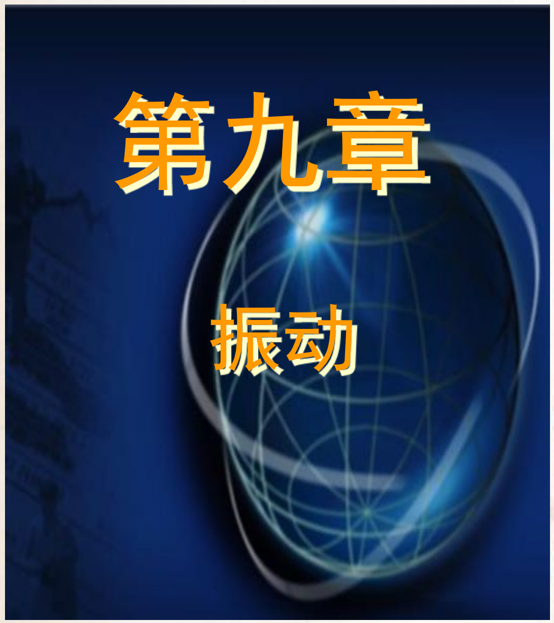
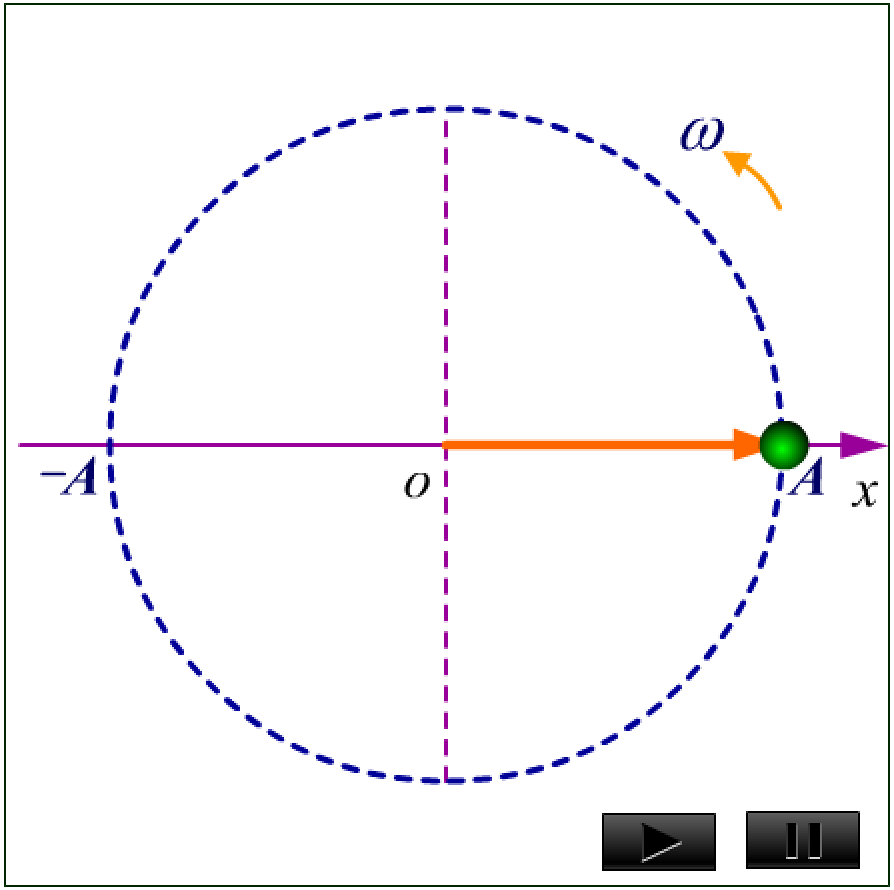


第2节《简谐振动旋转矢量方法》

一 了解旋转矢量表示法.

