

dp

Heyan Huang

October 7, 2024

Contents

1 Dynamic Programming, 动态规划	1
1.1 第二次仍不会的题号记这里	1
1.1.1 518. Coin Change 2	1
1.1.2 464. Can I Win 这个题：为什么顺序无关了？	2
1.1.3 494. Target Sum - Medium	3
1.1.4 801. Minimum Swaps To Make Sequences Increasing - Hard	5
1.1.5 1639. Number of Ways to Form a Target String Given a Dictionary - Hard	6
1.2 区间型 DP	7
1.2.1 1039. Minimum Score Triangulation of Polygon - Medium	8
1.2.2 312. Burst Balloons 区间型动态规划的典型代表	8
1.2.3 546. Remove Boxes - Hard: 带隐含信息，需要第三维参数加入的	9
1.2.4 664. Strange Printer - Hard	9
1.2.5 1591. Strange Printer II - Hard todo	10
1.3 扫描线类、时间戳、一维线性 DP/ 单序列/ 接龙型	10
1.3.1 805. Split Array With Same Average 【活宝妹就是一定要嫁给亲爱的表哥!!!】	10
1.3.2 805. Split Array With Same Average 【这里是怎么样又重复了一遍？】需要合并一下	13
1.3.3 2008. Maximum Earnings From Taxi - Medium	14
1.3.4 1713. Minimum Operations to Make a Subsequence - Hard LIS 经典题型，需要吃透	15
1.3.5 1883. Minimum Skips to Arrive at Meeting On Time - Hard	15
1.3.6 1911. Maximum Alternating Subsequence Sum - Medium todo: 还需要总结题解	16
1.3.7 1928. Minimum Cost to Reach Destination in Time - Hard	17
1.3.8 730. Count Different Palindromic Subsequences - Hard	18
1.3.9 1125. Smallest Sufficient Team - Hard 这个题要多写几遍	19
1.3.10 1575. Count All Possible Routes - Hard	21
1.3.11 1012. Numbers With Repeated Digits - Hard 数位 DP + 压缩状态经典	22
1.3.12 600. Non-negative Integers without Consecutive Ones - Hard	24
1.3.13 514. Freedom Trail - Hard	25
1.3.14 478. Subsets - Medium 典型 subset 题目 new ArrayList<>(){add(v);}	28
1.3.15 368. Largest Divisible Subset - Medium 要求返回序列的接龙型	29
1.3.16 673. Number of Longest Increasing Subsequence	31
1.3.17 1987. Number of Unique Good Subsequences - Hard	32
1.3.18 847. Shortest Path Visiting All Nodes	34
1.3.19 926. Flip String to Monotone Increasing - Medium	34
1.3.20 313. Super Ugly Number	35
1.3.21 backpack III	36

1.3.22879. Profitable Schemes - Hard	0-1 背包问题	36
1.3.23377. Combination Sum IV	没能认出这个题目是考 DP	38
1.3.241049. Last Stone Weight II		39
1.3.25810. Chalkboard XOR Game - Hard		40
1.3.261449. Form Largest Integer With Digits That Add up to Target		41
1.3.27516. Longest Palindromic Subsequence		42
1.3.281143. Longest Common Subsequence		42
1.3.291092. Shortest Common Supersequence - Hard		42
1.3.30546. Remove Boxes - Hard		43
1.3.311531. String Compression II - Hard		44
1.3.321039. Minimum Score Triangulation of Polygon		45
1.3.331478. Allocate Mailboxes - Hard		46
1.3.341771. Maximize Palindrome Length From Subsequences		47
1.3.351896. Minimum Cost to Change the Final Value of Expression - Hard		48
1.3.36823. Binary Trees With Factors		49
1.3.37363. Max Sum of Rectangle No Larger Than K		49
1.3.381884. Egg Drop With 2 Eggs and N Floors - Medium		51
1.3.39887. Super Egg Drop - Hard		51
1.3.401981. Minimize the Difference Between Target and Chosen Elements		54
1.3.41801. Minimum Swaps To Make Sequences Increasing - Hard		55
1.3.42837. New 21 Game - Medium		56
1.3.431105. Filling Bookcase Shelves - Medium		56
1.3.44790. Domino and Tromino Tiling		57
1.3.451997. First Day Where You Have Been in All the Rooms - Medium		59
1.3.46943. Find the Shortest Superstring - Hard		59
1.3.47964. Least Operators to Express Number - Hard		62
1.3.481955. Count Number of Special Subsequences - Hard	把这些个递推公式记住	63
1.3.49446. Arithmetic Slices II - Subsequence - Hard		64
1.3.50639. Decode Ways II - Hard		65
1.3.51629. K Inverse Pairs Array - Hard		67
1.3.521787. Make the XOR of All Segments Equal to Zero - Hard		68
1.3.531735. Count Ways to Make Array With Product - Hard	乘积为 K 的质因子数 排列组合的总个数：分解质因子	70
1.3.541359. Count All Valid Pickup and Delivery Options - Hard		72
1.3.551187. Make Array Strictly Increasing - Hard	需要重写	72
1.4 多维数个数、数种类数多一维 k 介人的 dp[i][j][k]		74
1.4.1 920. Number of Music Playlists - Hard		74
1.4.2 1866. Number of Ways to Rearrange Sticks With K Sticks Visible - Hard		75
1.4.3 1916. Count Ways to Build Rooms in an Ant Colony - Hard		75
1.4.4 1504. Count Submatrices With All Ones - Medium		78
1.5 BitMask 掩码相关的【这是第三次不会的】		79
1.5.1 1595. Minimum Cost to Connect Two Groups of Points		79
1.6 【第三次】不会的		80
1.6.1 1187. Make Array Strictly Increasing: 【动规】思路独特		80
1.6.2 416. Partition Equal Subset Sum 同硬币和问题，感觉总容易忘记，有点儿提示才能回想起来	同硬币和问题，感觉总容易忘记，有点儿提示才能回想起来	82

1 Dynamic Programming, 动态规划

1.1 第二次仍不会的题号记这里

- 329 494 131 518 1723(need summary)
- 需要重写的: 1187, 2035, 1000
- 根据 CLRS, 动态规划分为两种:
- top-down with memoization (递归记忆化搜索)

等价于带缓存的, 搜索树上的 DFS 比较贴近于新问题正常的思考习惯

- bottom-up (自底向上循环迭代)

以"reverse topological order" 处理每个子问题下面依赖的所有子问题都算完了才开始计算当前一般依赖于子问题之间天然的"size"

1.1.1 518. Coin Change 2

You are given an integer array coins representing coins of different denominations and an integer amount representing a total amount of money. Return the number of combinations that make up that amount. If that amount of money cannot be made up by any combination of the coins, return 0. You may assume that you have an infinite number of each kind of coin. The answer is guaranteed to fit into a signed 32-bit integer.

```
public int change(int target, int[] nums) {
    int[] dp = new int[target + 1];
    // 初始化 dp[0] 为 1
    dp[0] = 1;
    // 循环数组中所有数字
    for (int val : nums) {
        for (int i = 0; i <= target - val; i++) {
            // dp[i] 大于 0 说明, 存在 dp[i] 种组合, 其和为 i 的可能性
            if (dp[i] > 0) {
                // 既然存在和为 i 的可能, 那么 i 加上当前数字的和也是存在的
                dp[i + val] += dp[i];
            }
        }
    }
    return dp[target];
}
```

1.1.2 464. Can I Win 这个题: 为什么顺序无关了?

In the "100 game" two players take turns adding, to a running total, any integer from 1 to 10. The player who first causes the running total to reach or exceed 100 wins. What if we change the game so that players cannot re-use integers? For example, two players might take turns drawing from a common pool of numbers from 1 to 15 without replacement until they reach a total ≥ 100 . Given two integers maxChoosableInteger and desiredTotal, return true if the first player to move can force a win, otherwise, return false. Assume both players play optimally.

```
// state 是前走的人走完之后的局面, sum 是当前数字总和, 返回的是当前走的人是否能赢
private boolean dfs(int max, int target, int state, int val) {
    if (dp[state] != -1) return dp[state] > 0;
    if (val >= target) { // 如果对方取数的时候总和达到 target 了, 则当前走的人输了, 做记忆并返回 false
        dp[state] = 0;
        return false;
    }
    for (int i = 1; i <= max; i++) { // 枚举当前人取哪个数
        if ((state >> i-1 & 1) == 0 && !dfs(max, target, state | (1 << i-1), val + i)) {
            dp[state] = 1;
            return true;
        }
    }
}
```

```

        return true;
    }
}
dp[state] = 0;
return false;
}
int [] dp;
public boolean canIWin(int maxChoosableInteger, int desiredTotal) {
    if (desiredTotal <= maxChoosableInteger) return true;
    if (desiredTotal > (maxChoosableInteger + 1)*maxChoosableInteger / 2) return false;
    dp = new int[1 << maxChoosableInteger]; // 时空复杂度 O(2^m) O(2^m)
    Arrays.fill(dp, -1);
    return dfs(maxChoosableInteger, desiredTotal, 0, 0);
}

```

- 另外这第二次又看见的解法

```

public boolean canIWin(int maxChoosableInteger, int desiredTotal) { // 这个师与其它类假题相比，为什么顺序无关？
    if (desiredTotal == 0) return true; // 如果 1 到最大能选的值所有和都不能满足目标值，那么肯定失败
    if ((maxChoosableInteger+1) * maxChoosableInteger / 2 < desiredTotal) return false;
    char [] state = new char [maxChoosableInteger];
    for (int i = 0; i < maxChoosableInteger; i++) state[i] = '0';
    return dfs(desiredTotal, state, new HashMap<>());
}
private boolean dfs(int sum, char [] st, Map<String, Boolean> map) {
    String key = new String(st);
    if (map.containsKey(key)) return map.get(key);
    for (int i = 0; i < st.length; i++) {
        if (st[i] != '0') continue;
        st[i] = '1';
        if (sum <= i+1 || !dfs(sum - (i+1), st, map)) {
            map.put(key, true);
            st[i] = '0';
            return true;
        }
        st[i] = '0';
    }
    map.put(key, false);
    return false;
}

```

- // 下面这个效率更高

```

public boolean canIWin(int maxChoosableInteger, int desiredTotal) {
    if (desiredTotal <= 0) return true;
    int sum = (maxChoosableInteger + 1) * maxChoosableInteger / 2;
    if (sum < desiredTotal) return false;
    boolean[] vis = new boolean[maxChoosableInteger+1];
    return helper(desiredTotal, vis);
}
Map<Integer, Boolean> map = new HashMap<>();
public boolean helper(int desiredTotal, boolean[] vis) {
    if (desiredTotal <= 0) return false;
    int symbol = format(vis);
    if (map.containsKey(symbol)) return map.get(symbol);
    for (int i = 1 ; i < vis.length ; i++) {
        if (!vis[i]) {
            vis[i] = true;
            if (!helper(desiredTotal-i, vis)) {
                vis[i] = false; // 这里不回溯会影响其它结果
                map.put(symbol, true);
                return true;
            }
            vis[i] = false;
        }
    }
    map.put(symbol, false);
    return false;
}
public int format(boolean[] vis) {
    int symbol = 0;
    for (boolean select : vis) {
        symbol <= 1;
        if (select) symbol |= 1;
    }
}

```

```

    }
    return symbol;
}

```

1.1.3 494. Target Sum - Medium

You are given an integer array nums and an integer target.

You want to build an expression out of nums by adding one of the symbols '+' and '-' before each integer in nums and then concatenate all the integers.

For example, if nums = [2, 1], you can add a '+' before 2 and a '-' before 1 and concatenate them to build the expression "+2-1". Return the number of different expressions that you can build, which evaluates to target.

- 该题是一道非常经典的题目，在面试中很可能会考到。该题有多种解法。
- 第一种解法：DFS，brute force。我们对 nums 数组中的每个数字，都尝试在其前面添加正号和负号，最后暴力求解，统计数组中各数字组合值为 target 的情况。（该理解是错误的，我们可以使用带备忘录机制的自顶向下的 DP 方法，代码见下）

1. 回溯 O (2^N)

```

private int getAllSums(int[] a, int target, int idx, int sum, int cnt) { // (2^20) 可否一试呢？理论上是可以过的
    if (idx == a.length) {
        if (sum == target) cnt++;
        return cnt; // 有 return int 代码更简洁，但是全局变量 cnt 效率更高
    }
    // for (int i = idx; i < a.length; i++) { // 为什么要画蛇添足，加个多余的 for loop 呢？
        // getAllSums(a, target, idx+1, sum + a[i]);
        // getAllSums(a, target, idx+1, sum - a[i]);
    }
    return getAllSums(a, target, idx+1, sum + a[idx], cnt)
        + getAllSums(a, target, idx+1, sum - a[idx], cnt);
}
public int findTargetSumWays(int[] a, int target) {
    int n = a.length;
    return getAllSums(a, target, 0, 0, 0);
}

```

2. 解题思路与分析: dfs 记忆化搜索

```

private int dfs(int[] a, int target, int idx, int sum) {
    String key = idx + "_" + sum;
    if (dp.containsKey(key)) return dp.get(key);
    if (idx == n) {
        if (sum == target) return 1;
        else return 0;
    }
    int add = dfs(a, target, idx+1, sum + a[idx]);
    int sub = dfs(a, target, idx+1, sum - a[idx]);
    dp.put(key, add+sub);
    return add + sub;
}
Map<String, Integer> dp = new HashMap<>();
int n;
public int findTargetSumWays(int[] a, int target) {
    n = a.length;
    return dfs(a, target, 0, 0);
}

```

- 上面的方法比较慢，下面这个效率更好一点儿

```

private int dfs(int[] a, int sum, int idx) {
    if (idx == a.length) {
        if (sum == 0) return 1;
        else return 0;
    }
    Map<Integer, Integer> tmp = dp.get(idx);

```

```

if (tmp != null) {
    if (tmp.containsKey(sum))
        return tmp.get(sum);
} else {
    tmp = new HashMap<>();
    dp.put(idx, tmp);
}
int cnt = dfs(a, sum - a[idx], idx+1) + dfs(a, sum + a[idx], idx+1);
tmp.put(sum, cnt);
return cnt;
}
Map<Integer, Map<Integer, Integer>> dp = new HashMap<>();
public int findTargetSumWays(int[] nums, int target) {
    return dfs(nums, target, 0);
}

```

3. DP

```

// sum[p] + sum[n] = sum[nums];
// sum[p] - sum[n] = S;
// 2sum[p] = sum[nums] + S
// sum[p] = (sum[nums] + S) / 2
public int findTargetSumWays(int[] a, int S) {
    int sum = Arrays.stream(a).sum(), target = (sum + S) / 2; // 根据推导公式，计算出 target
    if (S > 0 && sum < S || S < 0 && -sum > S) return 0; // 如果和小于 S，说明无法得到解，返回 false。(注意 S 有可能为负数)
    if ((sum + S) % 2 != 0) return 0; // 如果计算出的 target 不是整数，返回 false。
    int[] dp = new int[target + 1]; // dp[i] 表示在原数组中找出一些数字，并且他们的和为下标 i 的可能有多少种。
    dp[0] = 1; // 初始化 dp[0] 为 1
    for (Integer v : a) {
        // for (int i = target-v; i >= 0; i--) { // 从 0 循环到 target - n, 注意逆序
        //     if (dp[i] > 0) // dp[i] 大于 0 说明，存在 dp[i] 种组合，其和为 i 的可能性
        //         dp[i+v] += dp[i]; // 既然存在和为 i 的可能，那么 i 加上当前数字的和也是存在的
        // }
        for (int i = target; i >= v; i--) // 从 0 循环到 target - n, 注意逆序
            dp[i] += dp[i-v]; // 两种写法都对
    }
    return dp[target];
}

```

4. dp todo 我们使用 V_i 来表示数组中的前 i 个数所能求得的和的集合。初始化时

$V_0 = \{0\}$ // 表示前 0 个数的和为 0
 $V_i = \{V_{i-1} + a_i\} \cup \{V_{i-1} - a_i\}$

V_n 就是 nums 数组所有数字的组合值之和的集合

根据上面的思路，我们知道数组中数字若全为正号其和为 sum ，全为负号其和为 $-\text{sum}$ 。若不选数组中任何一个数，则和为 0。因此，我们设立一个长度为 $2^{\text{sum}} + 1$ 的数组 ways ， $\text{ways}[i]$ 表示我们选择前 m 个数，其和可能为 i 的情况数， $m = 0, 1, \dots, \text{nums.length}$ 。可参考下图

Why DP works?		
Let's look at a simpler problem: Can the following equation can be true?		
$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \dots \pm a_n = \text{target}$		
$O(2^n)$ combinations, but		
$S = 2^{\text{sum}}(a) + 1$ total possible sums, $S \leq 2000 + 1$		
We use V_i to denote the possible sums by using first i elements		
$V_0 = \{0\}$		
$V_i = \{V_{i-1} + a_i\} \cup \{V_{i-1} - a_i\}$		
Check target in V_n		
DP works because $ V_n \leq S \ll O(2^n)$		
Time complexity is $\text{Sum}\{2^i V_i \} \leq n * S = O(n * S)$		

input: [1,1,1,1,1], target = 3 2^5 = 32 combination, but total 6 distinct values, max is 11 (2^5 + 1)		
i	a _i	V _i
0	-	{0}
1	1	{-1, 1}
2	1	{-2, 0, 2}
3	1	{-3, -1, 1, 3}
4	1	{-4, -2, 0, 2, 4}
5	1	{-5, -3, -1, 1, 3, 5}

input: [1,1,1,1,1], target = 3
sum = 5, range = -5 ~ 5

i	a _i	W[i][j]											
		-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
0	-						1						
1	1					1		1					
2	1				1		2		1				
3	1			1		3		3		1			
4	1		1		4		6		4		1		
5	1	1		5		10		10		5		1	

Sum of (W[5][j]) is 32 = 2^5

<http://zxi.mytechroad.com/blog/>

<https://www.cnblogs.com/cnoodle/p/14869498.html> [https://leetcode.com/problems/target-sum/discuss/97334/Java-\(15-ms\)-C++-\(3-ms\)-O\(ns\)-iterative-DP-solution-using-subset-sum-with-explanation/239290](https://leetcode.com/problems/target-sum/discuss/97334/Java-(15-ms)-C++-(3-ms)-O(ns)-iterative-DP-solution-using-subset-sum-with-explanation/239290) <http://www.noteanddata.com/leetcode-494-Target-Sum.html> <https://www.i4k.xyz/article/gqk289/54709004> <https://github.com/cherryljr/LeetCode/blob/master/Target%20Sum.java>

5. 718. 最长重复子数组 (类似题目，只是由字符串变为数组)
6. 72. 编辑距离
7. 1143. 最长公共子序列
8. 583. 两个字符串的删除操作
9. 727. 最小窗口子序列

你会发现这些都是求 2 个字符串 (或数组) 之间的某种关系的题目

1.1.4 801. Minimum Swaps To Make Sequences Increasing - Hard

You are given two integer arrays of the same length nums1 and nums2. In one operation, you are allowed to swap nums1[i] with nums2[i].

For example, if nums1 = [1,2,3,8], and nums2 = [5,6,7,4], you can swap the element at i = 3 to obtain nums1 = [1,2,3,4] and nums2 = [5,6,7,8]. Return the minimum number of needed operations to make nums1 and nums2 strictly increasing. The test cases are generated so that the given input always makes it possible.

An array arr is strictly increasing if and only if $\text{arr}^1 < \text{arr}^2 < \text{arr}^3 < \dots < \text{arr}[\text{arr.length} - 1]$.

1. 解题思路与分析

```
// 设 dp[0][i] 表示不交换 A[i] 和 B[i] 在下标 i 的交换次数
// 设 dp[1][i] 表示交换 A[i] 和 B[i] 在下标 i 的交换次数
// 可以看到交换与否只取决于前一个状态，可以将空间复杂度压缩到 O(1)
// 时间复杂度为 O(n)，空间复杂度为 O(1)
public int minSwap(int[] a, int[] b) {
    int n = a.length;
    int [][] dp = new int [n][2]; // 0: 不换, 1: 换
    for (int i = 0; i < n; i++)
```

¹DEFINITION NOT FOUND.

²DEFINITION NOT FOUND.

³DEFINITION NOT FOUND.

```

        Arrays.fill(dp[i], Integer.MAX_VALUE);
        dp[0][0] = 0;
        dp[0][1] = 1;
        for (int i = 1; i < n; i++) {
            if (a[i] > a[i-1] && b[i] > b[i-1]) {
                dp[i][0] = Math.min(dp[i][0], dp[i-1][0]);      // 不换, 取一个较小值
                dp[i][1] = Math.min(dp[i][1], dp[i-1][1] + 1); // 换就两个都换
            }
            if (a[i] > b[i-1] && b[i] > a[i-1]) {
                dp[i][0] = Math.min(dp[i][0], dp[i-1][1]);
                dp[i][1] = Math.min(dp[i][1], dp[i-1][0] + 1);
            }
        }
        return Math.min(dp[n-1][0], dp[n-1][1]);
    }
}

```

1.1.5 1639. Number of Ways to Form a Target String Given a Dictionary - Hard

You are given a list of strings of the same length words and a string target.

Your task is to form target using the given words under the following rules:

target should be formed from left to right. To form the i th character (0-indexed) of target, you can choose the k th character of the j th string in words if $\text{target}[i] = \text{words}[j][k]$. Once you use the k th character of the j th string of words, you can no longer use the x th character of any string in words where $x \leq k$. In other words, all characters to the left of or at index k become unusable for every string. Repeat the process until you form the string target. Notice that you can use multiple characters from the same string in words provided the conditions above are met.

Return the number of ways to form target from words. Since the answer may be too large, return it modulo $10^9 + 7$.

