Задача о минимальной надстроке

Жуков Владислав 499

В данной работе рассматривается задача о минимальной надстроке. Доказывается ее NP полнота, а также рассматриваются приближенные алгоритмы для ее решения.
Дадим формальное определение для этой задачи, а также понятиям, которые нам понадобятся при доказательстве ее NP полноты

Определение 1. Пусть задано множество строк $A = \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ над конечным алфавитом. Требуется найти такую строку ω, что все строки из множества A являются подстроками ω и длина ω минимальна. Назовем эту задачу "задачей о надстроке"или SSP.

Определение 2. $overlap(s_1, s_2)$ Это длина наибольшего x, такого что $s_1 = ax$ и $s_2 = xb$ для некоторых строк a и b. Проще говоря, это длина максимально возможного перекрытия двух строк.

Определение 3. $pr(s1, s2)$ Это строка a из предыдущего определения.
Понятно, что длина минимальной надстроки для двух строк - это длина строки, получившейся путем "схлапывания"(т.е. конкатинации с удалением перекрытия x из определения) двух строк в правильном порядке. (для строк a и b длина их надстроки будет: $|a| + |b| - overlap(a, b)$). Вообще говоря, для любого количества строк, надстрока для них получается путем схлапывания этих строк в некотором правильном порядке. На этой простой идее будут основываться все приблеженные алгоримы во второй части работы.
Доказывать NP полноту будем, сводя задачу о Гамильтоновом пути к нашей задаче. Поэтому нам понадобятся следующие определения.

Определение 4. $G(V, E)$ обозначает граф G с множеством вершин V и множеством ребер E.

Определение 5. Для неориентированного графа $IN(v), OUT(v)$ - обозначают количество входящих и выходящих ребер соответственно из вершины v.

Определение 6. $\oplus$ обозначает сложение по модулю $OUT(v)$ для вершины v(вершина будет указана явно).

Определение 7. (Задача об ограниченном направленном Гамильтоновом пути)
Задача напревленного Гамильтонова пути:

Дан ориентированный граф G, есть ли в нем путь проходящий по всем вершинам ровно по одному разу. Про эту задачу известно, что он NP-полная.
Задача ограниченного направленного Гамильтонова пути:

Это задача направленного Гамильтонова пути сго следующими ограничениями:
Есть назначенная стартовая вершина s и конечная вершина t, такие, что $IN(s) = OUT(t) = 0$. Все вершины кроме конечной вершины t, имеют исходящую степень большую 1.
Идея доказательства NP полноты состоит в том, чтобы построить по данному нам графу такое множество строк, что минимальная надстрока задавала бы гамильтонов путь в этом графе, таким образом мы сведем задачу ограниченного направленного Гамильтонова пути к задаче о минимальной надстроке.

Теорема 1. SSP с бесконечным алфавитом является NP-полной.

Доказательство: Пусть $G = (V, E)$ это граф из задачи ограниченного напревленного Гамильтонова пути, где V это множество целых чисел от 1 до n(1 это начальная вершина и n это конечная вершина) и $|E| = m$. Мы построим строки для G над алфавитом $\Sigma = V \cup B \cup S$, где $B = \{\overline{v} | v \in V - \{n\}\}$ множество "запрещенных"символов, а S - множество специальных символов. Запрещенные символы являются "локальными"для каждой вершины, тогда как специальные являются "глобальными"символами для всего графа G. Для каждой вершины $v \in V - \{v\}$ мы сопоставим множество A_v содержащее $2OUT(v)$ строк. Пусть $R_v = \{\omega_0, ..., \omega_{OUT(v)-1}\}$ это множество вершин соединенных с v. Тогда, $A_v = \{\overline{v}\omega_i\overline{v} | \omega_i \in R_v\} \cup \{\omega_i\overline{v}\omega_{i\oplus 1} | \omega_i \in R_v\}$, где $\oplus$ обозначает сложение по модулю $OUT(v)$.

Для каждой вершины $v \in V - \{1, n\}$ создаем множество C_v из одного элемента, содержащее строку $v\#\overline{v}$ называемую соединителем или коннектором. Введем множество, которое содержит терминальные строки $T = \{\%\#\overline{1}, n\#\$\}$. Пусть S это объединение

$A_j, 1 \leq j < n$; $C_j, 1 \leq i < n$ и T. Утверждается, что G имеет направленный Гамильтонов путь в том и только в том случае, если S имеет надстроку длины $2m + 3n$.