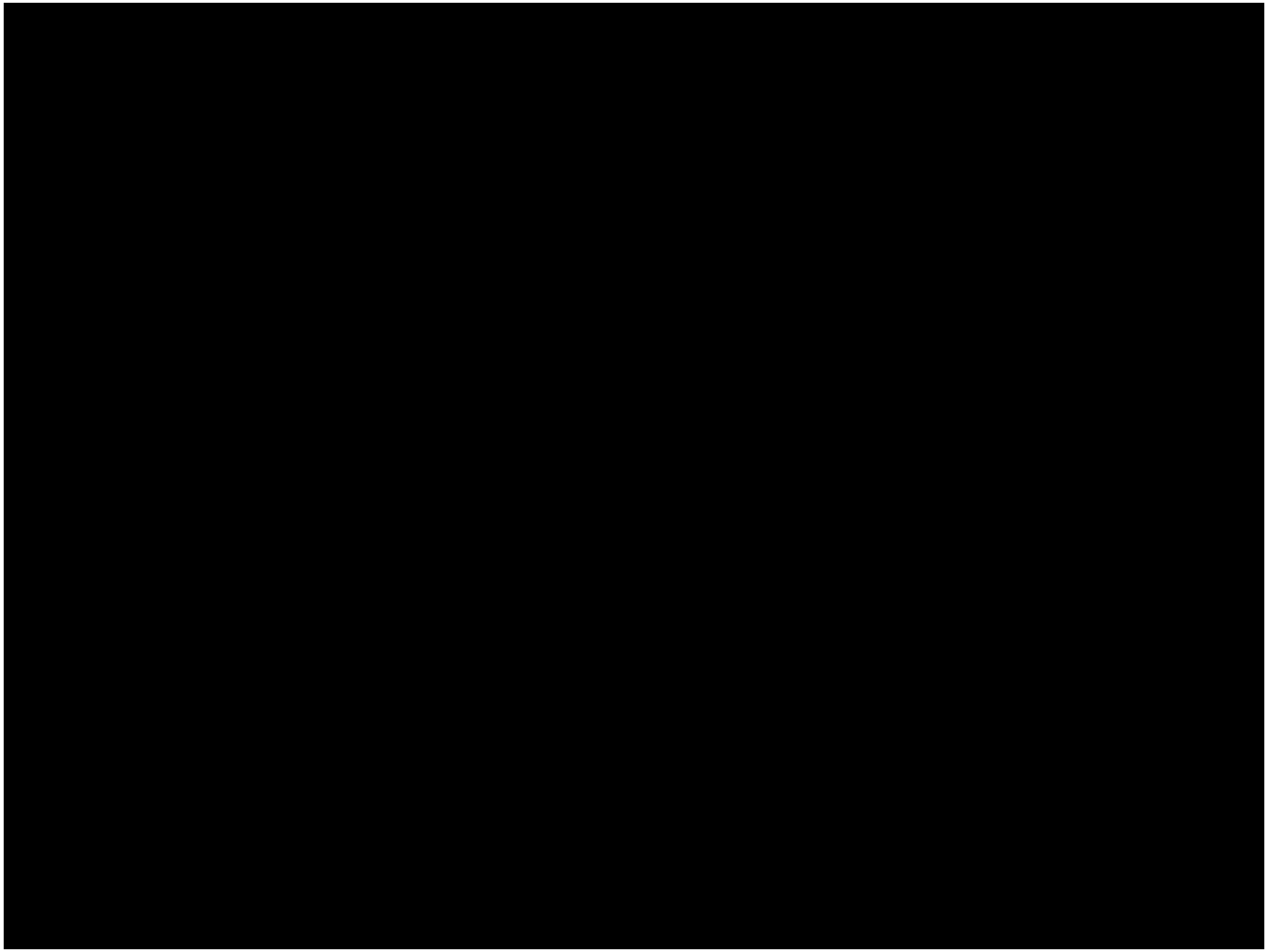
二 理解旋转矢量表示简谐振动的特征

旋转矢量

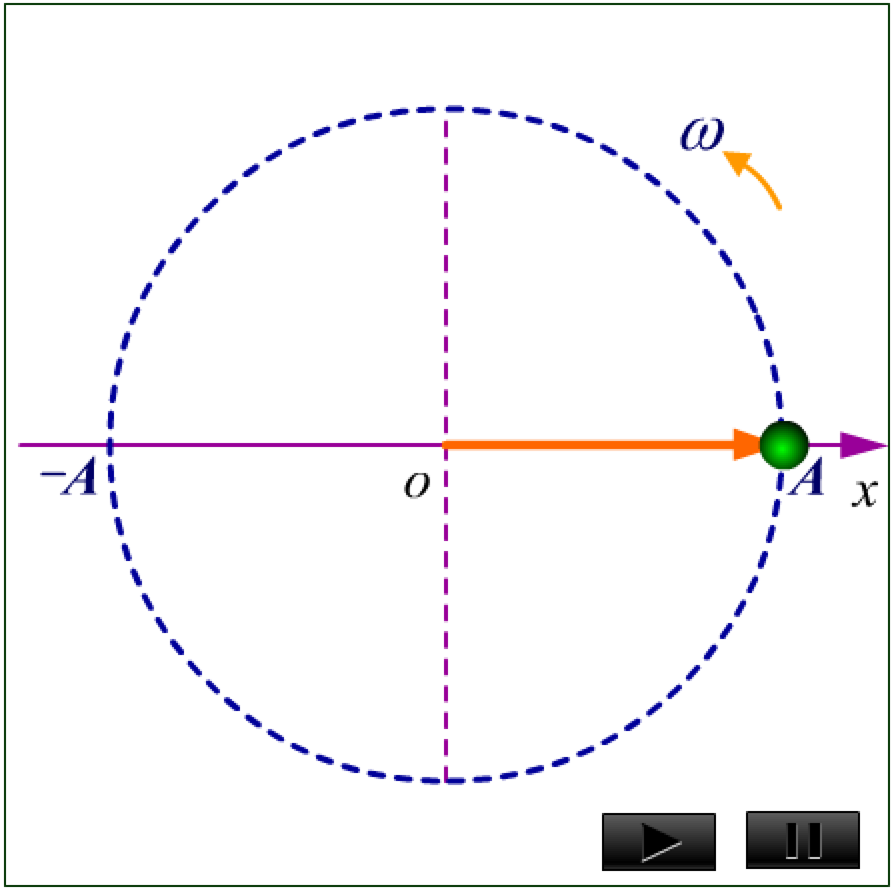


自Ox轴的原点O作一矢量$\vec{A}$，使它的模等于振动的振幅A，并使矢量$\vec{A}$在Oxy平面内绕点O作逆时针方向的匀角速转动，其角速度ω与振动频率相等，这个矢量就叫做旋转矢量.

