1. Решить систему уравнений методом Гаусса: 1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -2; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \to V_2 = 2V_1 - V_2 \\ \to V_3 = V_1 - V_3 \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} -x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_3 + x_4 = -4 \end{cases}$$

$$2x_3 + x_4 = -4 \Rightarrow x_3 = -\frac{(4 + x_4)}{2};$$

$$x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \Rightarrow x_2 = 2 + x_3 - 3x_4 = 2 - \frac{4 + x_4}{2} - 3x_4;$$

$$x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0;$$

$$x_1 = x_3 - x_2 - 2x_4 = -\frac{4 + x_4}{2} - \left(2 - \frac{4 + x_4}{2} - 3x_4\right) -$$

$$-2x_4;$$

$$x_4 \in \mathbb{R};$$

а) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$

$v_2 = 3v_1 - v_2$

$v_3 = 2v_1 - v_3$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -3 & -17 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 7 & -5 & -17 \end{array}\right) \to$$

$v_3 = \frac{7}{4} \cdot v_2 - v_3$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & -24 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right);$$

$x_3 = 12;$

$x_2 - 12 = -1 = 11;$

$x_1 + 11 - 12 = 1;$

б) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 = 1; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -2; \\ 3x_1 - 6x_2 + 9x_3 = 5, \end{cases}$

$v_2 = 3v_1 - v_2 \quad v_3 = 2v_1 - v_3$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 6 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 3 & -6 & 9 & 5 \\ 2 & -4 & 6 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right);$$

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = -11$; система не имеет решений.

2

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4 \\ 3x_1 + x_2 - 8x_3 = -2 \end{cases}$

$v_2 = 3v_1 - v_2$

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -8 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 23 & 14 \end{array}\right)$$

$x_3 \in \mathbb{R}$;

$5x_2 + 23x_3 = 14$;

$x_2 = \dfrac{14 - 23x_3}{5}$;

$x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4$;

$x_1 = 4 - 2x_2 - 5x_3 = \dfrac{21x_3 - 8}{5}$;

3.1

1. $f(x) = x$

а) $f'(x) = 1$;

б) $x \in \mathbb{R}$; $f \in \mathbb{R}$

в) Монотонная

2. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$;

а) единственное значение f' на ~~области опред~~ $\mathbb{R}$ не существует, но на $x<0$ и $x>0$ $f'=0$;

б) $x < 0$ $f \in \{0\}$; $x \geq 0$ $f \in \{1\}$;

в) Немонотонная, так как недифф. в точке 0.

3. $f(x) = th(x) = \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})}$.

а) $\frac{1}{\cosh^2(x)}$;

б) $x \in \mathbb{R}$, $f \in (-1; 1)$;

в) Монотонная

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$

а) на $x < 0$ $f'(x) = 0$

на $x > 0$ $f'(x) = 1$

б) $x \in (-\infty; 0)$, $f \in \{0\}$

$x \in [0; +\infty)$, $f \in [0; +\infty)$

в) Монотонная, так как дифф. на $\mathbb{R}$ и мон. возрастающая

3.2

5) $f(x) = \ln(1+e^x)$,

а) $f'(x) = \ln(1+e^x) = f' \cdot g' = \frac{1}{1+e^x} \cdot (1+e^x)' = \frac{e^x}{1+e^x}$;

б) $f(x) \in (0; +\infty)$;
$x \in \mathbb{R}$;

в) Монотонная, так как строго возрастающая и дифф.

6. $f(x) = \sin(x)$

а) $f'(x) = \cos x$

б) $f(x) \in [-1; 1]$

в) Немонотонная.