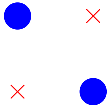
# Нейронные сети. Введение.

Алексей Андреевич Сорокин
Yandex Research,
МГУ, отделение теоретической и прикладной лингвистики.

Школа РАИИ 2021
лекция 2.

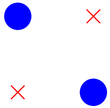
# Недостатки линейных классификаторов

- Линейный классификатор не может проверить равенство двух координат:



# Недостатки линейных классификаторов

- Линейный классификатор не может проверить равенство двух координат:



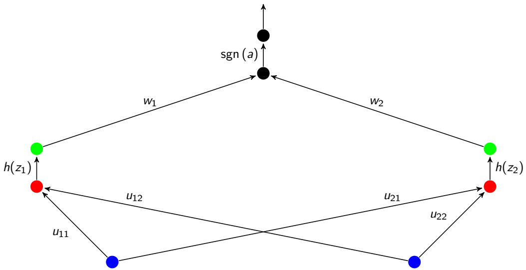
- Часто полезные признаки в задачах — комбинации исходных признаков:

$$w[-2] = \textit{в} \,\&\, \mathrm{POS}(w[-1]) = \mathrm{ADP} \,\&\, \mathrm{TAG}(w[-1]).\mathrm{case} = \mathrm{LOC}$$

- Эти признаки приходится либо образовывать вручную, либо перебирать чрезмерно большое число комбинаций (SVM с полиномиальными ядрами).
- В результате модель не может выучить оптимальным образом большое число параметров.

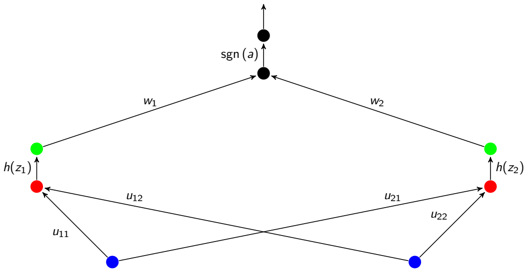
# Двуслойная нейронная сеть для проверки равенства

- Схема нейронной сети:



# Двуслойная нейронная сеть для проверки равенства

- Схема нейронной сети:




- Вычисление функции ($g(x) = \max(x, 0)$):

| | $z_1 = x + y - 1$ | $z_2 = 1 - (x + y)$ | $h_1 = g(z_1)$ | $h_2 = g(z_2)$ | $2(h_1 + h_2) - 1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| (0, 0) | −1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| (0, 1) | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| (1, 0) | 0 | 0 | 0 | 0 | −1 |
| (1, 1) | 1 | −1 | 1 | 0 | 1 |

## Нейронная сеть: распознающая способность

- Уже двуслойная нейронная сеть распознаёт больше, чем линейный классификатор.
- Для этого между слоями была добавлена ReLU-активация:

$$ReLU(x) = \theta(x) = \max x, 0$$

- Без функции активации ничего бы не получилось.

# Нейронная сеть: распознающая способность

- Уже двуслойная нейронная сеть распознаёт больше, чем линейный классификатор.
- Для этого между слоями была добавлена ReLU-активация:

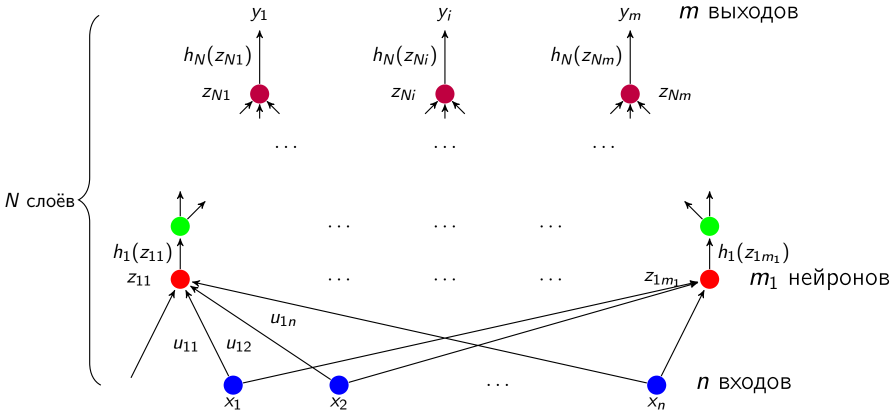
$$ReLU(x) = \theta(x) = \max x, 0$$

- Без функции активации ничего бы не получилось.