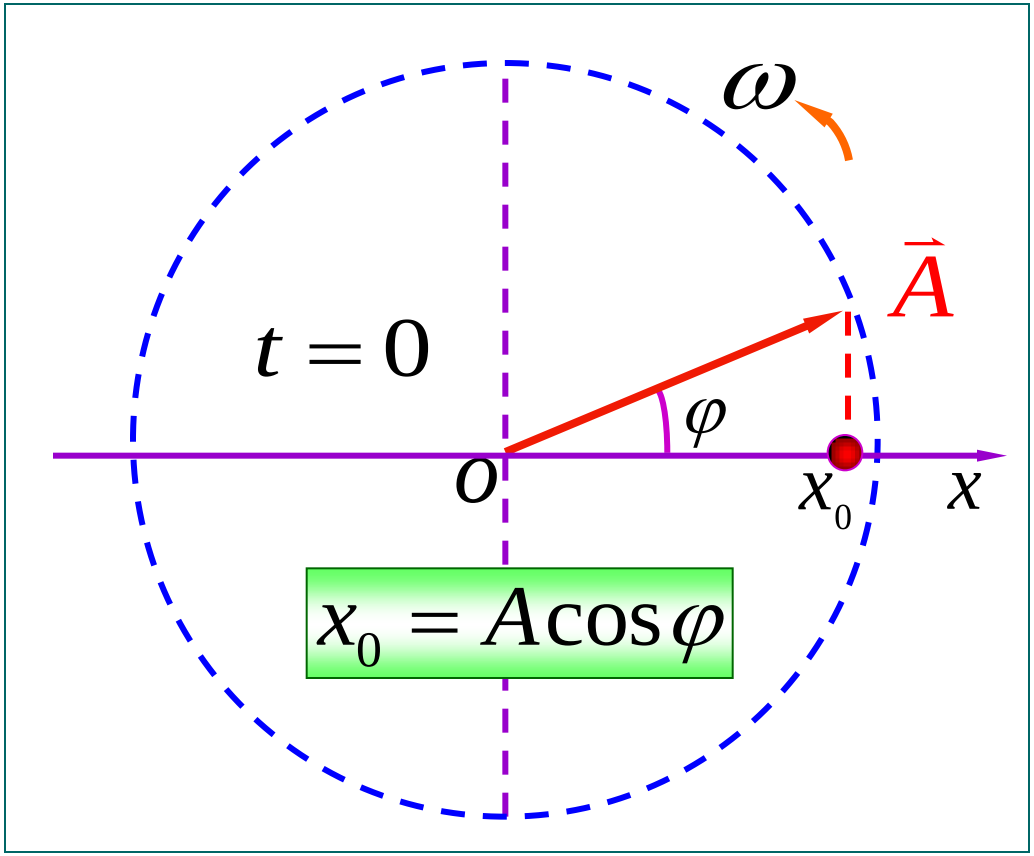
9-2 旋转矢量



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

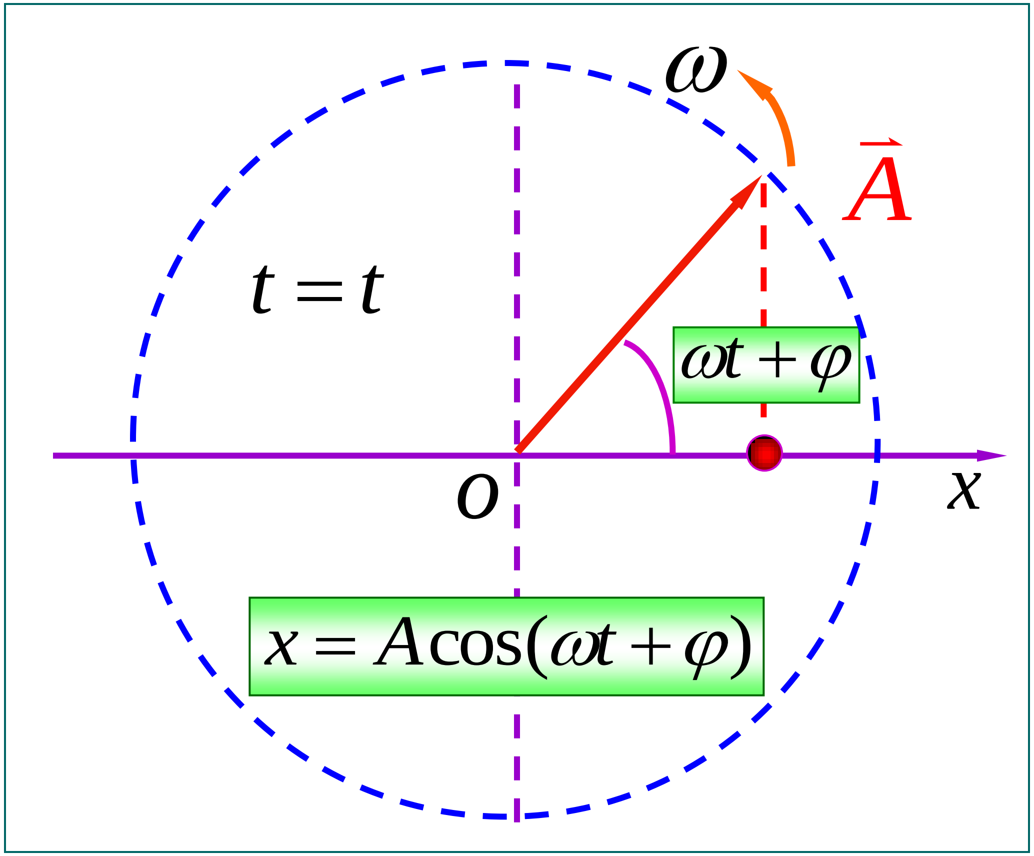


以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.



以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

9-2 旋转矢量



以 o 为原点旋转矢量 $\vec{A}$ 的端点在 x 轴上的投影点的运动为简谐运动.