1. 解题思路与分析: dp

思路:
 $\text{dp}[i][j]$ 表示: words 字符串列表的前 j 列来构造目标字符串 target 的前 i 个字符;
 $\text{cnt}[i][j]$ 表示: words 字符串列表的第 i 列一共有多少字符 j ;
 那 dp 公式就很好推出来了:
 1. 第 i 个字符不使用第 j 列时, 即通过前 $j - 1$ 列得到
 $\text{dp}[i][j] = \text{dp}[i][j-1];$
 2. 第 i 个字符使用第 j 列时
 $* \quad \text{dp}[i][j] = \text{dp}[i-1][j-1] * \text{cnt}[j][\text{第 } i \text{ 个字符}];$
 $==> \text{dp}[i][j] = \text{dp}[i][j-1] + \text{dp}[i-1][j-1] * \text{cnt}[j][\text{第 } i \text{ 个字符}]$

```

static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int numWays(String[] words, String target) {
    int m = target.length(), n = words[0].length();
    char[] s = target.toCharArray();
    int[][] cnt = new int[n][26];
    for (String w : words)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            cnt[j][w.charAt(j) - 'a']++;
    // long[][] dp = new long[m][n];
    // dp[0][0] = cnt[0][s[0] - 'a'];
    // for (int i = 1; i < n; i++) // 初始化: 由前 i 列来构成 target 第一个字符的方案数
    //     dp[0][i] = (dp[0][i] + dp[0][i-1] + cnt[i][s[0] - 'a']) % mod;
    // for (int i = 1; i < m; i++)
    //     for (int j = i; j < n; j++)
    //         dp[i][j] = (dp[i][j-1] + dp[i-1][j-1] * cnt[j][s[i] - 'a']) % mod;
    // return (int)dp[m-1][n-1];
    long[][] dp = new long[m+1][n+1];
    Arrays.fill(dp[0], 1L);
    // dp[0] = LongStream.range(0, n+1).map(e->1).toArray(); // 上下两行, 效果差不多, filling first row of array with ...
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        for (int j = i; j <= n + i - m; j++)
            dp[i][j] = (dp[i][j-1] + dp[i-1][j-1] * cnt[j-1][s[i-1] - 'a']) % mod;
    return (int)dp[m][n];
}

```

- dp 降维, 压缩空间

```

static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int numWays(String[] words, String target) { // dp 降维，压缩空间，但二维 dp 仍然是思路最为清晰好理解的
    int m = target.length(), n = words[0].length();
    char[] s = target.toCharArray();
    long[] dp = new long[m];
    for (int i = 0; i < n; i++) { // 遍历字符数组的各列
        int[] cnt = new int[26]; // 当前-列-所有字符的出现次数
        for (String w : words)
            cnt[w.charAt(i) - 'a']++;
        for (int j = Math.min(i, m-1); j >= 0; j--) // 记住：降维就容易产生脏数据，需要倒序遍历
            dp[j] = (dp[j] + (j > 0 ? dp[j-1] : 1) * cnt[s[j] - 'a']) % mod;
    }
    return (int)dp[m-1];
}

```

1.2 区间型 DP

- <https://leetcode-cn.com/problems/minimum-cost-to-merge-stones/solution/yi-dong-yo>

区间 dp 问题，旨在通过动态规划去求一个区间的最优解，通过将大区间划分为很多个小区间，再由小区间的解来组合出大区间的解，这体现了分治的思想。

- 区间动态规划三部曲
 - 定义状态： $dp[i, j]$ 为区间 $[i, j]$ 的最优解
 - 定义状态转移方程：最常见的写法为： $dp[i, j] = \max/\min\{dp[i, j], dp[i, k] + dp[k+1, j] + cost\}$ 。选取 $[i, j]$ 之间的一个分界点 k ，分别计算 $[i, k]$ 和 $[k+1, j]$ 的最优解，从而组合出 $[i, j]$ 的最优解。
 - 初始化： $dp[i][i] = \text{常数}$ 。区间长度为 1 时的最优解应当是已知的。

假设要求的区间最优解为 $dp[1, n]$ ，区间 dp 问题有两种编码方法：

- 第一种：

```

for (int i = n; i >= 1; --i)
    for (int j = i + 1; j <= n; ++j)
        for (int k = i; k < j; ++k)
            dp[i, j] = max/min(dp[i, j], dp[i, k] + dp[k+1, j] + cost)

```

这种写法就是常规的 dp 写法，枚举 i 为子区间左边界，枚举 j 为子区间右边界，枚举 k 为分界点。要注意由于要求的是 $dp[1, n]$ ，所以 i 必须从大往小遍历， j 必须从小往大遍历。这样在状态转移方程中利用的就是已求解的 dp 状态。

- 第二种：

```

for (int len = 2; len <= n; ++len)
    for (int i = 1; i + len - 1 <= n; ++i) {
        int j = i + len - 1;
        for (int k = i; k < j; ++k)
            dp[i, j] = max/min(dp[i, j], dp[i, k] + dp[k+1, j] + cost);
    }

```

这种写法最常见，枚举 len 为区间长度，枚举 i 为区间左端点，由此可以计算出区间右端点 j ，枚举 k 为分界点。区间长度从 2 到 n ，跟上一种写法相同。这种写法的正确性可能不如上一种那么直观，它从小到大枚举出所有区间，在求解大区间时，状态转移方程中利用的状态都是小区间的状态，必定在它之前被求解，所以也是正确的。

1.2.1 1039. Minimum Score Triangulation of Polygon - Medium

You have a convex n-sided polygon where each vertex has an integer value. You are given an integer array values where values[i] is the value of the ith vertex (i.e., clockwise order).

You will triangulate the polygon into $n - 2$ triangles. For each triangle, the value of that triangle is the product of the values of its vertices, and the total score of the triangulation is the sum of these values over all $n - 2$ triangles in the triangulation.

Return the smallest possible total score that you can achieve with some triangulation of the polygon.

```
// 动态规划，递归可以使逻辑简单（本质还是动态规划）将多边形起始位置设为 start, end, 用一个数组 dp 来记录任意起始位置的 score
// 为了计算 dp[start][end], 我们用一个 index k 在 start 到 end 之间遍历
// dp[start][end] = min(dp[start][k] + dp[k][end] + A[start]* A[k] * A[end]) 结果为 dp[0][n - 1] 注意：相邻的 dp[i][i + 1] =
private int dfs(int[] a, int i, int j) {
    if (j - i < 2) return 0; // 最开始终止条件没有写对
    if (dp[i][j] > 0) return dp[i][j];
    int ans = Integer.MAX_VALUE;
    for (int k = i+1; k < j; k++) {
        ans = Math.min(ans, a[i]*a[k]*a[j] + dfs(a, i, k) + dfs(a, k, j));
    }
    return dp[i][j] = ans;
}
int[][] dp;
int n;
public int minScoreTriangulation(int[] a) {
    n = a.length;
    dp = new int[n][n];
    return dfs(a, 0, n-1);
}
```

1.2.2 312. Burst Balloons 区间型动态规划的典型代表

You are given n balloons, indexed from 0 to $n - 1$. Each balloon is painted with a number on it represented by an array nums. You are asked to burst all the balloons. If you burst the i th balloon, you will get $\text{nums}[i - 1] * \text{nums}[i] * \text{nums}[i + 1]$ coins. If $i - 1$ or $i + 1$ goes out of bounds of the array, then treat it as if there is a balloon with a 1 painted on it. Return the maximum coins you can collect by bursting the balloons wisely.

```
public int maxCoins(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    int[][] dp = new int[n+2][n+2];
    int[] arr = new int[n+2];
    System.arraycopy(nums, 0, arr, 1, n);
    arr[0] = arr[n+1] = 1; // [0, n+1] ==> [1, n]
    int j = 0;
    for (int len = 1; len <= n; len++) { // [1, n]
        for (int i = 1; i+len-1 <= n; i++) { // [1, n]
            j = i + len - 1;
            for (int k = i; k <= j; k++)
                dp[i][j] = Math.max(dp[i][j], dp[i][k-1] + dp[k+1][j] + arr[i-1]*arr[k]*arr[j+1]);
        }
    }
    return dp[1][n];
}
// 0 0 0 0 0 0
// 0 3 30 159 167 0
// 0 0 15 135 159 0
// 0 0 0 40 48 0
// 0 0 0 0 40 0
// 0 0 0 0 0 0
private int memorizedSearch(int[] arr, int x, int y) {
    if (dp[x][y] > 0) return dp[x][y];
    // if (x == y) return dp[x][y] = arr[x]; // 没有这些个边际条件
    // if (x == y-1)
    //     return dp[x][y] = arr[x] * arr[y] + Math.max(arr[x], arr[y]);
    int max = 0;
    for (int i = x; i <= y; i++) {
        max = Math.max(max, memorizedSearch(arr, x, i-1) + memorizedSearch(arr, i+1, y) + arr[x-1]*arr[i]*arr[y+1]);
    }
}
```

```

    return dp[x][y] = max;
}
int [][] dp;
int n;
public int maxCoins(int[] nums) {
    int n = nums.length + 2;
    dp = new int [n][n];
    int [] arr = new int [n];
    System.arraycopy(nums, 0, arr, 1, n-2);
    arr[0] = arr[n-1] = 1;
    return memorizedSearch(arr, 1, n-2);
}

```

1.2.3 546. Remove Boxes - Hard: 带隐含信息，需要第三维参数加入的

You are given several boxes with different colors represented by different positive numbers.

You may experience several rounds to remove boxes until there is no box left. Each time you can choose some continuous boxes with the same color (i.e., composed of k boxes, $k \geq 1$), remove them and get $k * k$ points.

Return the maximum points you can get.

1. 解题思路与分析

```

public int removeBoxes(int [] b) { // 区间型 dp
    n = b.length;
    dp = new int [n][n][n];
    return dfs(b, 0, n-1, 0);
}
int [][] dp;
int n;
private int dfs(int [] a, int i, int j, int k) {
    if (i > j) return 0;
    if (dp[i][j][k] > 0) return dp[i][j][k];
    int ans = dfs(a, i, j-1, 0) + (k+1) * (k+1); // 消除 [i, j-1] 区间后, (k+1) 个 a[j] 就可以连续消除
    for (int x = i; x < j; x++)
        if (a[x] == a[j])           // 试图先消除掉 [x+1, j-1] 范围内的数, 然后剩下 a[x], a[j] 以及 j 后面有 k 个连续与 a[j]
            ans = Math.max(ans, dfs(a, x+1, j-1, 0) + dfs(a, i, x, k+1)); // [x+1, j-1] 消除后, a[x] 后面就跟了 k+1 个 a[j]
    return dp[i][j][k] = ans;
}

```

1.2.4 664. Strange Printer - Hard

There is a strange printer with the following two special properties:

The printer can only print a sequence of the same character each time. At each turn, the printer can print new characters starting from and ending at any place and will cover the original existing characters. Given a string s, return the minimum number of turns the printer needed to print it.

1. 解题思路与分析

```

public int strangePrinter(String t) { // dfs + memo
    n = t.Length();
    s = t.toCharArray();
    dp = new int [n][n];
    return dfs(0, n-1);
}
int [][] dp;
char [] s;
int n;
private int dfs(int i, int j) {
    if (i > j) return 0;
    if (dp[i][j] > 0) return dp[i][j];
    int ans = dfs(i+1, j) + 1; // 初始化为先打 i 位置, 再打 [i+1, j] 区间覆盖原 [i, j] 区间
    for (int k = i+1; k <= j; k++)
        if (s[i] == s[k])
            ans = Math.min(ans, dfs(i+1, k-1) + dfs(k, j));
    return dp[i][j] = ans;
}

```

```

    }
    public int strangePrinter(String s) { // dp
        int n = s.length();
        int [][] dp = new int[n][n];
        for (int i = n-1; i >= 0; i--)
            for (int j = i; j < n; j++) {
                dp[i][j] = i == j ? 1 : 1 + dp[i+1][j]; // 同样是先打出 [i, j] 区间一次，再用 [i+1, j] 区间覆盖
                for (int k = i+1; k <= j; k++)
                    if (s.charAt(k) == s.charAt(i)) // 如果存在相同的字符，就可以进一步地优化
                        dp[i][j] = Math.min(dp[i][j], dp[i+1][k-1]+dp[k][j]);
            }
        return dp[0][n-1];
    }
}

```

1.2.5 1591. Strange Printer II - Hard todo

There is a strange printer with the following two special requirements:

On each turn, the printer will print a solid rectangular pattern of a single color on the grid. This will cover up the existing colors in the rectangle. Once the printer has used a color for the above operation, the same color cannot be used again. You are given a $m \times n$ matrix targetGrid, where $\text{targetGrid}[\text{row}][\text{col}]$ is the color in the position (row, col) of the grid.

Return true if it is possible to print the matrix targetGrid, otherwise, return false.

1. 解题思路与分析

关于含有隐藏信息的 dp 题目，感觉巅峰就属于拣樱桃那题 Cherry Pickup ???

1.3 扫描线类、时间戳、一维线性 DP/ 单序列/ 接龙型

1.3.1 805. Split Array With Same Average 【活宝妹就是一定要嫁给亲爱的表哥!!!】

You are given an integer array nums. You should move each element of nums into one of the two arrays A and B such that A and B are non-empty, and $\text{average}(A) == \text{average}(B)$. Return true if it is possible to achieve that and false otherwise. Note that for an array arr, $\text{average}(arr)$ is the sum of all the elements of arr over the length of arr.

1. 折半搜索

思路与算法

设数组 $nums$ 的长度为 n , 假设我们移动了 k 个元素到数组 A 中, 移动了 $n - k$ 个元素到数组 B 中, 此时两个数组的平均值相等。设 $sum(A)$, $sum(B)$, $sum(nums)$ 分别表示数组 A , B , $nums$ 的元素和, 由于数组 A , B 的平均值相等, 则有 $\frac{sum(A)}{k} = \frac{sum(B)}{n - k}$, 上述等式可以进行变换为如下:

$$\begin{aligned} & sum(A) \times (n - k) = sum(B) \times k \\ \Leftrightarrow & sum(A) \times n = (sum(A) + sum(B)) \times k \\ \Leftrightarrow & sum(A) \times n = (sum(nums)) \times k \\ \Leftrightarrow & \frac{sum(A)}{k} = \frac{sum(nums)}{n} \end{aligned}$$

即数组 A 的平均值与数组 $nums$ 的平均值相等。此时我们可以将数组 $nums$ 中的每个元素减去 $nums$ 的平均值, 这样数组 $nums$ 的平均值则变为 0。此时题目中的问题则可以转变为: 从 $nums$ 中找出若干个元素组成集合 A , 使得 A 的元素之和为 0, 剩下的元素组成集合 B , 它们的和也同样为 0。

比较容易想到的思路是, 从 n 个元素中取出若干个元素形成不同的子集, 则此时一共有 2^n 种方法 (即每个元素取或不取), 我们依次判断每种方法选出的元素之和是否为 0。但题目中的 n 可以达到 30, 此时 $2^{30} = 1,073,741,824$, 组合的数据非常大。

因此我们考虑将数组平均分成两部分 A_0 和 B_0 , 它们均含有 $\frac{n}{2}$ 个元素 (不失一般性, 这里假设 n 为偶数)。如果 n 为奇数, 在 A_0 中多放一个元素即可, 此时这两个数组分别有 $2^{\frac{n}{2}}$ 种不同的子集选择的方法。设 A_0 中所有选择的方法得到的不同子集的元素之和的集合为 $left$, B_0 中所有选择的方法得到的不同子集的元素之和的集合为 $right$, 那么我们只需要在 $left$ 中找出一个子集 A'_0 的元素之和为 x , 同时在 $right$ 中包含一个子集 B'_0 的元素之和为 $-x$, 则子集 A'_0, B'_0 构成的集合的元素之和为 0, 此时则找到了一种和为 0 的方法。

- 需要注意的是, 我们不能同时选择 A_0 和 B_0 中的所有元素, 这样数组 B 就为空了。

此外, 将数组 $nums$ 中每个元素减去它们的平均值, 这一步会引入浮点数, 可能会导致判断的时候出现误差。一种解决方案是使用分数代替浮点数, 但这样代码编写起来较为麻烦。更好的解决方案是先将 $nums$ 中的每个元素乘以 $nums$ 的长度, 则此时每个元素 $nums[i]$ 变为 $n \times nums[i]$, 这样数组 $nums$ 的平均值一定为整数, 同时也不影响题目中的平均值相等的要求。

```
// 第一种方法: 原始, 相对比较土.....
public boolean splitArraySameAverage(int[] a) {
    if (a.length == 1) return false;
    int n = a.length, sum = Arrays.stream(a).sum(), m = n / 2;
    // 把原数组和变 0, 并且不引入任何浮点数
    for (int i = 0; i < n; i++) a[i] = a[i] * n - sum;
    // // 把原数组分成两个大小最接近的数组【再说一遍: 概念上的, 并不真的需要物理上的拆分为两个数组。。。】
    // int [] l = Arrays.copyOfRange(a, 0, n/2); // 【L-inclusive, r-exclusive】
    // int [] r = Arrays.copyOfRange(a, n/2, n);
    // 求一个数组可能取得的和 sum 集合
    Set<Integer> lsum = new HashSet<>();
    for (int i = 1; i < (1 << m); i++) {
        int s = 0;
        for (int j = 0; j < m; j++) // 这里可能会遍历多了
            if (((i >> j) & 1) == 1) s += a[j];
    // 【快速返回】这里是可以在优化提速的地方。左边非空集合和为 0, 那么左边非空补集的和也一定为 0
        if (s == 0) return true;
        lsum.add(s);
    }
    // 遍历: 求右边数组可能取得的和 s, 并一一去找左边是否存在和 -s
    int rsum = 0; // 先求右边的和:
    for (int i = m; i < n; i++) rsum += a[i];
    for (int i = 1; i < (1 << n - m); i++) {
        int s = 0;
        for (int j = m; j < n; j++) // 这里可能会遍历多了
            if (((i >> (j - m)) & 1) == 1) s += a[j];
        // if (s == 0 || lsum.contains(-s)) return true; // 【BUG:】
        if (s == 0 || s != rsum && lsum.contains(-s)) return true; // 【为什么 s != rsum 重要?】【3, 1】==>【2, -2】
    }
    return false;
}
```

- 复杂度分析

复杂度分析

- 时间复杂度: $O(n \times 2^{\frac{n}{2}})$, 其中 n 表示数组的长度。我们需要求出每个子集的元素之和, 数组的长度为 n , 一共有 $2 \times 2^{\frac{n}{2}}$ 个子集, 求每个子集的元素之和需要的时间为 $O(n)$, 因此总的时间复杂度为 $O(n \times 2^{\frac{n}{2}})$ 。
- 空间复杂度: $O(2^{\frac{n}{2}})$ 。一共有 $2^{\frac{n}{2}}$ 个子集的元素之和需要保存, 因此需要的空间为 $O(2^{\frac{n}{2}})$ 。

2. 动态规划

方法二：动态规划

思路与算法

根据方法一的结论, 设数组 $nums$ 的平均数为 $avg = \frac{sum}{n}$, 我们移动了 k 个元素到数组 A 中, 则此时已经数组 A 的平均数也为 avg , 则此时数组 A 的元素之和为 $sum(A) = k \times avg$, 则该问题可以等价于在数组中取 k 个数, 使得其和为 $k \times avg$, 对应的「0-1背包问题」则为是否可以取 k 件物品使得背包的重量为 $k \times avg$ 。我们设 $dp[i][x]$ 表示当前已从数组 $nums$ 取出 i 个元素构成的和为 x 的可能性:

- 如果 $dp[i][x] = true$, 表示当前已经遍历过的元素中可以取出 i 个元素构成的和为 x ;
- 如果 $dp[i][x] = false$, 表示当前已经遍历过的元素中不存在取出 i 个元素的和等于 x ;

假设前 $j - 1$ 个元素中存在长度为 i 的子集且子集的和为 x , 则此时 $dp[i][x] = true$, 我们当前遍历 $nums[j]$ 时, 则可以推出一定存在长度为 $i + 1$ 的子集且满足子集的和为 $x + nums[j]$, 可以得到状态转移方程为:

$$dp[i + 1][x + nums[j]] = dp[i][x]$$

根据题意可知: $\frac{sum(A)}{k} = \frac{sum(nums)}{n}$, 可以变换为: $sum(A) \times n = sum(nums) \times k$, 所以我们只需要找到一个元素个数为 k 的子集 A 满足上述条件即可, 因此我们利用上述递推公式求出所有可能长度的子集和组合即可, 此时需要的时间复杂度约为 $n^2 \times sum(nums)$, 按照题目给定的测试用例可能会超时, 所以需要一些减枝技巧, 具体的减枝技巧如下:

- 根据题意可以推出 $sum(A) = \frac{sum(nums) \times k}{n}$, 则此时如果满足题目要求, 则一定存在整数 $k \in [1, n]$, 使得 $[sum(nums) \times k] \bmod n = 0$, 因此我们可以提前是否存在 k 满足上述要求, 如果不存在则可以提前终止。
- 根据题目要求可以划分为两个子数组 A, B , 则可以知道两个子数组中一定存在一个数组的长度小于等于 $\frac{n}{2}$, 因此我们只需检测数组长度小于等于 $\frac{n}{2}$ 的子数组中是否存在其和满足 $subsum \times n = sum \times k$ 即可。

```
public boolean splitArraySameAverage(int[] a) {  
    if (a.length == 1) return false;  
    int n = a.length, m = n / 2, sum = Arrays.stream(a).sum();  
    boolean isPossible = false;  
    for (int i = 1; i <= m; i++)  
        if (sum * i % n == 0) {  
            isPossible = true;  
            break;  
        }  
    if (!isPossible) return false;  
    Set<Integer>[] f = new HashSet[m+1];  
    Arrays.setAll(f, z -> new HashSet<>());  
    f[0].add(0);  
    for (int v : a)  
        for (int i = m; i >= 1; i--)  
            for (int x : f[i-1]) {  
                int cur = x + v;  
                if (cur * n == sum * i) return true;  
                f[i].add(cur);  
            }  
    return false;  
}
```