**Theorem (Cybenko, Hornik)**

*Любую непрерывную функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ можно приблизить двуслойной нейронной сетью. В качестве функции активации можно взять любую функцию, не являющуюся полиномом.*

# Общий вид нейронной сети



# Нейронные сети: векторная запись

- Каждый нейрон сети вычитает взвешенную сумму нейронов с предыдущего слоя:

$$z_j^{(i)} = \sigma^{(i)}\Big(\sum_r w_{jr}^{(i)} z_r^{(i-1)} + b_j^{(i)}\Big),\ j = 1, \ldots, m_i$$

- $\sigma^{(i)}$ – функция активации на $i$-ом слое.
- Простейшие функции активации:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \max(x, 0) && \text{(функция Хэвисайда, ReLU)} \\ \sigma(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} && \text{(сигмоида).} \end{aligned}$$

# Нейронные сети: векторная запись

- Каждый нейрон сети вычитает взвешенную сумму нейронов с предыдущего слоя:

$$z_j^{(i)} = \sigma^{(i)}(\sum_r w_{jr}^{(i)} z_r^{(i-1)} + b_j^{(i)}),\ j = 1, \ldots, m_i$$

- $\sigma^{(i)}$ – функция активации на $i$-ом слое.
- Простейшие функции активации:

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= \max(x, 0) && \text{(функция Хэвисайда, ReLU)} \\ \sigma(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} && \text{(сигмоида).} \end{aligned}$$

- Эту запись можно перевести на матричный язык:

$$\mathrm{z}^{(i)} = \sigma^{(i)}(W^{(i)}\mathrm{z}^{(i-1)} + b^{(i)})$$

- Это *полносвязный слой*.

# Нейронные сети: векторная запись

- Многослойная нейронная сеть вычисляет функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}^{(1)} &= \sigma^{(1)}(W^{(1)}\mathrm{x} + b^{(1)}), \\
\mathrm{z}^{(2)} &= \sigma^{(2)}(W^{(2)}\mathrm{z}^{(1)} + b^{(2)}), \\
&\dots \\
\mathrm{z}^{(N)} &= \sigma^{(N)}(W^{(N)}\mathrm{z}^{(N-1)} + b^{(N)}), \\
y &= \sigma(W\mathrm{z}^{(N)} + b)
\end{aligned}
$$

# Нейронные сети: векторная запись

- Многослойная нейронная сеть вычисляет функцию $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

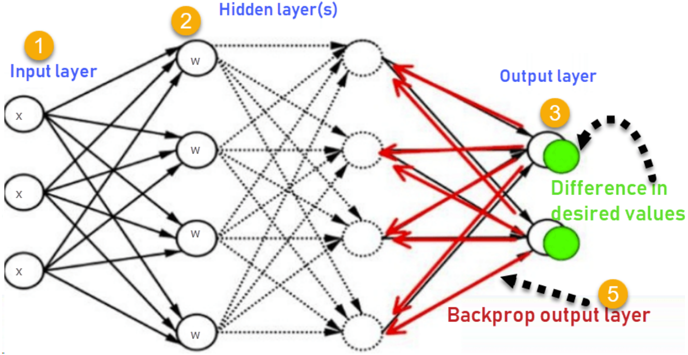
$$
\begin{aligned}
\mathrm{z}^{(1)} &= \sigma^{(1)}(W^{(1)}\mathrm{x} + b^{(1)}), \\
\mathrm{z}^{(2)} &= \sigma^{(2)}(W^{(2)}\mathrm{z}^{(1)} + b^{(2)}), \\
&\dots \\
\mathrm{z}^{(N)} &= \sigma^{(N)}(W^{(N)}\mathrm{z}^{(N-1)} + b^{(N)}), \\
y &= \sigma(W\mathrm{z}^{(N)} + b)
\end{aligned}
$$

- Обозначения:

| | | | |
|---|---|---|---|
| x | – | входной вектор, | $x \in \mathbb{R}^n$, |
| y | – | выходной вектор, | $x \in \mathbb{R}^m$, |
| $\mathrm{W}^{(i)}$ | – | обучаемая матрица $i$-го слоя, | $\mathrm{W}^{(i)} \in \mathbb{R}^{(m_i \times n)}$, |
| $\mathrm{b}^{(i)}$ | – | свободный член $i$-го слоя, | $\mathrm{b}^{(i)} \in \mathbb{R}^{m_i}$, |
| $m_i$ | – | число нейронов $i$-го слоя. | |
| $N$ | – | число скрытых слоёв. | |

# Обучение нейронной сети.

- Нейронная сеть задаёт функцию из некоторого параметрического семейства.
- Обучение сети: подбор этих параметров с целью наилучшего приближения значения на обучающей выборке.
- Обучение осуществляется градиентным спуском, другое название – обратное распространение ошибок:



# Функции активации

- Функции активации позволяют нейронным сетям вычислять нелинейные функции.
- Стандартные функции активации:

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x \text{ (тождественная)}\\
g(x) &= \max(x, 0) \text{ (Rectified linear unit)}\\
g(x) &= \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ сигмоида}\\
g(x) &= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \text{ гиперболический тангенс}\\
g(x) &= \left[\frac{e^{x_1}}{\sum e^{x_i}}, \ldots, \frac{e^{x_n}}{\sum e^{x_i}}\right] \text{ (softmax)}
\end{aligned}
$$