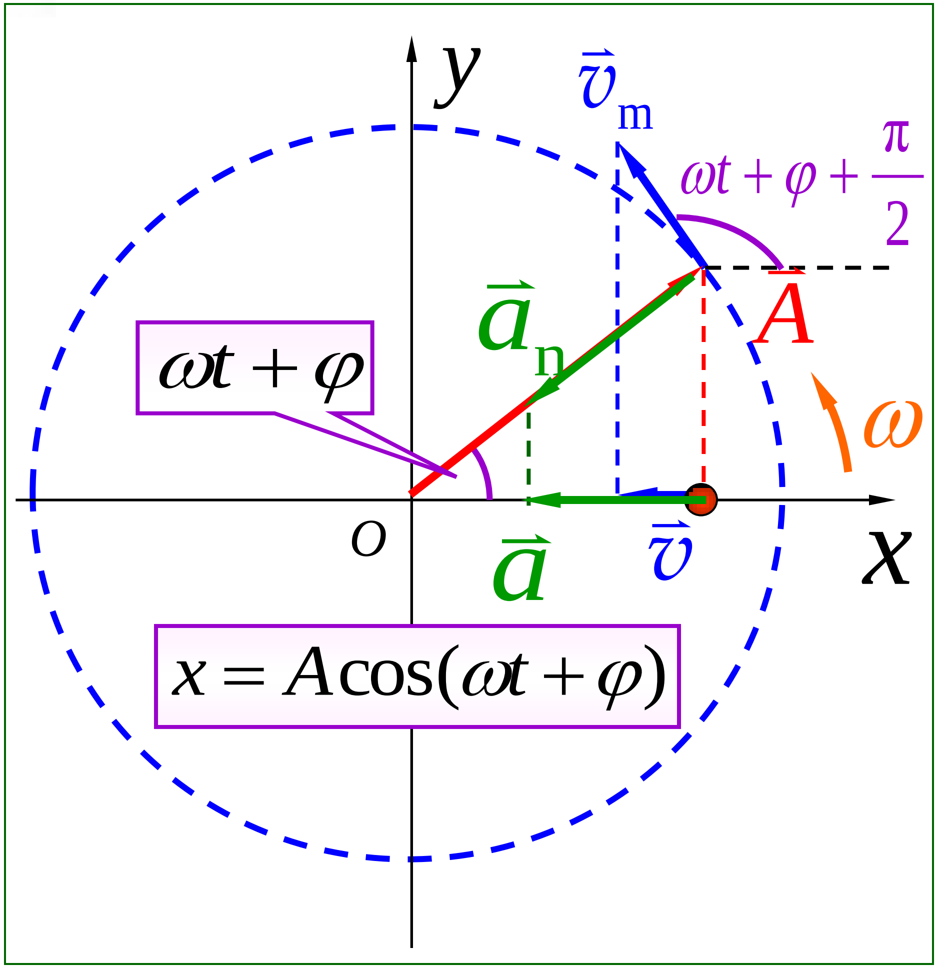
旋转矢量与谐振动的对应关系

$\vec{A}$ 的长度 —— 谐振动的振幅 A

$\vec{A}$ 的角速度 —— 谐振动的角频率 ω

$\vec{A}|_{t=0}$ 与 x 轴的夹角 —— 谐振动的初相位 φ

9-2 旋转矢量



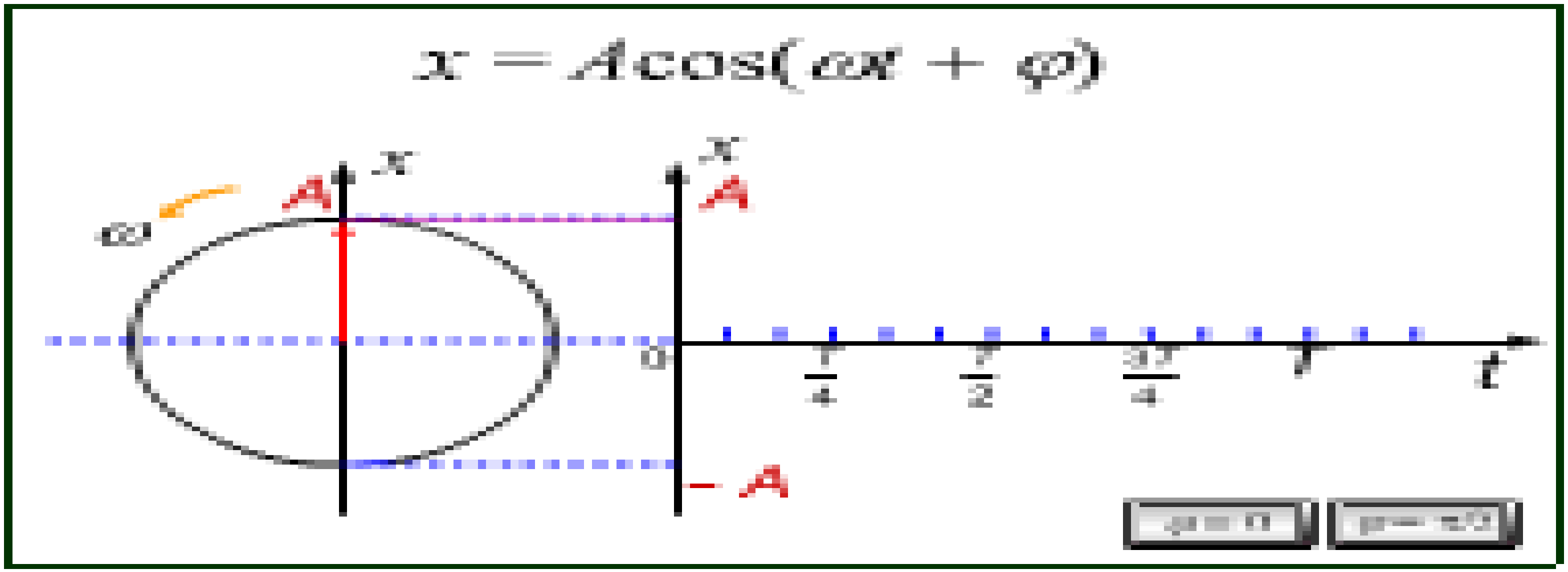
$$v_{\rm m}=A\omega$$

$$v=-A\omega\cos(\omega t+\varphi)$$

$$a_{\rm n}=A\omega^2$$

$$a=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

用旋转矢量图画简谐运动的$x-t$图



讨论

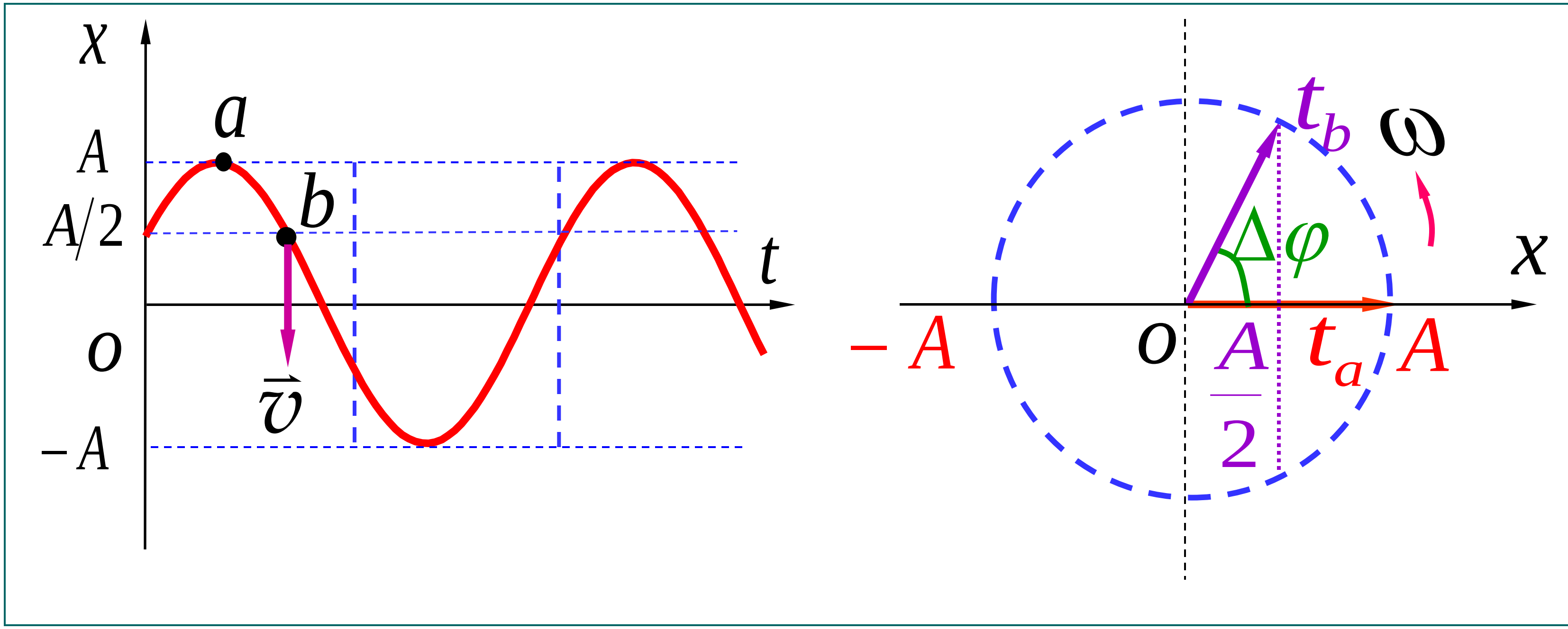
➢ 相位差：表示两个相位之差

（1）对**同一**简谐运动，相位差可以给出两运动状态间变化所需的时间.

