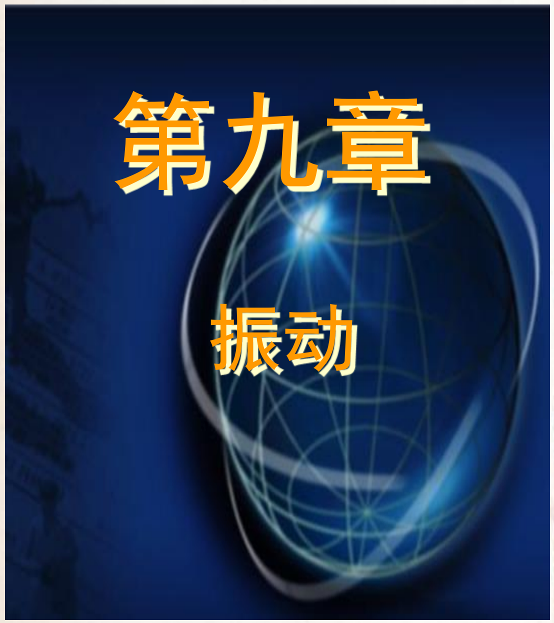
# 9-5　简谐运动的合成

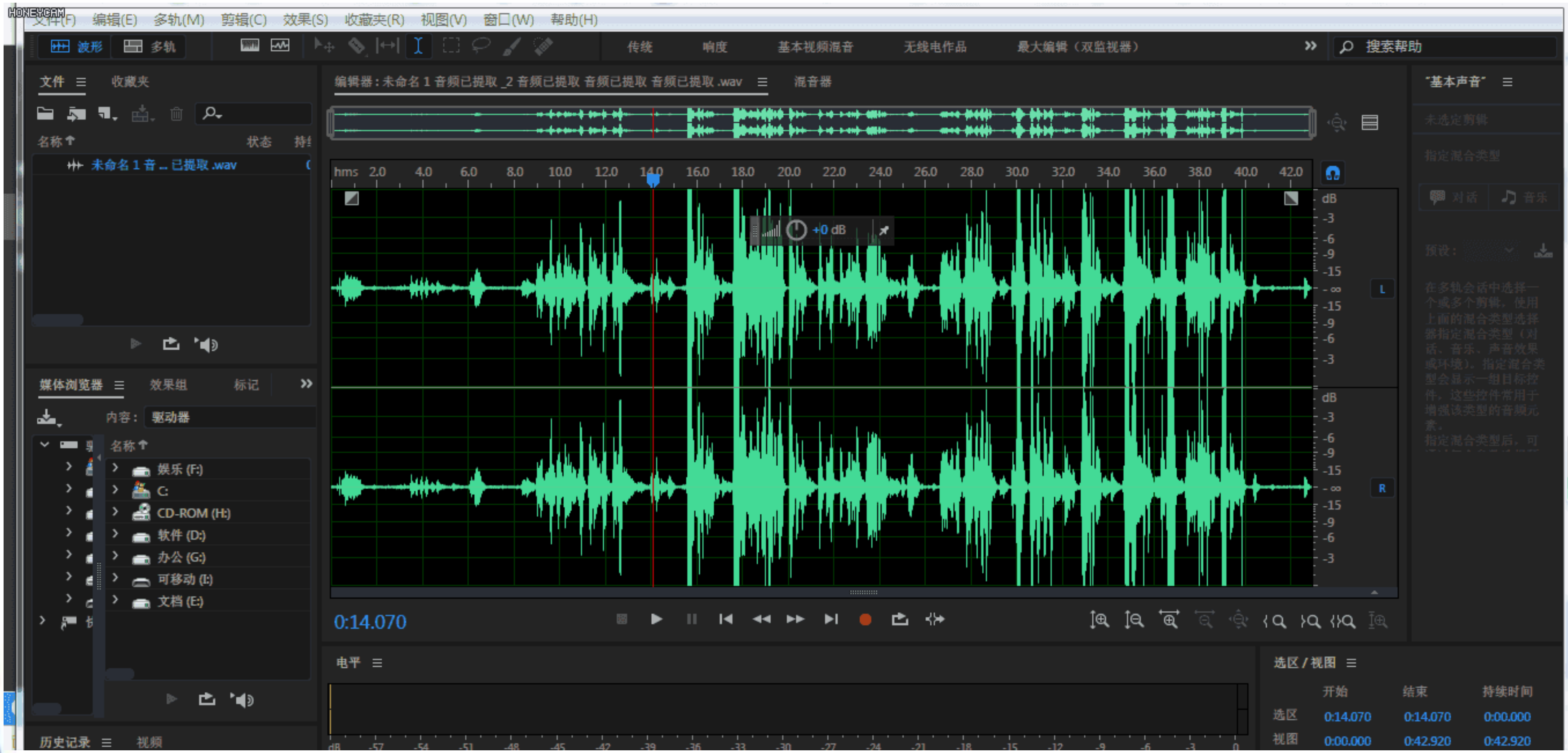



## 第5节《简谐振动的合成》

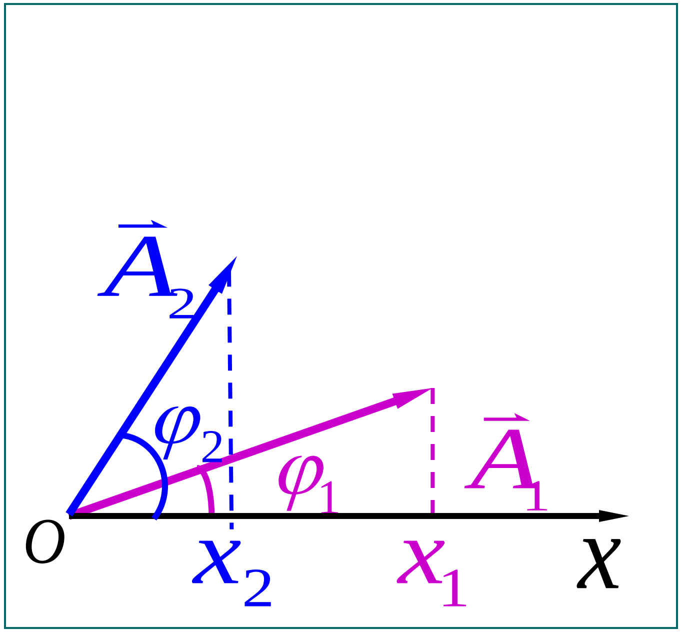
一　了解简谐振动的合成.

二　理解合成特征及条件和结论分析.

# 简谐运动的合成_音频处理



# 一 两个同方向同频率简谐运动的合成




设一质点同时参与两独立的同方向、同频率的简谐振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

