

# 1 Теоретические задачи

## 1.1 Ответы в листьях регрессионного дерева

Обозначения: таргеты в листе:

$$X = \{x_i\}_i^n$$

тестовые таргеты

$$Y = \{y_i\}_i^m$$

$\xi_i \sim U(X)$  случайная величина - таргет случайного объекта из листа из условия задачи.

$$p_{ij} = Pr(\xi_i = x_j) = \frac{1}{n}$$

В случае сэмплирования ответов из таргета имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sum_{i=1}^m (\xi_i - y_i)^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} (\xi_i - y_i)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{ij} \xi_i^2 - 2p_{ij} \xi_i y_i + p_{ij} y_i^2 = \\ &= \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{n} - \sum_{j=1}^n \frac{2}{n} x_j y_i + y_i^2) \quad (*) \end{aligned}$$

В случае выдачи констного среднего ответа по таргетам в листе:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n} - y_i)^2 &= \\ \sum_{i=1}^m ((\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n})^2 - \sum_{j=1}^n \frac{2}{n} x_j y_i + y_i^2) &\quad (**) \end{aligned}$$

Получаем  $(*) > (**)$ , поскольку:

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{n} > (\sum_{j=1}^n \frac{x_j}{n})^2$$

**1.2 Линейные модели в деревьях** Критерий построения разбиений в регрессионном дереве никак не учитывает то, насколько в каждой из дочерних ветвей зависимость близка к линейной. (можно взять точки на прямой с большим расстоянием друг от друга). Тогда в качестве меры "хорошести" (было неоднородности) множества можно использовать, например, MSE модели  $a(x)$  обученной на данном множестве, те.:

$$H(R) = \frac{1}{|R|} \sum_{x_j \in R} (y_i - a(x_i))^2$$

и подставить этот  $H(R)$  в критерий разбиения (в обозначениях лекции):

$$\frac{|L|}{|Q|}H(R) + \frac{|R|}{|Q|}H(R)$$

### 1.3 unsupervised decision tree

По определению

$$\begin{aligned} H(f) &= - \int_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \ln(f(x)) dx = \\ &= -\mathbb{E} \ln(f(x)) \\ \ln \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1}(x-\mu)} \right) &= \\ = -\ln \left( (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} (x-\mu)^T |\Sigma|^{-1} (x-\mu) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \ln(f(x)) = -\ln \left( (2\pi)^{\frac{1}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{2} \mathbb{E} (x-\mu)^T |\Sigma|^{-1} (x-\mu) =$$

Где

$$\frac{1}{2} \mathbb{E} (x-\mu)^T |\Sigma|^{-1} (x-\mu) = -\frac{1}{2} \text{tr}(\Sigma \Sigma^{-1}) = -\frac{1}{2} n$$

So

$$\begin{aligned} H(f) &= -\mathbb{E} \ln f(x) = \frac{n}{2} + \ln \left( (2\pi)^{\frac{n}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}} \right) = \\ &= \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \ln((2\pi)^n |\Sigma|) = \\ &= \frac{1}{2} \ln((2\pi e)^n |\Sigma|) \end{aligned}$$