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \varphi) \qquad x_2 = A\cos(\omega t_2 + \varphi)$$

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta\varphi}{\omega}$$



$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}\qquad \Delta t=\frac{\pi/3}{2\pi}T=\frac{1}{6}T$$

（2）对于两个同频率的简谐运动，相位差表示它们间步调上的差异（解决振动合成问题）.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

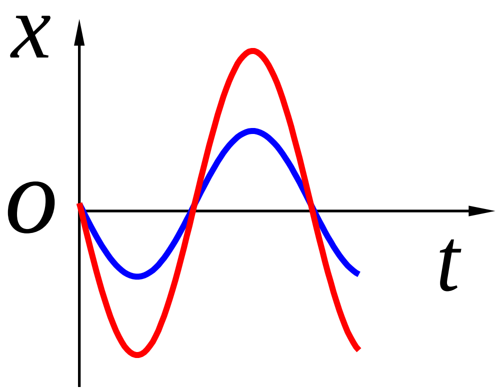
$$\Delta\varphi = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1}$$

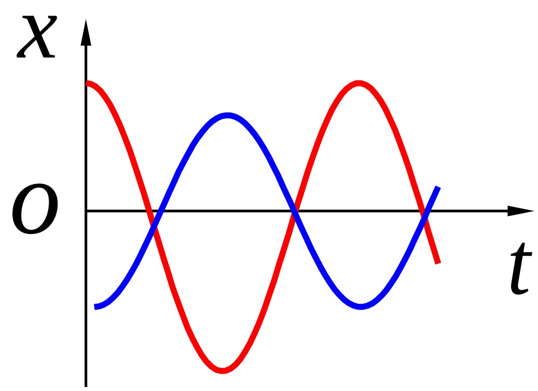
9-2 旋转矢量

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

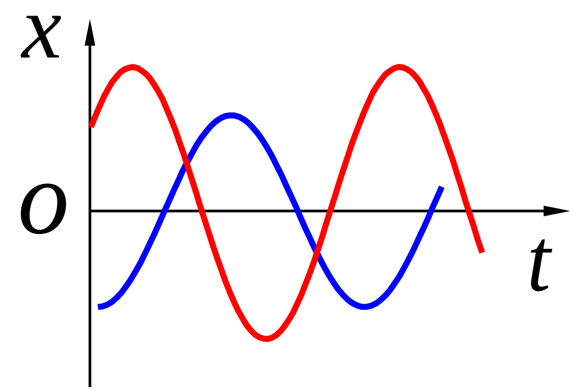
$\Delta\varphi = 0$ 同步



$\Delta\varphi = \pm\pi$ 反相

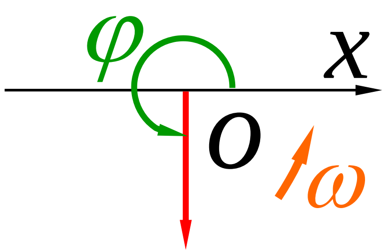


$\Delta\varphi$为其它 $\begin{cases}\text{超前}\\\text{落后}\end{cases}$



例 一音叉振动的角频率 $\omega=6.28\times10^{2}\mathrm{rad/s}$，音叉尖端的振幅为1.0mm。试用旋转矢量法求以下三种情况的初相并写出运动方程 (1) 当$t=0$时,音叉尖端通过平衡位置向 x 轴正方向运动； (2) 当t=0时, 音叉尖端在 x 轴的负方向一边且位移具有最大值； (3) 当 $t=0$时,音叉尖端在 x 轴的正方向一边，离开平衡位置距离为振幅之半，且向平衡位置运动 。

解 (1) 根据题意，$t=0$时,旋转矢量的位置如图所示。

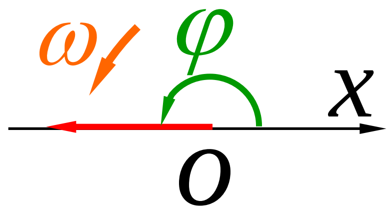


$$\varphi=3\pi/2$$

$$x = 0.1\cos(6.28\times10^2 t + \frac{3}{2}\pi)\ \text{cm}$$

(2) $t = 0$时, 旋转矢量的位置如图所示。

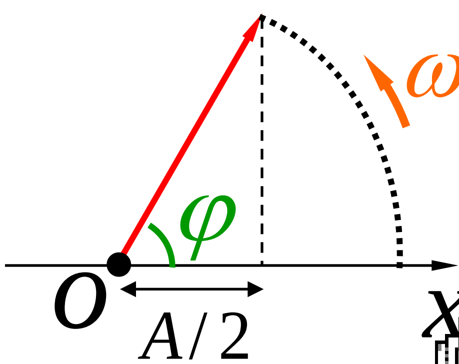
$$\varphi = \pi$$



$$x = 0.1\cos(6.28\times10^2 t + \pi)\ \text{cm}$$

(3) $t = 0$时,旋转矢量的位置如图所示。

$$\varphi = \pi/3$$



$$x = 0.1\cos(6.28\times10^2 t + \frac{\pi}{3})\ \text{cm}$$

例 两质点沿 x 轴作同方向同振幅的谐振动，其周期均为5s，当$t=0$时，质点1在$\sqrt{2}A/2$处向 x 轴负方向运动，而质点2在 $-A$处。试用旋转矢量法求这两个谐振动的初相差，以及两个质点第一次经过平衡位置的时刻 。