# Функции активации

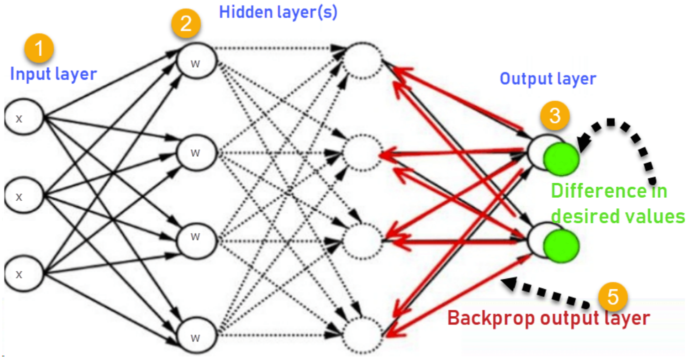
- Применение функций активации:
  - ReLU — сохраняет только положительные активации,
  - $\sigma(x)$ — преобразует $(-\infty; \infty)$ в $[0; 1]$.

# Функции активации

- Применение функций активации:
  - ReLU — сохраняет только положительные активации,
  - $\sigma(x)$ — преобразует $(-\infty; \infty)$ в $[0; 1]$.
  - $\tanh(x) = 2\sigma(\frac{x}{2}) - 1$ — преобразует $(-\infty; \infty)$ в $[-1; 1]$.
  - softmax — применяется, когда нужно вернуть вероятности (преобразует вектор из $n$ чисел в распределение вероятностей $p_1, \ldots, p_n$).
- Функции активации должны быть дифференцируемы, чтобы сеть можно было обучать градиентными методами.

# Обучение нейронной сети.

- Нейронная сеть задаёт функцию из некоторого параметрического семейства.
- Обучение сети: подбор этих параметров с целью наилучшего приближения значения на обучающей выборке.
- Обучение осуществляется градиентным спуском, другое название – обратное распространение ошибок:



# Обучение нейронной сети.

- Нейронная сеть задаёт функцию из некоторого параметрического семейства.
$$y' = F_\theta(x),\ \theta \in \mathbb{R}^n$$
- Качество ответа измеряется значением функции потерь:
$$L(y, y') \to \min_\theta$$
- Параметры оптимизируются шагом градиентного спуска:
$$\begin{aligned} \theta \quad &\leftarrow \quad \theta - \eta \frac{\partial F(y, F_\theta(x))}{\partial \theta}, \\ \theta > 0 \quad &- \quad \text{темп обучения.} \end{aligned}$$

# Обучение нейронной сети.

- Нейронная сеть задаёт функцию из некоторого параметрического семейства.

$$y' = F_\theta(x),\ \theta \in \mathbb{R}^n$$

- Качество ответа измеряется значением функции потерь:

$$L(y, y') \to \min_\theta$$

- Параметры оптимизируются шагом градиентного спуска:

$$\begin{array}{rcl} \theta & \leftarrow & \theta - \eta \dfrac{\partial F(y, F_\theta(x))}{\partial \theta}, \\ \theta > 0 & - & \text{темп обучения.} \end{array}$$

- Функция потерь считается:
  - Для одного объекта выборки (стохастический градиентный спуск).
  - Для группы объектов выборки (батча).

## Функции потерь

- Пусть $C(y, y')$ — функция потерь, где $y$ — эталонный ответ, а $y'$ — ответ нейронного классификатора
- Возможные функции потерь:
    - Квадратичная: $(y - y')^2$. Применяется, когда классификатор возвращает $y' \in \mathbb{R}$.

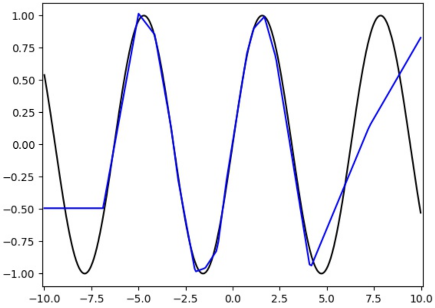
## Функции потерь

- Пусть $C(y, y')$ — функция потерь, где $y$ — эталонный ответ, а $y'$ — ответ нейронного классификатора
- Возможные функции потерь:
  - Квадратичная: $(y - y')^2$. Применяется, когда классификатор возвращает $y' \in \mathbb{R}$.
  - Бинарная кросс-энтропия (cross-entropy): $-(y \log y' + (1 - y) \log (1 - y'))$. Измеряет, насколько далеки две вероятности $y, y' \in [0, 1]$.
  - В случае $y \in \{0, 1\}$ бинарная кросс-энтропия равна $-\log p(y)$.