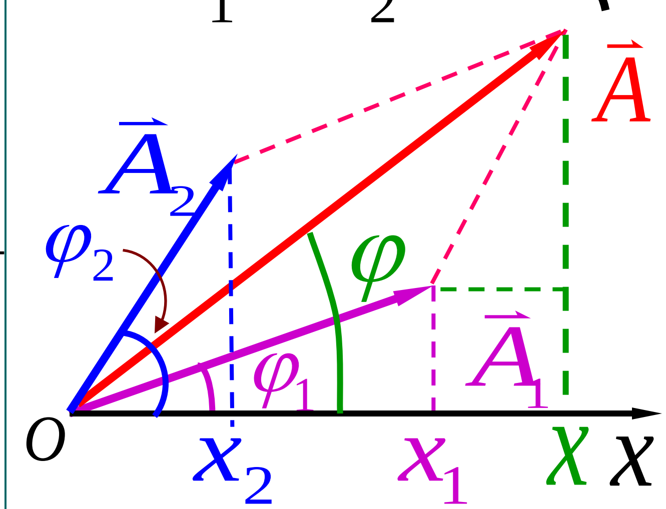
两振动的位相差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ =常数

# 9-5 简谐运动的合成

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

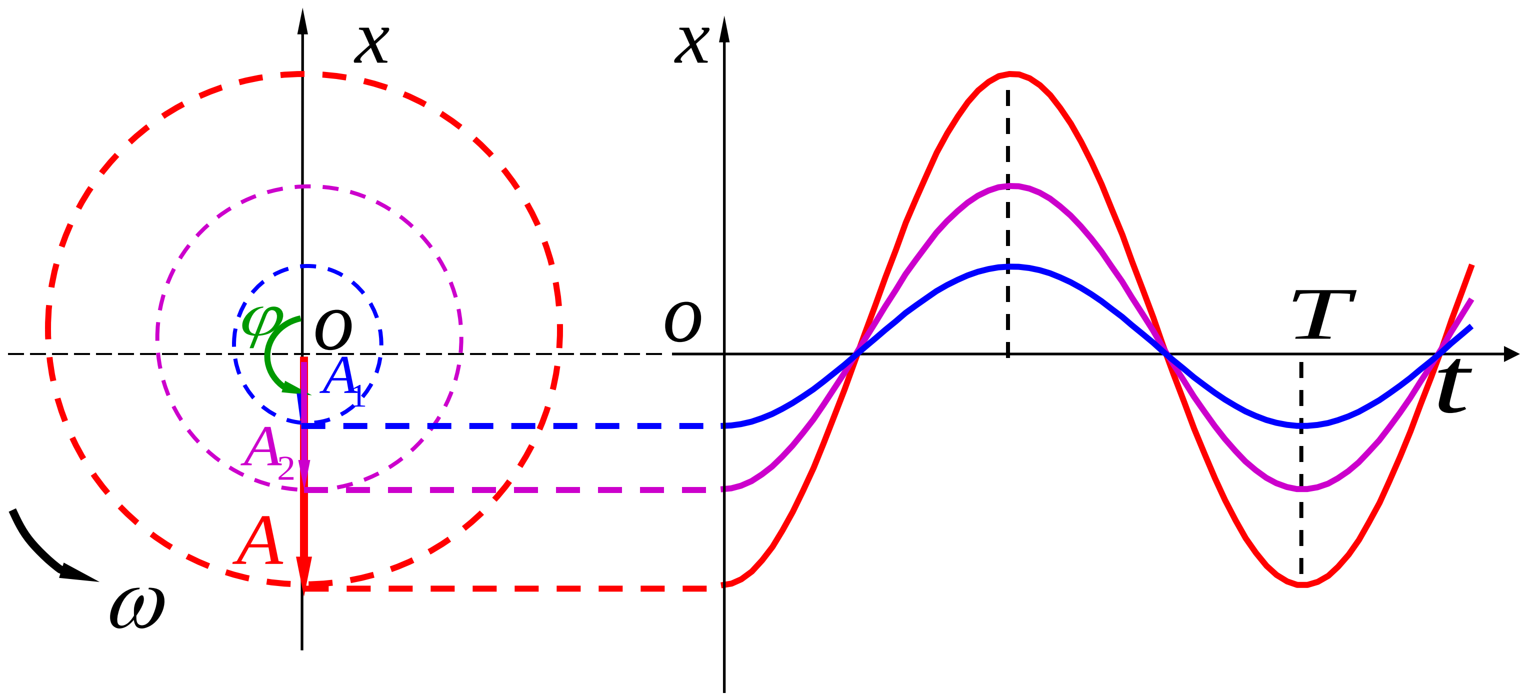
$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$