解 两质点的谐振动方程分别为

$$x_1 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_1)$$

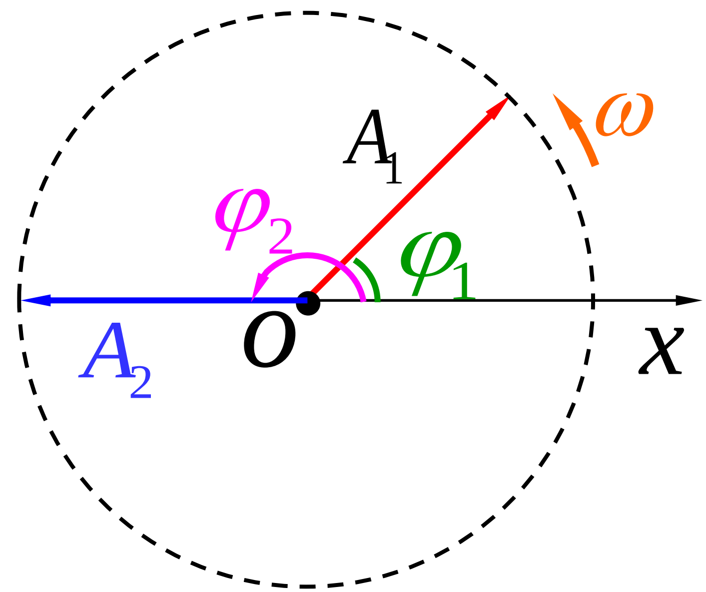
$$x_2 = A\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_2)$$