Предположим, что в G есть направленный Гамильтонов путь. Пусть (v, ω_i) ребро из этого пути. Для начала построим надстроку длины $2OUT(v) + 2$ для A_v вида

$$\overline{v}\omega_i\overline{v}\omega_{i\oplus 1}\overline{v}...\overline{v}\omega_i$$

, называемую ω_i-стандартной надстрокой для A_v. Эта надстрока сформирована "схлапыванием"перекрытий строк A_v в порядке

$$\overline{v}\omega_i\overline{v}, \omega_i\overline{v}\omega_{i\oplus 1}, \overline{v}\omega_{i\oplus 1}\overline{v}, ..., \overline{v}\omega_{i\oplus OUT(v)-1}\overline{v}, \omega_{i\oplus OUT(v)-1}\overline{v}\omega_i$$

, где каждая последующая пара имеет перекрытие длины 2. Отметим, что множество ω_i-стандартных надстрок для A_v переходят друг в друга в соответствии с циклическими перестановками целых чисел от 0 до $OUT(v) - 1$ Пусть $u_1, u_2, ..., u_n$ обозначает направленный Гамильтонов путь где $u_1 = 1, u_n = n$ и обозначим стандартную u_j надстроку для A_{u_i} как $STD(\overline{u_i}, u_j)$. Мы можем построить надстроку для для S как схлапывание стандартных надстрок и строк из S в конкретном порядке:

$$\%\#\overline{1}, STD(\overline{1}, u_2), u_2\#\overline{u_2}, STD(\overline{u_2}, u_3), u_3\#\overline{u_3}, ...u_{n-1}\#\overline{u_{n-1}}, STD(\overline{u_{n-1}}, n), n\#\$$$

Можно понимать стандартные надстроку с номером b для A_a как ребро (a, b). А под вершиной понимать соответствующий этой вершине коннектор. Изобразим данную логику на картинке:

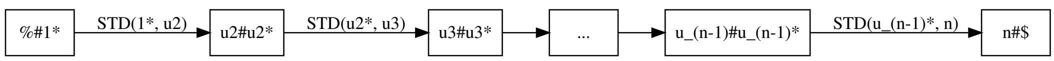


Рис. 1: Строка, построенная по циклу(Здесь $v*$ обозначает $\overline{v}$)

Надстрока имеет длину $\sum_{i=1}^{n-1}(2OUT(i) + 2) + (n - 2) + 4 = 2m + 3n$.

Чтобы доказать обратное утверждение, мы покажем, что $2m+3n$ это нижняя граница размера надстроки S и затем покажем, что эта нижняя граница может быть достигнута только в случае если надстрока кодирует Гамильтонов путь. Всего мы имеем $2m + n$ строк, в сумме их длина $3(2m+n)$. Наибольшее "сжатие"дает порядок, в котором каждая строка кроме первой имеет перекрытие длины 2 с обеих сторон. Этот порядок должен дать надстроку длины $3(2m + n) - 2(2m + n - 1) = 2m + n + 2$. Однако, n - 2 коннектора могут иметь перекрытие только длины 1 с обеих сторон, т.к. ни одна строка не начинается и не заканчивается с символа #. К тому же терминальные строки могут перекрываться максимум на 1 символ только с одной строны. Соблюдая эти условия, мы имеем нижнюю границу на длину надстроки в $(2m + n + 2) + 2(n - 2) + 2 = 2m + 3n$ для S. Отметим, что она начинается с $\%\#\overline{1}$ и заканчивается $n\#\$$.

Рассмотрим два вхождения # в такую надстроку. Обозначим за x то, что находится между этими двумя знаками #. Первый символ из x должен быть запрещенным, а последний не запрещенным, поскольку они являются подстрокой соединителя. Если в x нет соеденителей, то тогда все подстроки кроме первой и последней должны иметь перекрытие 2 с обеих сторон. Первая строка должна быть $\overline{v}u_j\overline{v}$, следующая $u_j\overline{v}u_{j\oplus 1}$ и так далее. Более того, все строки в A_v кроме двух последних должны иметь перекрытие длины 2 с обеих сторон, так каждая последующая строка должна быть "добита"уникальной строкой, которая перекрывается с ней на 2 символа. Таким образом все строки в A_v должны появляться в конкретном порядке, и если x содержит одну строку из A_v, то он обязан содержать их все. Таким образом, x - это стандартная надстрока для A_v Применяя рассуждения выше ко всем вхождениям пар # мы получаем $n - 1$ различную стандартную строку. Мы можем восстановить Гамильтонов путь смотря на символы следующие за каждым вхождением #, причем запрещенные и не запрещенные символы каждого соединителя отвечают одной и той же верщине в G. Отметим, что в силу расположения $\%\#\overline{1}$ и $b\#\$$, мы получаем путь из 1 в n

