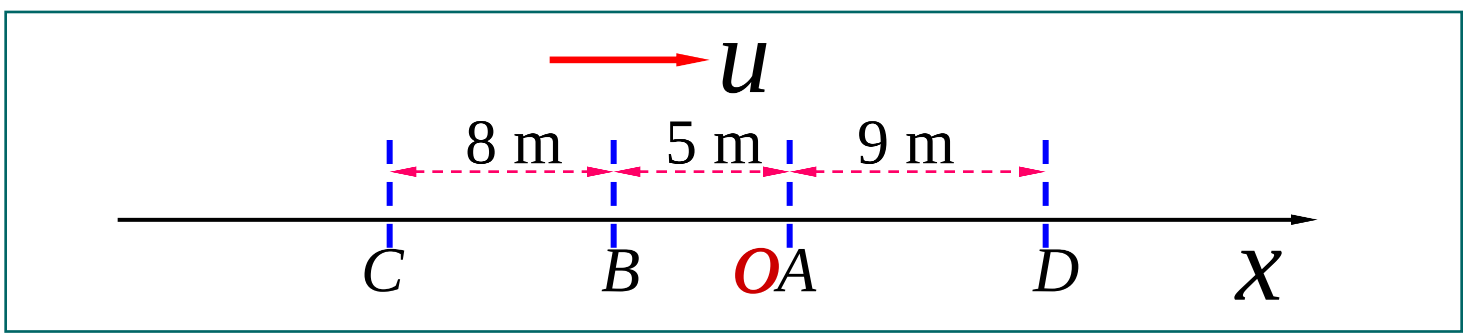
例2 一平面简谐波以速度 $u = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿直线传播，波线上点 A 的简谐运动方 程 $y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t)$; ($y$, t单位分别为m，s).

求:(1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程;

(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程;

(3) 求传播方向上点C、D 的简谐运动方程;

(4) 分别求出 BC ，CD 两点间的相位差.



10-2 平面简谐波的波函数

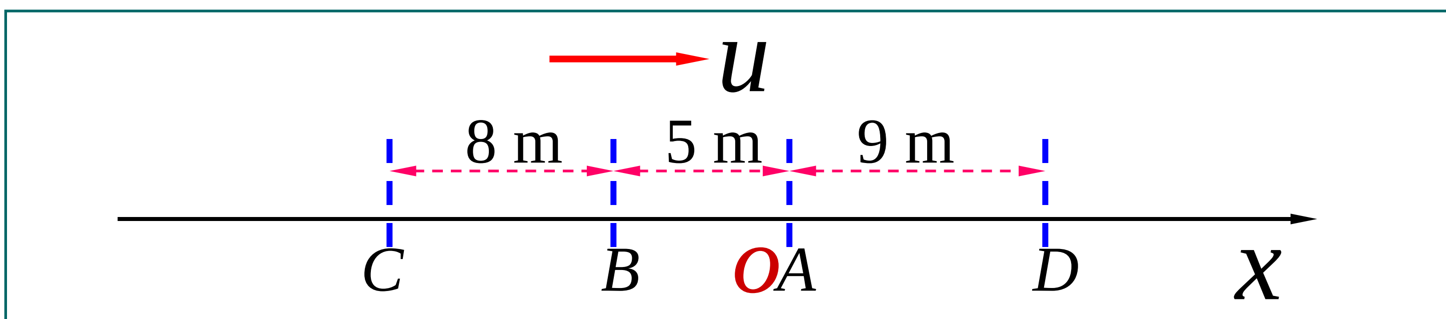
(1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程

$$A = 3\times10^{-2}\ \mathrm{m} \quad T = 0.5\ \mathrm{s} \quad \varphi = 0$$

$$\lambda = uT = 10\ \mathrm{m}$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi]$$

$$y = (3\times10^{-2}\ \mathrm{m})\cos 2\pi(\frac{t}{0.5\ \mathrm{s}} - \frac{x}{10\ \mathrm{m}})$$