质点1在 $t=0$ 时， $x_{10}=\sqrt{2}A/2$

向x轴负方向运动, 其旋转矢量 A_1如图所示。

由图得初相角　$\varphi_1=\pi/4$

同理, 旋转矢量 A_2 如图所示。



初相角　$\varphi_2=\pi$

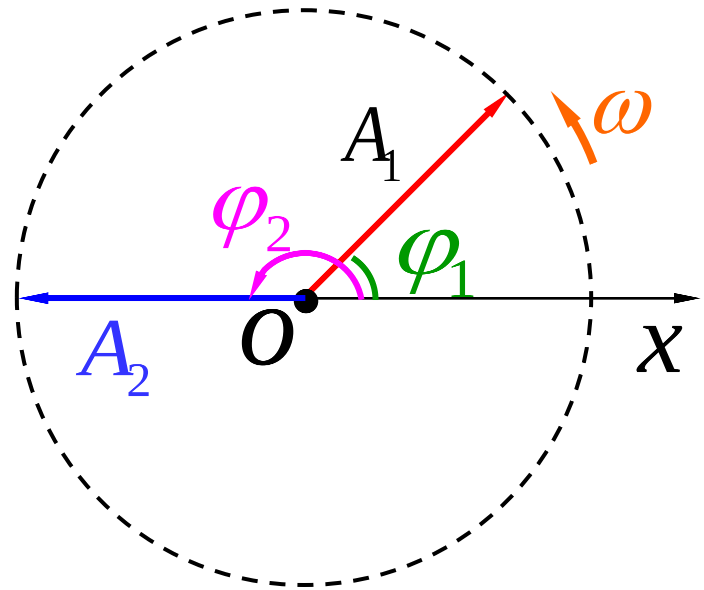
两质点的初相差

$$\varphi_2-\varphi_1=\pi-\pi/4=3\pi/4$$

质点2的相位比质点1的相位超前 $3\pi/4$ 。

由图得，质点1第一次经过平衡位置的时刻为

$t_1 = T/8 = 0.625\text{s}$

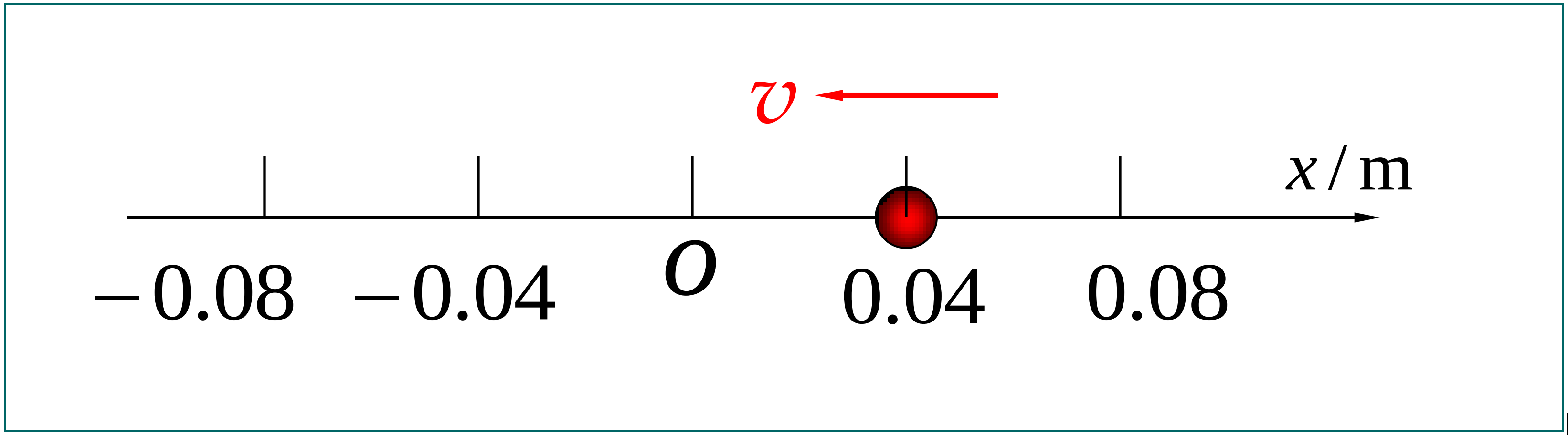


质点2第一次经过平衡位置的时刻为

$t_2 = T/4 = 1.25\text{s}$

例 一质量为0.01 kg的物体作简谐运动，其振幅为0.08 m，周期为4 s，起始时刻物体在x=0.04 m处，向ox轴负方向运动（如图）. **试求**

（1） t=1.0 s时，物体所处的位置和所受的力；



已知 $m = 0.01\,\mathrm{kg}, A = 0.08\,\mathrm{m}, T = 4\,\mathrm{s}$

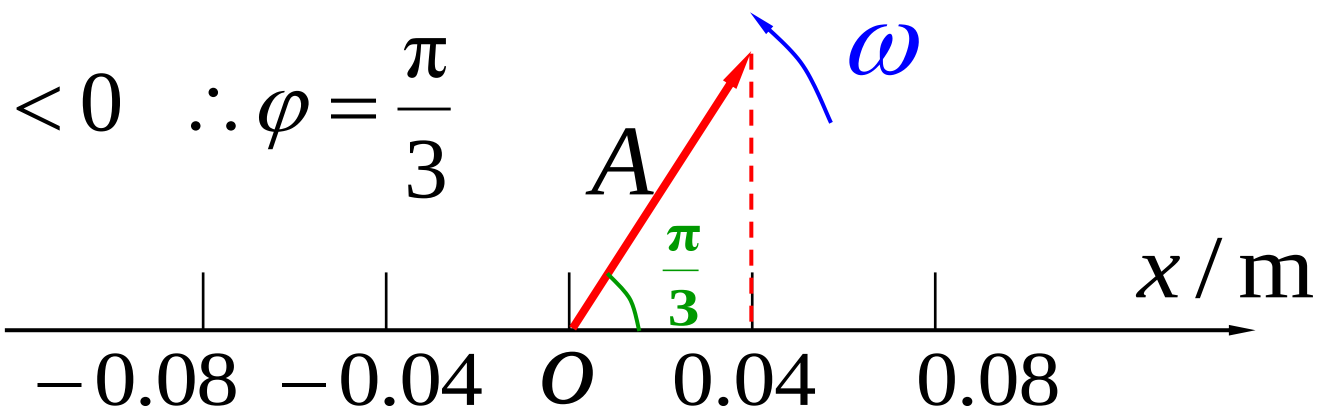
$t = 0, x = 0.04\,\mathrm{m}, v_0 < 0$ 求（1）$t = 1.0\,\mathrm{s}, x, F$

解 $A = 0.08\,\mathrm{m}\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{2}\,\mathrm{s}^{-1}$

$t = 0,\quad x = 0.04\,\mathrm{m}$

代入 $x = A\cos(\omega t + \varphi) \Longrightarrow \varphi = \pm\dfrac{\pi}{3}$

$\because v_0 < 0 \quad \therefore \varphi = \dfrac{\pi}{3}$



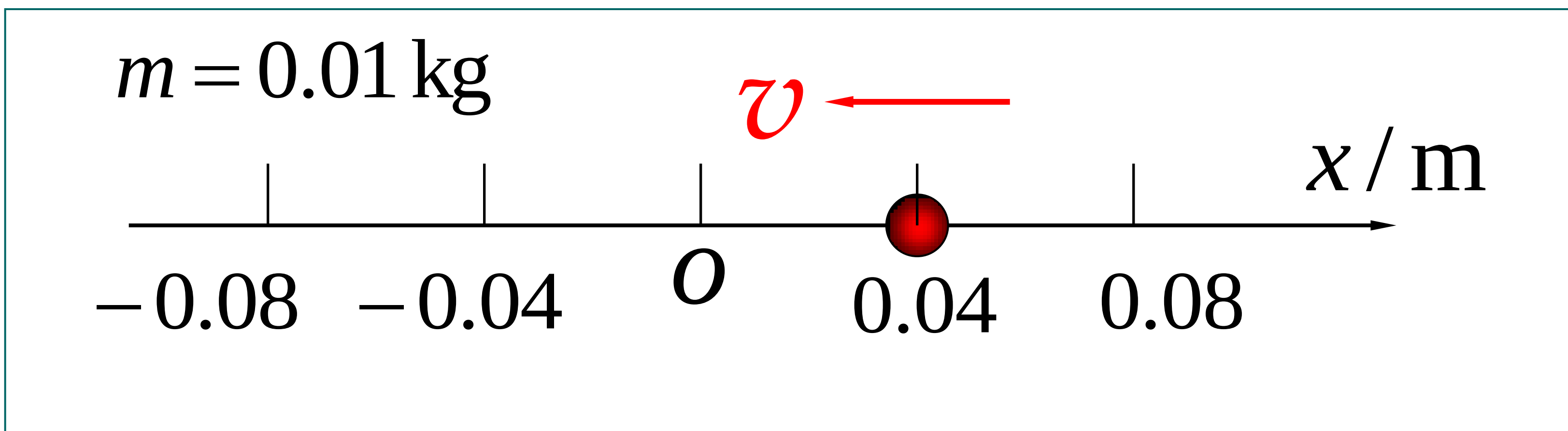
$$\because \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

可求（1） $t = 1.0\,\mathrm{s}, x, F$

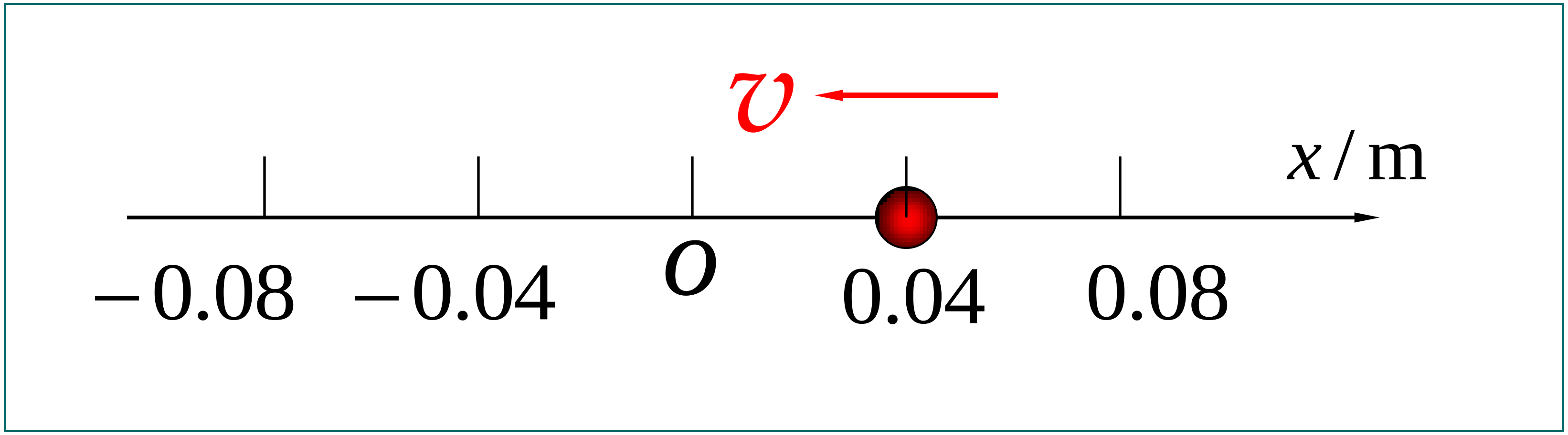
$t = 1.0\,\mathrm{s}$ 代入上式得 $x = -0.069\,\mathrm{m}$

$$F = -kx = -m\omega^2 x = 1.70\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$