Построение приближенного алгоритма и доказательство 4-приблеженности

Определение 8. Префиксным графом для мнжества строк S назовем полный ориентированный граф, в котором вершинами являются строки из S, где ребро (s_i, s_j) имеет вес $pr(s_i, s_j)$

Определение 9. Обозначим за $\langle s_{i_1}, s_{i_2}...s_{i_n}\rangle$ строку:

$$pr(s_{i_1}, s_{i_2})pr(s_{i_2}, s_{i_3})...pr(s_{i_{n-1}}, s_{i_n})s_{i_n}$$

Пусть S это множество строк из задачи о минимальной надстроке. Мы попытаемся построить другое множество R, такое что:
1) Строки в R не сильно перекрываются,
2) Каждая строка $s \in S$ имеет надстроку в R, так что любая надстрока для R является надстрокой для S,
3) Оптимальное решение OPT_R для R не сильно хуже оптимального решения OPT_S для S.
Как только мы построили такое R мы можем найти приближенное решение для R сведением к асимметричному наибольшем пути в TSP
Построим множество для R.
1) Найдем минимальное покрытие циклами $\mathcal{C}$ в графе префиксов.
2) Для каждого цикла $C \in \mathcal{C}$, построим представление $r(C)$ содержащее все строки для C как подстроки. Пусть $C = \{s_{i_1}, ..., s_{i_k}\}$ мы можем взять $r(C) = \langle s_{i_1}, ..., s_{i_k}\rangle$
3) R это множество всех представлений.

Лемма 1. Суммарная длина $\omega(\mathcal{C})$ всех циклов минимального покрытия $\mathcal{C}$ ограничена сверху величиной $\leq OPT$ оптимального решения.
Доказательсво Верно поскольку суммарная длина минимального покрытия циклами графа префиксов не больше чем длина минимального TSP пути графе, которая является оценкой снизу для OPT. (Поскольку OPT имеет вид $\langle s_{i_1}, ..., s_{i_n}\rangle$ и его длина больше чем цикл на этих же вершинах в префиксном графе)

Лемма 2. $OPT_R \leq 2OPT_S$
Доказательство:
Вспомним, что все строки $r \in R$ имеют вид $r = \langle s_{i_1}, ..., s_{i_k}\rangle$. Рассмотрим немного более длинные $\hat{r} = \langle s_{i_1}, ..., s_{i_k}, s_{i_1}\rangle$. Мы покажем, что $OPT_{\hat{R}} \leq 2OPT_S$
Каждая строка $\hat{r} \in \hat{R}$ начинается и кончается с одной и той же строки, обозначим ее за $s(\hat{r})$. Пусть $S(\hat{R})$ это набор таких строк $s(\hat{r})$. Очевидно $OPT_{S(\hat{R})} \leq OPT(S)$. Но отметим, что отимальное решение для $S(\hat{R})$ может быть найдено из решения для $\hat{R}$. Просто заменим каждую $s(\hat{r})$ на соответствующуу строку r. Замена $s(r)$ на r увеличивает длину решения на длину цила C соответствующего r, таким образом все замены суммарно увеличивают размер решения на $\omega(\mathcal{C})$, который оценивается сверху по предыдущей лемме $\leq OPT$.

Лемма 3. Пусть c_1, c_2 это два цикла минимального покрытия C для графа префиксов и пусть $r(c_1)$ и $r(c_2)$ это представления для этих циклов, как определено выше. Тогда

$$ov(r(c_1), r(c_2)) < \omega(c_1) + \omega(c_2)$$

Перед тем как доказать эту лемму нам нужно сделать несколько технических определений и наблюдений. Для любого цикла $c = s_{i_1}, ..., s_{i_k} \in \mathcal{C}$ в префиксном графе S, введем следующее обозначение:

$$s(c) = pr(s_{i_1}, s_{i_2})pr(s_{i_2}, s_{i_3})...pr(s_{i_{k-1}}, s_{i_k})pr(s_{i_k}, s_{i_1})$$

Обозначим за s^∞ строку вида $ssss...$

Лемма 4. Для любого цикла $c = s_{i_1}, ..., s_{i_k}$ в префиксом графе для S, каждая s_{i_j} является подстрокой $[s(c)]^\infty$. Также, $r(c) = \langle s_{i_1}, ..., s_{i_k}\rangle$ является подстрокой $[s(c)]^\infty$
Доказательство