# Функции потерь

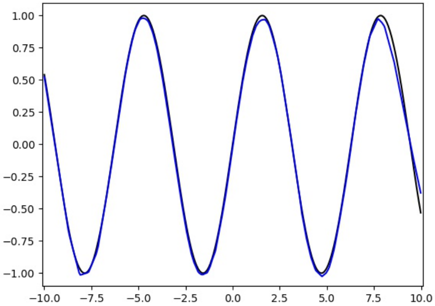
- Пусть $C(y, y')$ — функция потерь, где $y$ — эталонный ответ, а $y'$ — ответ нейронного классификатора
- Возможные функции потерь:
    - Квадратичная: $(y-y')^2$. Применяется, когда классификатор возвращает $y' \in \mathbb{R}$.
    - Бинарная кросс-энтропия (cross-entropy): $-(y \log y' + (1 - y) \log (1 - y'))$. Измеряет, насколько далеки две вероятности $y, y' \in [0, 1]$.
    - В случае $y \in \{0, 1\}$ бинарная кросс-энтропия равна $-\log p(y)$.
    - Категориальная кросс-энтропия: $-(\sum_i y_i \log y_i')$. Измеряет расстояние между истинным вероятностным распределением $y = [y_1, \ldots, y_n]$ и предсказанным распределением $y' = [y_1', \ldots, y_n']$.
- Обе версии кросс-энтропии максимизируют вероятность обучающей выборки.

# Приближение функций нейронными сетями




Приближение функции $y = \sin x$ на отрезке $[-10; 10]$. 3 полносвязных слоя, $n = 10$ нейронов на скрытых слоях.

# Приближение функций нейронными сетями




Приближение функции $y = \sin x$ на отрезке $[-10; 10]$. 3 полносвязных слоя, $n = 100$ нейронов на скрытых слоях.

# Базовая схема текстовой классификации

- Общая схема классификации:

$$
\begin{aligned}
X &= [x_1, \ldots, x_n], \\
x_i &\in \mathbb{R}^D, \\
s &= \sum(X) = [\sum_i \{x_{i1}\}, \ldots, \sum_i \{x_{iD}\}], \\
p = [p_1, \ldots, p_K] &= \mathrm{softmax}(Ws + b)
\end{aligned}
$$

# Базовая схема текстовой классификации

- Общая схема классификации:

$$\begin{aligned} X &= [x_1, \ldots, x_n], \\ x_i &\in \mathbb{R}^D, \\ s &= \sum(X) = [\sum_i \{x_{i1}\}, \ldots, \sum_i \{x_{iD}\}], \\ p = [p_1, \ldots, p_K] &= \mathrm{softmax}(Ws + b) \end{aligned}$$

- Сеть состоит из трёх компонент:
    - Вычисление векторов слов $x_i$ по слову $w_i$ (0/1-вектора, $x_i = w_i$).

## Базовая схема текстовой классификации

- Общая схема классификации:

$$
\begin{aligned}
X &= [x_1, \ldots, x_n], \\
x_i &\in \mathbb{R}^D, \\
s &= \sum(X) = [\sum_i \{x_{i1}\}, \ldots, \sum_i \{x_{iD}\}], \\
p = [p_1, \ldots, p_K] &= \mathrm{softmax}(Ws + b)
\end{aligned}
$$

- Сеть состоит из трёх компонент:
  - Вычисление векторов слов $x_i$ по слову $w_i$ (0/1-вектора, $x_i = w_i$).
  - Агрегация их в вектор предложения (покоординатный максимум, среднее или сумма).
  - Вычисления самой вероятной метки (однослойный персептрон)

# Обучаемые вектора слов

- В качестве $x_i$ можно брать предобученные вектора (word2vec, FastText, GloVe).
- В этом случае соотношения между векторами отражают общие семантические закономерности.

## Обучаемые вектора слов

- В качестве $x_i$ можно брать предобученные вектора (word2vec, FastText, GloVe).
- В этом случае соотношения между векторами отражают общие семантические закономерности.
- Они могут быть нерелевантны для конкретной задачи.
- Можно обучать вектора вместе с задачей.

# Обучаемые вектора слов

- Можно обучать вектора вместе с задачей.
- Пусть $j$ – индекс слова в словаре, вектор слова $w_j$ – $0/1$-вектор:

$$[0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0]$$

# Обучаемые вектора слов

- Можно обучать вектора вместе с задачей.
- Пусть $j$ – индекс слова в словаре, вектор слова $w_j$ – 0/1-вектор:

$$[0, \dots, 0, 1_j, 0, \dots, 0]$$

- Пусть $x_j = Uw_j$, матрица $U$ – обучаемая.
- То есть $x_j$ – $j$-ый столбец матрицы $U$.
- То есть первый слой сети вычисляет вектора для каждого словарного слова.

# Обучаемые вектора слов

- Можно обучать вектора вместе с задачей.
- Пусть $j$ – индекс слова в словаре, вектор слова $w_j$ – $0/1$-вектор:

$$[0, \ldots, 0, 1_j, 0, \ldots, 0]$$

- Пусть $x_j = Uw_j$, матрица $U$ – обучаемая.
- То есть $x_j$ – $j$-ый столбец матрицы $U$.
- То есть первый слой сети вычисляет вектора для каждого словарного слова.
- Эти вектора необязательно отражают общую семантику, как word2vec, но можно взять word2vec в качестве начального приближения при обучении.