- 复杂度分析:

复杂度分析

- 时间复杂度: $O(n^2 \times sum(nums))$, 其中 n 表示数组的长度, $sum(nums)$ 表示数组 $nums$ 的和。我们需要求出给定长度下所有可能的子集元素之和, 数组的长度为 n , 每种长度下子集的和最多有 $sum(nums)$ 个, 因此总的时间复杂度为 $O(n^2 \times sum(nums))$ 。
- 空间复杂度: $O(n \times sum(nums))$ 。一共有 n 种长度的子集, 每种长度的子集和最多有 $sum(nums)$ 个, 因此需要的空间为 $O(n \times sum(nums))$ 。

1.3.2 805. Split Array With Same Average 【这里是怎们又重复了一遍?】需要合并一下

You are given an integer array $nums$. You should move each element of $nums$ into one of the two arrays A and B such that A and B are non-empty, and $\text{average}(A) == \text{average}(B)$. Return true if it is possible to achieve that and false otherwise. Note that for an array arr , $\text{average}(arr)$ is the sum of all the elements of arr over the length of arr .

```
// 1) 如果一个长度为 n 的数组可以被划分为 A 和 B 两个数组, 我们假设 A 的长度小于 B 并且 A 的大小是 k, 那么: total_sum / n
// 2) 如果经过第一步的验证, 发现确实有符合条件的 k, 那么我们在第二步中, 就试图产生 k 个子元素的所有组合, 并且计算他们的和。这
// 3) 有了 sums[n - 1][k], 我们就检查 sums[n - 1][k] 中是否包含 (total_sum * k / n)。一旦发现符合条件的 k, 就返回 true, 否则
// 在递推公式中我们发现, sums[i][j] 仅仅和 sums[i - 1][j], sums[i][j - 1] 有关, 所以可以进一步将空间复杂度从 O(n^2*M) 降低到
public boolean splitArraySameAverage(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    int m = n / 2;
    int sum = Arrays.stream(nums).sum();
    boolean poss = false;
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        if (sum * i % n == 0) {
            poss = true;
            break;
        }
    }
    if (!poss) return false;
    List<Set<Integer>> ls = new ArrayList<>();
    for (int i = 0; i <= m; i++)
        ls.add(new HashSet<Integer>());
    ls.get(0).add(0); // 这种构建子序列和的方法, 要学习一下
    for (int v : nums) { // for each element in A, we try to add it to sums[i] by joining sums[i - 1]
        for (int i = m; i >= 1; i--) {
            for (int t : ls.get(i-1)) {
                ls.get(i).add(t + v);
            }
        }
    }
    // System.out.println("ls.size(): " + ls.size());
    // for (int z = 0; z < ls.size(); ++z) {
    //     for (Integer x : ls.get(z))
    //         System.out.print(x + ", ");
    //     System.out.print("\n");
    //     System.out.print("\n ");
    // }
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        if (sum * i % n == 0 && ls.get(i).contains(sum * i / n))
            return true;
    }
    return false;
}
private boolean helper(int [] arr, int curSum, int cur, int start) {
    if (cur == 0) return curSum == 0;
    if (arr[start] > curSum / cur) return false;
    for (int i = start; i < arr.length - cur + 1; i++) {
        if (i > start && arr[i] == arr[i-1]) continue;
        if (helper(arr, curSum - arr[i], cur-1, i+1)) return true;
    }
    return false;
}
public boolean splitArraySameAverage(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    int m = n / 2;
    int sum = Arrays.stream(nums).sum();
    boolean poss = false;
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
```

```

        if (sum * i % n == 0) {
            poss = true;
            break;
        }
    }
    if (!poss) return false;
    Arrays.sort(nums);
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        if (sum * i % n == 0 && helper(nums, sum * i / n, i, 0)) return true;
    return false;
}
bool splitArraySameAverage(vector<int>& A) { // https://www.cnblogs.com/grandyang/p/10285531.html
    int n = A.size(), m = n / 2, sum = accumulate(A.begin(), A.end(), 0);
    bool possible = false;
    for (int i = 1; i <= m && !possible; ++i) {
        if (sum * i % n == 0) possible = true;
    }
    if (!possible) return false;
    bitset<300001> bits[m + 1] = {1};
    for (int num : A) {
        for (int i = m; i >= 1; --i) {
            bits[i] |= bits[i - 1] << num;
        }
    }
    for (int i = 1; i <= m; ++i) {
        if (sum * i % n == 0 && bits[i][sum * i / n]) return true;
    }
    return false;
}

```

1.3.3 2008. Maximum Earnings From Taxi - Medium

There are n points on a road you are driving your taxi on. The n points on the road are labeled from 1 to n in the direction you are going, and you want to drive from point 1 to point n to make money by picking up passengers. You cannot change the direction of the taxi.

The passengers are represented by a 0-indexed 2D integer array rides , where $\text{rides}[i] = [\text{start}_i, \text{end}_i, \text{tip}_i]$ denotes the i th passenger requesting a ride from point start_i to point end_i who is willing to give a tip_i dollar tip.

For each passenger i you pick up, you earn $\text{end}_i - \text{start}_i + \text{tip}_i$ dollars. You may only drive at most one passenger at a time.

Given n and rides , return the maximum number of dollars you can earn by picking up the passengers optimally.

Note: You may drop off a passenger and pick up a different passenger at the same point.

1. 解题思路与分析

```

public long maxTaxiEarnings(int n, int[][] rides) {
    Arrays.sort(rides, (a, b) -> (a[0] != b[0] ? a[0] - b[0] : a[1] - b[1]));
    Map<Integer, Set<int []>> m = new HashMap<>();
    for (int [] r : rides)
        m.computeIfAbsent(r[1], z -> new HashSet<>()).add(r);
    long [] dp = new long [n+1];
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        dp[i] = dp[i-1];
        if (m.containsKey(i))
            for (int [] r : m.get(i))
                dp[r[1]] = Math.max(dp[r[1]], dp[r[0]] + r[1] - r[0] + r[2]);
    }
    return dp[n];
}

```

2. 解题思路与分析

```

// Similar to 1235. Maximum Profit in Job Scheduling
// Sort by the end time to get non-overlapping intervals.
// Use the treemap to find the previous ride before the current ride.
public long maxTaxiEarnings(int n, int[][] rides) {
    if (rides == null || rides.length == 0) return 0;

```

```

        for (int[] r : rides)
            r[2] = r[1] - r[0] + r[2];
        Arrays.sort(rides, (a, b) -> (a[1] - b[1]));
        TreeMap<Long, Long> map = new TreeMap<>();
        map.put((long)0, (long)0);
        for (int[] r : rides) {
            long cur = map.floorEntry((long)r[0]).getValue() + r[2];
            if (cur > map.lastEntry().getValue()) {
                map.put((long)r[1], cur);
            }
        }
    }
    return map.lastEntry().getValue();
}

```

1.3.4 1713. Minimum Operations to Make a Subsequence - Hard LIS 经典题型, 需要吃透

You are given an array target that consists of distinct integers and another integer array arr that can have duplicates.

In one operation, you can insert any integer at any position in arr. For example, if arr = [1,4,1,2], you can add 3 in the middle and make it [1,4,3,1,2]. Note that you can insert the integer at the very beginning or end of the array.

Return the minimum number of operations needed to make target a subsequence of arr.

A subsequence of an array is a new array generated from the original array by deleting some elements (possibly none) without changing the remaining elements' relative order. For example, [2,7,4] is a subsequence of [4,2,3,7,2,1,4] (the underlined elements), while [2,4,2] is not.

1. 解题思路与分析

```

public int minOperations(int[] t, int[] a) {
    int n = t.length;
    Map<Integer, Integer> m = new HashMap<Integer, Integer>();
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        m.put(t[i], i);
    List<Integer> d = new ArrayList<Integer>();
    for (int val : a)
        if (m.containsKey(val)) {
            int idx = m.get(val);
            int it = binarySearch(d, idx);
            if (it != d.size())
                d.set(it, idx);
            else
                d.add(idx);
        }
    return n - d.size();
}
public int binarySearch(List<Integer> li, int t) {
    int size = li.size();
    if (size == 0 || li.get(size - 1) < t)
        return size;
    int low = 0, high = size - 1;
    while (low < high) {
        int mid = (high - low) / 2 + low;
        if (li.get(mid) < t)
            low = mid + 1;
        else
            high = mid;
    }
    return low;
}

```

1.3.5 1883. Minimum Skips to Arrive at Meeting On Time - Hard

You are given an integer hoursBefore, the number of hours you have to travel to your meeting. To arrive at your meeting, you have to travel through n roads. The road lengths are given as an

integer array dist of length n, where dist[i] describes the length of the ith road in kilometers. In addition, you are given an integer speed, which is the speed (in km/h) you will travel at.

After you travel road i, you must rest and wait for the next integer hour before you can begin traveling on the next road. Note that you do not have to rest after traveling the last road because you are already at the meeting.

For example, if traveling a road takes 1.4 hours, you must wait until the 2 hour mark before traveling the next road. If traveling a road takes exactly 2 hours, you do not need to wait. However, you are allowed to skip some rests to be able to arrive on time, meaning you do not need to wait for the next integer hour. Note that this means you may finish traveling future roads at different hour marks.

For example, suppose traveling the first road takes 1.4 hours and traveling the second road takes 0.6 hours. Skipping the rest after the first road will mean you finish traveling the second road right at the 2 hour mark, letting you start traveling the third road immediately. Return the minimum number of skips required to arrive at the meeting on time, or -1 if it is impossible.

1. 解题思路与分析

```
// dp[i][j] 表示途径 i 条道路跳过 j 次休息情况下的最小用时，遍历过程中根据上一道路是否休息选取最小值，结合状态转移方程求解。
public int minSkips(int[] dist, int speed, int hoursBefore) {
    int n = dist.length;
    double[][] dp = new double[n+1][n+1]; // dp[i][j]: 途径 i 条道路，跳过 j 次休息下的最小用时
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        Arrays.fill(dp[i], Integer.MAX_VALUE);
    dp[0][0] = 0;
    double eps = 1e-8; // eps 用于避免浮点数计算误差导致向上取整后出现错误，inf 作为最大值初始化动态规划数组
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        double t = (double)dist[i-1] / speed; // 第 i 条道路耗时
        dp[i][0] = Math.ceil(dp[i-1][0] - eps) + t; // 单独计算不跳过休息时的值
        dp[i][i] = dp[i-1][i-1] + t; // 单独计算跳过所有休息时的值
        for (int j = i-1; j > 0; j--) // 根据上一条路是否休息，来优化最小值
            dp[i][j] = Math.min(Math.ceil(dp[i-1][j] - eps) + t, dp[i-1][j-1] + t);
    }
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        if (dp[n][i] <= hoursBefore + eps) return i;
    return -1;
}
```

1.3.6 1911. Maximum Alternating Subsequence Sum - Medium todo: 还需要总结题解

The alternating sum of a 0-indexed array is defined as the sum of the elements at even indices minus the sum of the elements at odd indices.

For example, the alternating sum of [4,2,5,3] is $(4 + 5) - (2 + 3) = 4$. Given an array nums, return the maximum alternating sum of any subsequence of nums (after reindexing the elements of the subsequence).

A subsequence of an array is a new array generated from the original array by deleting some elements (possibly none) without changing the remaining elements' relative order. For example, [2,7,4] is a subsequence of [4,2,3,7,2,1,4] (the underlined elements), while [2,4,2] is not.

1. 解题思路与分析: DP

设计两个长整数 evenDp 和 oddDp, 分别记录上一元素为偶数下标、奇数下标时当前的最大交替和。根据是否添加当前元素, 状态转移方程为:

evenDp = Math.max(上一 evenDp, 上一 oddDp + 当前元素)

oddDp = Math.max(上一 oddDp, 上一 evenDp + 当前元素)

最终得到的 evenDp 即为最大交替和。

```
public long maxAlternatingSum(int[] a) {
    long odd = 0, evn = a[0]; // 上一元素为偶数下标、奇数下标时的最大交替和
```

```

    for (int i = 1; i < a.length; i++) {
        evn = Math.max(evn, odd + a[i]); // 偶数下标交替和转移
        odd = Math.max(odd, evn - a[i]); // 奇数下标交替和转移
    }
    return evn;
}

```

2. 解题思路与分析：最大股票收益 参考 Leetcode 题解，发现有一个方法很巧妙。将样例 [6,2,1,2,4,5] 转化为 [0,6,2,1,2,4,5]，那么题面就转化为模拟股票交易，数组中的数为股票价格，index 为天数。

你可以在第 i 天买入股票，第 j 天卖出股票，其中 $i \leq j$ 。

那么其实我们可以用上帝视角来看，只要股票价格后一天比当天高，我们就当天买入，后一天卖出。

那么就如下所示：

买入	卖出	收益
第0天	第1天	6-0=6
第3天	第4天	2-1=1
第4天	第5天	4-2=2
第5天	第6天	5-4=1

那么总收益为 $6+1+2+1=10$ ，即 $6-0+2-1+4-2+5-4$ ，抵消之后就是 $6-1+5$ ，就是样例中的最优子序列 [6,1,5]~

```

public long maxAlternatingSum(int[] a) {
    int [] b = new int [a.length+1];
    System.arraycopy(a, 0, b, 1, a.length);
    long ans = 0;
    for (int i = 1; i < b.length; i++)
        if (b[i] - b[i-1] > 0) ans += b[i] - b[i-1];
    return ans;
}

```

1.3.7 1928. Minimum Cost to Reach Destination in Time - Hard

There is a country of n cities numbered from 0 to $n - 1$ where all the cities are connected by bi-directional roads. The roads are represented as a 2D integer array edges where edges[i] = [xi, yi, timei] denotes a road between cities xi and yi that takes timei minutes to travel. There may be multiple roads of differing travel times connecting the same two cities, but no road connects a city to itself.

Each time you pass through a city, you must pay a passing fee. This is represented as a 0-indexed integer array passingFees of length n where passingFees[j] is the amount of dollars you must pay when you pass through city j .

In the beginning, you are at city 0 and want to reach city $n - 1$ in maxTime minutes or less. The cost of your journey is the summation of passing fees for each city that you passed through at some moment of your journey (including the source and destination cities).

Given maxTime , edges, and passingFees, return the minimum cost to complete your journey, or -1 if you cannot complete it within maxTime minutes.

1. 解题思路与分析

```

// 设计一个动态规划数组 dp[maxTime + 1][n]，其中 dp[t][i] 表示第 t 分钟到达城市 i 时的最少费用，则状态转移方程为：
// dp[t][c1] = Math.min(dp[t][c1], dp[t - time][c2] + passingFees[c1])
// dp[t][c2] = Math.min(dp[t][c2], dp[t - time][c1] + passingFees[c2])
public int minCost(int maxTime, int[][] edges, int[] passingFees) {
    int n = passingFees.length;
    int [][] dp = new int [maxTime+1][n];
    for (int i = 0; i <= maxTime; i++)
        Arrays.fill(dp[i], Integer.MAX_VALUE / 2);
    dp[0][0] = passingFees[0];
    for (int t = 0; t <= maxTime; t++)

```

```

        for (int [] e : edges) {
            if (e[2] > t) continue;
            int u = e[0], v = e[1], time = e[2];
            dp[t][u] = Math.min(dp[t][u], dp[t-time][v] + passingFees[u]); // v --> u
            dp[t][v] = Math.min(dp[t][v], dp[t-time][u] + passingFees[v]); // u --> v
        }
        int ans = Integer.MAX_VALUE / 2;
        for (int i = 1; i <= maxTime; i++)
            ans = Math.min(ans, dp[i][n-1]);
        return ans == Integer.MAX_VALUE / 2 ? -1 : ans;
    }
}

```

1.3.8 730. Count Different Palindromic Subsequences - Hard

Given a string s, return the number of different non-empty palindromic subsequences in s. Since the answer may be very large, return it modulo 109 + 7.

A subsequence of a string is obtained by deleting zero or more characters from the string. A sequence is palindromic if it is equal to the sequence reversed.

Two sequences a1, a2, ... and b1, b2, ... are different if there is some i for which ai != bi.

count("bccb") = 2 * count("cc") + 2 = 6	"c", "cc"
count("cc") = 2 * count("") + 2 = 2	"bccb", "bccb" + "b", "bb"

count("abccb") = count("abcc") + count("bccb") - count("bcc") = 4 + 6 - 3 = 7	
count("abcc") = count("abc") + count("bcc") - count("bc") = 3 + 3 - 2 = 4	
count("abc") = count("ab") + count("bc") - count("b") = 2 + 2 - 1 = 3	
count("ab") = count("a") + count("b") - count("") = 1 + 1 - 0 = 2	
count("bcc") = count("bc") + count("cc") - count("c") = 2 + 2 - 1 = 3	
count("bc") = count("b") + count("c") - count("") = 1 + 1 - 0 = 2	

Base case:

```

count(x) = 1 if x in {"a", "b", "c", "d"}
          = 0 if x is empty

```

count("bcacb") = 2 * count("cbc") + 1 = 9	"b", "cbc", "c", "cc" "bbb", "bcacb", "bcb", "bccb" "bb"
count("cbc") = 2 * count("b") + 2 = 4	"b" "cbc" "c", "cc"

count("babb") = 2 * count("bab") - count("a") = 10	"bcb", "bab", "b", "bb", "c", "a" "babb", "babb", "bbb", "bbb", "beb", "bab"
count("bab") = 2 * count("a") + 2 = 6	"c", "a" "bab", "bab" "b", "bb"

dp[i][j] = count of different palindromic subseq of s[i] ~ s[j] (inclusive)

```

dp[i][j] =
    if s[i] != s[j]:                                # count("abcd")
        dp[i][j - 1] + dp[i + 1][j] - dp[i + 1][j - 1],  # count("abc") + count("bcd") - count("bc")
    if s[i] == s[j]:
        dp[i + 1][j - 1] * 2 + 2,                      s[i] not in s[i+1:j-1]
        dp[i + 1][j - 1] * 2 + 1,                      count(s[i+1:j-1], s[i]) == 1
        dp[i + 1][j - 1] * 2 - dp[l + 1][r - 1]      l, r is the first/last pos of s[i] in s[i+1:j-1]

```

```

private int dfs(char[] s, int i, int j) {
    if (i > j) return 0;
    if (i == j) return 1;
    if (dp[i][j] > 0) return dp[i][j];
    long ans = 0;
    if (s[i] == s[j]) {
        ans += dfs(s, i + 1, j - 1) * 2;
        int l = i + 1;

```

```

        int r = j - 1;
        while (l <= r && s[l] != s[i]) ++l;
        while (l <= r && s[r] != s[i]) --r;
        if (l > r) ans += 2;
        else if (l == r) ans += 1;
        else ans -= dfs(s, l + 1, r - 1);
    } else
        ans = dfs(s, i, j - 1) + dfs(s, i + 1, j) - dfs(s, i + 1, j - 1);
    return dp[i][j] = (int)((ans + mod) % mod);
}
private static final int mod = (int)1e9 + 7;
private int [][] dp;
public int countPalindromicSubsequences(String S) {
    int n = S.length();
    dp = new int[n][n];
    return dfs(S.toCharArray(), 0, n - 1);
}

```

- dp

```

public int countPalindromicSubsequences(String s) {
    int n = s.length();
    int mod = (int)1e9 + 7;
    char [] arr = s.toCharArray();
    long [][] dp = new long [n][n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        dp[i][i] = 1;
    for (int len = 1; len <= n; len++) {
        for (int i = 0; i+len < n; i++) {
            int j = i + len;
            if (arr[i] == arr[j]) {
                dp[i][j] = dp[i+1][j-1] * 2;
                int l = i+1;
                int r = j-1;
                while (l <= r && arr[l] != arr[i]) ++l;
                while (l <= r && arr[r] != arr[i]) --r;
                if (l == r) dp[i][j] += 1;
                else if (l > r) dp[i][j] += 2;
                else dp[i][j] -= dp[i+1][r-1];
            } else dp[i][j] = dp[i][j-1] + dp[i+1][j] - dp[i+1][j-1];
            dp[i][j] = (dp[i][j] + mod) % mod;
        }
    }
    return (int)dp[0][n-1];
}

```

1.3.9 1125. Smallest Sufficient Team - Hard 这个题要多写几遍

In a project, you have a list of required skills `req_skills`, and a list of people. The i th person `people[i]` contains a list of skills that the person has.

Consider a sufficient team: a set of people such that for every required skill in `req_skills`, there is at least one person in the team who has that skill. We can represent these teams by the index of each person.

For example, `team = [0, 1, 3]` represents the people with skills `people1`, `people2`, and `people4`. Return any sufficient team of the smallest possible size, represented by the index of each person. You may return the answer in any order.