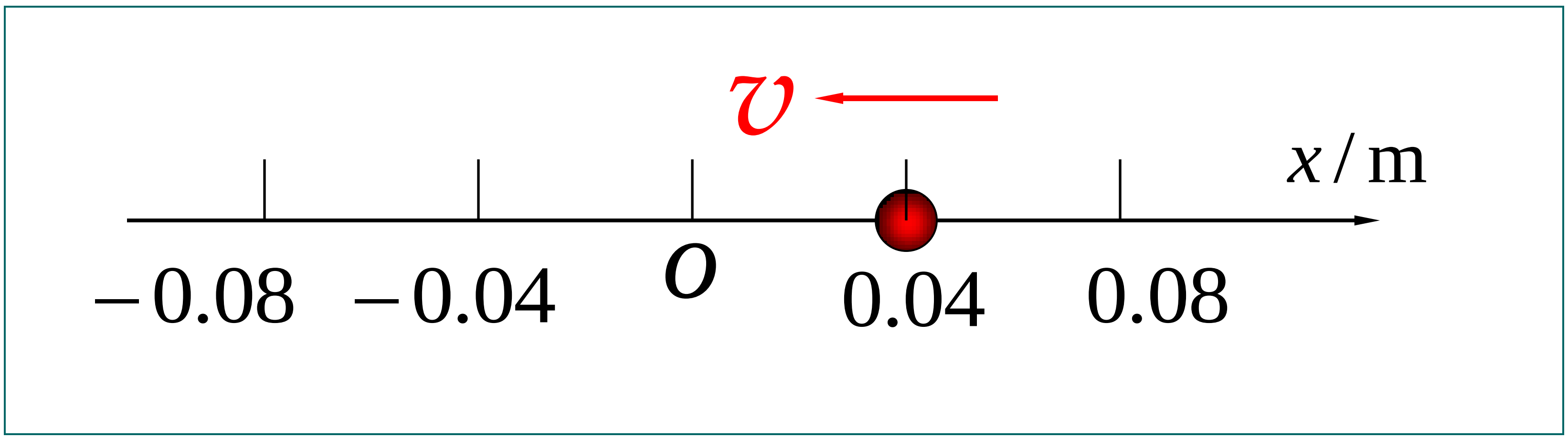
（2）由起始位置运动到x = -0.04 m处所需要的最短时间.

法一 设由起始位置运动到x= -0.04 m处所需要的最短时间为t

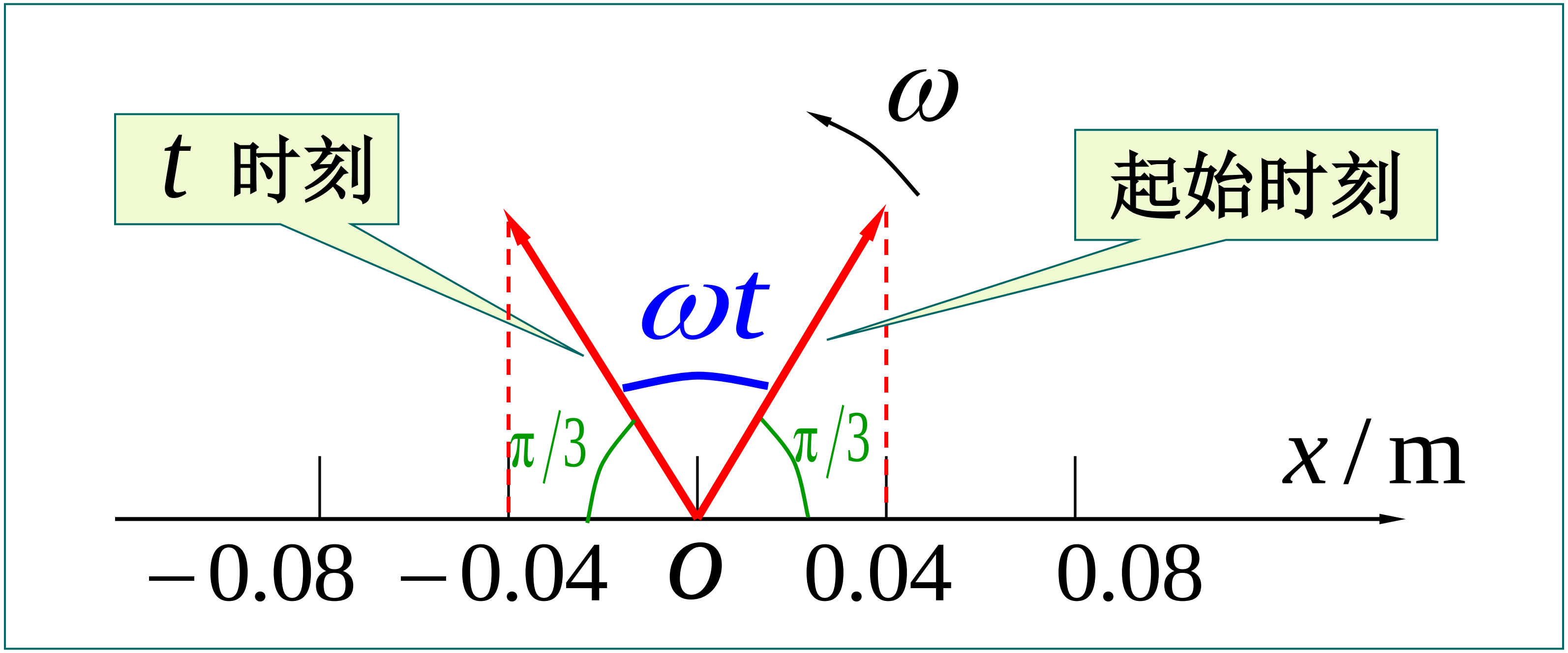


$$x = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3}) \Rightarrow -0.04 = 0.08\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{3})$$

$$t = \frac{\arccos(-\frac{1}{2}) - \frac{\pi}{3}}{\pi/2} = \frac{2}{3} = 0.667\ \mathrm{s}$$



法二



$$\omega t=\frac{\pi}{3}\qquad \omega=\frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\qquad t=\frac{2}{3}=0.667\ \mathrm{s}$$