# Текстовая классификация с обучаемыми векторами

- Схема классификации:

$$
\begin{aligned}
X &= [w_1, \ldots, w_n], \\
w_i &\in \mathbb{R}^D, \\
h_i &= U_{d \times D} w_i, \\
s &= \sum(H) = [\sum_i \{h_{i1}\}, \ldots, \sum_i \{h_{iD}\}], \\
p = [p_1, \ldots, p_K] &= \operatorname{softmax}(Ws + b)
\end{aligned}
$$

# Текстовая классификация с обучаемыми векторами

- Схема классификации:

$$\begin{aligned} X &= [w_1, \ldots, w_n], \\ w_i &\in \mathbb{R}^D, \\ h_i &= U_{d \times D} w_i, \\ s &= \sum(H) = [\sum_i \{h_{i1}\}, \ldots, \sum_i \{h_{iD}\}], \\ p = [p_1, \ldots, p_K] &= \mathrm{softmax}(Ws + b) \end{aligned}$$

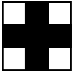
- Сеть состоит из трёх компонент:
  - Вычисление эмбеддингов $h_i \in \mathbb{R}^d$ для слов $w_i$ (0/1-вектора, $x_i = w_i$). При этом $d \sim 100 \ldots 500$, то есть $d \ll D$.
  - Агрегация их в вектор предложения (покоординатный максимум, среднее или сумма).
  - Вычисления самой вероятной метки (однослойный персептрон)

## Свёрточные сети

- В тексте нужно учитывать не только представления отдельных слов или символов, но и их групп (энграмм).
- В задачах распознавания образов для этого придуманы свёрточные сети.
- Для выделения пиксельных шаблонов на изображение накладывают фильтры.

# Свёрточные сети

- В тексте нужно учитывать не только представления отдельных слов или символов, но и их групп (энграмм).
- В задачах распознавания образов для этого придуманы свёрточные сети.
- Для выделения пиксельных шаблонов на изображение накладывают фильтры.
- Например, изображению



  соответствует фильтр

| | | |
|---|---|---|
| -1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |
| -1 | 1 | -1 |

  со свободным членом $-4$.
- Этот фильтр будет активирован, только если все чёрные квадраты будут заполнены, а ни один белый – нет.

## Свёрточные сети

- Формально, двумерный фильтр ширины $d = 2k + 1$ — это матрица

$$\begin{pmatrix} f_{-k,-k} & \dots & f_{-k,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k,-k} & \dots & f_{kk} \end{pmatrix}$$

и пороговое значение $f_0$.
- Результат применения фильтра в позиции $i, j$ к изображению $x$:

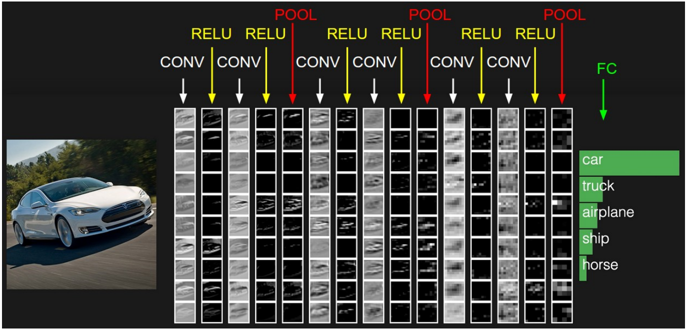
$$a_{ij} = \sum_{r,s=-k}^{k} f_{r,s} x_{i-r,j-s} - f_0$$

## Свёрточные сети

- Формально, двумерный фильтр ширины $d = 2k+1$ — это матрица
$$\begin{pmatrix} f_{-k,-k} & \dots & f_{-k,k} \\ \dots & \dots & \dots \\ f_{k,-k} & \dots & f_{kk} \end{pmatrix}$$
и пороговое значение $f_0$.
- Результат применения фильтра в позиции $i, j$ к изображению $x$:
$$a_{ij} = \sum_{r,s=-k}^{k} f_{r,s} x_{i-r,j-s} - f_0$$
- Часто к фильтрам применяют ReLU-активацию $z_{ij} = \max(a_{ij}, 0)$.
- То есть фильтр активируется в случае наличия определённого шаблона.

# Свёрточные сети

- Нейронные сети для изображений состоят из десятков последовательных слоёв параллельных фильтров. (то есть к каждому сектору пикселей одновременно применяются несколько фильтров).



## Свёрточные сети

- На $n$-ом слое каждая позиция изображения задаётся вектором $z_{ij}^{(n)}$ из $f_n$ чисел.

# Свёрточные сети

- На $n$-ом слое каждая позиция изображения задаётся вектором $z_{ij}^{(n)}$ из $f_n$ чисел.
- На финальном слое с номером $N$ строится единый вектор $Z \in \mathbb{R}^{f_z}$ для изображения:

$$Z_r = \max_{i,j}(z_{i,j}^{(n)})_r$$

- То есть финальный max-слой проверяет наличие шаблона, заданного компонентой вектора где-нибудь в изображении.