（2）以 B 为坐标原点，写出波动方程

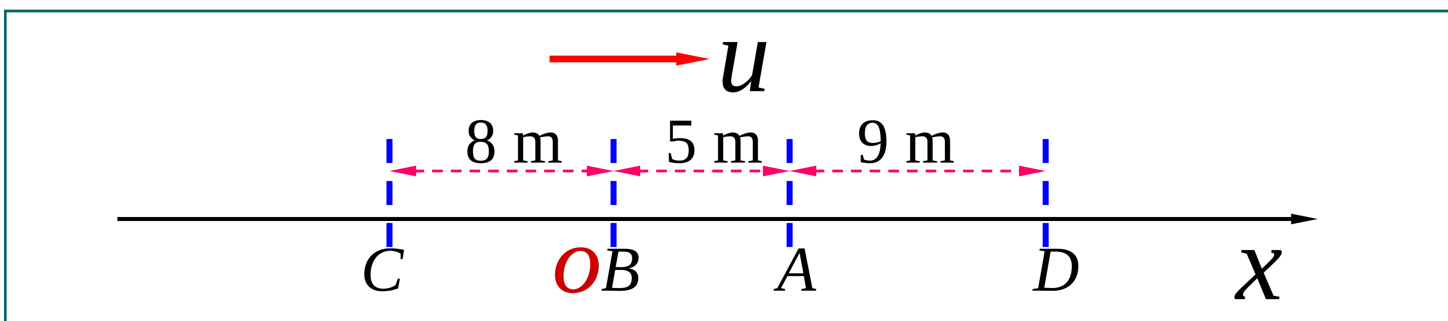
$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\,\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\,\frac{-5}{10} = \pi$$

$$\varphi_B = \pi$$

$$y_B = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \pi]$$

$$y = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\mathrm{s}} - \frac{x}{10\mathrm{m}}) + \pi]$$



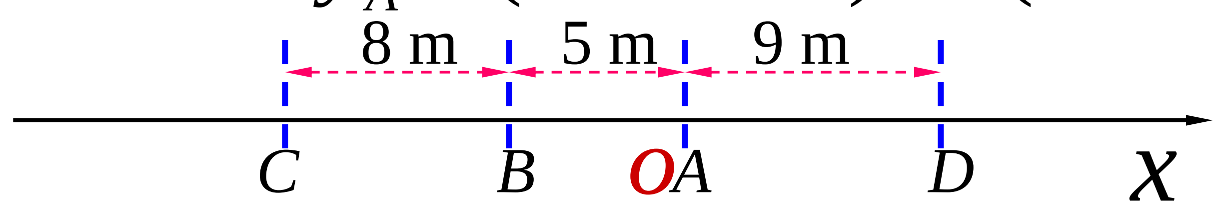
(3) 写出传播方向上点C、D的运动方程

点C 的相位比点A 超前

$$y_C = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + 2\pi\frac{AC}{\lambda}]$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t + \frac{13}{5}\pi]$$

u $\quad y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$



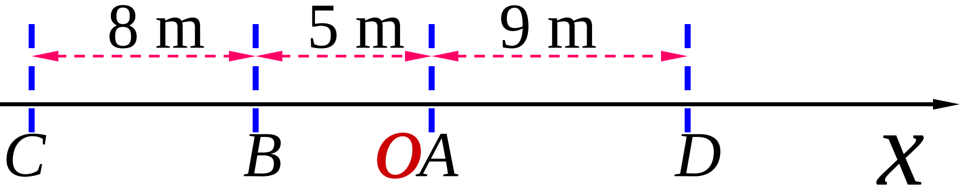
点 D 的相位落后于点 A

$$y_D = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[4\pi\mathrm{s}^{-1}]t - 2\pi\frac{AD}{\lambda}$$

$$= (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos[(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t - \frac{9}{5}\pi]$$