两个**同**方向**同**频率简谐运动**合成**后仍为**同**频率的**简谐**运动

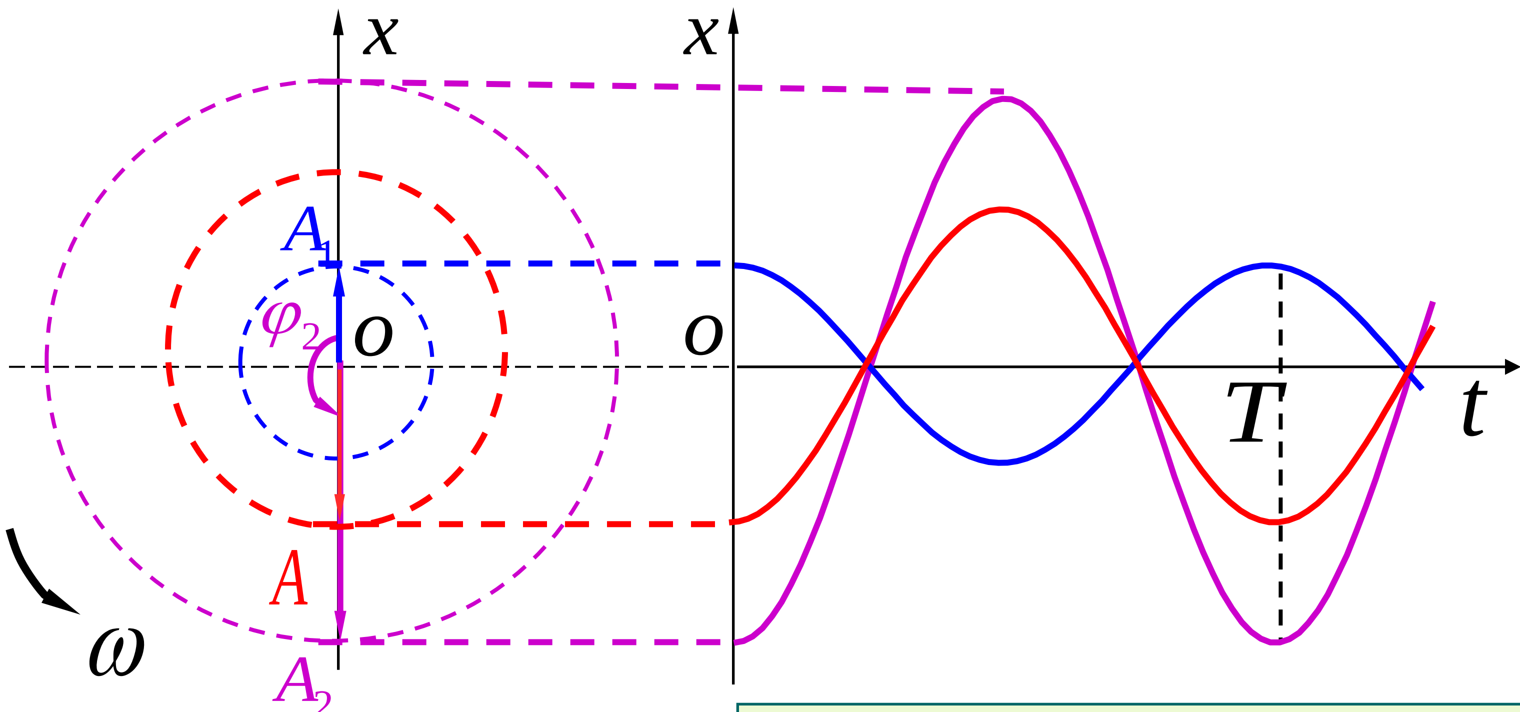
（1）相位差 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=2k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$




$$\begin{cases} A=A_1+A_2 \\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+2k\pi \end{cases}$$

$$\boxed{x=(A_1+A_2)\cos(\omega t+\varphi)}$$

（2）相位差$\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1=(2k+1)\pi\,(k=0,\pm1,\cdots)$




$$x=(A_2-A_1)\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases}A=|A_1-A_2|\\ \varphi=\varphi_2=\varphi_1+(2k+1)\pi\end{cases}$$

## 小结

（1）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$ $\boxed{\text{加强}}$

（2）相位差 $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = |A_1 - A_2|$$ $\boxed{\text{减弱}}$

（3）一般情况

$$A_1 + A_2 > A > |A_1 - A_2|$$

1、收音机的调谐就是利用共振来接收某一频率的电台广播。

2、弦乐器的琴身和琴筒，当短频率与长频率出现倍数的关系时，就会产生共振，成为用来增强声音的共鸣器。

3、股市技术分析中存在的共振现象往往能提供非常有效的介入时机。

4、消声器利用共振吞掉噪声，而且还能转变为热量来进行使用。

5、女高音高频的歌声会造成玻璃杯周遭的空气分子随之振动，并且频率与其共振频率相同，于是这个玻璃杯也会随之发生振动。而这名歌唱家的嗓音足够嘹亮，玻璃杯就可能因为大幅度的振动而碎裂。