It is guaranteed an answer exists.

```

// 强行剪枝: 收集到的 size >= 目前的结果, 直接 return;
// 这题的思路就是先把 skill 和 set of people 建立好,
// 然后去用 skill set 做 backtracking 收集, 如果 temp team 的 size 大于结果, 直接 return, 否则 update 结果,
// 这里有个小 tricky 的地方, 就是如果 people 是新人, 加入之后 dfs, backtracking 的时候, 要判断如果是新人, 则 remove, 否则不 remove
private void dfs(String[] req_skills, HashSet<Integer> team, int idx) {
    if (team.size() >= minTeamSize) return; // 强行剪枝: 收集到的 size >= 目前的结果, 直接 return;
    if (idx == req_skills.length) {
        minTeamSize = team.size();
        resTeam = new HashSet<Integer>(team);
    }
}

```

¹DEFINITION NOT FOUND.

```

        return;
    }
    boolean isNewPerson = false;
    for (int people : map.get(req_skills[idx])) {
        isNewPerson = team.add(people);
        dfs(req_skills, team, idx + 1);
        if (isNewPerson)
            team.remove(people);
    }
}
HashMap<String, Set<Integer>> map;
Set<Integer> resTeam;
int minTeamSize;
public int[] smallestSufficientTeam(String[] req_skills, List<List<String>> people) {
    minTeamSize = people.size();
    this.map = new HashMap<>();
    for (int i = 0; i < minTeamSize; i++)
        for (String skill: people.get(i))
            map.computeIfAbsent(skill, k -> new HashSet<Integer>()).add(i);
    this.resTeam = new HashSet<Integer>();
    dfs(req_skills, new HashSet<Integer>(), 0);
    int [] res = new int[resTeam.size()];
    int idx = 0;
    for (int person : resTeam)
        res[idx++] = person;
    return res;
}

```

- Java soution using Bit DP 10ms

```

public int[] smallestSufficientTeam(String[] req_skills, List<List<String>> people) {
    int n = req_skills.length, range = 1 << n, cur, idx;
    Map<String, Integer> idxMap = new HashMap<>();
    for (int i = 0; i < n; i++)
        idxMap.put(req_skills[i], i);
    long [] dp = new long [range]; // 每个 bit 位实际存了构成答案最小组的各成员的下标, 60 个人, long
    int [] cnt = new int [range];
    Arrays.fill(cnt, Integer.MAX_VALUE);
    cnt[0] = 0;
    for (int i = 0; i < people.size(); i++) {
        List<String> l = people.get(i);
        cur = 0;
        for (String skill : l)
            if (idxMap.containsKey(skill))
                cur |= 1 << idxMap.get(skill);
        for (int j = range-1; j > 0; j--) {
            int dx = (j & cur) ^ j; // 由其它人所构成的拥有 j 的这些种技能的子集/ j 的这些种技能可以由 j 一个人来替换 (其它可能需要很
            if (cnt[idx] != Integer.MAX_VALUE && cnt[j] > cnt[idx] + 1) {
                cnt[j] = cnt[idx] + 1;
                dp[j] = dp[idx] | (1L << i); // at most 60 people
            }
        }
    }
    int [] res = new int[cnt[range-1]];
    long preRes = dp[range-1]; // 5 people: 11111, 1111, 111, 11, 1
    int valIdx = 0;
    long val = 0;
    idx = 0;
    while (preRes != 0) {
        val = preRes & 1;
        if (val == 1) res[valIdx++] = val;
        preRes >>= 1;
        valIdx++;
    }
    return res;
}

```

- DFS + Memorizaion (A real O($2^{\text{skill}} * \text{people}$) Solution) Java 8ms

- [https://leetcode.com/problems/smallest-sufficient-team/discuss/1011135/DFS-%2B-Memorizaion-\(A-real-O\(2skill-*-people\)-Solution\)-Java-8ms](https://leetcode.com/problems/smallest-sufficient-team/discuss/1011135/DFS-%2B-Memorizaion-(A-real-O(2skill-*-people)-Solution)-Java-8ms)

```

List<Integer> minComb;
int[] peopleSkillMasks;

```

```

Integer[] memo; // 这个方法确实快一点儿
int[] nextPerson;
int n;
public int[] smallestSufficientTeam(String[] req_skills, List<List<String>> people) {
    // 1. some preprocess to get bitmask for people skills
    this.n = req_skills.length;
    Map<String, Integer> skillToIdx = new HashMap<>();
    for (int i = 0; i < n; i++)
        skillToIdx.put(req_skills[i], i);
    this.peopleSkillMasks = new int[people.size()];
    for (int i = 0; i < peopleSkillMasks.length; i++) {
        int skillMask = 0;
        for (String skill : people.get(i))
            skillMask |= (1 << skillToIdx.get(skill));
        peopleSkillMasks[i] = skillMask;
    }
    // 2. dfs
    memo = new Integer[1 << n];
    nextPerson = new int[1 << n];
    dfs(0, 0);
    // 3. reconstruct the path
    int curSkillSet = 0;
    List<Integer> res = new ArrayList<>();
    while(curSkillSet != (1 << n) - 1) {
        res.add(nextPerson[curSkillSet]);
        curSkillSet |= peopleSkillMasks[nextPerson[curSkillSet]];
    }
    return res.stream().mapToInt(i->i).toArray();
}
// a very simple dfs with memo to compute all combinations of people.
// Use memorization to optimize the time complexity to O(2^skill * people) 2^skill for 2^skill node in the tree, people become
private int dfs(int curSkillSet, int startIdx) {
    if (curSkillSet == (1 << n) - 1) return 0;
    if (memo[curSkillSet] == null) {
        int res = Integer.MAX_VALUE / 2;
        int nextPersonIdx = -1;
        for (int i = startIdx; i < peopleSkillMasks.length; i++) {
            int withNewSkill = peopleSkillMasks[i] | curSkillSet;
            if (withNewSkill != curSkillSet) {
                int numPeople = dfs(withNewSkill, i+1) + 1;
                if (res > numPeople) {
                    res = numPeople;
                    nextPersonIdx = i;
                }
            }
        }
        memo[curSkillSet] = res;
        nextPerson[curSkillSet] = nextPersonIdx;
    }
    return memo[curSkillSet];
}

```

- Recursion + Memoization + bit mask , with Simple JAVA solution

- <https://leetcode.com/problems/smallest-sufficient-team/discuss/1487180/Recursion-%2B-Memoization-%2B-bit-mask-with-Simple-JAVA-solution>

上面的这些方法相对较偏，就暂时顾不上了

1.3.10 1575. Count All Possible Routes - Hard

You are given an array of distinct positive integers locations where locations[i] represents the position of city i. You are also given integers start, finish and fuel representing the starting city, ending city, and the initial amount of fuel you have, respectively.

At each step, if you are at city i, you can pick any city j such that $j \neq i$ and $0 \leq j < locations.length$ and move to city j. Moving from city i to city j reduces the amount of fuel you have by $|locations[i] - locations[j]|$. Please notice that $|x|$ denotes the absolute value of x.

Notice that fuel cannot become negative at any point in time, and that you are allowed to visit any city more than once (including start and finish).

Return the count of all possible routes from start to finish.
Since the answer may be too large, return it modulo $10^9 + 7$.

```
// 自顶向下 (记忆化搜索)
// 每个 dfs 搜索当前状态为城市 i, 油量 f 到达终点的方案数。这样决策的时候就很直观：当前这个状态的方案数，由可去的城市的，且油量为剩余油量的方案数之和。
// 初始化：每个状态都初始化为 -1。
// 当走到终点时，这个状态的可走到终点的方案数 +1。
private int dfs(int[] arr, int end, int idx, int fu) {
    if (dp[idx][fu] != -1) return dp[idx][fu];
    dp[idx][fu] = 0;
    if (idx == end) {
        dp[idx][fu] += 1;
        dp[idx][fu] %= mod;
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (i == idx || Math.abs(arr[i] - arr[idx]) > fu) continue;
        dp[idx][fu] = (dp[idx][fu] + dfs(arr, end, i, fu - Math.abs(arr[i] - arr[idx]))) % mod;
    }
    return dp[idx][fu];
}
int mod = (int)1e9 + 7;
int[][] dp;
int n;
public int countRoutes(int[] locations, int start, int finish, int fuel) {
    n = locations.length;
    if (fuel < Math.abs(locations[start] - locations[finish])) return 0;
    dp = new int[n][fuel+1];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        Arrays.fill(dp[i], -1);
    dfs(locations, finish, start, fuel);
    return dp[start][fuel];
}

// 自底向上
// 为什么想到动态规划：最优子结构：到达终点的方案数肯定由到达其他点的，不同油量的方案数求和。
// 如何定义状态：城市肯定在状态里，因为其他城市有不同的剩余油量的状态，且油量为 0 无法到达，也成为限制之一。所以油量也必须在状态里。
// d p ( i , f ) dp(i, f) 表示到达第 i 个城市，剩余油量为 f 的方案数。
// 状态转移：第 i 个城市，可以由除本身外的城市转移过来，只要剩余的油量不小于所用的油量就够了，最后答案是求总共的个数，所以只要
// dp(i, fdist)=dp(i, fdist)+dp(k, f)(fdist>=0)
// 枚举顺序：每个城市肯定都要枚举一遍，因为还需要从另一个城市转移过来，所以除本身外的城市肯定还要再枚举一遍。
// 关键是油量的枚举，因为油量肯定是慢慢减少的，可以想到是逆序枚举，而且油量要放在最外层枚举。因为如果先枚举城市 i，再枚举城市
// dp：最优子结构 到达终点的方案数肯定由到达其他点的，不同油量的方案数求和
// 搜索：反过来 在第 i 个城市到达 fin 的方案数，也可以由其他的点到达 fin 的方案数转移过来，但是油量有限制，所以油量肯定在状态里
// 所以城市 和 剩余油量肯定在状态里
// dp(i, j) 表示到达第 i 个城市，剩余油量为 j 的方案数
// dp(i, j) = dp(i, j) + dp(k, j - dist)
public int countRoutes(int[] locations, int start, int finish, int fuel) {
    int n = locations.length;
    if (fuel < Math.abs(locations[start] - locations[finish])) return 0;
    int[][] dp = new int[n][fuel+1];
    dp[start][fuel] = 1; // 初始点且燃料满的点方案数为 1
    int leftFu = 0, mod = (int)1e9 + 7;
    for (int j = fuel; j >= 0; j--) { // fuel leftover
        for (int i = 0; i < n; i++) { // cur city
            for (int k = 0; k < n; k++) { // next city
                if (i == k) continue;
                leftFu = j - Math.abs(locations[i] - locations[k]);
                if (leftFu < 0) continue;
                dp[i][leftFu] = (dp[i][leftFu] + dp[k][j]) % mod; // 这里好别扭呀：想呀想呀
            }
        }
    }
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i <= fuel; i++)
        ans = (ans + dp[finish][i]) % mod;
    return ans;
}
```

1.3.11 1012. Numbers With Repeated Digits - Hard 数位 DP + 压缩状态经典

Given an integer n, return the number of positive integers in the range [1, n] that have at least one repeated digit.

题意：统计 1-N 中，满足每个位置都不同的数有几个。

思路：数位 DP。通过一个 1×10 的 mask 表示当前这个数，1-9 哪些数被用了。
 比赛的时候，一直想通过一个 dfs 直接找到不重复的数，一直不对。
 赛后发现，别人都是通过一个 dfs 找重复的数，然后总个数减去。

```

private int dfs(int len, int limit, int mask) { // 不重复数的个数
    if (len == 0) return 1;
    if (limit == 0 && dp[len][mask][limit] > 0) return dp[len][mask][limit]; // 记忆化部分
    int maxn = limit > 0 ? bit[len] : 9; // 求出最高可以枚举到哪个数字
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i <= maxn; i++) // 当前位
        if ((mask & (1 << i)) == 0)
            if (mask == 0 && i == 0)
                ans += dfs(len - 1, (limit > 0 && i == maxn ? 1 : 0), mask); // 有前导 0，所以 0 不能统计，不更新 mask
            else ans += dfs(len - 1, (limit > 0 && i == maxn ? 1 : 0), mask | (1 << i)); // 更新 mask
    if (limit == 0) dp[len][mask][limit] = ans; // 如果没有限制，代表搜满了，可以记忆化，否则就不能
    return ans;
}
int [][][] dp;
int [] bit;
public int numDupDigitsAtMostN(int N) {
    int sum = N + 1;
    bit = new int [19];
    dp = new int [19][1 << 10][2];
    int idx = 0;
    while (N > 0) {
        bit[++idx] = N % 10;
        N /= 10;
    }
    return sum - dfs(idx, 1, 0);
}
}

```

1. 解题思路与分析：降维一下数位 DP + 压缩状态经典

```

public int numDupDigitsAtMostN(int n) {
    if (n <= 10) return 0;
    int m = n + 1, r = 1 << 10, idx = 0; // r = 1 << 10 表示 n 值最多会有 10 个位，通过记忆化暴搜每个位的可能性、来数 <=
    d = new int[10]; // n 转化为数组
    while (n != 0) {
        d[idx++] = n % 10;
        n /= 10;
    }
    dp = new int [r][idx];
    for (int i = 0; i < r; i++) Arrays.fill(dp[i], -1);
    return m - dfs(idx-1, 0, 1); // 自底向上
}
int [][] dp;
int [] d; // dfs: 返回不得复数的个数
private int dfs(int idx, int r, int l) { // l: limit flag: 当第一次搜到某数位，该数位能取的最大值是受限制的
    if (idx == -1) return 1; // l: limit 有没有限制，这个参数结合两种方法看得还是有些迷糊
    if (dp[r][idx] != -1 && l == 0) return dp[r][idx];
    int up = l == 1 ? d[idx] : 9, ans = 0; // 当前位的最大取值，求出当前位最高可以枚举到哪个数字
    for (int i = 0; i <= up; i++) { // 遍历当前位的所有可能的取值: [0, 1, 2, ... up]
        // 首先当前位的状态没有出现过
        // (本体计算的是不满足 至少两次的所有情况 逆向思维)
        if ((r & (1 << i)) == 0) { // 当前位第 i 位在 r 的状态下还没有出现过
            if (i == 0 && r == 0) // 001 的情况: 有前导 0，所以 0 不能统计，不更新 mask r(就是这个最高位为 0 的数不计入)
                ans += dfs(idx-1, r, 0);
            else // 当前数没有前导 0、完全合法，计入结果，并进一步统计
                ans += dfs(idx-1, r | (1 << i), (l == 1 && i == d[idx] ? 1 : 0));
        }
    }
    if (l == 0) dp[r][idx] = ans; // 如果没有限制，代表搜满了，可以记忆化，否则就不能
    return ans;
}

```

2. 解题思路与分析

这道题给了一个正整数 N ，让返回所有不大于 N 且至少有一个重复数字的正整数的个数，题目中给的例子也可以很好的帮助我们理解。要求的是正整数的位数上至少要有一个重复数字，当然最简单暴力的方法就是从 1 遍历到 N ，然后对于每个数字判断是否有重复数字，看了一眼题目难度 Hard，想都不用想，肯定是超时的。这道题需要更高效的解法，首先来想，若是

直接求至少有一个重复数字的正整数，由于并不知道有多少个重复数字，可能 1 个，2 个，甚至全是重复数字，这样很难找到规律。有时候直接求一个问题不好求，可以考虑求其相反的情况，至少有一个重复数字反过来就是一个重复数字都没有，所以这里可以求不大于 N 且一个重复数字都没有的正整数的个数，然后用 N 减去这个数字即为所求。好，接下来看怎么求，对于任意一个 N，比如 7918，是个四位数，而所有的三位数，两位数，一位数，都一定比其小，所以可以直接求出没有重复数字的三位数，两位数，和一位数。比如三位数，由于百位上不能有 0，则只有 9 种情况，十位上可以有 0，则有 9 种情况，个位上则有 8 种情况，所以就是 $9 \times 9 \times 8$ 。可以归纳出没有重复数字的 n 位数的个数，最高位去除 0 还有 9 种，剩余的 n-1 位则依次是 9, 8, 7... 则后面的 n-1 位其实是个全排列，从 9 个数中取出 n-1 个数字的全排列，初中就学过的。这里写一个全排列的子函数，求从 m 个数字中取 n 个数字的全排列，方便后面计算。算完这些后，还要来算符合题意的四位数，由于第一位是 7，若千位上是小于 7 的数字（共有 6 种，千位上不能是 0），则后面的百位，十位，个位又都可以全排列了，从 9 个数字中取 3 个数字的全排列，再乘以千位上小于 7 的 6 种情况。若当千位固定为 7，则百位上可以放小于 9 的数字（共有 8 种，百位不能放 7，但可以放 0），则后面的十位和个位都可以全排列了，从 8 个数字中取出 2 个数字的全排列，再乘以百位上小于 9 的 8 种情况。需要注意的是，遍历给定数字的各个位时，有可能出现重复数字，一旦出现了之后，则该 prefix 就不能再用了，因为已经不合题意了。所以要用一个 HashSet 来记录访问过的数字，一旦遇到重复数字后就直接 break 掉。最后还有一个小 trick 需要注意，由于 N 本身也需要计算进去，所以再计算的时候，使用 N+1 进行计算的话，就可以把 N 这种情况算进去了

```

private int A(int m, int n) {
    return n == 0 ? 1 : A(m, n-1) * (m-n+1);
}
public int numDupDigitsAtMostN(int n) {
    List<Integer> digits = new ArrayList<>();
    Set<Integer> vis = new HashSet<>();
    for (int i = n+1; i > 0; i /= 10)
        digits.add(0, i % 10);
    int res = 0, m = digits.size();
    for (int i = 1; i < m; i++) res += 9 * A(9, i-1);
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = i > 0 ? 0 : 1; j < digits.get(i); ++j) {
            if (vis.contains(j)) continue;
            res += A(9-i, m-i-1);
        }
        if (vis.contains(digits.get(i))) break;
        vis.add(digits.get(i));
    }
    return n - res;
}

```

1.3.12 600. Non-negative Integers without Consecutive Ones - Hard

Given a positive integer n, return the number of the integers in the range [0, n] whose binary representations do not contain consecutive ones.

1. 解题思路与分析

我们就可以通过 DP 的方法求出长度为 k 的二进制数的无连续 1 的数字个数。由于题目给我们的并不是一个二进制数的长度，而是一个二进制数，比如 100，如果我们按长度为 3 的情况计算无连续 1 点个数个数，就会多计算 101 这种情况。所以我们的目标是要将大于 num 的情况去掉。下面从头来分析代码，首先我们要把十进制数转为二进制数，将二进制数存在一个字符串中，并统计字符串的长度。然后我们利用这个帖子中的方法，计算该字符串长度的二进制数所有无连续 1 的数字个数，然后我们从倒数第二个字符开始往前遍历这个二进制数字符串，如果当前字符和后一个位置的字符均为 1，说明我们并没有多计算任何情况，不明白的可以带例子来看。如果当前字符和后一个位置的字符均为 0，说明我们有多计算一些情况，就像之前举的 100 这个例子，我们就多算了 101 这种情况。我们怎么确定多了多少种情况呢，假如给我们的数字是 8，二进制为 1000，我们首先按长度为 4 算出所有情况，共 8 种。仔细观察我们十进制转为二进制字符串的写法，发现转换结果跟真实的二进制数翻转了一下，所

以我们的 t 为"0001"，那么我们从倒数第二位开始往前遍历，到 $i=1$ 时，发现有两个连续的 0 出现，那么 $i=1$ 这个位置上能出现 1 的次数，就到 one 数组中去找，那么我们减去 1，减去的就是 0101 这种情况，再往前遍历， $i=0$ 时，又发现两个连续 0，那么 $i=0$ 这个位置上能出 1 的次数也到 one 数组中去找，我们再减去 1，减去的是 1001 这种情况

```
public int findIntegers(int n) {
    int cnt = 0;
    String t = "";
    while (n > 0) {
        ++cnt;
        t += (n & 1) == 1 ? "1" : "0"; // 这里把 t 倒过来了
        n >>= 1;
    }
    char[] s = t.toCharArray();
    int[] one = new int[cnt], zero = new int[cnt];
    one[0] = zero[0] = 1;
    for (int i = 1; i < cnt; i++) {
        zero[i] = zero[i-1] + one[i-1];
        one[i] = zero[i-1];
    }
    int ans = zero[cnt-1] + one[cnt-1]; // 长度为 cnt 的所有不含重复 1 的数字的个数，但数多了
    for (int i = cnt-2; i >= 0; i--) {
        if (s[i] == '1' && s[i+1] == '1') break;
        if (s[i] == '0' && s[i+1] == '0') ans -= one[i];
    }
    return ans;
}
```

2. 解题思路与分析

其实长度为 k 的二进制数字符串没有连续的 1 的个数是一个斐波那契数列 $f(k)$ 。比如当 $k=5$ 时，二进制数的范围是 00000-11111，我们可以将其分为两个部分，00000-01111 和 10000-10111，因为任何大于 11000 的数字都是不成立的，因为有开头已经有了两个连续 1。而我们发现其实 00000-01111 就是 $f(4)$ ，而 10000-10111 就是 $f(3)$ ，所以 $f(5) = f(4) + f(3)$ ，这就是一个斐波那契数列啦。那么我们要做的首先就是建立一个这个数组，方便之后直接查值。我们从给定数字的最高位开始遍历，如果某一位是 1，后面有 k 位，就加上 $f(k)$ ，因为如果我们把当前位变成 0，那么后面 k 位就可以直接从斐波那契数列中取值了。然后标记 pre 为 1，再往下遍历，如果遇到 0 位，则 pre 标记为 0。如果当前位是 1，pre 也是 1，那么直接返回结果。最后循环退出后我们要加上数字本身这种情况

```
public int findIntegers(int n) {
    int k = 31, pre = 0, ans = 0;
    int[] dp = new int[32];
    dp[0] = 1;
    dp[1] = 2;
    for (int i = 2; i < 32; i++)
        dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2];
    while (k >= 0) {
        if ((n & (1 << k)) > 0) {
            ans += dp[k];
            if (pre == 1) return ans;
            pre = 1;
        } else pre = 0;
        k--;
    }
    return ans + 1;
}
```

1.3.13 514. Freedom Trail - Hard

In the video game Fallout 4, the quest "Road to Freedom" requires players to reach a metal dial called the "Freedom Trail Ring" and use the dial to spell a specific keyword to open the door.

Given a string ring that represents the code engraved on the outer ring and another string key that represents the keyword that needs to be spelled, return the minimum number of steps to spell all the characters in the keyword.

Initially, the first character of the ring is aligned at the "12:00" direction. You should spell all the characters in key one by one by rotating ring clockwise or anticlockwise to make each character of the string key aligned at the "12:00" direction and then by pressing the center button.

At the stage of rotating the ring to spell the key character `key[i]`:

You can rotate the ring clockwise or anticlockwise by one place, which counts as one step. The final purpose of the rotation is to align one of ring's characters at the "12:00" direction, where this character must equal `key[i]`. If the character `key[i]` has been aligned at the "12:00" direction, press the center button to spell, which also counts as one step. After the pressing, you could begin to spell the next character in the key (next stage). Otherwise, you have finished all the spelling.