$u \quad y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$

$\lambda = 10\ \mathrm{m}$

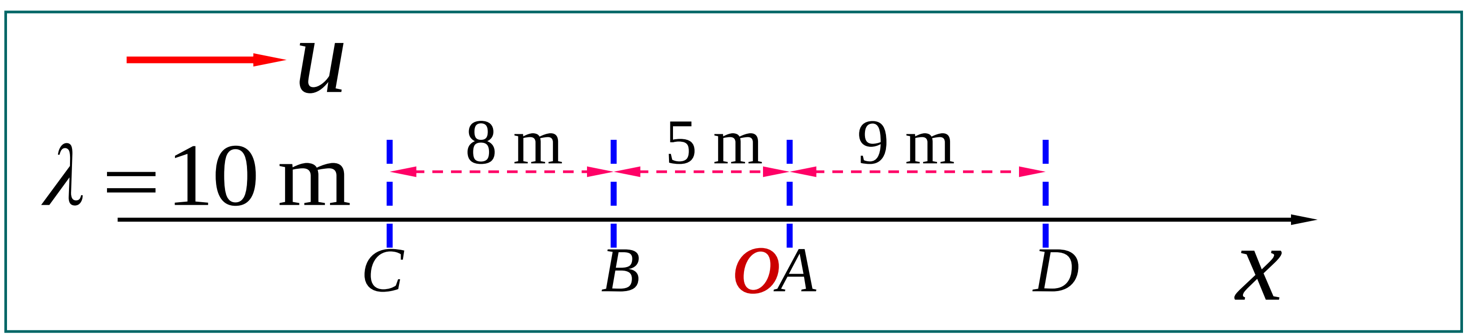


(4) 分别求出 BC，CD 两点间的相位差

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi\,\mathrm{s}^{-1})t$$

$$\varphi_B - \varphi_C = -2\pi\,\frac{x_B - x_C}{\lambda} = -2\pi\,\frac{8}{10} = -1.6\pi$$

$$\varphi_C - \varphi_D = -2\pi\,\frac{x_C - x_D}{\lambda} = -2\pi\,\frac{-22}{10} = 4.4\pi$$



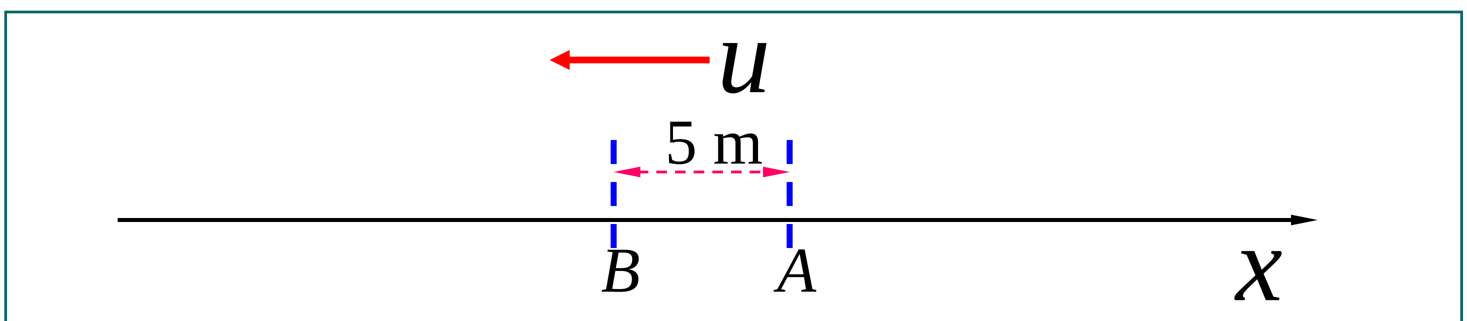
例2 一平面简谐波以速度 $u = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ 沿x负方向传播，波线上点 A 的简谐运动方 程

$$y_A = 3\times10^{-2}\cos(4\pi t + \pi)$$ (y，t单位分别为m，s).

求:

(1) 以 A 为坐标原点，写出波动方程;

(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程;



（1）以 A 为坐标原点，写出波动方程

$$A = 3\times10^{-2}\ \mathrm{m} \quad T = 0.5\ \mathrm{s} \quad \varphi = \pi$$

$$\lambda = uT = 10\ \mathrm{m}$$

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}) + \phi]$$

$$y = 3\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.5\ \mathrm{s}} + \frac{x}{10\ \mathrm{m}}) + \pi](m)$$