# Свёрточные сети

- На $n$-ом слое каждая позиция изображения задаётся вектором $z_{ij}^{(n)}$ из $f_n$ чисел.
- На финальном слое с номером $N$ строится единый вектор $Z \in \mathbb{R}^{f_z}$ для изображения:

$$Z_r = \max_{i,j}(z_{i,j}^{(n)})_r$$

- То есть финальный max-слой проверяет наличие шаблона, заданного компонентой вектора где-нибудь в изображении.
- Если решается задача классификации изображений, то вектор $Z$ пропускается через дополнительный линейный классификатор.
- Поскольку свёрточные слои сводятся к операциям с матрицами и векторами, то обучать их параметры можно градиентным спуском.

## Матричное представление для энграмм

- Контекстные энграммы представляются как конкатенация векторов:

$$\underbrace{\boxed{1 \quad 0 \quad \dots \quad \dots}}_{\text{мама}}\underbrace{\boxed{0 \quad 1 \quad \dots \quad \dots}}_{\text{мыть}}$$

# Матричное представление для энграмм

- Контекстные энграммы представляются как конкатенация векторов:

$$\underbrace{\boxed{1 \quad 0 \quad \dots \quad \dots}}_{\text{мама}}\underbrace{\boxed{0 \quad 1 \quad \dots \quad \dots}}_{\text{мыть}}$$

- Извлечение энграммы можно представить как наложение фильтра $f$:

$$f = [1, 0, \dots, 0, 1, \dots]$$

# Матричное представление для энграмм

- Контекстные энграммы представляются как конкатенация векторов:

$$\underbrace{\boxed{1 \quad 0 \quad \ldots \quad \ldots}}_{\text{мама}}\underbrace{\boxed{0 \quad 1 \quad \ldots \quad \ldots}}_{\text{мыть}}$$

- Извлечение энграммы можно представить как наложение фильтра $f$:

$$f = [1, 0, \ldots, 0, 1, \ldots]$$

- Более точно, операция $y = \max(\langle f, C\rangle - 1, 0)$ вернёт 1 только для энграммы *мама мыть*.
- Если задать матрицу $F$ из подобных фильтров, то $y = FC$ переведёт вектор контекста $C$ в вектор энграмм $Y$.

# Свёрточные слои

- Если применять фильтры не к $0-1$-векторам, а к плотным векторам, то одним фильтром можно “выхыватывать” несколько энграмм.
- Эти энграммы будут похож друг на друга семантически или синтаксически (в зависимости от исходных векторных представлений).
- Однако веса энграмм фильтров по-прежнему настраиваются вручную.

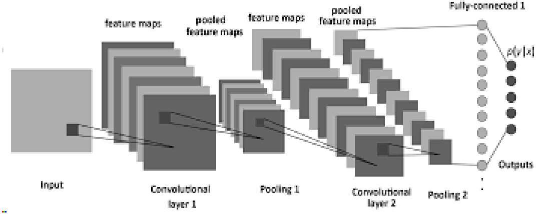
# Свёрточные слои

- Если применять фильтры не к $0-1$-векторам, а к плотным векторам, то одним фильтром можно "выхыватывать" несколько энграмм.
- Эти энграммы будут похож друг на друга семантически или синтаксически (в зависимости от исходных векторных представлений).
- Однако веса энграмм фильтров по-прежнему настраиваются вручную.
- Можно определять матрицу автоматически, обучая сеть с помощью обратного распространения ошибок:

$$
\begin{aligned}
X &= [x_1, \ldots, x_n] \text{ – матрица, задающая текст,} \\
C_i &= [\![x_{i-k}, \ldots, x_i, \ldots, x_{i+k}]\!] \text{ – вектор контекста в позиции } i \text{ ,} \\
z_i &= FC_i = \sum F_{js}(C_i)_s \text{ – сжатый вектор в позиции } i
\end{aligned}
$$

# Свёрточные слои

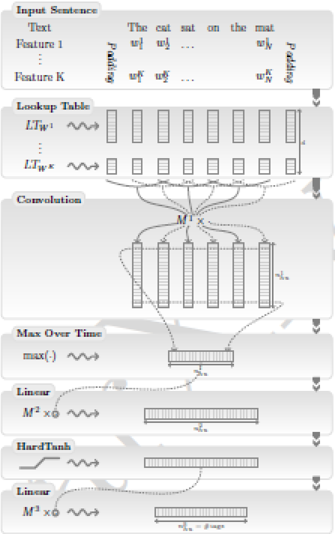
- Можно делать несколько свёрточных слоёв подряд.
- Каждый следующий служит входом предыдущего.




- В конце концов вектора контекстов агрегируются в вектор предложения.

$$
\begin{aligned}
z &= \max(z_1, \ldots, z_n) \\
p &= \mathrm{softmax}(W * z + b)
\end{aligned}
$$

# Агрегация


Input Sentence
Text
The cat sat on the mat
Feature 1
Feature K
Padding
Padding
Lookup Table
Convolution
Max Over Time
max(·)
Linear
HardTanh
Linear

# Агрегация

- Свёрточный слой собирает информацию из окна ширины $m$ вокруг каждого слова.
- Нужно агрегировать эту информацию для всего предложения.
- Если $h_i$ — представление для позиции $i$ после свёрточного слоя, то каждый из признаков $h_{ij}$ соответствует наличию энграмм определённого вида в окне вокруг данного слова.