1. 解题思路分析: dfs + 记忆数组 (这个图把钥匙中每个字母的出现位置记住了, 以后拿去用不搜)

- 记录下所有字母对应的位置, 这样在找字母相对位置的时候就不需要循环搜索了
- 采用递归的方法, 找出当前字母对应的位置最小的步数: 只需要把当前字母对应的所有位置找出来, 然后计算最小值即可
- 下一个位置再次迭代计算即可

```
public int findRotateSteps(String ring, String key) { // dfs
    m = ring.length();
    n = key.length();
    char[] s = ring.toCharArray();
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        if (key.indexOf(s[i]) == -1) continue; // 只记录在 key 中出现过的字母的位置
        idx.computeIfAbsent(s[i], z -> new ArrayList<>()).add(i);
    }
    dp = new int[m][n];
    return dfs(0, 0, ring, key);
}
Map<Character, List<Integer>> idx = new HashMap<>();
int[][] dp;
int m, n;
private int dfs(int i, int j, String s, String t) {
    if (j == n) return 0;
    if (dp[i][j] > 0) return dp[i][j];
    int ans = Integer.MAX_VALUE;
    for (Integer v : idx.get(t.charAt(j)))
        ans = Math.min(ans, dfs(v, j+1, s, t) + getDist(v, i) + 1); // + 1 for confirm push
    return dp[i][j] = ans;
}
private int getDist(int i, int j) {
    int min = Math.min(i, j), max = Math.max(i, j);
    return Math.min(Math.abs(i - j), Math.abs(m - max + min));
}
```

2. 解题思路分析动态规划

- 博主最先尝试的用贪婪算法来做, 就是每一步都选最短的转法, 但是 OJ 中总有些 test case 会引诱贪婪算法得出错误的结果, 因为全局最优解不一定都是局部最优解, 而贪婪算法一直都是在累加局部最优解, 这也是为啥 DP 解法这么叼的原因。贪婪算法好想好实现, 但是不一定能得到正确的结果。DP 解法难想不好写, 但往往才是正确的解法, 这也算一个 trade off 吧。
- 此题需要使用一个二维数组 `dp`, 其中 `dp[i][j]` 表示转动从 `i` 位置开始的 `key` 串所需要的最少步数 (这里不包括 `spell` 的步数, 因为 `spell` 可以在最后统一加上), 此时表盘的 12 点位置是 `ring` 中的第 `j` 个字符。不得不佩服这样的设计的确很巧妙, 我们可以从 `key` 的末尾往前推, 这样 $dp^{1,1}$ 就是我们所需要的结果, 因为此时是从 `key` 的开头开始转动, 而且表盘此时的 12 点位置也是 `ring` 的第一个字符。现在我们来看如何找出递推公式, 对于 `dp[i][j]`, 我们知道此时要将 `key[i]` 转动到 12 点的位置, 而此时表盘的 12 点位置

是 $\text{ring}[j]$ ，我们有两种旋转的方式，顺时针和逆时针，我们的目标肯定是要求最小的转动步数，而顺时针和逆时针的转动次数之和刚好为 ring 的长度 n ，这样我们求出来一个方向的次数，就可以迅速得到反方向的转动次数。为了将此时表盘上 12 点位置上的 $\text{ring}[j]$ 转动到 $\text{key}[i]$ ，我们要将表盘转动一整圈，当转到 $\text{key}[i]$ 的位置时，我们计算出转动步数 diff ，然后计算出反向转动步数，并取二者较小值为整个转动步数 step ，此时我们更新 $\text{dp}[i][j]$ ，更新对比值为 $\text{step} + \text{dp}[i+1][k]$ ，这个也不难理解，因为 key 的前一个字符 $\text{key}[i+1]$ 的转动情况 suppose 已经计算好了，那么 $\text{dp}[i+1][k]$ 就是当时表盘 12 点位置上 $\text{ring}[k]$ 的情况的最短步数， step 就是从 $\text{ring}[k]$ 转到 $\text{ring}[j]$ 的步数，也就是 $\text{key}[i]$ 转到 $\text{ring}[j]$ 的步数，用语言来描述就是，从 key 的 i 位置开始转动并且此时表盘 12 点位置为 $\text{ring}[j]$ 的最小步数 ($\text{dp}[i][j]$) 就等价于将 $\text{ring}[k]$ 转动到 12 点位置的步数 (step) 加上从 key 的 $i+1$ 位置开始转动并且 $\text{ring}[k]$ 已经在表盘 12 点位置上的最小步数 ($\text{dp}[i+1][k]$) 之和。

- 突然发现这不就是之前那道 Reverse Pairs 中解法一中归纳的顺序重现关系的思路吗，都做了总结，可换个马甲就又不认识了，泪目中。。。

```
public int findRotateSteps(String ring, String key) { // dfs
    int m = key.length(), n = ring.length();
    char [] s = key.toCharArray();
    char [] t = ring.toCharArray();
    int [][] dp = new int [m+1][n];
    int dif = 0, cnt = 0;
    for (int i = m-1; i >= 0; i--)
        for (int j = 0; j < n; j++) { // j 是固定在 12 点钟表盘的位置
            dp[i][j] = Integer.MAX_VALUE;
            for (int k = 0; k < n; k++)
                if (s[i] == t[k]) {
                    dif = Math.abs(j - k);
                    cnt = Math.min(dif, n - dif);
                    dp[i][j] = Math.min(dp[i][j], cnt + dp[i+1][k]);
                }
        }
    return dp[0][0] + m;
}
```

3. 解题思路分析: dfs + 记忆数组 todo: 这个写得太繁琐了，没看

过程就是需要一步一步求 key 里面的每个字符。如果当前位置已经是对应到这个字符，那么直接按按钮就可以

如果当前位置不是，那么有两种旋转方式，顺时针或者逆时针，然后找到第一个字符就是在同一个方向上的最短距离，

因为在同一个方向上，即使后面有重复的字符，无论后面的字符在那里，遇到第一个符合条件的字符就按按钮一定是最优解。

但是在不同方向上就不一定了，有可能一个方向上当前字符距离更短，但是有可能后面的字符距离会更远，

比如 $\text{ring}=ABCDEFGBF$, $\text{key}=BG$, 如果看第一个字符，那应该是顺时针，只需要转一格就到，逆时针需要转两格，

但是顺时针第一步快了以后，后面到 G 会需要更长的步骤。而逆时针会比较快。

所以，基本的逻辑是每一步不能决定当前哪个方向是否是最优解，只有不断递归，把每步的两个方向全部尝试完到 key 结束才可以

当然，如果不做任何处理，这样做是要超时的（我开始就写了这样一个版本），一个直观的做法，就是在递归的基础上

加一个记忆表，针对 ring 的位置 index 和 key 的 kindex 做记录，如果已经存在一个解了就可以直接返回结果

这个递归 +memorization 的解法，那一定存在一个 bottom up 的动态规划解法，这个后面再学习

```

private int helper(String s, String t, int i, int j) { // s: ring, t: key, i: idxRing, j: idxKey
    Map<Integer, Integer> locMap = mem.get(i);
    if (locMap != null)
        if (locMap.get(j) != null) return locMap.get(j);
    if (j == n) return 0;
    int step = 0, k = i;
    boolean foundK = false;
    for (; step <= m/2; ++step) {
        k = (i + step + m) % m;
        if (s.charAt(k) == t.charAt(j)) {
            foundK = true;
            break;
        }
    }
    int rstep = 0, x = i;
    boolean foundX = false;
    while (rstep <= m/2) {
        x = (i - rstep + m) % m;
        if (s.charAt(x) == t.charAt(j)) {
            foundX = true;
            break;
        }
        rstep++;
    }
    int min = Integer.MAX_VALUE;
    if (foundK) min = helper(s, t, k, j+1) + step + 1;
    if (foundX) min = Math.min(min, helper(s, t, x, j+1) + rstep + 1);
    if (locMap == null) {
        locMap = new HashMap<>();
        mem.put(i, locMap);
    }
    locMap.put(j, min);
    return min;
}
Map<Integer, Map<Integer, Integer>> mem = new HashMap<>();
int m, n;
public int findRotateSteps(String ring, String key) {
    m = ring.length();
    n = key.length();
    return helper(ring, key, 0, 0);
}

```

1.3.14 78. Subsets - Medium 典型 subset 题目 new ArrayList<>(){add(v);}

Given an integer array nums of unique elements, return all possible subsets (the power set).

The solution set must not contain duplicate subsets. Return the solution in any order.

1. 解题思路与分析: Bitmasking

```

public List<List<Integer>> subsets(int[] a) { // 这种应该是最简单最快的了
    int n = a.length, r = (1 << n);
    List<List<Integer>> ll = new ArrayList<>();
    for (int i = 0; i < r; i++) {
        List<Integer> l = new ArrayList<>();
        if (i == 0) {
            ll.add(l);
            continue;
        }
        for (int j = 0; j < n; j++)
            if (((i >> j) & 1) == 1) l.add(a[j]);
        ll.add(l);
    }
    return ll;
}

```

2. 解题思路与分析: Cascading

```

public List<List<Integer>> subsets(int[] a) { // 在后面的动态规划中也会常用到，还是需要熟悉一下
    int n = a.length, r = (1 << n);
    List<List<Integer>> ll = new ArrayList<>();
    ll.add(new ArrayList<>());
    for (int v : a) {

```

```

        List<List<Integer>> tmp = new ArrayList<>();
        for (List<Integer> l : ll)
            tmp.add(new ArrayList<>(l) {{ add(v); }}); // 这种写法，见过一次，上次找了半天也没能找出来
        for (List<Integer> l : tmp)
            ll.add(l);
    }
    return ll;
}

```

3. 解题思路与分析: backtracking

```

public List<List<Integer>> subsets(int[] a) { // 这个最原始本能的、回溯的写法被我忘记了.....
    n = a.length;
    vis = new boolean [n];
    getASubset(new ArrayList<>(), 0, a);
    return ll;
}
List<List<Integer>> ll = new ArrayList<>();
boolean [] vis;
int n;
void getASubset(List<Integer> l, int idx, int [] a) {
    if (idx == n) {
        ll.add(new ArrayList<>(l));
        return ;
    }
    getASubset(l, idx+1, a);
    l.add(a[idx]);
    getASubset(l, idx+1, a);
    l.remove(l.size()-1);
}

```

1.3.15 368. Largest Divisible Subset - Medium 要求返回序列的接龙型

Given a set of distinct positive integers nums, return the largest subset answer such that every pair (answer[i], answer[j]) of elements in this subset satisfies:

$\text{answer}[i] \% \text{answer}[j] = 0$, or $\text{answer}[j] \% \text{answer}[i] = 0$ If there are multiple solutions, return any of them.

1. 解题思路与分析: 万能的 dfs 记忆化搜索

```

public List<Integer> largestDivisibleSubset(int[] a) { // 出来一个新题：您是认不是它是 dfs 记忆化搜索，岂不是很悲催？
    Arrays.sort(a);
    n = a.length;
    dp = new List [n];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        List<Integer> cur = dfs(a, i, 1);
        if (cur.size() > ans.size())
            ans = cur;
    }
    return ans;
}
List<Integer> ans = new ArrayList<>();
List<Integer> [] dp;
int n;
// pre: dfs 路径中前一节点
// 返回值: 当前节点的倍数数组 (包含当前节点)
private List<Integer> dfs(int [] a, int i, int pre) {
    int cur = a[i];
    if (cur % pre != 0) return new ArrayList<>();
    if (dp[i] != null) return dp[i]; // 记忆数组存在当前结果的话直接返回，避免重复计算
    List<Integer> maxList = new ArrayList<>();
    for (int j = i+1; j < n; j++) {
        List<Integer> tmp = dfs(a, j, cur);
        if (tmp.size() > maxList.size())
            maxList = new ArrayList<>(tmp);
        // maxList = tmp; // bug;
    }
    maxList.add(cur); // 将当前节点加入到集合中，有点儿回溯的样子，把路径中的数字反序加了回来
    dp[i] = maxList; // 将当前结果存入记忆数组
    return maxList;
}

```

2. 解题思路与分析: 接龙型动态规划

属于接龙型动态规划，类似于 Longest Increasing Subsequence 的做法。这个题不同之处有两点：

需要记录具体方案 $O(N^2)$ 的时间复杂度不能通过测试

具体的优化在于找上一个接龙的数的时候，不是 for 循环所有比他小的数，而是直接 for 循环他的因子。而获取因子可以用 $O(n)$ 的时间做到。

```
public List<Integer> largestDivisibleSubset(int[] a) { // todo: 感觉想得还不是很透
    if (a == null || a.length == 0) return new ArrayList();
    Arrays.sort(a);
    int n = a.length;
    HashMap<Integer, Integer> dp = new HashMap();
    HashMap<Integer, Integer> pre = new HashMap();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp.put(a[i], 1);
        pre.put(a[i], -1);
    }
    int lastNum = a[0];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int num = a[i];
        for (Integer factor : getFactors(num)) {
            if (!dp.containsKey(factor)) continue;
            if (dp.get(num) < dp.get(factor) + 1) {
                dp.put(num, dp.get(factor) + 1);
                pre.put(num, factor);
            }
        }
        if (dp.get(num) > dp.get(lastNum))
            lastNum = num;
    }
    return getPath(pre, lastNum);
}
private List<Integer> getPath(HashMap<Integer, Integer> pre, int lastNum) {
    List<Integer> path = new ArrayList();
    while (lastNum != -1) {
        path.add(lastNum);
        lastNum = pre.get(lastNum);
    }
    Collections.reverse(path);
    return path;
}
private List<Integer> getFactors(int num) {
    List<Integer> factors = new ArrayList();
    if (num == 1) return factors;
    int factor = 1;
    while (factor * factor <= num) {
        if (num % factor == 0) {
            factors.add(factor);
            if (factor != 1 && num / factor != factor) // 这里会把所有质因子的倍数也加进去，怕数组中不存在最小质因子，而是
                factors.add(num / factor);
        }
        factor++;
    }
    return factors;
}
```

3. 解题思路与分析: 一个极为简洁的 dp

这里有个很简单的数学性质，就是整除的传递性，如果 $a \% b == 0$ 且 $b \% c = 0$ ，那么 $a \% c = 0$ ，说白了如果 c 是 b 的因子， b 又是 a 的因子，那么 c 肯定是 a 的因子。这样我们就可以在数组中找出很多整除链 ($a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ ，其中 b 是 a 的因子， c 是 b 的因子， d 是 c 的因子)，这样的链条就满足两两整除的条件，题目就变成了求最长的链条。

```
public List<Integer> largestDivisibleSubset(int[] nums) {
    int n = nums.length;
    List<Integer> ans = new ArrayList<Integer>();
    if (n < 2) {
        if (n == 0) return ans;
        ans.add(nums[0]);
    }
```

```

        return ans;
    }
    Arrays.sort(nums);
    int[] preFactIdx = new int[n];
    int[] factCnt = new int[n];
    int maxlen = 0;
    int maxnum = 0;
    for (int i = n-1; i >= 0; i--) {
        for (int j = i; j < n; j++) {
            if (nums[j] % nums[i] == 0 && factCnt[i] < factCnt[j]+1) {
                factCnt[i] = factCnt[j]+1;
                preFactIdx[i] = j;
                if (factCnt[i] > maxlen) {
                    maxlen = factCnt[i];
                    maxnum = i;
                }
            }
        }
    }
    for (int i = 0; i < maxlen; i++) {
        ans.add(nums[maxnum]);
        maxnum = preFactIdx[maxnum];
    }
    return ans;
}

```

首先我先对 `nums` 排序，这里我用了两个数组 `prefactors[]` 和 `factorcount[]`，`prefactors[i]` 里其实保存的是以 `nums[i]` 未结尾的整除链前面一个数的下标，`factorcount[i]` 存的是以 `nums[i]` 结尾的整除链长度。这里我们就可以用动态规划的方式求出 `factorcount[i]` 的值了，取最大的一个，然后再根据 `prefactors[i]` 推算出整除链中所有的元素。

这里开两个脑洞，发散下思维。

- 脑洞 1： 其实所有整除链可以合并为一个多叉整除树，这里得增加一个额外的根节点，使得根节点可以被 `nums` 中任何一个数整除。这个整除树有个很重要的性质——除根节点以为任意节点可以整除其父节点。这道题就会演变成求整除树中最深的路径。对于树的问题，我们往往能用递归的方式解决，代码也会变得比较好理解。
- 脑洞 2： 看下代码，是不是很像 01 背包，其实我觉得这到题可以认为是带限制条件的 01 背包，限制条件可以简化为放入背包的数必须能整除背包中最小的一个数，背包为无穷大，每个数的价值为 1。

1.3.16 673. Number of Longest Increasing Subsequence

Given an integer array `nums`, return the number of longest increasing subsequences. Notice that the sequence has to be strictly increasing.

```

public int findNumberOfLIS(int[] nums) { // dynamic programming
    int n = nums.length;
    int [][] arr = new int[n][2];
    int maxLength = 1;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        Arrays.fill(arr[i], 1);
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = i+1; j < n; j++) {
            if (nums[j] > nums[i]) {
                if (arr[i][0] + 1 > arr[j][0]) {
                    arr[j][0] = arr[i][0] + 1;
                    arr[j][1] = arr[i][1];
                    maxLength = Math.max(maxLength, arr[j][0]);
                } else if (arr[i][0] + 1 == arr[j][0])
                    arr[j][1] += arr[i][1];
            }
        }
    }
    int cnt = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++)
        if (arr[i][0] == maxLength) cnt += arr[i][1];
    return cnt;
}

```

1.3.17 1987. Number of Unique Good Subsequences - Hard

You are given a binary string `binary`. A subsequence of `binary` is considered good if it is not empty and has no leading zeros (with the exception of "0").

Find the number of unique good subsequences of `binary`.

For example, if `binary` = "001", then all the good subsequences are ["0", "0", "1"], so the unique good subsequences are "0" and "1". Note that subsequences "00", "01", and "001" are not good because they have leading zeros. Return the number of unique good subsequences of `binary`. Since the answer may be very large, return it modulo 10⁹ + 7.

A subsequence is a sequence that can be derived from another sequence by deleting some or no elements without changing the order of the remaining elements.

这里的思路是：扫出从左起第一个1所在的位置，从左到右遍历，对于当前字符来说就是用当前字符或不用当前字符两种选择，然后会有重复的部分，需要把重复的部分减掉

小写字母a的ascii编码值为97，小写字母z的ascii编码值为122。
将数字97表示为小写字母a，那么每一个字母都可以由97+i来表示，i=0~25
例如 b -> 97+1
所以，dp[i]的下标i就能用来表示字母97+i，这样只需要26个空间即可表示所有的26个字母
然后dp[i]，这里表示的是以97+i结尾的子序列的个数
下面是对字符串S，从左到右进行遍历
这样的遍历，有这样的特点，以字符串"abcsade"为例子来描述
当遍历到字符s的时候，显然前面的字符"abc"都已经遍历了一次，
注意！子问题出现：
假设前面的"abc"，已经找出了所有的不重复的子序列:a,b,c,ab,ac,bc
那么当遍历到's'时，这个's'可以添加到所有上述子序列的末尾，构成新的子序列
由于原子序列不重复，显然在其所有子序列后添加一个字符's'得到的新的一系列子序列，
依然是不重复的。
所以能发现，以's'结尾的新子序列实际就是上述这些末尾添加了's'的子序列
但是考虑到's'字符可以单独作为一个子序列，因此还需要加上1，表示这一特例
那么总结上述推断，假设dp[i]表示当前遍历到字符97+i时，以此字符结尾的子序列的个数
$$dp[i] = 1 + dp[0] + dp[1] + dp[2] + \dots + dp[i-1] = 1 + \sum(dp)$$

```
public int numberOfUniqueGoodSubsequences(String binary) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int n = binary.length(), preZoo = 0, preOne = 0, m = 1;
    long [] dp = new long [n+1];
    String s = "#" + binary;
    while (m <= n && s.charAt(m) == '0') m++;
    if (m == n+1) return 1;
    dp[m] = 1;
    preOne = m;
    preZoo = m-1;
    for (int i = m+1; i <= n; i++) {
        char c = s.charAt(i);
        int j = (c == '0' ? preZoo : preOne);
        dp[i] = (2 * dp[i-1] % mod - (j >= 1 ? dp[j-1] : 0) + mod) % mod;
        if (c == '0') preZoo = i;
        else preOne = i;
    }
    return (int)dp[n] + (s.indexOf("0") != -1 ? 1 : 0);
}
```

Intuition

An easier or harder version of 940. Distinct Subsequences II

Explanation

the subsequence 0 is tricky,
so firstly we only count the case without any leading 0

We count the number of subsequence that ends with 0 and ends with 1.

If we need 0,
we can append 0 to all existing `ends0 + ends1` subsequences,
and make up `ends0 + ends1` different subsequences that ends with 0.
ans these subsequences has length ≥ 2 ,
So `ends0 = ends0 + ends1`.

If we need 1, the same,
we can append 1 to all existing `ends0 + ends1` subsequence,
and make up `ends0 + ends1` different subsequence that ends with 1,
ans these subsequences has length ≥ 2 .
So `1` is not in them, `ends1 = ends0 + ends1 + 1`.

The result is `ends1 + ends2`, and don't forget about `0`.
The final result is `ends1 + ends2 + has0`.