(2) 以 B 为坐标原点，写出波动方程

$$y_A = (3\times10^{-2}\,\mathrm{m})\cos(4\pi t + \pi)$$

$$\varphi_B - \varphi_A = -2\pi\frac{x_B - x_A}{\lambda} = -2\pi\frac{-5}{10} = \pi$$

$$\phi_B = 2\pi$$

$$y_B = 3\times10^{-2}\cos 4\pi t$$

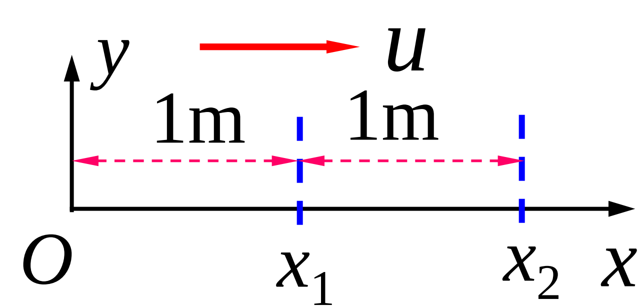
$$y = 3\times10^{-2}\cos[2\pi(\frac{t}{0.5} - \frac{x}{10})](\mathrm{m})$$

例3 一平面简谐横波以400m/s的波速在均匀介质中沿直线传播。已知波源的振动周期为0.01s，振幅 A=0.01m。设以波源振动经过平衡位置向正方向运动时作为计时起点，**求**(1)以距波源2m处为坐标原点写出波函数。(2)以波源为坐标原点写出波函数。(3)距波源 2m和1m两点间的振动相位差。

解 (1)以波源为坐标原点

$t=0$时，$y_0=0$，$u_0>0$，

所以初相位为$-\pi/2$ 。

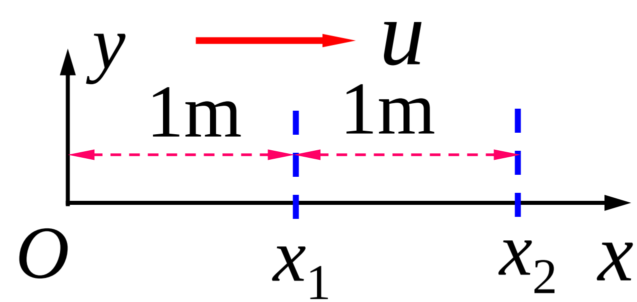


波源的振动方程为

$$y_0(t) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0) = 0.01\cos(200\pi t - \frac{\pi}{2})$$

波从O点传播到2m处质点所需要的时间为

$$\Delta t = \frac{x_2}{u} = \frac{2}{400}\,\mathrm{s}$$



距波源2m处质点的振动方程

$$y(t) = A\cos[\omega(t - \Delta t) + \varphi_0]$$

$$= 0.01\cos(200\pi t - 200\pi \times \frac{2}{400} - \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore \quad y(t) = 0.01\cos(200\pi t - \frac{3}{2}\pi)$$