## 二 两个相互垂直的同频率的简谐运动的合成

$$\begin{cases} x = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\ y = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

质点运动轨迹 （椭圆方程）

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

讨论

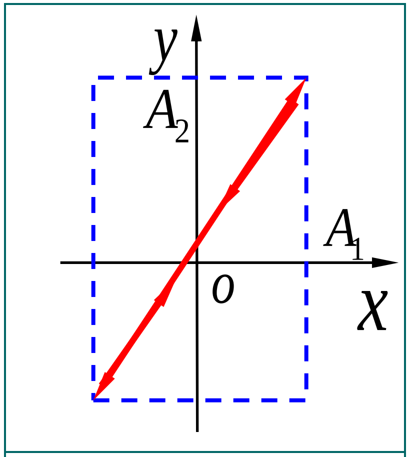
$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

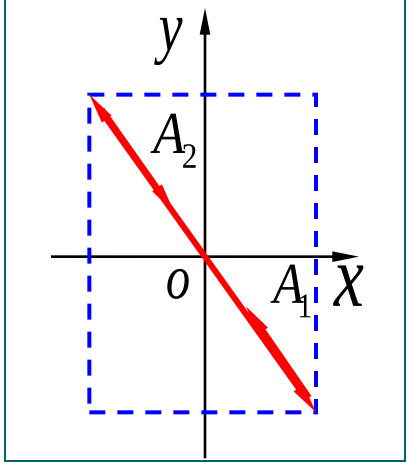
**（1）**$\varphi_2-\varphi_1=0$ 或 $2\pi$

$$y=\frac{A_2}{A_1}x$$

**（2）**$\varphi_2-\varphi_1=\pi$

$$y=-\frac{A_2}{A_1}x$$



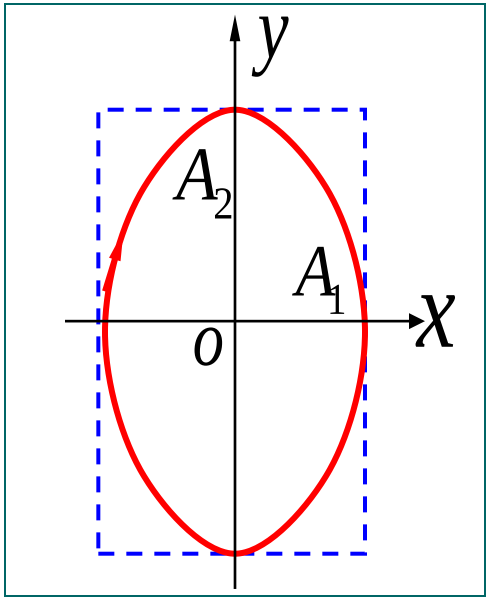
讨论

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-\frac{2xy}{A_1A_2}\cos(\varphi_2-\varphi_1)=\sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

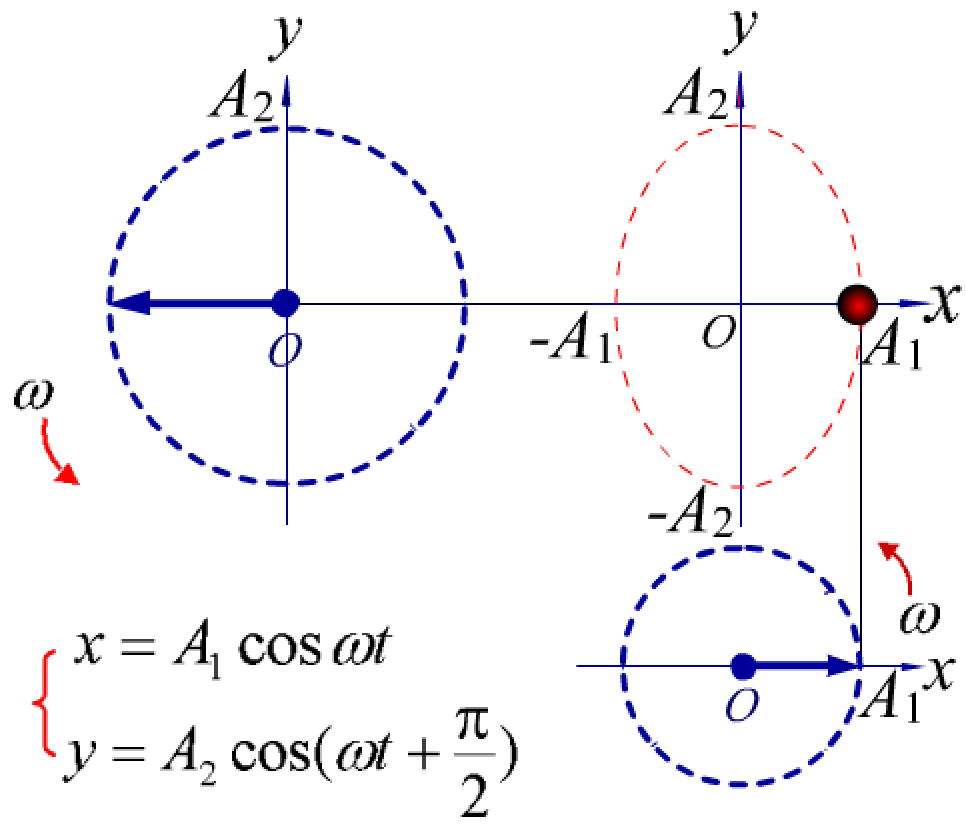
**（3）** $\varphi_2-\varphi_1=\pm\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}=1$$

$$\begin{cases} x=A_1\cos\omega t \\ y=A_2\cos(\omega t+\dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$