## Агрегация

- Свёрточный слой собирает информацию из окна ширины $m$ вокруг каждого слова.
- Нужно агрегировать эту информацию для всего предложения.
- Если $h_i$ — представление для позиции $i$ после свёрточного слоя, то каждый из признаков $h_{ij}$ соответствует наличию энграмм определённого вида в окне вокруг данного слова.
- Положим $z_j = \max h_{ij}$.
- То есть высокое значение $z_j$ — наличие энграммы определённого вида где-либо в предложении.

# Агрегация

- Свёрточный слой собирает информацию из окна ширины $m$ вокруг каждого слова.
- Нужно агрегировать эту информацию для всего предложения.
- Если $h_i$ — представление для позиции $i$ после свёрточного слоя, то каждый из признаков $h_{ij}$ соответствует наличию энграмм определённого вида в окне вокруг данного слова.
- Положим $z_j = \max h_{ij}$.
- То есть высокое значение $z_j$ — наличие энграммы определённого вида где-либо в предложении.
- После этого получаем вектор признаков $\mathrm{z} = [z_1, \ldots, z_M]$ для всего предложения.
- Финальное распределение вероятностей $\mathrm{p} = [p_1, \ldots, p_n]$:

$$\mathrm{p} = softmax(W^{out} z + W_0^{out})$$

# Рекурретные сети

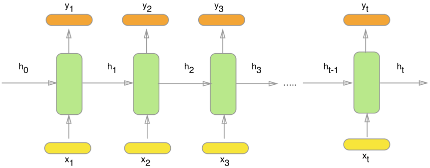
- Свёрточные сети не учитывают порядок внутри последовательности.
- Они не могут отслеживать нелокальные зависимости (только внутри энграмм).

# Рекурретные сети

- Свёрточные сети не учитывают порядок внутри последовательности.
- Они не могут отслеживать нелокальные зависимости (только внутри энграмм).
- Можно поддерживать внутреннее состояние модели, обновляя его вместе с каждым новым символом:

$$\begin{aligned} h_t &= h(h_{t-1}, x_t) \\ y_t &= y(h_t) \end{aligned}$$

- $h$ — функция, пересчитывающая скрытое состояние по предыдущему текущему состоянию и текущему входу (энкодер).
- $y$ — функция, вычисляющая выходную метку по скрытому состоянию (декодер).



# Рекуррентные сети

- Общая формула пересчёта:

$$\begin{aligned} h_t &= h(h_{t-1}, x_t) \\ y_t &= y(h_t) \end{aligned}$$

# Рекуррентные сети

- Общая формула пересчёта:

$$\begin{aligned} h_t &= h(h_{t-1}, x_t) \\ y_t &= y(h_t) \end{aligned}$$

- Простейший вариант для функций $h$ и $o$ — персептрон:

$$\begin{aligned} h(s, x) &= g_1(Us + Vx + b_1), \\ y(s) &= g_2(Ws + b_2), \\ g_1, g_2 &- \text{нелинейности (сигмоида, ReLU)} \end{aligned}$$

- Однако у него есть недостатки.

# Неустойчивые градиенты

- Обучение сети происходит градиентным спуском (изменение параметров в направлении антиградиента штрафа).
- Долговременные зависимости устанавливаются за счёт связи $h_t$ с $h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots$.

# Неустойчивые градиенты

- Обучение сети происходит градиентным спуском (изменение параметров в направлении антиградиента штрафа).
- Долговременные зависимости устанавливаются за счёт связи $h_t$ с $h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots$.
- Формально:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-k}} &= \frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}} \cdots \frac{\partial h_{t-k+1}}{\partial h_{t-k}}, \\
\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}} &= \frac{\partial g_1(z)}{\partial z}\Big|_{z = Us + Vx + b_1} U
\end{aligned}
$$

# Неустойчивые градиенты

- Обучение сети происходит градиентным спуском (изменение параметров в направлении антиградиента штрафа).
- Долговременные зависимости устанавливаются за счёт связи $h_t$ с $h_{t-1}, h_{t-2}, \ldots$.
- Формально:

$$\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-k}} = \frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}} \cdots \frac{\partial h_{t-k+1}}{\partial h_{t-k}},$$
$$\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-1}} = \left.\frac{\partial g_1(z)}{\partial z}\right|_{z = Us + Vx + b_1} U$$

- Если обозначить $A = |\frac{\partial g_1(z)}{\partial z} U|$, то $\frac{\partial h_t}{\partial h_{t-k}} \sim A^k$.
  - $A < 1$ — градиенты затухают к 0.
  - $A > 1$ — градиенты неконтролируемо растут, малое изменение в $h_{t-k}$ ведёт к большим изменениям в $h_t$.