Вспомним, что для любых s, t мы имеем $s = pr(s,t)ov(s,t)$, поэтому s является подстрокой (префиксом) $pr(s,t)t$ Таким образом s_{i_j}это префикс для строки $pr(s_{i_j}, s_{i_{j+1}})s_{i_{j+1}}$, которая в свою очередь является префиксом для $pr(s_{i_j}, s_{i_{j+1}})pr(s_{i_{j+1}, s_{i_{j+1}}})s_{i_{j+2}}$ и так далее. Продолжая таким же образом по циклу c мы доказываем утверждение для s_{i_j}. По тем же причинам доказательство работает для $r(c)$ Обратное утверждение также верно

Лемма 5. Если все строки $\hat{S} \subseteq S$ являются подстроками t^∞, тогда сущетвует цикл длины $|t|$ в графе префиксов для S, такой что он содержит все этим строки.
Доказательство.
Если строка s является подстрокой t^∞, то она появляется в t^∞ каждые $|t|$ символов. Таким образом задается циклический порядок на строках из $\hat{S}$ и легко видеть, что этот порядок дает цикл длины $|t|$ в префиксном графе.
продолжение доказательства леммы 3
Пусть $x, |x| \geq \omega(c_1) + \omega(c_2)$ это перекрытие $r(c_1)$ и $r(c_2)$. Тогда x является подстрокой $[s(c_1)]^\infty$ (поскольку $r(c_1)$ является) и $[s(c_2)]^\infty$ (поскольку $r(c_2)$ является). Пусть x_1 это префикс x длины $\omega(c_1)$ и x_2 это префикс x длины $\omega(c_2)$. Очевино, x это префикс x_1^∞ и x_2^∞. Теперь, поскольку $|x| \geq \omega(c_1) + \omega(c_2) = |x_1| + |x_2|$, мы имеем $x_1x_2 = x_2x_1$. Но это значит, что $x_1^k x_2^k = x_2^k x_1^k$ для любого k (по индукции), поэтому $x_1^\infty = x_2^\infty$

Любая строка в c_1 является подстрокой x_1^∞(по лемме 4, поскольку x_1 является циклическим сдвигом $s(c_1)$), по этому она также является подстрокой x_2^∞. Также любая подстрока в c_2 является подстрокой x_2^∞. Таким образом по лемме 2, все строки в циклах c_1 и c_2 сожержатся в одном цикле длины $\omega(c_2)$, что противоречит предположению, что c_1 и c_2 являются минимальными циклическими покрытиями.
Из леммы 3 и леммы 1 вытекается следущее

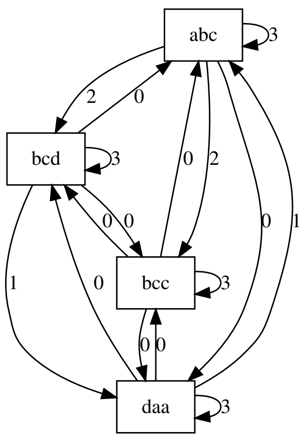
Лемма 6. Суммарное перекрытие любого решения для множества представлений R $\leq 2OPT_S$

4-приблеженный алгоритм для имплементации:
1) Для множества строк S построиммножество представлений R
2) Вернем конкатенацию всех строк из R

Теорема 2. Описанный выше алгоритм является 4-приближенным алгоритмом
Доказательство. Рассмотрим оптимальное решение для множества R. Длина OPT_R решения $\leq 2OPT_S$. Также суммарное перекрытие этого оптимального решения $\leq 2OPT_S$ по лемме 5. Но общая длина $|R|$ строк в R в точности равняется сумме длин OPT_R оптимального решения и его суммарного перекрытия, поэтому $|R| \leq 4OPT_S$

4 приближенный алгоритм

Построим граф $G = (V, E)$, где $V = 1..n, E = \{(i, j, overlap(s_i, s_j))|i, j = 1..n, i \neq j\}$ - последнее множество, это множество троек (начальная вершина, конечная вершина, вес). Затем для данного графа G найдем покрытие циклами минимального суммарного веса. Это и будет 4-приближенный алгоритм для задачи.