以距波源2m处为坐标原点的波函数为

$$y(x,t) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi]$$

$$= 0.01\cos[200\pi(t - \frac{x}{400}) - \frac{3}{2}\pi]$$

(2)波源的振动方程为

$$y = 0.01\cos(200\pi t - \frac{\pi}{2})$$

以波源为坐标原点的波函数为

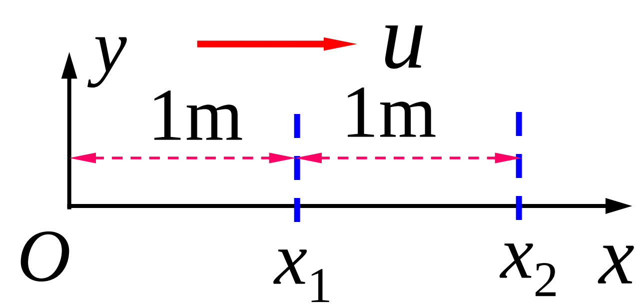
10-2 平面简谐波的波函数

$$y(x,t)=0.01\cos[200\pi(t-\frac{x}{400})-\frac{\pi}{2}]$$

(3) 将x=2m和x=1m分别代入(2)中的波函数

$$y_2(t)=0.01\cos(200\pi t-\frac{3}{2}\pi)$$

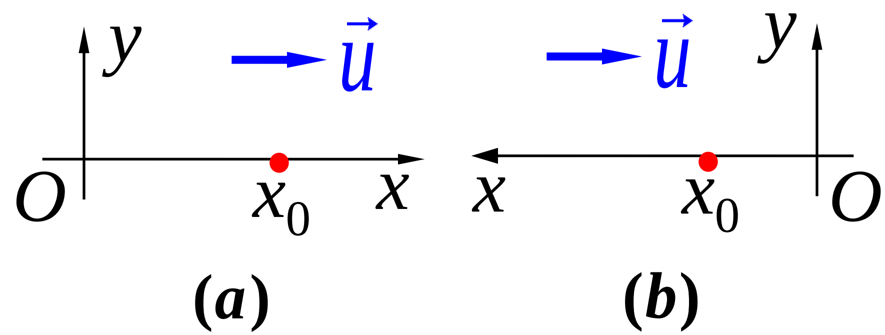
$$y_1(t)=0.01\cos(200\pi t-\pi)$$



距波源2m和1m两点间的振动相位差为

$$\Delta\varphi=(200\pi t-\frac{3}{2}\pi)-(200\pi t-\pi)=-\frac{\pi}{2}$$

例4 一平面简谐波，波速为u，已知在传播方向上x_0点的振动方程为 $y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$ 。试就图所示的(a)、(b)两种坐标取法分别写出各自的波函数。



解 (a) 坐标取法中，波的传播方向与 x 轴正方向相同。

O点的振动相位超前于x_0点$\omega x_0/u$，则O点的振动方程为

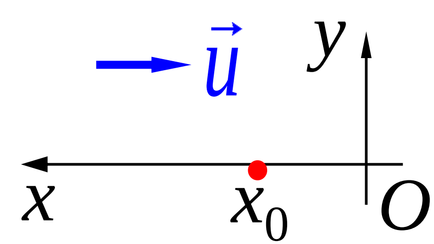
$$y_0 = A\cos[\omega(t + \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

沿 x 轴正方向传播的平面简谐波的波函数为

$$y_0 = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u} + \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

$$= A\cos[\omega(t - \frac{x - x_0}{u}) + \varphi_0]$$

(b) 坐标取法中，波的传播方向与x轴正方向相反。



(b)

波由O点传播到x_0点使得O点的振动相位落后于x_0点$\omega x_0/u$

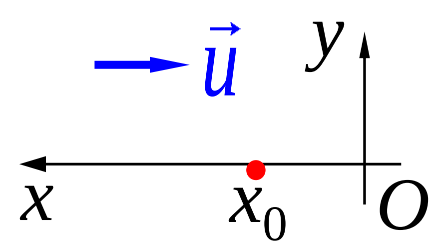
则O点的振动方程为

$$y_0 = A\cos[\omega(t - \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

沿x轴反方向传播的平面简谐波的波函数为

$$y_0 = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u} - \frac{x_0}{u}) + \varphi_0]$$

$$= A\cos[\omega(t + \frac{x - x_0}{u}) + \varphi_0]$$



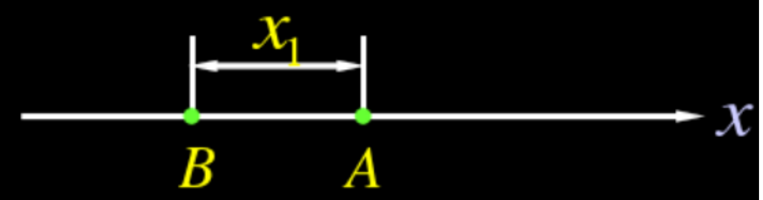
(b)

例 如图，已知 A 点的振动方程为：$y_A = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8})]$