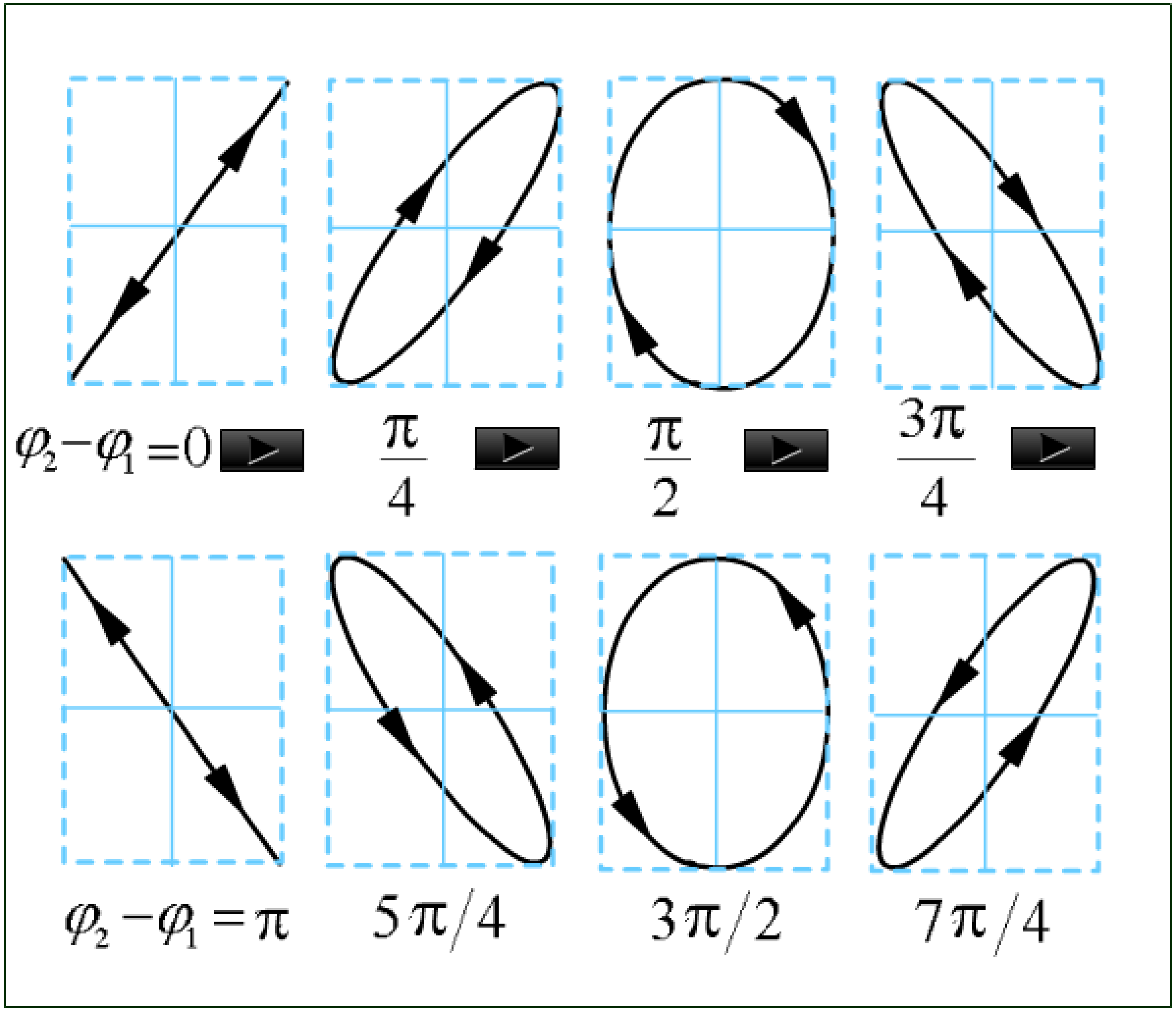
# 用旋转矢量描绘振动合成图




$$\begin{cases} x = A_1 \cos \omega t \\ y = A_2 \cos(\omega t + \dfrac{\pi}{2}) \end{cases}$$