Пример: граф построенный для ['abc', 'bcd', 'daa', 'bcc']

Вычислим жадное назначение для данного графа G

Будем хранить его в массиве из n чисел, обозначим его за A.
объявим все ребра незачеркнутыми
повторять пока остаются незачеркнутые ребра.
1)Выберем ребро (i, j) максимального веса среди незачеркнутых
2)Зачеркнем все рабра выходящие из i и входящие в j
3)A[i] = j

Наконец найдем покрытие минимального суммарного веса

0)Повторям пока есть непосещенные вершины.
1) Возьмем вершину непосещенную вершину i. Отметим как посещенную. Положим $s = i$
2)while True:
Далее если $A[i]$ совпадает с s, то добавим цикл в результат, закончить цикл, перейти к пункту (0)
иначе $i = A[i]$

Запуски описанного алгоритма, проверка 2-приближенности жадного алгоритма для маленьких строк

Далее приведен Ipython notebook. К сожалению nbpdfconverter не поддерживает кириллицу, поэтому пояснения приведены на английском.

task45_Zhukov_vlad

December 17, 2016

0.0.1 See src.py, test.py files for algorithm code

```
In [14]: import src
         import test
         import matplotlib.pyplot as plt
```

1 Let's test algorithm

See test.py

```
In [15]: import unittest
         suite = unittest.TestLoader().loadTestsFromTestCase(test.Tests)
         unittest.TextTestRunner(verbosity=2).run(suite)
```

```
test_strings_overlap (test.Tests) ... ok

----------------------------------------------------------------------
Ran 1 test in 0.002s

OK
```

```
Out[15]: <unittest.runner.TextTestResult run=1 errors=0 failures=0>
```

1.1 Example of usage

```
In [16]: strings = ['cde', 'abc', 'eab', 'fgh', 'ghf', 'hed']
         algo = src.superstring4(strings)
         print('superstring4: ' + str(algo.solve()))
         print ('greedy:       ' + \
                str(src.greedy_min_max_contain_string(strings)))
         print ('answer:       ' + \
                str(src.min_max_contain_string(set(strings))))
                                 #input must be set of strings
```

```
superstring4: cdeabcfghfhed
greedy:       fghfhedcdeabc
answer:       ghfghedcdeabc
```

```
In [17]: from itertools import combinations
         from itertools import combinations_with_replacement
         from itertools import permutations
         from itertools import product

         def short_string_test(n_words, words):
             for c in combinations(words, n_words):
                 l1 = len(src.greedy_min_max_contain_string(c))
                 l2 = len(src.min_max_contain_string(set(c)))
                 res.append((1.0 *l1) / l2)
             return res
```

2 Let's "make sure" that aproximation ratio is equal 2 for short strings(a.r.>=2)

It takes some time to find right answers

```
In [18]: letters = 'abcd'
         tmp = [map(''.join, product(letters, repeat=length))\
                 for length in range(1, 4)]
         words = [x for n in tmp for x in n]
         res = []
         sst = short_string_test(3, words)
         print(max(sst))
```

```
1.4
```

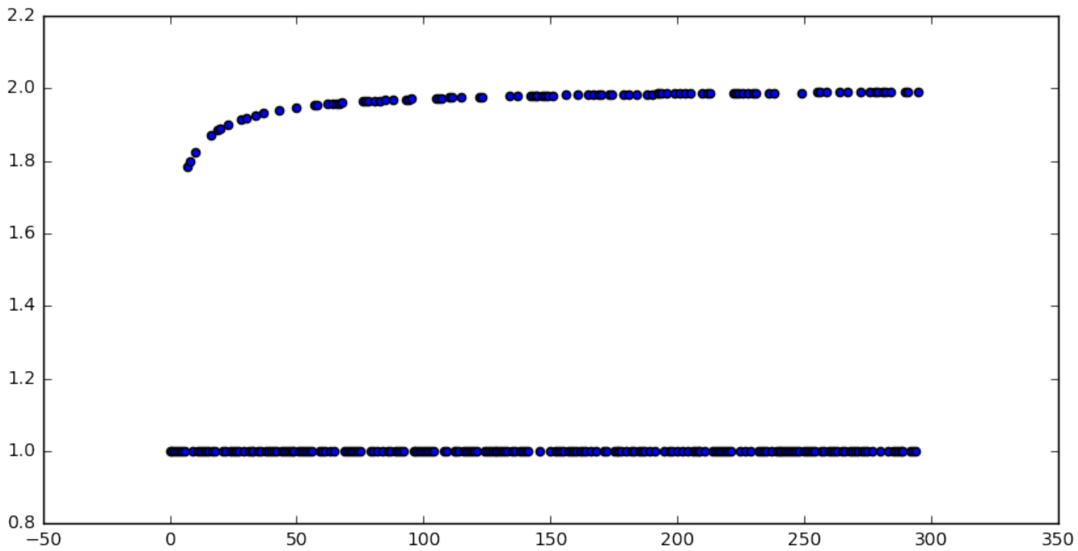
For sentences with two words, where words consist of 1, 2, 3 letters aproximation ratio is ~<= 1.5