# Варианты рекуррентных сетей

- Назначение более сложных архитектур (Gated Recurrent Unit, Long-Short Term Memory) — сделать $A = 1$.
- GRU (Gated Recurrent Unit):

$$\begin{aligned}
z_t &= \sigma(W_z x_t + U_z h_{t-1} + b_z) \\
r_t &= \sigma(W_r x_t + U_r h_{t-1} + b_z) \\
h_t &= z_t h_{t-1} + (1 - z_t) tanh(W_h x_t + U_h(r_t h_{t-1}) + b_h)
\end{aligned}$$

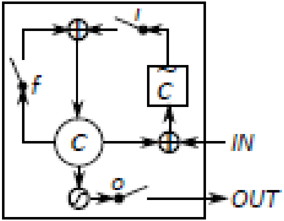
# Варианты рекуррентных сетей

- Назначение более сложных архитектур (Gated Recurrent Unit, Long-Short Term Memory) — сделать $A = 1$.
- GRU (Gated Recurrent Unit):

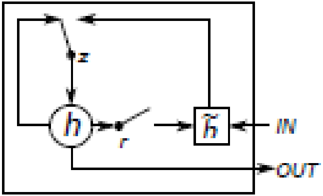
$$\begin{aligned} z_t &= \sigma(W_z x_t + U_z h_{t-1} + b_z) \\ r_t &= \sigma(W_r x_t + U_r h_{t-1} + b_z) \\ h_t &= z_t h_{t-1} + (1 - z_t) tanh(W_h x_t + U_h(r_t h_{t-1}) + b_h) \end{aligned}$$

- На каждом шаге сеть выбирает, как много информации унаследовать из предыдущего состояния, а как много обновить на основе текущего входа.
- $r_t$ позволяет "забыть" предыдущее состояние и перезагрузить сеть.
- $z_t$ балансирует вклад входа и предыдущего состояния.

# Рекуррентные архитектуры: иллюстрация




(a) Long Short-Term Memory




(b) Gated Recurrent Unit

# Рекуррентные нейронные сети: LSTM

- LSTM (long-short term memory), формула пересчёта:

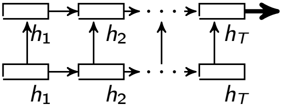
$$\begin{aligned} f_t &= \sigma(W_f x_t + U_f h_{t-1} + b_f) \\ i_t &= \sigma(W_i x_t + U_i h_{t-1} + b_i) \\ o_t &= \sigma(W_o x_t + U_o h_{t-1} + b_o) \\ c_t &= f_t c_{t-1} + i_t tanh(W_c x_t + U_c h_{t-1} + b_c) \\ h_t &= o_t \sigma_h(c_t) \end{aligned}$$

- Смысл параметров:

$f_t$ — мера вклада предыдущего состояния
$i_t$ — мера вклада текущего входа
$o_t$ — мера выходной активации
$c_t$ — скрытое состояние сети
$h_t$ — выходной вектор

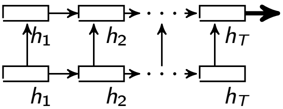
# Рекуррентные нейронные сети: использование

- Сжатие информации о последовательности в один вектор $h_T$ ($T$ — длина последовательности):



# Рекуррентные нейронные сети: использование

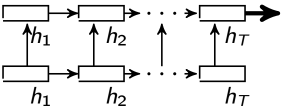
- Сжатие информации о последовательности в один вектор $h_T$ ($T$ — длина последовательности):




- Применение:
    - Все задачи классификации текстов — сеть строит вектор текста из векторов предложений (слов).

# Рекуррентные нейронные сети: использование

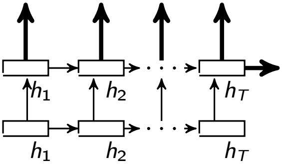
- Сжатие информации о последовательности в один вектор $h_T$ ($T$ — длина последовательности):




- Применение:
  - Все задачи классификации текстов — сеть строит вектор текста из векторов предложений (слов).
  - Вопросно-ответные системы — ответ раскодируется по сжатому вектору вопроса.
  - Машинный перевод — перевод раскодируется по сжатому исходному тексту.

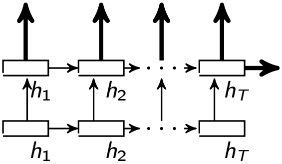
# Рекуррентные нейронные сети: использование

- Аккумуляция контекстной информации для каждой позиции.



# Рекуррентные нейронные сети: использование

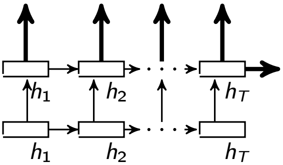
- Аккумуляция контекстной информации для каждой позиции.




- Применение:
  - Построение высокоуровневых представлений слов в контексте (кодируется не только само слово, но и его окружение).

# Рекуррентные нейронные сети: использование

- Аккумуляция контекстной информации для каждой позиции.




- Применение:
  - Построение высокоуровневых представлений слов в контексте (кодируется не только само слово, но и его окружение).
  - Задачи простановки меток: морфологический анализ, распознавание именованных сущностей, деление на морфемы...