# 9-5 简谐运动的合成

两相互垂直同频率不同相位差简谐运动的合成图

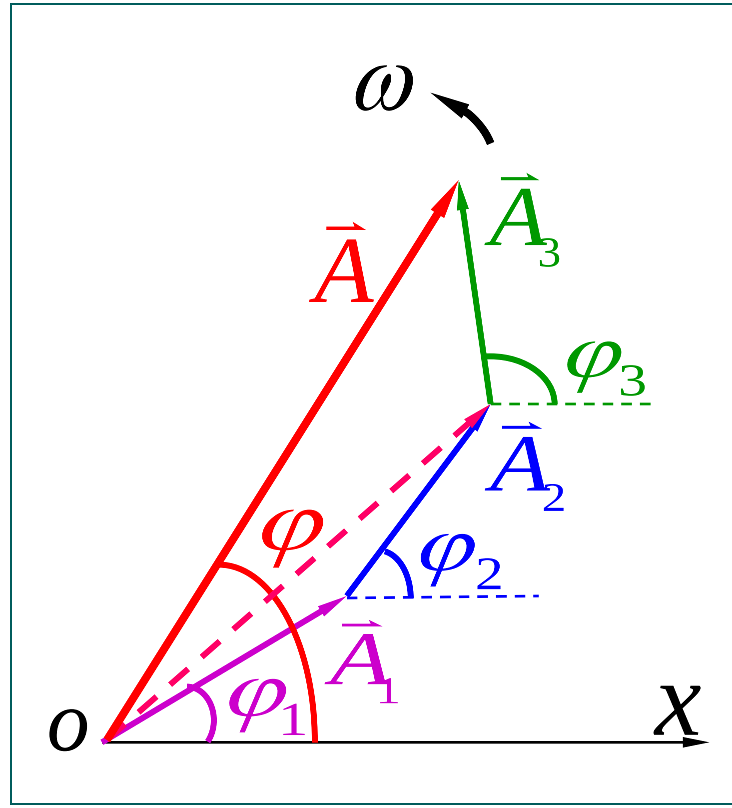


# *三 多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

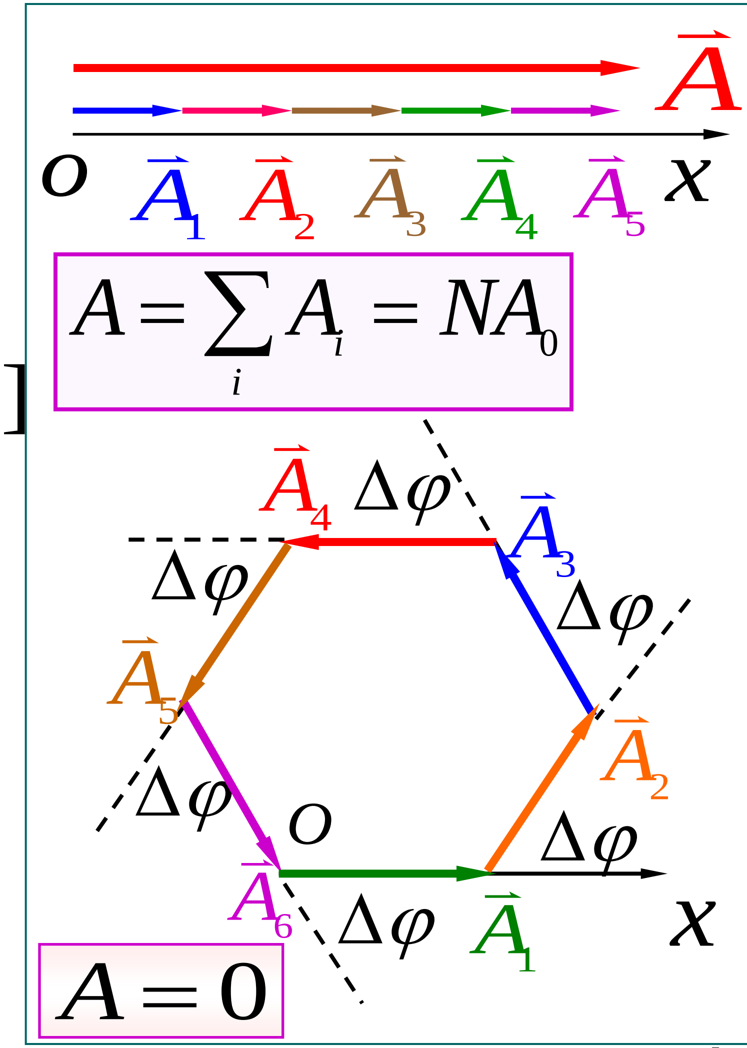
$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$




多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

$$\begin{cases} x_1 = A_0 \cos \omega t \\ x_2 = A_0 \cos(\omega t + \Delta\varphi) \\ x_3 = A_0 \cos(\omega t + 2\Delta\varphi) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_N = A_0 \cos[\omega t + (N-1)\Delta\varphi] \end{cases}$$