Let's implement test described in: http://www.mimuw.edu.pl/~mucha/teaching/aa2008/ss.pdf (2.2 The greedy algorithm)

```
In [19]: def generate_worst_test(k):
             return ['a' + 'b' * k, 'b' * k + 'c', 'b' * (k + 1)]
         test = generate_worst_test(4)
         res = list()
         for c in [generate_worst_test(i) for i in range(4, 300)]:
             l1 = src.greedy_min_max_contain_string(c)
             l2 = src.min_max_contain_string(set(c))
             res.append(((1.0 *len(l1)) / len(l2)))
         print (max(res))
```

```
1.990066225165563
```

```
In [20]: plt.figure(figsize=(10, 5))
         plt.scatter(range(len(res)), res)
         plt.show()
```



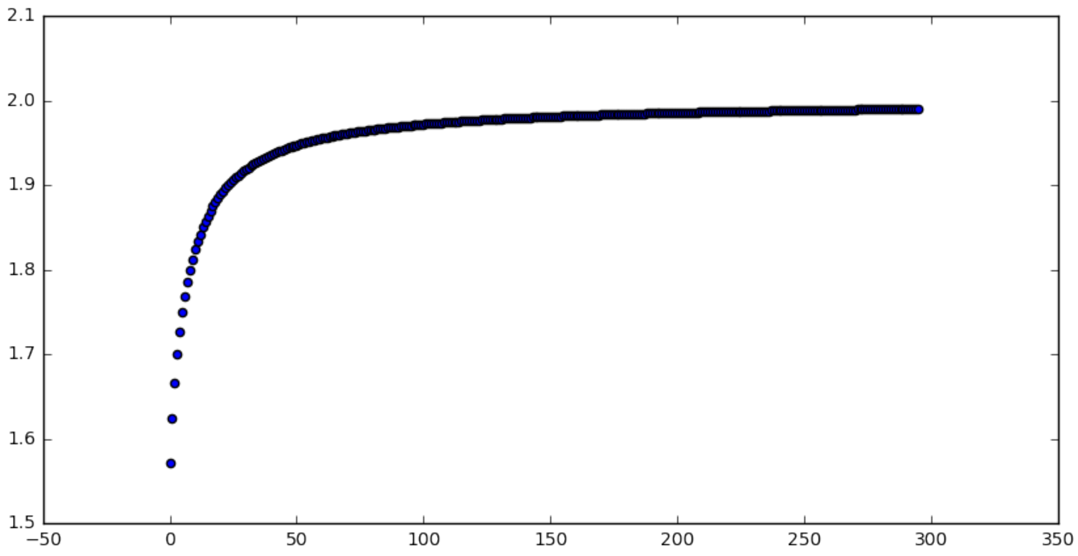
So we can see on $\{ab^k, b^k c, b^{k+1}\}$ tests algorithm's aproximation ratio converges to 2. We have a little bit better algorighm than in article(in article assumes that strings can not contain each other) that merges strings in one, if one contains another

3 Testing graph algorithm

```
In [21]: test = generate_worst_test(4)
         res = list()
         for c in [generate_worst_test(i) for i in range(4, 300)]:
             algo = src.superstring4(c)
             l1 = algo.solve()
             l2 = src.min_max_contain_string(set(c))
             res.append(((1.0 *len(l1)) / len(l2)))
         print (max(res))
```

```
1.990066225165563
```

```
In [22]: plt.figure(figsize=(10, 5))
         plt.scatter(range(len(res)), res)
         plt.show()
```



Small strings tests

```
In [23]: letters = 'abcd'
         tmp = [map(''.join, product(letters, repeat=length))\
                 for length in range(1, 4)]
         words = [x for n in tmp for x in n]
         res = []
         for c in combinations(words, 3):
                 algo = src.superstring4(c)
                 l1 = len(algo.solve())
                 l2 = len(src.min_max_contain_string(set(c)))
                 res.append((1.0 *l1) / l2)
         print(max(res))
```