Complexity

Time $O(n)$

Space $O(1)$

```
public int numberofUniqueGoodSubsequences(String binary) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int endZoo = 0, endOne = 0, hasZoo = 0;
    for (int i = 0; i < binary.length(); i++) {
        if (binary.charAt(i) == '1')
            endOne = (endOne + endZoo + 1) % mod;
        else {
            endZoo = (endZoo + endOne) % mod;
            hasZoo = 1;
        }
    }
    return (endOne + endZoo + hasZoo) % mod;
}
```

- 还有一个没有看懂的

- <https://leetcode-cn.com/problems/number-of-unique-good-subsequences/solution/ju-yi-fan-san-by-avenger-h-34xa/>
- <https://leetcode-cn.com/problems/distinct-subsequences-ii/solution/dong-tai-g/>

```
def numberofUniqueGoodSubsequences(self, binary: str) -> int:
    M = 10**9+7
    dp = [0]*10
    b = str(int(binary))
    l = len(binary) - len(b)
    if l > 0:
        dp[0] = 1
    for c in b:
        if dp[0] >= 1:
            dp[int(c)] = (sum(dp)) % M
        else:
            dp[int(c)] = (1+ sum(dp)) % M
    return sum(dp)%M
```

1.3.18 847. Shortest Path Visiting All Nodes

You have an undirected, connected graph of n nodes labeled from 0 to $n - 1$. You are given an array graph where $\text{graph}[i]$ is a list of all the nodes connected with node i by an edge. Return the length of the shortest path that visits every node. You may start and stop at any node, you may revisit nodes multiple times, and you may reuse edges.

```
public int shortestPathLength(int[][] graph) {
    int n = graph.length;
    int tar = 0, res = 0;
    HashSet<String> s = new HashSet<>();
    Queue<Pair<Integer, Integer>> q = new LinkedList<>();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int mask = (1 << i);
        tar |= mask;
        s.add(Integer.toString(mask) + "-" + Integer.toString(i));
        q.add(new Pair<>(mask, i));
    }
    while (!q.isEmpty()) {
        for (int i = q.size(); i > 0; i--) {
            Pair cur = q.remove();
            if ((int)cur.getKey() == tar) return res;
            for (int next : graph[(int)cur.getValue()]) {
                int path = (int)cur.getKey() | (1 << next);
                String str = Integer.toString(path) + "-" + Integer.toString(next);
                if (s.contains(str)) continue;
                s.add(str);
                q.add(new Pair<>(path, next));
            }
        }
        ++res;
    }
    return -1;
}
```

1.3.19 926. Flip String to Monotone Increasing - Medium

A binary string is monotone increasing if it consists of some number of 0's (possibly none), followed by some number of 1's (also possibly none).

You are given a binary string s . You can flip $s[i]$ changing it from 0 to 1 or from 1 to 0.

Return the minimum number of flips to make s monotone increasing.

1. 解题思路与分析：动态规划

这道题给了我们一个只有 0 和 1 的字符串，现在说是可以将任意位置的数翻转，即 0 变为 1，或者 1 变为 0，让组成一个单调递增的序列，即 0 必须都在 1 的前面，博主刚开始想的策略比较直接，就是使用双指针分别指向开头和结尾，开头的指针先跳过连续的 0，末尾的指针向前跳过连续的 1，然后在中间的位置分别记录 0 和 1 的个数，返回其中较小的那个。这种思路乍看上去没什么问题，但是实际上是有问题的，比如对于这个例子"1001111110010111011"，如果按这种思路的话，就应该将所有的 0 变为 1，从而返回 6，但实际上更优的解法是将第一个 1 变为 0，将后 4 个 0 变为 1 即可，最终可以返回 5。

这说明了之前的解法是不正确的。这道题可以用动态规划 Dynamic Programming 来做，需要使用两个 dp 数组，其中 $\text{cnt1}[i]$ 表示将范围是 $[0, i-1]$ 的子串内最小的将 1 转为 0 的个数，从而形成单调字符串。同理， $\text{cnt0}[j]$ 表示将范围是 $[j, n-1]$ 的子串内最小的将 0 转为 1 的个数，从而形成单调字符串。这样最终在某个位置使得 $\text{cnt0}[i]+\text{cnt1}[i]$ 最小的时候，就是变为单调串的最优解，这样就可以完美的解决上面的例子，子串"100"的最优解是将 1 变为 0，而后面的"11111110010111011"的最优解是将 4 个 0 变为 1，总共加起来就是 5，参见代码如下：

```
// 可以用动态规划 Dynamic Programming 来做，需要使用两个 dp 数组，其中 cnt1[i] 表示将范围是 [0, i-1] 的子串内最小的将 1 转为 0 的个数。
// 同理，cnt0[j] 表示将范围是 [j, n-1] 的子串内最小的将 0 转为 1 的个数，从而形成单调字符串。
// 这样最终在某个位置使得 cnt0[i]+cnt1[i] 最小的时候，就是变为单调串的最优解，
public int minFlipsMonoIncr(String t) { // bug
    int n = t.length(), ans = Integer.MAX_VALUE;
```

```

char [] s = t.toCharArray();
int [] l = new int [n+1], r = new int [n+1];
for (int i = 1, j = n-1; i <= n; i++, --j) {
    l[i] = l[i-1] + (s[i-1] == '0' ? 0 : 1); // cnt left --> right 1--> 0
    r[j] = r[j+1] + (s[j] == '0' ? 1 : 0);
}
for (int i = 0; i <= n; i++)
    ans = Math.min(l[i] + r[i], ans);
return ans;
}

```

2. 解题思路与分析: 空间压缩与简化

我们可以进一步优化一下空间复杂度, 用一个变量 `cnt1` 来记录当前位置时 1 出现的次数, 同时 `res` 表示使到当前位置的子串变为单调串的翻转次数, 用来记录 0 的个数, 因为遇到 0 就翻 1 一定可以组成单调串, 但不一定是最优解, 每次都要和 `cnt1` 比较以下, 若 `cnt1` 较小, 就将 `res` 更新为 `cnt1`, 此时保证了到当前位置的子串变为单调串的翻转次数最少, 并不关心到底是把 0 变为 1, 还是 1 变为 0 了, 其实核心思想跟上面的解法很相近

```

// 用一个变量 cnt1 来记录当前位置时 1 出现的次数, 同时 res 表示使到当前位置的子串变为单调串的翻转次数,
// 用来记录 0 的个数, 因为遇到 0 就翻 1 一定可以组成单调串, 但不一定是最优解,
// 每次都要和 cnt1 比较以下, 若 cnt1 较小, 就将 res 更新为 cnt1,
// 此时保证了到当前位置的子串变为单调串的翻转次数最少, 并不关心到底是把 0 变为 1, 还是 1 变为 0 了
public int minFlipsMonoIncr(String t) { // bug
    int n = t.length(), res = 0, cntOne = 0;
    char [] s = t.toCharArray();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (s[i] == '0') res++;
        else cntOne++;
        res = Math.min(res, cntOne);
    }
    return res;
}

```

早上的时候不是刚写过一个这样的题吗? 与 1493 的第二种解法有什么区别?

1.3.20 313. Super Ugly Number

A super ugly number is a positive integer whose prime factors are in the array `primes`. Given an integer `n` and an array of integers `primes`, return the `n`th super ugly number. The `n`th super ugly number is guaranteed to fit in a 32-bit signed integer.

```

static class Node implements Comparable<Node> {
    private int index;
    private int val;
    private int prime;
    public Node(int index, int val, int prime) {
        this.index = index;
        this.val = val;
        this.prime = prime;
    }
    public int compareTo(Node other) {
        return this.val - other.val;
    }
}
public int nthSuperUglyNumber(int n, int[] primes) {
    final int [] arr = new int[n];
    arr[0] = 1; // 1 is the first ugly number
    final Queue<Node> q = new PriorityQueue<>();
    for (int i = 0; i < primes.length; ++i)
        q.add(new Node(0, primes[i], primes[i]));
    for (int i = 1; i < n; ++i) {
        Node node = q.peek(); // get the min element and add to arr
        arr[i] = node.val;
        do { // update top elements
            node = q.poll();
            node.val = arr[++node.index] * node.prime;
            q.add(node); // push it back
        } while (!q.isEmpty() && q.peek().val == arr[i]); // prevent duplicate
    }
}

```

```

    }
    return arr[n - 1];
}

```

- 下面这种解法也很巧妙

```

public int nthSuperUglyNumber(int n, int[] primes) {
    int m = primes.length;
    int [] ans = new int[n]; // 存放 1-n 个 SuperUglyNumber
    ans[0] = 1; // 第一个 SuperUglyNumber 是 1
    int [] next = new int[m];
    for (int i=0; i < m; i++)
        next[i] = 0; // 初始化
    int cnt = 1, min = Integer.MAX_VALUE, tmp = 0;
    while (cnt < n) {
        min = Integer.MAX_VALUE;
        for (int i = 0; i < m; i++){
            tmp = ans[next[i]] * primes[i];
            min = Math.min(min, tmp);
        }
        for (int i = 0; i < m; i++)
            if (min == ans[next[i]] * primes[i])
                next[i]++;
        ans[cnt++] = min;
    }
    return ans[n-1];
}

```

1.3.21 backpack III

```

public int backPackIII(int[] A, int[] V, int m) {
    int n = A.length;
    int [] dp = new int[m+1];
    for (int i = 1; i <= m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (i - A[j] >= 0)
                dp[i] = Math.max(dp[i], dp[i-A[j]] + V[j]);
        }
    }
    return dp[m];
}

```

1.3.22 879. Profitable Schemes - Hard 0-1 背包问题

There is a group of n members, and a list of various crimes they could commit. The i th crime generates a $\text{profit}[i]$ and requires $\text{group}[i]$ members to participate in it. If a member participates in one crime, that member can't participate in another crime.

Let's call a profitable scheme any subset of these crimes that generates at least minProfit profit, and the total number of members participating in that subset of crimes is at most n .

Return the number of schemes that can be chosen. Since the answer may be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

1. 解题思路与分析: DP

Solution: DP

0-1 Knapsack problem, each task can be finished only once in each state.

state: (current_profit, people_used)

$dp[k][i][j] := \# \text{ of schemes to achieve } i \text{ profit with } j \text{ people by assigning first } k \text{ tasks.}$

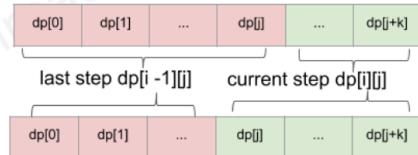
Init: $dp[0][0][0] = 1$
 Transition:
 $p, g = profit[k - 1], group[k - 1]$
 $dp[k][i][j] = dp[k-1][i][j] + dp[k-1][i-p][j-g] \text{ if } j \geq g \text{ else } 0$
 $0 \leq i \leq p, 0 \leq j \leq G$

Ans: $\text{sums}(dp[K][P])$

Time complexity: $O(KPG)$
 Space complexity: $O(KPG) \rightarrow O(PG)$

Dimensionality reduction
 If only $dp[i-1][*]$ is needed for $dp[i][*]$

- Using a tmp array. [always applicable]
 - $tmp = copy \text{ of } dp / \text{ or create new}$
 - update tmp using dp
 - $dp = tmp$
- Using a rolling array. [more efficient]
 - Iterate j in reverse order
 - Update $dp[j']$ using $dp[j]$ where $j' > j$



- 题目中说了结果可能非常大，要对一个超大数取余，看到这里，我们也就该明白为了不爆栈，只能用动态规划 Dynamic Programming 来做，LeetCode 里有好多题都是要对这个 $1e9+7$ 取余，不知道为啥都是对这个数取余。Anyway, who cares, 还是来想想 dp 数组如何定义以及怎么推导状态转移方程吧。

首先来看分配黑帮资源时候都需要考虑哪些因素，总共有三点，要干几票买卖，要用多少人，能挣多少钱。所以我们需要一个三维的 dp 数组，其中 $dp[k][i][j]$ 表示最多干 k 票买卖，总共用了 i 个人，获得利润为 j 的情况下分配方案的总数，初始化 $dp^{1,1,1}$ 为 1。

现在来推导状态转移方程，整个规划的核心是买卖，总共买卖的个数是固定的，每多干一票买卖，可能的分配方法就可能增加，但不可能减少的，因为假如当前已经算出来做 $k-1$ 次买卖的分配方法总数，再做一次买卖，之前的分配方法不会减少，顶多是人数不够，做不成当前这票买卖而已，所以我们的 $dp[k][i][j]$ 可以先更新为 $dp[k-1][i][j]$ ，然后再来看这第 k 个买卖还能不能做，我们知道假设这第 k 个买卖需要 g 个人，能获得利润 p ，只有当我们现在的人数 i 大于等于 g 的时候，才有可能做这个任务，我们要用 g 个人来做任务 k 的话，那么其余的 $k-1$ 个任务只能由 $i-g$ 个人来做了，而且由于整个需要产生利润 j ，第 k 个任务能产生利润 p ，所以其余的 $k-1$ 个任务需要产生利润 $j-p$ ，由于利润不能是负值，所以我们还需要跟 0 比较，取二者的最大值

综上所述，若我们选择做任务 k，则能新产生的分配方案的个数为 $dp[k-1][i-g][\max(0, j-p)]$ ，记得每次累加完要对超大数取余。最终我们需要将 $dp[n][i][P] (0 \leq i \leq G)$ 累加起来，因为我们不一定要全部使用 G 个人，只要能产生 P 的利润，用几个人都没关系，而 k 是表示最多的买卖数，可能上并没有干到这么多，所以只需要累加人数这个维度即可，

```
static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int profitableSchemes(int n, int minProfit, int[] group, int[] profit) {
    int m = group.length, ans = 0;
    int [][] dp = new int [m+1][n+1][minProfit+1];
    dp[0][0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= m; i++) { // 遍历每桩案件
        int g = group[i-1], p = profit[i-1];
        for (int j = 0; j <= n; j++) // 遍历人数
            for (int k = 0; k <= minProfit; k++) {
                dp[i][j][k] = dp[i-1][j][k];
                if (j >= g) // 在本桩案件人手够用的前提下，办与不办此案的方案数相加
                    dp[i][j][k] = (dp[i][j][k] + dp[i-1][j-g][Math.max(0, k-p)]) % mod;
            }
    }
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        ans = (ans + dp[m][i][minProfit]) % mod;
    return ans;
}
```

- 优化一下空间复杂度: 二维 dp Dimension reduction by using rolling array.

因为当前做的第 k 个任务，只跟前 k-1 个任务的分配方案有关，所以并不需要保存所有的任务个数的分配方式。这样我们就节省了一个维度，但是需要注意的是，更新的时候 i 和 j 只能从大到小更新，这个其实也不难理解，因为此时 dp[i][j] 存的是前 k-1 个任务的分配方式，所以更新第 k 个任务的时候，一定要从后面开始覆盖，因为用到了前面的值，若从前面的值开始更新的话，就不能保证用到的都是前 k-1 个任务的分配方式，有可能用到的是已经更新过的值，就会出错。

```
static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int profitableSchemes(int n, int minProfit, int[] group, int[] profit) {
    int m = group.length, ans = 0;
    int [][] dp = new int [n+1][minProfit+1];
    dp[0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= m; i++) { // 遍历每桩案件
        int g = group[i-1], p = profit[i-1];
        for (int j = n; j >= g; j--) // 当压缩了一维空间，从后往前遍历以免产生脏数据
            for (int k = minProfit; k >= 0; k--)
                dp[j][k] = (dp[j][k] + dp[j-g][Math.max(0, k-p)]) % mod;
    }
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        ans = (ans + dp[i][minProfit]) % mod;
    return ans;
}
```

3. 递归 dfs + 记忆数组

基本思想跟解法一没有太大的区别，递归的记忆数组其实跟迭代形式的 dp 数组没有太大的区别，作用都是保存中间状态从而减少大量的重复计算。这里稍稍需要注意下的就是递归函数中的 corner case，当 k=0 时，则根据 j 的值来返回 0 或 1，当 j 小于等于 0，返回 1，否则返回 0，相当于修改了初始化值（之前都初始化为了整型最小值），然后当 j 小于 0 时，则 j 赋值为 0，因为利润不能为负值。然后就看若当前的 memo[k][i][j] 已经计算过了，则直接返回即可

```
public int profitableSchemes(int n, int minProfit, int[] group, int[] profit) {
    m = group.length;
    this.n = n;
    this.minProfit = minProfit;
    dp = new int [m+1][n+1][minProfit+1];
    for (int i = 0; i <= m; i++)
        for (int j = 0; j <= n; j++)
            Arrays.fill(dp[i][j], Integer.MIN_VALUE);
    return dfs(m, n, minProfit, group, profit);
}
static final int mod = (int)1e9 + 7;
int m, n, minProfit;
int [[[] dp;
private int dfs(int i, int j, int k, int [] group, int [] profit) {
    if (i == 0) return k <= 0 ? 1 : 0;
    if (k < 0) k = 0;
    if (dp[i][j][k] != Integer.MIN_VALUE) return dp[i][j][k];
    int g = group[i-1], p = profit[i-1];
    int ans = dfs(i-1, j, k, group, profit);
    if (j >= g)
        ans = (ans + dfs(i-1, j-g, Math.max(0, k-p), group, profit)) % mod;
    return dp[i][j][k] = ans;
}
```

1.3.23 377. Combination Sum IV 没能认出这个题目是考 DP

Given an array of distinct integers nums and a target integer target, return the number of possible combinations that add up to target. The answer is guaranteed to fit in a 32-bit integer.

1. 解题思路与分析: dfs 记忆化搜索

思路：一开始想到用 DFS 来做，但是有个问题就是这种方式得到的答案各个数字排列是无序的，也就是 1, 3 和 3, 1 这种只是一个答案，

```
public int combinationSum4(int[] a, int target) { // 带记忆化的来搜索，用数组还是用图，可能也看数据规模吧
    return helper(a, target);
```

```

    }
    Map<Integer, Integer> dp = new HashMap<>();
    private int helper(int[] a, int target) {
        if (target < 0) return 0;
        if (target == 0) return 1;
        if (dp.containsKey(target)) return dp.get(target);
        int ans = 0;
        for (int i = 0; i < a.length; i++)
            ans += helper(a, target - a[i]);
        dp.put(target, ans);
        return ans;
    }
}

```

2. 解题思路与分析: DP

然后又想把数字保存起来, 在得到一个答案的时候对这些数字再求一次总共排列的个数, 这种方式还有问题就是在求总排列个数的时候比如 $2, 1, 1$ 三个加一起等于 4, 总的排列个数即为 $(3! / 2!)$, 但是当数字个数很多的时候阶乘太大, 根本无法计算。

然后就想到可以用动态规划来做, 也是一个背包问题, 求出 $[1, target]$ 之间每个位置有多少种排列方式, 这样将问题分化为子问题. 状态转移方程可以得到为:

$$dp[i] = \sum(dp[i - nums[j]]), (i - nums[j] > 0);$$

如果允许有负数的话就必须要限制每个数能用的次数了, 不然的话就会得到无限大的排列方式, 比如 $1, -1, target = 1$;

```

public int combinationSum4(int[] nums, int target) {
    int n = nums.length;
    int [] dp = new int [target + 1];
    dp[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= target; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (i - nums[j] >= 0)
                dp[i] += dp[i - nums[j]];
        }
    }
    return dp[target];
}

```

- 针对适当情况的优化: 如果 $target$ 远大于 $nums$ 数组的个数的话, 上面的算法可以做适当的优化, 先给 $nums$ 数组排个序, 然后从 1 遍历到 $target$, 对于 i 小于数组中的数字 x 时, 直接 break 掉, 因为后面的数更大, 其余地方不变

```

public int combinationSum4(int[] a, int target) { // if target 远大于 数组元素个数
    int n = a.length;
    Arrays.sort(a);
    int [] dp = new int [target + 1];
    dp[0] = 1;
    for (int i = 1; i <= target; i++) {
        for (Integer v : a) {
            if (i < v) break;
            dp[i] += dp[i - v];
        }
    }
    return dp[target];
}

```

1.3.24 1049. Last Stone Weight II

You are given an array of integers $stones$ where $stones[i]$ is the weight of the i th stone. We are playing a game with the stones. On each turn, we choose any two stones and smash them together. Suppose the stones have weights x and y with $x \leq y$. The result of this smash is: If $x = y$, both stones are destroyed, and If $x \neq y$, the stone of weight x is destroyed, and the stone of weight y has new weight $y - x$. At the end of the game, there is at most one stone left. Return the smallest possible weight of the left stone. If there are no stones left, return 0.

```

public int lastStoneWeightII(int[] stones) {
    int n = stones.length;
    int sum = Arrays.stream(stones).sum();
    boolean[] dp = new boolean[sum+1];
    dp[0] = true;
    sum = 0;
    for (int v : stones) {
        sum += v;
        for (int i = sum; i >= v; i--)
            if (dp[i-v]) dp[i] = true;
    }
    for (int i = sum/2; i >= 0; i--)
        if (dp[i]) return sum - i * 2;
    return 0;
}

```

1.3.25 810. Chalkboard XOR Game - Hard

You are given an array of integers `nums` represents the numbers written on a chalkboard.

Alice and Bob take turns erasing exactly one number from the chalkboard, with Alice starting first. If erasing a number causes the bitwise XOR of all the elements of the chalkboard to become 0, then that player loses. The bitwise XOR of one element is that element itself, and the bitwise XOR of no elements is 0.

Also, if any player starts their turn with the bitwise XOR of all the elements of the chalkboard equal to 0, then that player wins.

Return true if and only if Alice wins the game, assuming both players play optimally. There are three cases to consider:

Case 1- At the beginning of the game, XOR of all the elements are 0, then Alice wins before the game starts.