讨论

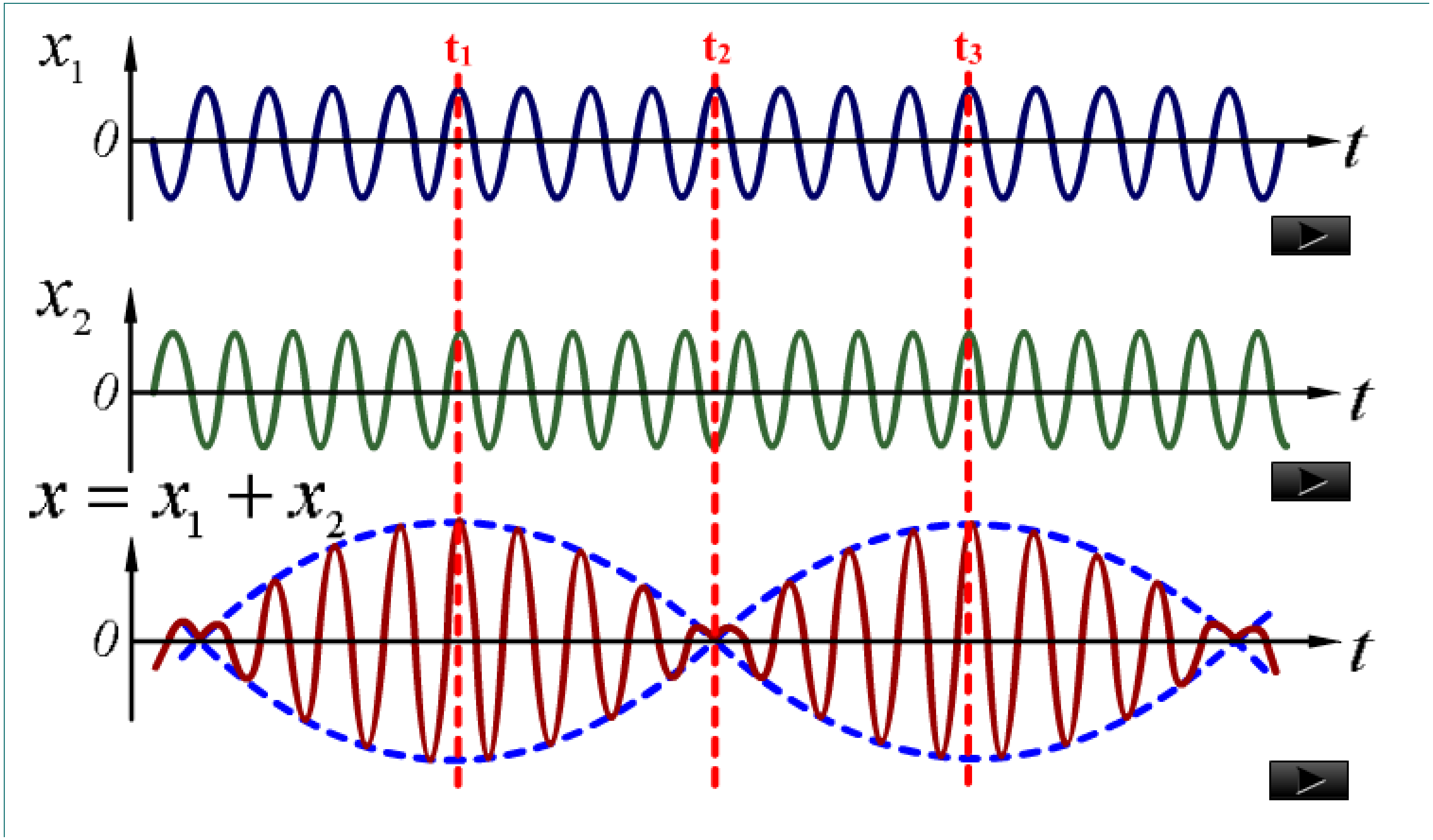
**(1)** $\Delta\varphi = 2k\pi$

$(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

**(2)** $N\Delta\varphi = 2k'\pi$

$(k' \neq kN, k' = \pm1, \pm2, \cdots)$

# 四 两个同方向不同频率简谐运动的合成



频率较大而频率之差很小的两个同方向简谐运动的合成，其合振动的振幅时而加强时而减弱的现象叫拍.

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos\omega_1 t = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t \\ x_2 = A_2 \cos\omega_2 t = A_2 \cos 2\pi\nu_2 t \end{cases}$$

$$\boxed{x = x_1 + x_2}$$

讨论 $A_1 = A_2$ , $|\nu_2 - \nu_1| << \nu_1 + \nu_2$ 的情况

## ◆ 方法一

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos 2\pi\nu_1 t + A_2\cos 2\pi\nu_2 t$$

$$x = \underbrace{(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t)}_{\text{振幅部分}}\cos 2\pi\underbrace{\frac{\nu_2+\nu_1}{2}}_{\text{合振动频率}}t$$