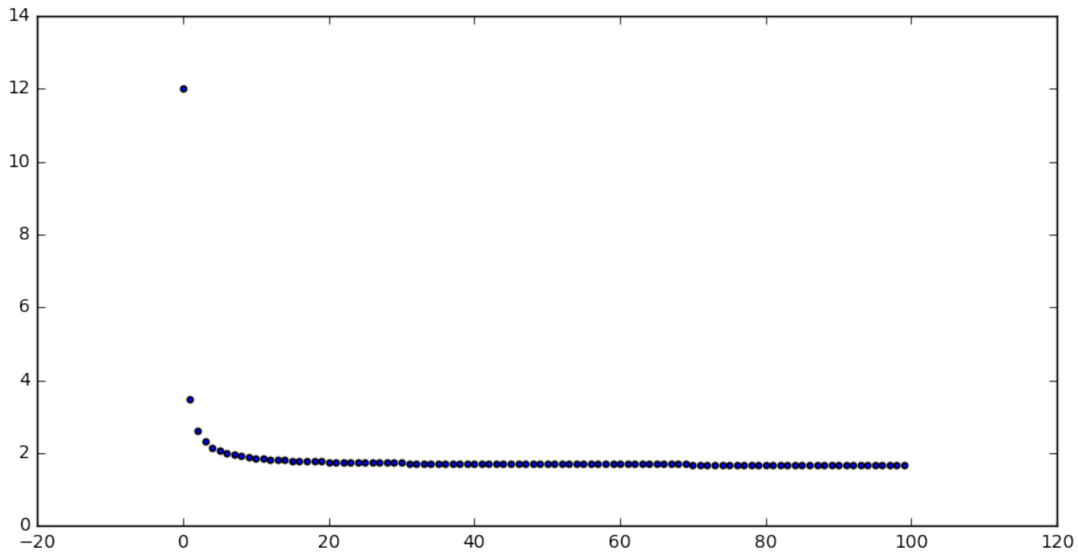
```
1.6666666666666667
```

Worse than greedy

```
In [45]: res = []
         a = ""
         b = ""
         c = ""
         d = ""
         e = ""
         f = ""
         for k in range(100):
             tst = []
             a = a + "a"
```

```
        b = b + "b"
        c = c + "c"
        d = d + "d"
        e = e + "e"
        f = f + "f"
        x = "x"
        tst.append(a + x + b)
        tst.append(b + x + c)
        tst.append(c + x + d)
        tst.append(d + x + e)
        tst.append(e + x + f)
        tst.append(b[:-1] + x + a + x)
        tst.append(c[:-1] + x + b + x)
        tst.append(d[:-1] + x + c + x)
        tst.append(e[:-1] + x + d + x)
        tst.append(f[:-1] + x + e + x)
        algo = src.superstring4(tst)
    #     print(tst)
    #     algo = src.superstring4(tst)
        l1 = len(algo.solve())
    #     print (algo.solve())
        l2 = 9 * k + 1
    #     l2 = len(src.min_max_contain_string(set(tst)))
        res.append((1.0 * l1) / l2)
```

```
In [46]: plt.figure(figsize=(10, 5))
         plt.scatter(range(len(res)), res, s=10)
         # plt.ylim((0, 5))
         plt.show()
```



3.0.1 DOT GRAPH

```
In [26]: strings2 = ['abc', 'bcd', 'daa', 'bcc']
         for i_id, i in enumerate(strings2):
             print ("v" + str(i_id) +" [shape=box, label=\"" + i + "\"]")
         for i_id, i in enumerate(strings2):
             for j_id, j in enumerate(strings2):
                 print ("v" + str(i_id) + "->" + "v" + str(j_id) + " [label=\""+ st
```

```
v0 [shape=box, label="abc"]
v1 [shape=box, label="bcd"]
v2 [shape=box, label="daa"]
v3 [shape=box, label="bcc"]
v0->v0 [label="3"]
v0->v1 [label="2"]
v0->v2 [label="0"]
v0->v3 [label="2"]
v1->v0 [label="0"]
v1->v1 [label="3"]
v1->v2 [label="1"]
v1->v3 [label="0"]
v2->v0 [label="1"]
v2->v1 [label="0"]
v2->v2 [label="3"]
v2->v3 [label="0"]
v3->v0 [label="0"]
v3->v1 [label="0"]
v3->v2 [label="0"]
v3->v3 [label="3"]
```