Case 2 - $\text{XOR} \neq 0$ and `nums.length` is even:
Let's try to use proof by contradiction. $S = (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

Assume $s \neq 0$, let's try to find contradiction

XOR s to both sides

$s \wedge s = s \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

$s \wedge s = 0 \Rightarrow 0 = s \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

$0 = (s \wedge x_1) \wedge (s \wedge x_2) \dots \wedge (s \wedge x_n)$

Now let's factor s from each bracket

$0 = (s \wedge s \dots \wedge s) \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

Since the number of $x_1..x_n$ is even, the number of s in the left bracket is even, each number \wedge itself even times results to 0

$0 = 0 \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

$0 \wedge \text{any number} \neq \text{itself}$ so

$0 = (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n) = s \Rightarrow 0 = s$

You see that there is a contradiction (compare with initial assumption $s \neq 0$), at the beginning we assumed $s \neq 0$. Then our assumption is wrong. So, $s = 0$ then Alice wins

Case 3- $\text{XOR} \neq 0$ and `nums.length` is odd:

Let's try to use proof by contradiction here like the other case

Assume $s \neq 0$, let's try to find contradiction

XOR s to both sides

$s \wedge s = s \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

$s \wedge s = 0 \Rightarrow 0 = s \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

$0 = (s \wedge x_1) \wedge (s \wedge x_2) \dots \wedge (s \wedge x_n)$

Now let's factor s from each bracket

$0 = (s \wedge s \dots \wedge s) \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n)$

Since the number of $x_1..x_n$ is odd, the number of s in the left bracket is odd, each number \wedge itself odd times results to it

$0 = s \wedge (x_1 \wedge x_2 \dots \wedge x_n) \Rightarrow 0 = s \wedge s$

Any number XOR itself becomes zero

$0 = s \wedge s = 0$

You see here we couldn't find the contradiction

```

public boolean xorGame(int[] nums) {
    int xor = 0 ;
    for (int i : nums)
        xor = xor ^ i ;
    if (xor == 0 || (nums.length & 1) == 0)
        return true ;
    return false ;
}

```

- 硬瓣出来的：注意同猫老鼠游戏 2 一样，要回的是某一方赢与否，与 1 有点儿区别。

```

private boolean helper(int[] arr, int i, int xor) { // xor: the current leftover array xor result
    if (i == n) return (i % 2 == 0);
    if (dp[i] != null) return dp[i];
    if (xor == 0) return (i % 2 == 0); // to be noted
    int tmp = 0;
    if (i % 2 == 0) { // alice's turn
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (arr[j] == -1) continue;
            if ((arr[j] ^ xor) == 0) continue;
            tmp = arr[j];
            arr[j] = -1;
            if (helper(arr, i+1, xor^tmp)) return dp[i] = true;
            arr[j] = tmp;
        }
        return dp[i] = false;
    } else { // bob's turn
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (arr[j] == -1) continue;
            if ((arr[j] ^ xor) == 0) continue;
            tmp = arr[j];
            arr[j] = -1;
            if (!helper(arr, i+1, xor^tmp)) return dp[i] = false;
            arr[j] = tmp;
        }
        return dp[i] = true;
    }
}
Boolean[] dp; // alice win states
int n;
public boolean xorGame(int[] arr) {
    n = arr.length;
    dp = new Boolean[n];
    int[] xor = new int[n];
    for (int i = 0; i < n; i++)
        xor[i] = (i == 0 ? 0 : xor[i-1]) ^ arr[i];
    return helper(arr, 0, xor[n-1]); // i: turn
}

```

1.3.26 1449. Form Largest Integer With Digits That Add up to Target

Given an array of integers cost and an integer target. Return the maximum integer you can paint under the following rules: The cost of painting a digit (i+1) is given by cost[i] (0 indexed). The total cost used must be equal to target. Integer does not have digits 0. Since the answer may be too large, return it as string. If there is no way to paint any integer given the condition, return "0".

```

public String largestNumber(int[] cost, int target) {
    int n = cost.length;
    int[] dp = new int[target+1];
    Arrays.fill(dp, -1);
    dp[0] = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = cost[i]; j <= target; j++) {
            if (dp[j-cost[i]] >= 0)
                dp[j] = Math.max(dp[j], dp[j-cost[i]]+1);
        }
    }
    if (dp[target] < 0) return "0";
    char[] ans = new char[dp[target]]; // 采樱桃机器人数组路线那天可以想出来，今天这个路径居然没有想出来！
    int left = target;
    for (int i = 0; i < dp[target]; i++) {
        for (int j = n; j > 0; j--) {
            if (left >= cost[j-1] && dp[left] == dp[left-cost[j-1]] + 1) {
                ans[i] = (char)('0' + j);
                left -= cost[j-1];
                break;
            }
        }
    }
}

```

```

    return String.valueOf(ans);
}

```

1.3.27 516. Longest Palindromic Subsequence

Given a string s, find the longest palindromic subsequence's length in s. A subsequence is a sequence that can be derived from another sequence by deleting some or no elements without changing the order of the remaining elements.

```

public int longestPalindromeSubseq(String s) {
    int n = s.length();
    int [][] dp = new int [n][n];
    dp[n-1][n-1] = 1;
    for (int i = n-2; i >= 0; i--) {
        dp[i][i] = 1;
        for (int j = i+1; j < n; j++) {
            if (s.charAt(i) == s.charAt(j))
                dp[i][j] = 2 + dp[i+1][j-1];
            else dp[i][j] = Math.max(dp[i+1][j], dp[i][j-1]);
        }
    }
    return dp[0][n-1];
}

```

1.3.28 1143. Longest Common Subsequence

Given two strings text1 and text2, return the length of their longest common subsequence. If there is no common subsequence, return 0. A subsequence of a string is a new string generated from the original string with some characters (can be none) deleted without changing the relative order of the remaining characters. For example, "ace" is a subsequence of "abcde". A common subsequence of two strings is a subsequence that is common to both strings.

```

public int longestCommonSubsequence(String S, String T) {
    int m = S.length();
    int n = T.length();
    int [][] dp = new int [m+1][n+1];
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        for (int j = 1; j <= n; j++)
            if (S.charAt(i-1) == T.charAt(j-1)) dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + 1;
            else dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
    return dp[m][n];
}

```

1.3.29 1092. Shortest Common Supersequence - Hard

Given two strings str1 and str2, return the shortest string that has both str1 and str2 as subsequences. If there are multiple valid strings, return any of them.

A string s is a subsequence of string t if deleting some number of characters from t (possibly 0) results in the string s.

- 参考的标准答案：

```

public void longestCommonSubsequence(String S, String T) { // 标准模板, 记住
    int m = S.length();
    int n = T.length();
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        for (int j = 1; j <= n; j++)
            if (S.charAt(i-1) == T.charAt(j-1)) dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + 1;
            else dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
}
int [][] dp;
public String shortestCommonSupersequence(String s, String t) {
    int m = s.length();
    int n = t.length();
    dp = new int [m+1][n+1];

```

```

longestCommonSubsequence(s, t); // fill dp table
int i = m, j = n;
StringBuilder sb = new StringBuilder();
while (i-1 >= 0 && j-1 >= 0) {
    if (s.charAt(i-1) == t.charAt(j-1)) {
        sb.append(s.charAt(i-1));
        --i;
        --j;
    } else {
        if (dp[i][j] == dp[i-1][j]) {
            sb.append(s.charAt(i-1));
            --i;
        } else {
            sb.append(t.charAt(j-1));
            --j;
        }
    }
}
if (i > 0) sb.append((new StringBuilder(s.substring(0, i))).reverse());
if (j > 0) sb.append((new StringBuilder(t.substring(0, j))).reverse());
return sb.reverse().toString();
}

```

- 自己写的

```

public String getLongestCommonSubsequence(String S, String T) { // 标准模板, 记住
    int m = S.length();
    int n = T.length();
    int [][] dp = new int [m+1][n+1];
    for (int i = 1; i <= m; i++)
        for (int j = 1; j <= n; j++)
            if (S.charAt(i-1) == T.charAt(j-1)) dp[i][j] = dp[i-1][j-1] + 1;
            else dp[i][j] = Math.max(dp[i-1][j], dp[i][j-1]);
    int i = m, j = n;
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    while (i-1 >= 0 && j-1 >= 0) {
        if (S.charAt(i-1) == T.charAt(j-1)) {
            sb.insert(0, S.charAt(i-1));
            --i;
            --j;
        } else {
            if (dp[i-1][j] >= dp[i][j-1]) --i;
            else --j;
        }
    }
    return sb.toString();
}
public String shortestCommonSupersequence(String s, String t) {
    int m = s.length();
    int n = t.length();
    int i = 0, j = 0;
    String sub = getLongestCommonSubsequence(s, t);
    String res = "";
    for (char c : sub.toCharArray()) {
        while (s.charAt(i) != c) {
            res += s.charAt(i);
            i++;
        }
        while (t.charAt(j) != c) {
            res += t.charAt(j);
            j++;
        }
        res += c;
        i++;
        j++;
    }
    return res + s.substring(i) + t.substring(j);
}

```

1.3.30 546. Remove Boxes - Hard

You are given several boxes with different colors represented by different positive numbers.

You may experience several rounds to remove boxes until there is no box left. Each time you can choose some continuous boxes with the same color (i.e., composed of k boxes, $k \geq 1$), remove them and get $k * k$ points.

Return the maximum points you can get.

```
// 定义 dp[l][r][k] 表示在 [l, r] 区间并且在后面包含了 k 个与 boxes[r] 相同颜色的 boxes 的情况下，可以获得的最大得分，显然题目要求
// 首先将 dp[l][r][k] 的值初始化为 dp[l][r - 1][0] + (k + 1)^2，表示首先消除 l 到 r-1 之间的 boxes，然后将 boxes[r] 连同后面的 k + 1
// 然后就尝试对 dp[l][r][k] 进行更新了：
// 如果在 l 到 r-1 区间内有 boxes[i] 和 boxes[r] 相同的字符，那么可以尝试首先将区间 [i + 1, r - 1] 消除，这样 i 就和后面的 k + 1
// 其可以获得分数就是需要进一步计算的 dp[l][i][k + 1]。
private int dfs(int[] arr, int i, int j, int k) {
    if (i > j) return 0;
    if (dp[i][j][k] > 0) return dp[i][j][k];
    int res = dfs(arr, i, j - 1, 0) + (k + 1) * (k + 1);
    for (int x = i; x < j; x++) {
        if (arr[x] == arr[j]) {
            res = Math.max(res, dfs(arr, i, x, k + 1) + dfs(arr, x + 1, j - 1, 0));
        }
    }
    return dp[i][j][k] = res;
}
int[][][] dp;
int n;
public int removeBoxes(int[] boxes) {
    n = boxes.length;
    dp = new int[n][n][n];
    return dfs(boxes, 0, n - 1, 0);
}
```

1.3.31 1531. String Compression II - Hard

Run-length encoding is a string compression method that works by replacing consecutive identical characters (repeated 2 or more times) with the concatenation of the character and the number marking the count of the characters (length of the run). For example, to compress the string "aabccc" we replace "aa" by "a2" and replace "ccc" by "c3". Thus the compressed string becomes "a2bc3".

Notice that in this problem, we are not adding '1' after single characters.

Given a string s and an integer k . You need to delete at most k characters from s such that the run-length encoded version of s has minimum length.

Find the minimum length of the run-length encoded version of s after deleting at most k characters.

```
public int getLengthOfOptimalCompression(String t, int k) {
    n = t.length();
    s = t.toCharArray();
    dp = new Integer[n][n - k + 1]; // int [n][n-k+1] 而不是 [n][k+1]
    return dfs(0, n - k);
}
Integer[][] dp;
char[] s;
int n;
private int dfs(int idx, int k) { // 求从下标 i 开始向后，所有长度为 k 的子序列中，编码后的最小长度
    if (k == 0) return 0; // 当下标越界时还未找到长度为 k 的子序列
    if (idx == n) return Integer.MAX_VALUE;
    if (dp[idx][k] != null) return dp[idx][k];
    int ans = Integer.MAX_VALUE, cnt = 0;
    boolean[] vis = new boolean[26];
    for (int i = idx; i < n; i++) {
        if (vis[s[i] - 'a']) continue; // 优化：当前字母是已处理过的字母，遍历 26 个字母的可能性，重复的跳过
        if (idx > 0 && s[i] == s[idx - 1]) continue; // 另一种重复的处理
        cnt = 0;
        for (int j = i; j < n; j++) {
            if (s[j] != s[i]) continue;
            cnt++; // 数左半片段中，与 s[i] 相同的字母的个数
            if (k - cnt < 0) break; // 如果左半部分长度大于子序列长度，退出
            int rite = dfs(j + 1, k - cnt);
            if (rite == Integer.MAX_VALUE) continue;
            int left = (" " + cnt).length();
            ans = Math.min(ans, left + rite + (left == 1 && cnt == 1 ? 0 : 1));
        }
    }
}
```

```

        }
    }
    return dp[idx][k] = ans;
}

```

1. 解题思路与分析: 动态规划

```

public int getLengthOfOptimalCompression(String s, int k) { // 与上面的思路差不多, 这里自顶向下, 上面的 dfs 自底向上
    int n = s.length();
    int [][] f = new int[n+1][k+1];
    for (int i = 0; i <= n; i++)
        Arrays.fill(f[i], Integer.MAX_VALUE >> 1);
    f[0][0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; ++i)
        for (int j = 0; j <= k && j <= i; ++j) {
            if (j > 0) // 先初始化为删除当前字符为删除的第 j 个字符的情况
                f[i][j] = f[i - 1][j - 1];
            int same = 0, diff = 0;
            for (int x = i; x >= 1 && diff <= j; x--) {
                if (s.charAt(x-1) == s.charAt(i-1)) {
                    same++; // 数与当前字符连续相同的字符的个数
                    f[i][j] = Math.min(f[i][j], f[x-1][j - diff] + calc(same));
                } else diff++;
            }
        }
    return f[n][k];
}
public int calc(int x) {
    if (x == 1) return 1;
    if (x < 10) return 2;
    if (x < 100) return 3;
    return 4;
}

```

2. 决策类 DP 总结

- <https://leetcode-cn.com/problems/string-compression-ii/solution/jie-ti-si-ka/>

1.3.32 1039. Minimum Score Triangulation of Polygon

You have a convex n-sided polygon where each vertex has an integer value. You are given an integer array values where values[i] is the value of the ith vertex (i.e., clockwise order). You will triangulate the polygon into $n - 2$ triangles. For each triangle, the value of that triangle is the product of the values of its vertices, and the total score of the triangulation is the sum of these values over all $n - 2$ triangles in the triangulation. Return the smallest possible total score that you can achieve with some triangulation of the polygon.

```

// 动态规划, 递归可以使逻辑简单 (本质还是动态规划) 将多边形起
// 始位置设为 start, end, 用一个数组 dp 来记录任意起始位置的 score
// 为了计算 dp[start][end], 我们用一个 index k 在 start 到 end 之间遍
// 历 dp[start][end] = min(dp[start][k] + dp[k][end] + A[start]
// * A[k] * A[end]) 结果为 dp[0][n - 1] 注意: 相邻的 dp[i][i + 1]
// = 0, 因为两条边无法组成三角形
private int dfs(int [] arr, int x, int y) {
    if (y - x < 2) return dp[x][y] = 0;
    if (dp[x][y] > 0) return dp[x][y];
    int min = Integer.MAX_VALUE;
    for (int i = x+1; i < y; i++)
        min = Math.min(min, dfs(arr, x, i) + dfs(arr, i, y) + arr[x]*arr[i]*arr[y]);
    return dp[x][y] = min;
}
int [][] dp;
int n;
public int minScoreTriangulation(int[] arr) {
    n = arr.length;
    dp = new int [n][n];
    return dfs(arr, 0, n-1);
}

```

1.3.33 1478. Allocate Mailboxes - Hard

Given the array houses and an integer k. where houses[i] is the location of the ith house along a street, your task is to allocate k mailboxes in the street.

Return the minimum total distance between each house and its nearest mailbox.

The answer is guaranteed to fit in a 32-bit signed integer.

解题思路分析：

对于如何安排邮箱位置，看到很多文章说应放在中位数的位置上，比如一共有 1, 2, 3, 4 这 4 间房屋，不论房屋间的距离是多少，如果只有一个邮箱的话，放在房间 2 处（3 也可以）最为合理。这个说法虽然正确，但实际上并不恰当。我们简单的讨论一下这个问题：

1. 当只有1栋房屋，1个邮箱时，显然将邮箱放在房屋处最为合理，这时邮箱与房屋的距离为0。
2. 当有2栋房屋，1个邮箱时，比如房屋1在坐标0处，房屋2在坐标10处，此时如果将邮箱放在坐标0的话，它与两栋房屋的距离和为10。放在坐标10的情况下距离和也为10。另外我们可以看出，不论邮箱放在两栋房屋之间的任意位置上，它与房屋的距离和都是10。因此通过此例可得出，中位数的说法虽然正确，但并不全面，不过这不影响本题解题，对于本题，我们统一将邮箱安排在房屋位置上是为了方便计算，因此才得出中位数的说法（本例房屋1和2都可以看做是中位数）。
3. 当有3栋房屋，1个邮箱时，此时通过上面的例子可知，对于两侧的房子，将邮筒放在他们之间的任何位置对于结果没有任何影响，距离和都是两栋房子间的距离。但邮箱的位置会对中间的房子产生影响，因此，将其放置在中间房子的坐标上最为合理，这样邮箱与中间房屋的距离为0，可使得全局总距离最小。而中间的房屋正是3个房屋的中位数。
4. 当有4栋房屋，1个邮箱时，与上例同理，对于两侧的房子，将邮筒放在他们之间的任何位置对于结果没有任何影响，因此邮箱可以考虑放在中间两个房屋的任何一个位置上。另外对于中间两个房屋，不论邮箱放置在其任何一个位置上，对于总距离都不会产生影响（这相当于第2条）。

因此我们可以得出结论，当有 N 栋房屋，1 个邮箱时，我们将邮箱放在房屋下标的中位数上最为合理。那么，如果有多个邮箱时该怎么办？其实也不难，本题最终可以理解为，我们将一个房屋数组分割为 K 个子数组（k 为邮筒个数），每一个子数组中放置一个邮筒，求最优分割方式。这就变为了经典的动态规划 DP 问题，对于 DP 问题我习惯采用递归加记忆数组的方式，本题我们也采用递归方式讲解。

首先建立一个递归函数，参数为当前子区间开始位置 index，以及剩余未分配邮筒个数 k。起始时，子区间开始位置为下标 0，邮筒个数为题目给定的整数 k。递归时，当前子区间的开始坐标是参数 index，结束坐标范围理论上可以是当前 index 到数组末尾为止，不过这里有一处可以优化，即要保证剩下的 k-1 个邮筒都能分配出去的话，还需要至少 k-1 个子区间，也就是说除了当前子区间外还至少需要 k-1 个房屋，因此当前子区间的结束坐标范围应该是当前 index 到 length-k 为止。我们从 index 循环至 length-k，分别作为当前子区间的结束位置 end。并通过中位数方式求出当前子区间 [index, end] 放置邮筒后的距离和（后文会给出方法）。然后将 end 加一作为下一个子区间的开始位置，同时 k 值减去一作为参数传入递归子问题中继续求解。递归函数的返回值加上当前子区间的距离和即是选择当前子区间范围后的一个结果 sum。循环完所有当前子区间的结束位置 end 之后，所有 sum 中的最小值即是最优方案，也是本层递归的返回值。

接下来再为递归加上一个记忆数组。记忆数组相当于动态规划中使用到的 DP 数组。由于递归函数中存在 2 个变量，因此我们需要使用一个 2 维数组来描述该递归函数，并记录它的返回值。

最后，上文中提到需要求解子区间内放置一个邮筒后所有房屋与邮筒的距离和。这个问题没有太好的方式，只能暴力累加每个房屋与中位数房屋所在位置的距离。为了提高效率，我们可以事先计算好所有区间（排列组合）内放置一个邮筒时的距离和，方便递归中使用，也避免重复运算。这里可能有人会提出质疑，既然递归方法中已经使用了记忆数组，目的就是防止重复计算，这里为什么还担心重复计算距离和呢？原因很简单，记忆数组是二维数组，即在两个条件都满足的情况下才会使用记忆数组中的数据，比如我们计算过以下标 5 作为子区间起点，并且当前还剩 2 个油桶的递归函数返回值为 x，即 memo^{5, 3}=x，再次遇到相同问题时我们可以直接返回 x。但是遇到 memo^{5, 2} 或者 memo^{5, 4} 时，我们尚未做出过计算，同样还会进入到递归函数内部，如果没有事前计算好下标 5 到 end (end 取值范围是 5 到 length-k) 的距离和的话，还要重复计算一遍。

对于上述问题，还有一个更好的优化方式即再建立一个保存距离和的记忆数组，计算一个距离和记录一个，方便下次使用。

```
private int getDist(int[] arr, int i, int j) { // 求区间 start 到 end 间放置邮筒后的距离和 i: left, j: right
    if (dist[i][j] > 0) return dist[i][j];
    int m = i + (j-i)/2, v = arr[m], sum = 0;
```

⁵DEFINITION NOT FOUND.

```

        for (int k = i; k <= j; k++)
            sum += Math.abs(arr[k] - v);
        return dist[i][j] = sum;
    }
    private int dfs(int [] arr, int idx, int k) { // idx: 待分割大子区间的起始坐标; k: 待分割成的子区间的个数
        if (idx == n || idx == n-k) return 0;
        if (dp[idx][k] > 0) return dp[idx][k];
        if (k == 1) return dp[idx][k] = getDist(arr, idx, n-1);
        int res = Integer.MAX_VALUE;
        for (int i = idx; i < n-(k-1); i++)
            res = Math.min(res, getDist(arr, idx, i) + dfs(arr, i+1, k-1));
        return dp[idx][k] = res;
    }
    int [][] dp;
    int [][] dist; // 这也是一种记忆数组优化
    int n;
    public int minDistance(int [] houses, int k) {
        n = houses.length;
        dist = new int [n][n];
        dp = new int [n][k+1];
        Arrays.sort(houses);
        return dfs(houses, 0, k);
    }
}

```

1. 解题思路与分析: 动态规划

- 复杂度分析

时间复杂度: $O(n^2k)$, 其中 n 是数组 $houses$ 的长度。在预处理部分, 需要的时间为 $O(n^2)$; 在动态规划部分, 我们需要 $O(nk)$ 的时间枚举每个状态 $f[i][j]$, 并使用 $O(n)$ 的时间枚举进行状态转移, 相乘即可得到总时间复杂度。