在下列情况下试求波函数：

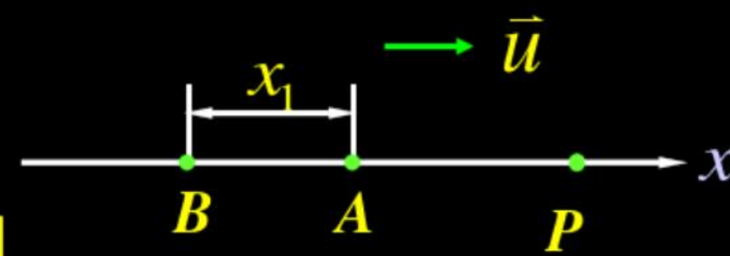
(1) 以 A 为原点；

(2) 以 B 为原点；



(3) 若 u 沿 x 轴负向，以上两种情况又如何？

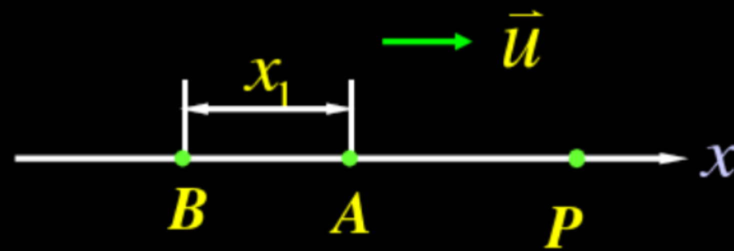
解 (1) 在 x 轴上任取一点 P，该点振动方程为：



$$y_P = A\cos[4\pi(t-\frac{1}{8}-\frac{x}{u})]$$

波函数为：$y(x,t) = A\cos[4\pi(t-\frac{x}{u}-\frac{1}{8})]$

10-2 平面简谐波的波函数



(2) *B* 点振动方程为:

$$y_B(t) = A\cos[4\pi(t - \frac{1}{8} + \frac{x_1}{u})]$$

波函数为:

$$y(x,t)=A\cos[4\pi(t - \frac{1}{8} + \frac{x_1}{u} - \frac{x}{u})] = A\cos[4\pi(t - \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$$

(3) 以 *A* 为原点:

$$y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x}{u} - \frac{1}{8})]$$

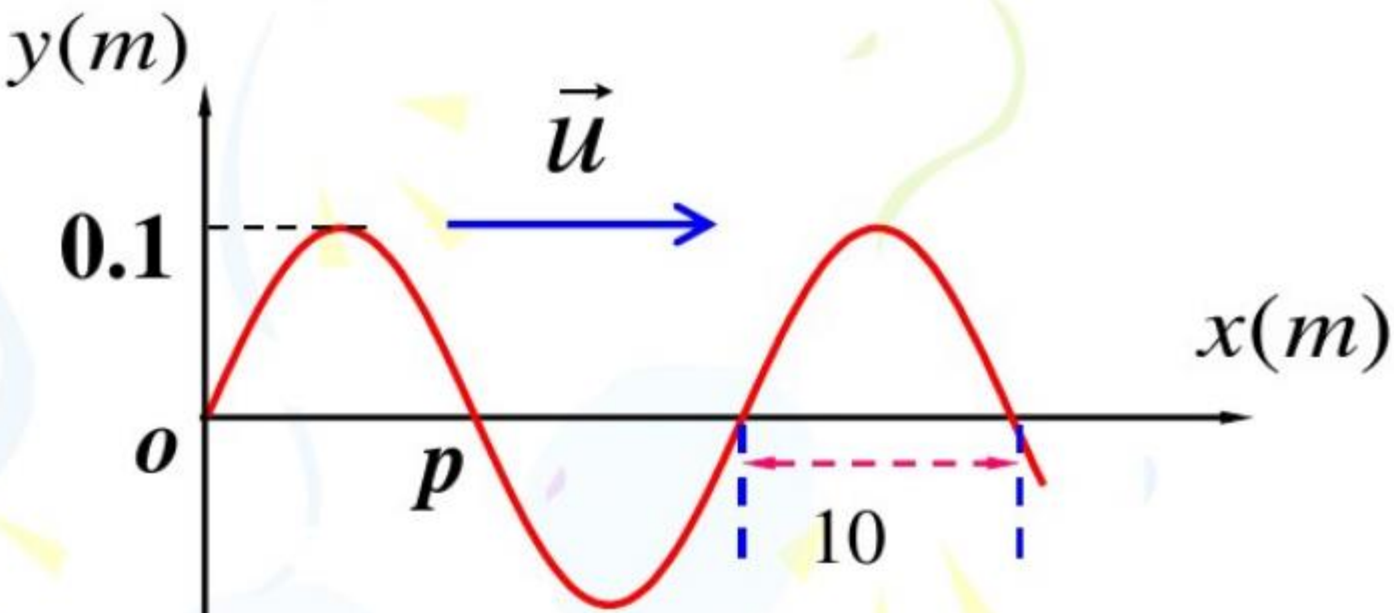
以 *B* 为原点:

$$y(x,t) = A\cos[4\pi(t + \frac{x - x_1}{u} - \frac{1}{8})]$$

10-2 平面简谐波的波函数

已知某时刻的波形曲线，求某点的振动方程。

例6 如图所示为一平面简谐波在t=0时刻波形图，该波的波速 $u=10\mathrm{m/s}$ ，求p点的振动方程并画出振动曲线。 $y(m)$



10-2 平面简谐波的波函数

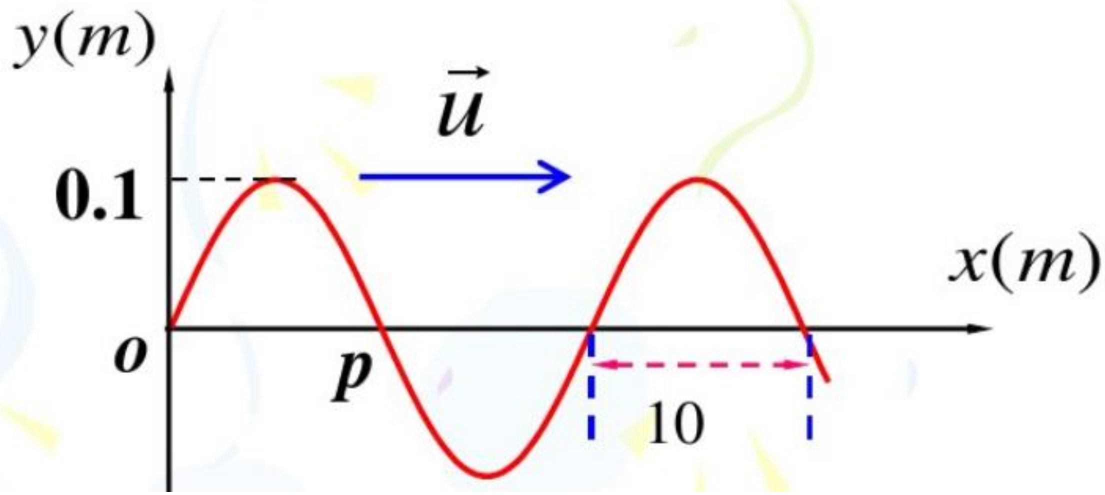
解： 由图可知：

$A = 0.1\text{m}$

$\lambda = 20\text{m}$

$T = \dfrac{\lambda}{u} = 2\text{s}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \ \text{rad/s}$



波动方程：$y_0 = A\cos[\omega(t - \dfrac{x}{u}) + \varphi_0] = 0.1\cos[\pi(t - \dfrac{x}{10}) + \varphi_0]$

初始条件：$t = 0, x = 0, y = 0, v_0 < 0$

$$0 = \cos\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2} \qquad v_0 < 0, \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$$