Имплементация алгоритмов. src.py

```
from copy import deepcopy, copy
from numpy import zeros, ix_, array, roll, argmax
#GREEDY
#####################################################################
#########################2 approximation###########################
#####################################################################
def strings_overlap(s1, s2):
    if (s1 in s2): return len(s1)
    if (s2 in s1): return len(s2)
    return max([i for i in range(min(len(s1), len(s2)) + 1) if s1[len(s1)-i:] == s2[:i]])
def strings_merge(s1, s2):
    if (s1 in s2): return s2
    if (s2 in s1): return s1
    overlap = strings_overlap(s1, s2)
    return s1 + s2[overlap:]
def greedy_min_max_contain_string(strings):
    s = {i for i in strings}
    pairs = [(i, j, strings_overlap(i, j)) for i in s for j in s if not i is j]
    while len(pairs) > 1:
        max_pair = max(pairs, key=lambda x: x[2])
        tmp = strings_merge(max_pair[0], max_pair[1])
        s.remove(max_pair[0])
        s.remove(max_pair[1])
        s.add(tmp)
        pairs = [(i, j, strings_overlap(i, j)) for i in s for j in s if not i is j]
    return [i for i in s][0]

def min_max_contain_string(strings):
#strings' must be set
    s = strings
    pairs = [(i, j, strings_overlap(i, j)) for i in s for j in s if not i is j]
    results = list()
    if len(s) == 1:
        return [i for i in s][0]
    for p in pairs:
        new_s = copy(s)
        tmp = strings_merge(p[0], p[1])
        new_s.remove(p[0])
        new_s.remove(p[1])
        new_s.add(tmp)
        results.append(min_max_contain_string(new_s))
    return min(results, key=lambda x:len(x))

s_strings = {'hello', 'world', 'lol'}

def get_max_ind(ar):
    pos = argmax(ar)
    return (int(pos / ar.shape[1]), int(pos % ar.shape[1]))
#####################################################################
#########################4 approximation###########################
#####################################################################
class superstring4:
    def __init__(self, strings):
        self.n = len(strings)
        self.strings = strings
        self.ov = zeros((self.n, self.n))
        for i in range(self.n):
            for j in range(self.n):
                if i != j:
                    self.ov[i][j] = strings_overlap(strings[i], strings[j])
    def greedy_assignment(self):
        rows = list(range(self.n))
        cols = list(range(self.n))
        asg = zeros(self.n)
        while len(rows) and len(cols):
            mi = get_max_ind(self.ov[ix_(array(rows), array(cols))])
            mi = (rows[mi[0]], cols[mi[1]])
            asg[mi[0]] = mi[1]
```

```
            if mi[0] in rows:
                rows.remove(mi[0])
            if mi[1] in cols:
                cols.remove(mi[1])
        return asg
    def get_cycle(self, asg, start, used):
        res = list()
        j = int(start)
        while True:
            used[j] = 1
            res.append(j)
            j = int(asg[j]) #avoid warning
            if j == start:
                break;
        return res
    def greedy_cover(self):
        used = zeros(self.n)
        asg = self.greedy_assignment()
        res = list()
        for i in range(self.n):
            if not used[i]:
                res.append(self.get_cycle(asg, i, used))
        return res

    #works only if second not contains in first(in the middle of the string)
    def pref(self, s1, s2):
        assert(not s2 in s1)
        ol = max([i for i in range(min(len(s1), len(s2)) + 1) if s1[len(s1)-i:] == s2[:i]])
        return s1[:len(s1) - ol]
    def merge(self, strings):
        assert(len(strings) > 0)
        res = ""
        last = strings[0]
        lastlast = strings[0]
        for s in strings[1:]:
            if (s in last):
                last = s
                continue
            lastlast = s
            res = res + self.pref(last, s)
            last = s
        res = res + lastlast#strings[-1]
        return res
    def rotate_max_cycle(self, cycle):
        c = array(cycle)
        res = list()
        for i in range(len(cycle)):
            # print('$', roll(c, i))
            res.append(self.merge(roll(c, i)))
        # print('@',res)
        return min(res, key=lambda x: len(x))
    def solve(self):
        cover = self.greedy_cover()
        res = ""
        for c in cover:
            s = [self.strings[int(i)] for i in c]
            # print ("!", s)
            res = res + self.rotate_max_cycle(s)
        return res
```

test.py

```
from src import strings_overlap, strings_merge
import unittest
pairs = [['aba', 'baaaa', 'abaaaa', 2],
         ['abracadabra', 'abracadabra', 'abracadabra', len('abracadabra')],
         ['asdd', 'ddqw', 'asddqw', 2]]
class Tests(unittest.TestCase):
    def test_strings_overlap(self):
```

```
    for p in pairs:
        self.assertTrue(strings_overlap(p[0], p[1]), p[3])
        self.assertTrue(strings_merge(p[0], p[1]), p[2])
```

Список литературы

[1] J Gallant, D Maier, J Astorer *On finding minimal length superstrings*, Journal of Computer and System Sciences, 1980 - Elsevier

[2] Jonathan S. Turner *APPROXIMATION ALGORITHMS FOR THE SHORTEST COMMON SUPERSTRING PROBLEM*, Computer Science Department Washington University, St. Louis

[3] Marcin Mucha *A Tutorial on Shortest Superstring Approximation* December 17, 2007