振动频率 $\nu = (\nu_1+\nu_2)/2$

振幅 $A = \left|2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t\right|$

$$\begin{cases} A_{max} = 2A_1 \\ A_{min} = 0 \end{cases}$$

# 9-5 简谐运动的合成

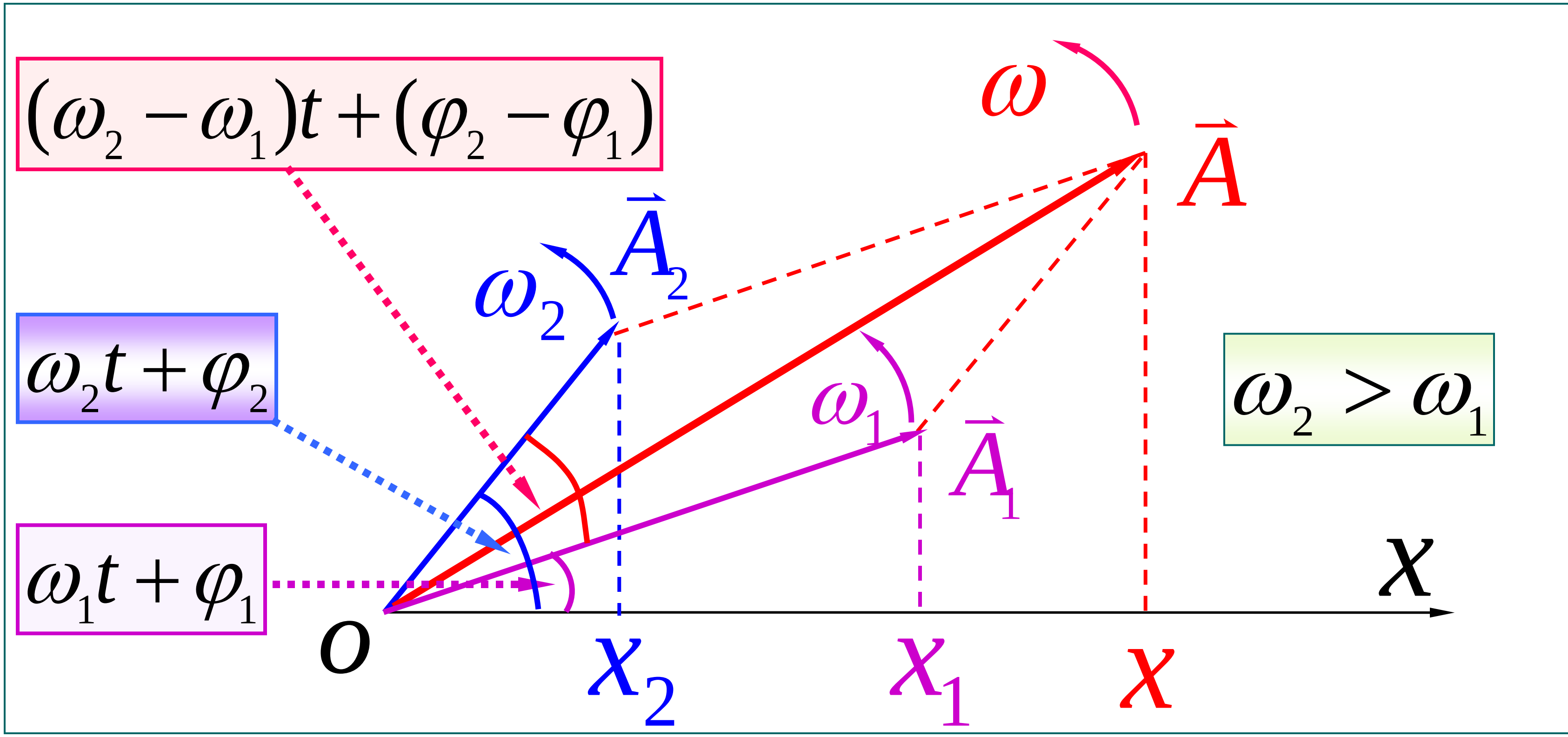
$$x=(2A_1\cos 2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}t)\cos 2\pi\frac{\nu_2+\nu_1}{2}t$$

$$2\pi\frac{\nu_2-\nu_1}{2}T=\pi \quad \Rightarrow \quad T=\frac{1}{\nu_2-\nu_1}$$

$$\boxed{\nu=\nu_2-\nu_1}$$

**拍频**（振幅变化的频率）

## 方法二：旋转矢量合成法




$$\varphi_1=\varphi_2=0 \qquad \Delta\varphi=2\pi(\nu_2-\nu_1)t$$

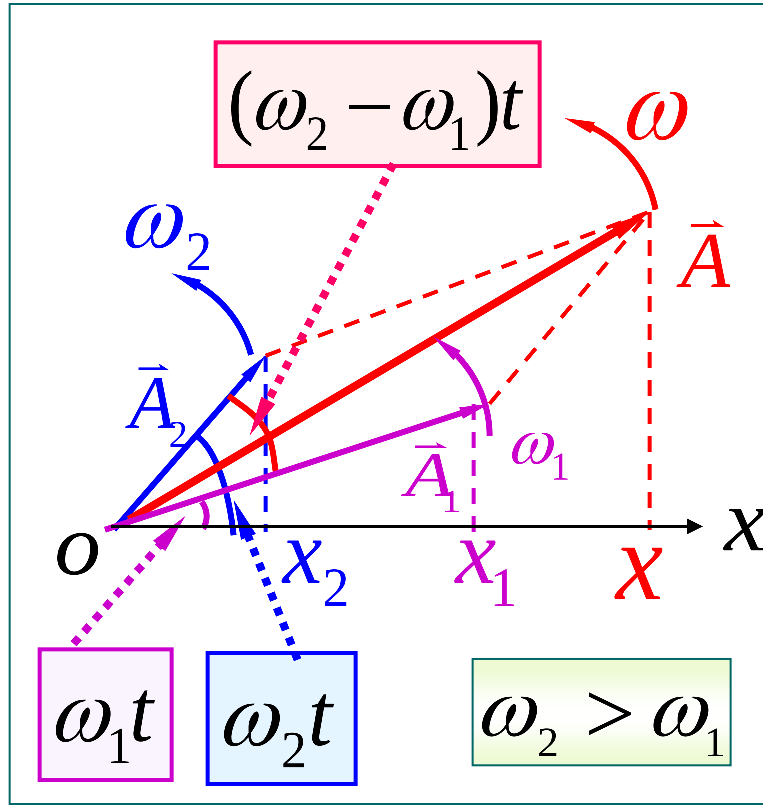
振幅 $A = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)}$

$$= \left|2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\right|$$

拍频 $\nu = \nu_2 - \nu_1$

振动圆频率

$$\cos\omega t = \frac{x_1+x_2}{A} \qquad \omega = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$$



## 五、两个频率不同、相互垂直谐振动的合成

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

| $\omega_1 / \omega_2$ | 轨迹 | 周期性 |
|---|---|---|
| 整数 | 闭合曲线 | 周期性运动 |
| 非整数 | 非闭合曲线 | 非周期性运动 |

测量振动频率和相位的方法。

# 李萨如图