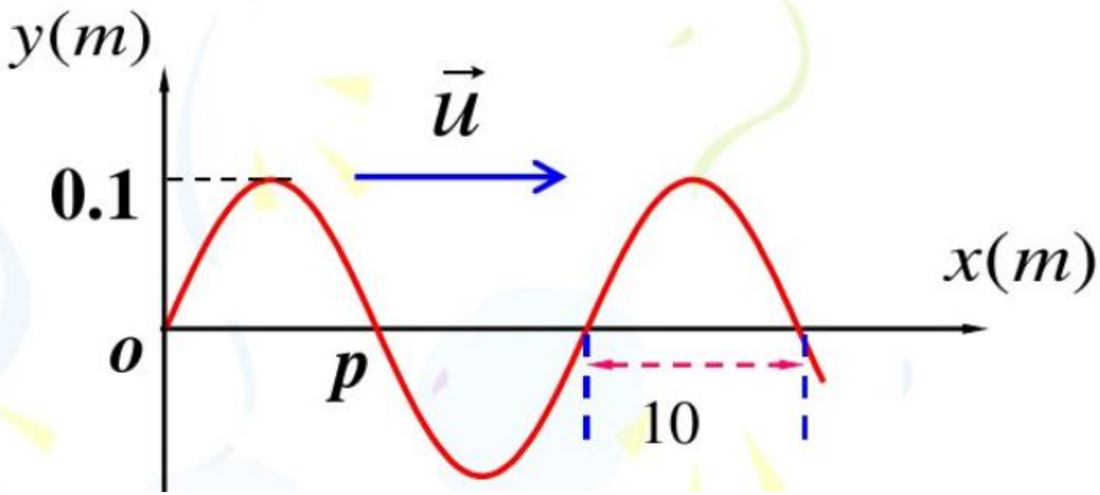
10-2 平面简谐波的波函数

带入p点坐标： $x=10$

$$y_p = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0] = 0.1\cos[\pi(t-\frac{10}{10})+\frac{1}{2}\pi]$$

$$=0.1\cos[\pi t-\frac{1}{2}\pi]$$

10-2 平面简谐波的波函数



解：由图可知：

$A = 0.1\text{m}$

$\lambda = 20\text{m}$

$T = \dfrac{\lambda}{u} = 2\text{s}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \pi \text{ rad/s}$

设P点的振动方程为 $y_p = 0.1\cos(\pi t + \varphi_0)(\text{m})$

$t = 0$ 时刻，p点处的振动状态 $y_p = 0, v_p > 0$

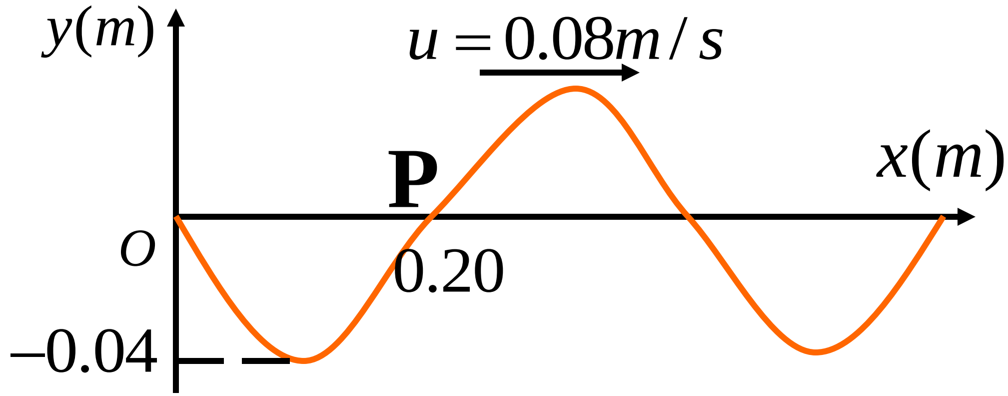
p点的初相位 $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{2}$ p点的振动方程

$$y_p = 0.1\cos(\pi t - \frac{\pi}{2})\ (SI)$$

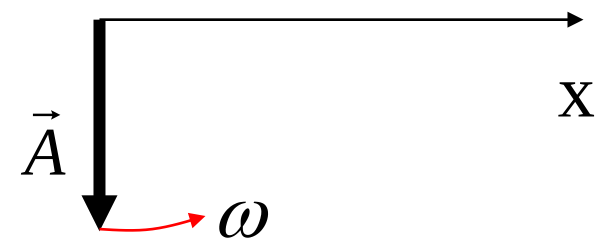
图示一平面简谐波在t=0时刻的波形图。求：

（1）该波的波动方程；

（2）P处质点的振动方程



解:(1)由$t=0$质点O的振动状态:



$$y_0=0, v_0>0 \rightarrow \phi=-\frac{\pi}{2}$$

由图可知：$T=\dfrac{\lambda}{u}=5s, \nu=\dfrac{1}{5}H_z$

10-2 平面简谐波的波函数

波动方程：

$$y = 0.04\cos[\frac{2\pi}{5}(t-\frac{x}{u})-\frac{\pi}{2}] = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5}-\frac{x}{0.4})-\frac{\pi}{2}]$$

(2)P点处的振动状态：

$$y_p = 0.04\cos[2\pi(\frac{t}{5}-\frac{0.2}{0.4})-\frac{\pi}{2}] = 0.04\cos(0.4\pi t-\frac{3}{2}\pi)$$