空间复杂度: $O(n^2 + nk)$, 即为存储 $cost$ 以及动态规划的状态需要的空间。

```

public int minDistance(int[] h, int k) {
    int n = h.length;
    Arrays.sort(h);
    int [][] medsum = new int[n][n];
    for (int i = n - 2; i >= 0; --i)
        for (int j = i + 1; j < n; ++j)
            medsum[i][j] = medsum[i + 1][j - 1] + h[j] - h[i];
    int [][] f = new int[n][k + 1];
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        Arrays.fill(f[i], Integer.MAX_VALUE / 2);
    for (int i = 0; i < n; ++i) {
        f[i][1] = medsum[0][1];
        for (int j = 2; j <= k && j <= i + 1; ++j)
            for (int x = 0; x < i; x++)
                f[i][j] = Math.min(f[i][j], f[x][j-1] + medsum[x+1][i]);
    }
    return f[n - 1][k];
}

```

1.3.34 1771. Maximize Palindrome Length From Subsequences

You are given two strings, $word1$ and $word2$. You want to construct a string in the following manner: Choose some non-empty subsequence $subsequence1$ from $word1$. Choose some non-empty subsequence $subsequence2$ from $word2$. Concatenate the subsequences: $subsequence1 + subsequence2$, to make the string. Return the length of the longest palindrome that can be constructed in the described manner. If no palindromes can be constructed, return 0. A subsequence of a string s is a string that can be made by deleting some (possibly none) characters from s without changing the order of the remaining characters. A palindrome is a string that reads the same forward as well as backward.

```

public int longestPalindrome(String ss, String tt) { // 比较喜欢 2 维 dp, 比较直接直观
    int m = ss.length(), n = m + tt.length(), ans = 0;
    char [] s = (ss + tt).toCharArray(); // 先求这个联接合并字符串的最长回文子序列
}

```

```

int [][] dp = new int [n][n];
for (int i = n-2; i >= 0; i--) {
    dp[i][i] = 1;
    for (int j = i+1; j < n; j++)
        if (s[i] == s[j]) {
            dp[i][j] = dp[i+1][j-1] + 2;
            if (i < m && j >= m) // 确认来自于两个不同的字符串
                ans = Math.max(ans, dp[i][j]);
        } else dp[i][j] = Math.max(dp[i+1][j], dp[i][j-1]);
}
return ans;
}

```

- 下面是降了一维空间的

```

public int longestPalindrome(String ss, String tt) {
    int m = ss.length(), n = m + tt.length(), ans = 0;
    char [] s = (ss + tt).toCharArray(); // 先求这个联接合并字符串的最长回文子序列
    int [] dp = new int[n];
    Arrays.fill(dp, 1);
    int max = 0;
    for (int i = n - 1; i >= 0; i--) {
        int curMax = 0;
        for (int j = i + 1; j < n; j++) {
            int mem = dp[j]; // remember prev dp[j] val
            // curMax = Math.max(curMax, dp[j]); // bug: curMax 不可以提前更新
            if (s[i] == s[j]) {
                dp[j] = curMax + 2; // 要用更新前的值
                if (i < m && j >= m)
                    max = Math.max(max, dp[j]);
            }
            curMax = Math.max(mem, curMax);
        }
    }
    return max;
}

```

1.3.35 1896. Minimum Cost to Change the Final Value of Expression - Hard

You are given a valid boolean expression as a string expression consisting of the characters '1', '0', '&', (bitwise AND operator), '|' (bitwise OR operator), '(', and ')'.

For example, "(1|1)" and "(1)&()" are not valid while "1", "(((1))|(0))", and "1|(0&(1))" are valid expressions. Return the minimum cost to change the final value of the expression.

For example, if expression = "1|1|(0&0)&1", its value is $1|1|(0\&0)\&1 = 1|1|0\&1 = 1|0\&1 = 1\&1 = 1$. We want to apply operations so that the new expression evaluates to 0. The cost of changing the final value of an expression is the number of operations performed on the expression. The types of operations are described as follows:

Turn a '1' into a '0'. Turn a '0' into a '1'. Turn a '&' into a '|'. Turn a '|' into a '&'. Note: '&' does not take precedence over '|' in the order of calculation. Evaluate parentheses first, then in left-to-right order.

```

private int [] getMinOperations(int va, int vb, int ca, int cb, char sign) {
    if (sign == '&') {
        if (va == 1 && vb == 1)      // 1&1, 将其中一个 1 反转为 0
            return new int [] {1, Math.min(ca, cb)};
        else if (va == 0 && vb == 0) // 0&0, 将其中一个 0 反转为 1, 并将 & 反转为 |
            return new int [] {0, Math.min(ca, cb) + 1};
        else return new int [] {0, 1}; // 1&0, 将 & 反转为 |
    } else {
        if (va == 1 && vb == 1)      // 1|1, 将其中一个 1 反转为 0, 并将 | 反转为 &
            return new int [] {1, Math.min(ca, cb) + 1};
        else if (va == 0 && vb == 0) // 0|0, 将其中一个 0 反转为 1
            return new int [] {0, Math.min(ca, cb)};
        else return new int [] {1, 1}; // 1|0, 将 | 反转为 &
    }
}

public int minOperationsToFlip(String expression) {
    Stack<Integer> res = new Stack<>();

```

```

Stack<Character> sgn = new Stack<>();
Stack<Integer> cnt = new Stack<>();
for (char c : expression.toCharArray()) {
    if (c == '(' || c == '&'amp; || c == '|') {
        sgn.push(c);
        continue;
    } else if (c == ')') sgn.pop();
    else {
        res.push((int)(c - '0'));
        cnt.push(1);
    }
    if (res.size() > 1 && sgn.peek() != '(') {
        int [] loc = getMinOperations(res.pop(), res.pop(), cnt.pop(), cnt.pop(), sgn.pop());
        res.push(loc[0]); // expr results
        cnt.push(loc[1]); // min operations
    }
}
return cnt.peek();
}

```

1.3.36 823. Binary Trees With Factors

Given an array of unique integers, arr, where each integer arr[i] is strictly greater than 1. We make a binary tree using these integers, and each number may be used for any number of times. Each non-leaf node's value should be equal to the product of the values of its children. Return the number of binary trees we can make. The answer may be too large so return the answer modulo $10^9 + 7$.

```

public int numFactoredBinaryTrees(int[] arr) {
    int n = arr.length;
    Arrays.sort(arr);
    Map<Integer, Long> dp = new HashMap<>();
    int mod = 1_000_000_007;
    long res = 0;
    long max = 0;
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        dp.put(arr[i], 1L);
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            if (arr[i] % arr[j] == 0 && dp.containsKey(arr[i]/arr[j])) {
                max = dp.get(arr[i]) + dp.get(arr[j]) * dp.get(arr[i]/arr[j]);
                dp.put(arr[i], max % mod);
            }
        }
        res += dp.get(arr[i]);
        res %= mod;
    }
    return (int)(res % mod);
}

```

1.3.37 363. Max Sum of Rectangle No Larger Than K

Given an $m \times n$ matrix matrix and an integer k, return the max sum of a rectangle in the matrix such that its sum is no larger than k. It is guaranteed that there will be a rectangle with a sum no larger than k.

1. 解题思路与分析: prefix sum 在二维矩阵上的应用

一维数组 prefix sum 在二维矩阵上的应用, 考虑先降一下维度

```

// 把二维数组按行或列拆成多个一维数组, 然后利用一维数组的累加和来找符合要求的数字,
// 这里用了 lower_bound 来加快的搜索速度, 也可以使用二分搜索法来替代。
public int maxSumSubmatrix(int[][] mat, int target) {
    int x = mat.length, y = mat[0].length, ans = Integer.MIN_VALUE;
    boolean flag = x <= y;
    int m = Math.min(x, y), n = Math.max(x, y);
    int [] sum = new int [n]; // 定义一维大的数组
    TreeSet<Integer> ts = new TreeSet<>();
    for (int i = 0; i < m; i++) { // 找从第 i 行开始一直到第 0 行这 i+1 行的可能组成的矩形长度

```

```

        Arrays.fill(sum, 0);
        for (int j = i; j >= 0; j--) { // 遍历行: 行的和的累加是通过每列列的和的累加 sum 数组的值来实现的
            ts.clear();
            ts.add(0);
            int cur = 0;
            // 因为要满足 ( sum-set 中的元素) <=target,
            // 而且 sum-set 中的元素的值要尽可能的大, sum - target <= setElement(要 set 中的元素, 尽可能地小)
            // 所以也就是在求大于等于 sum-target 中满足条件的元素的最小的一个
            // 正好 TreeSet 提供了这个方法 ceil() , 可以很方便的找出这个元素: 返回大于或等于 e 的最小元素; 如果没有这样的元素, 则返回
            for (int k = 0; k < n; k++) { // 遍历列: 原始矩阵的行的和, 或者是列的和, 比较长的大的那一维的和
                if (flag) sum[k] += mat[j][k];
                else sum[k] += mat[k][j];
                cur += sum[k];
                Integer tmp = ts.ceiling(cur - target);
                if (tmp != null) ans = Math.max(ans, cur - tmp);
                ts.add(cur);
            }
        }
    }
    return ans;
}
+END_SRC
- 再稍微简洁一点儿的代码
#+BEGIN_SRC csharp
public int maxSumSubmatrix(int[][] mat, int target) { // 这么再看一下, 就清清楚楚地啦
    int m = mat.length, n = mat[0].length, ans = Integer.MIN_VALUE;
    int M = Math.min(m, n), N = Math.max(m, n);
    for (int i = 0; i < M; i++) {
        int[] sum = new int[N];
        for (int j = i; j < M; j++) {
            TreeSet<Integer> ts = new TreeSet<>();
            int cur = 0;
            for (int k = 0; k < N; k++) {
                sum[k] += m > n ? mat[k][j] : mat[j][k];
                cur += sum[k];
                if (cur <= target) ans = Math.max(ans, cur);
                Integer tmp = ts.ceiling(cur - target);
                if (tmp != null) ans = Math.max(ans, cur - tmp);
                ts.add(cur);
            }
        }
    }
    return ans;
}

```

2. 解题思路与分析: 暴力 + 优化

这道题给了我们一个二维数组, 让求和不超过的 K 的最大子矩形, 那么首先可以考虑使用 brute force 来解, 就是遍历所有的子矩形, 然后计算其和跟 K 比较, 找出不超过 K 的最大值即可。就算是暴力搜索, 也可以使用优化的算法, 比如建立累加和, 参见之前那道题 Range Sum Query 2D - Immutable, 可以快速求出任何一个区间和, 下面的方法就是这样的, 当遍历到 (i, j) 时, 计算 sum(i, j), 表示矩形 (0, 0) 到 (i, j) 的和, 然后遍历这个矩形中所有的子矩形, 计算其和跟 K 相比, 这样既可遍历到原矩形的所有子矩形, 参见代码如下:

```

public int maxSumSubmatrix(int[][] mat, int k) {
    int m = mat.length;
    int n = mat[0].length;
    if (m == 1 && n == 1) return mat[0][0];
    int[][] pre = new int[m][n];
    int res = Integer.MIN_VALUE;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            int t = mat[i][j];
            if (i > 0) t += pre[i-1][j];
            if (j > 0) t += pre[i][j-1];
            if (i > 0 && j > 0) t -= pre[i-1][j-1];
            pre[i][j] = t;
            for (int r = 0; r <= i; r++) {
                for (int c = 0; c <= j; c++) {
                    int d = pre[i][j];
                    if (r > 0) d -= pre[r-1][j];
                    if (c > 0) d -= pre[i][c-1];
                    if (d <= k) res = Math.max(res, d);
                }
            }
        }
    }
    return res;
}

```

```

        if (r > 0 && c > 0) d += pre[r-1][c-1];
        if (d <= k) res = Math.max(res, d);
    }
}
return res;
}

```

1.3.38 1884. Egg Drop With 2 Eggs and N Floors - Medium

You are given two identical eggs and you have access to a building with n floors labeled from 1 to n.

You know that there exists a floor f where $0 \leq f \leq n$ such that any egg dropped at a floor higher than f will break, and any egg dropped at or below floor f will not break.

In each move, you may take an unbroken egg and drop it from any floor x (where $1 \leq x \leq n$). If the egg breaks, you can no longer use it. However, if the egg does not break, you may reuse it in future moves.

Return the minimum number of moves that you need to determine with certainty what the value of f is.

```

// 思路: https://zhuanlan.zhihu.com/p/41257286 可以借这个思路理解一下
// DP[i][j] 表示用 i 个鸡蛋, j 层楼的情况下最坏情况下所需扔鸡蛋的最少数目。
// 可知初始条件为:
// DP[1][0] = 0; DP[2][0] = 0;
// DP[1][1] = 1; DP[2][1] = 1;
// DP[1][i] = i; // i = 1 … n
// 对于 DP[2][i], i = 2 … n 的情况, 我们可以这样考虑:
// 遍历 j=2…i, 求 DP[2][j], 分两种情况:
// 如果第 1 个鸡蛋在第 j-1 层摔破了, 则我们在第 j 层只需摔第 2 个鸡蛋一次即可, 此时总摔鸡蛋数为 DP[1][j-1]+1。
// 注意上面的 1 是因为第 j 层需要摔第 2 个鸡蛋 1 次。为什么 DP[1][j-1] 不能写成 1 呢? 因为第 1 个鸡蛋在第 j-1 层摔破了, 我们是要求所有最坏情况下的最少数目, 所以 DP[2][j]=1 + max(DP[1][j-1]+1, DP[2][i-j])。
// 而我们是要求所有最坏情况下的最少数目, 所以 DP[2][j]=min(1 + max(DP[1][j-1]+1, DP[2][i-j])). i = 2…n, j = 2…i。
public int twoEggDrop(int n) { // 1 + 2 + 3 + … + x >= n ==> get x
    if (n <= 1) return n;
    int [][] dp = new int [3][n+1]; // DP[i][j] 表示用 i 个鸡蛋, j 层楼的情况下最坏情况下所需扔鸡蛋的最少数目。
    for (int i = 0; i < 3; i++)
        Arrays.fill(dp[i], Integer.MAX_VALUE);
    dp[1][0] = 0;
    dp[1][1] = 1;
    dp[2][0] = 0;
    dp[2][1] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) dp[1][i] = i;
    for (int i = 2; i <= n; i++)
        for (int j = 2; j <= i; j++)
            dp[2][i] = Math.min(dp[2][i], 1 + Math.max(dp[1][j-1], dp[2][i-j])); // 1: 这个鸡蛋在 j-i 层扔了一次, 要统计入结果
    return dp[2][n];
}
public int twoEggDrop(int n) { // 1 + 2 + 3 + … + x >= n ==> get x
    if (n <= 2) return n;
    return (int)(Math.ceil((-1 + Math.sqrt((long)n * 8 + 1)) / 2.0));
}

```

1.3.39 887. Super Egg Drop - Hard

You are given k identical eggs and you have access to a building with n floors labeled from 1 to n.

You know that there exists a floor f where $0 \leq f \leq n$ such that any egg dropped at a floor higher than f will break, and any egg dropped at or below floor f will not break.

Each move, you may take an unbroken egg and drop it from any floor x (where $1 \leq x \leq n$). If the egg breaks, you can no longer use it. However, if the egg does not break, you may reuse it in future moves.

Return the minimum number of moves that you need to determine with certainty what the value of f is.

1. 解题思路与分析

- <https://charlesliuyx.github.io/2018/10/11/%E3%80%90%E7%9B%B4%E8%A7%82%E7%AE%97%E6%B3%95%E3%80%91Egg%20Puzzle%20%E9%B8%A1%E8%9B%8B%E9%9A%BE%E9%A2%98/>
- <https://www.shuzhiduo.com/A/D8548M4Q5E/>

2. 解题思路与分析 $1 \leq K \leq 100, 1 \leq N \leq 10000$

这道题说给了我们 K 个鸡蛋，还有一栋共 N 层的大楼，说是鸡蛋有个临界点的层数 F ，高于这个层数扔鸡蛋就会碎，否则就不会，问我们找到这个临界点最小需要多少操作，注意这里的操作只有当前还有没碎的鸡蛋才能进行。这道题是基于经典的扔鸡蛋的问题改编的，原题是有 100 层楼，为了测鸡蛋会碎的临街点，最少可以扔几次？答案是只用扔 14 次就可以测出来了，讲解可以参见 [油管上的这个视频] (<https://www.youtube.com/watch?v=NGtt7GJ1uiM>)，这两道题看着很相似，其实是有不同的。这道题限制了鸡蛋的个数 K ，假设我们只有 1 个鸡蛋，碎了就不能再用了，这时我们要测 100 楼的临界点的时候，只能一层一层去测，当某层鸡蛋碎了之后，就知道临界点了，所以最坏情况要测 100 次，注意要跟经典题目中扔 14 次要区分出来。那么假如有两个鸡蛋呢，其实需要的次数跟经典题目中的一样，都是 14 次，这是为啥呢？因为在经典题目中，我们是分别间隔 14, 13, 12, ..., 2, 1，来扔鸡蛋的，当我们有两个鸡蛋的时候，我们也可以这么扔，第一个鸡蛋仍在 14 楼，若碎了，说明临界点一定在 14 楼以内，可以用第二个鸡蛋去一层一层的测试，所以最多操作 14 次。若第一个鸡蛋没碎，则下一次扔在第 27 楼，假如碎了，说明临界点在 (14, 27] 范围内，用第二个鸡蛋去一层一层测，总次数最多 13 次。若第一个鸡蛋还没碎，则继续按照 39, 50, ..., 95, 99，等层数去测，总次数也只可能越来越少，不会超过 14 次的。但是照这种思路分析的话，博主就不太清楚有 3 个鸡蛋，在 100 楼测，最少的步骤数，答案是 9 次，博主不太会分析怎么测的，各位看官大神知道的话一定要告诉博主啊。

其实这道题比较好的解法是用动态规划 Dynamic Programming，因为这里有两个变量，鸡蛋数 K 和楼层数 N ，所以就要使用一个二维数组 DP，其中 $dp[i][j]$ 表示有 i 个鸡蛋， j 层楼要测需要的最小操作数。那么我们在任意 k 层扔鸡蛋的时候就有两种情况（注意这里的 k 跟鸡蛋总数 K 没有任何关系， k 的范围是 $[1, j]$ ）：

鸡蛋碎掉：接下来就要用 $i-1$ 个鸡蛋来测 $k-1$ 层，所以需要 $dp[i-1][k-1]$ 次操作。
鸡蛋没碎：接下来还可以用 i 个鸡蛋来测 $j-k$ 层，所以需要 $dp[i][j-k]$ 次操作。

因为我们每次都要面对最坏的情况，所以在第 j 层扔，需要 $\max(dp[i-1][k-1], dp[i][j-k]) + 1$ 步，状态转移方程为：

$$dp[i][j] = \min(dp[i][j], \max(dp[i-1][k-1], dp[i][j-k]) + 1) \quad (1 \leq k \leq j)$$

```
public int superEggDrop(int k, int n) { // tle: O(KN^2) 还需要优化一下
    if (k < 1 || n < 1) return 0;
    int[] pre = new int[n+1]; // 上一层备忘录，存储鸡蛋数量-1 的 n 层楼条件下的最优化尝试次数
    int[] cur = new int[n+1]; // 当前备忘录，存储当前鸡蛋数量的 n 层楼条件下的最优化尝试次数
    for (int i = 1; i <= n; i++) // 把备忘录每个元素初始化成最大的尝试次数
        cur[i] = i;
    for (int i = 2; i <= k; i++) {
        pre = cur.clone(); // 当前备忘录拷贝给上一次备忘录，并重新初始化当前备忘录
        for (int j = 1; j <= n; j++) cur[j] = j;
        for (int j = 1; j <= n; j++) // 需要想办法去优化时间复杂度。这种写法里面我们枚举了 [1, j] 范围所有的 k 值，总时间复杂度是 O(KN^2)
            for (int x = 1; x < j; x++)
                cur[j] = Math.min(cur[j], 1 + Math.max(pre[x-1], cur[j-x]));
    }
    return cur[n];
}
```

这种写法会超时 Time Limit Exceeded，代码请参见评论区 1 楼，OJ 对时间卡的还是蛮严格的，所以我们就需要想办法去优化时间复杂度。这种写法里面我们枚举了 $[1, j]$ 范围所有的 k 值，总时间复杂度为 $O(KN^2)$ ，若我们仔细观察 $dp[i - 1][k - 1]$ 和 $dp[i][j - k]$ ，可以发现前者是随着 k 递增，后者是随着 k 递减，且每次变化的值最多为 1，所以只要存在某个 k 值使得二者相等，那么就能得到最优解，否则取最相近的两个 k 值做比较，由于这种单调性，我们可以在 $[1, j]$ 范围内对 k 进行二分查找，找到第一个使得 $dp[i - 1][k - 1]$ 不小于 $dp[i][j - k]$ 的 k 值，然后用这个 k 值去更新 $dp[i][j]$ 即可，这样时间复杂度就减少到了 $O(KN \lg N)$ ，其实也是险过，参见代码如下：

```
// 若我们仔细观察 dp[i - 1][k - 1] 和 dp[i][j - k]，可以发现前者是随着 k 递增，后者是随着 k 递减，且每次变化的值最多为 1，  
// 所以只要存在某个 k 值使得二者相等，那么就能得到最优解，否则取最相近的两个 k 值做比较，  
// 由于这种单调性，我们可以在 [1, j] 范围内对 k 进行二分查找，找到第一个使得 dp[i - 1][k - 1] 不小于 dp[i][j - k] 的 k 值，  
// 这样时间复杂度就减少到了 O(KN \lg N)  
public int superEggDrop(int k, int n) { // O(KN \lg N)  
    int [][] dp = new int [k+1][n+1];  
    for (int i = 1; i <= n; i++) dp[1][i] = i; // 把只有一个鸡蛋的情况初始化为最大值  
    for (int i = 2; i <= k; i++) {  
        for (int j = 1; j <= n; j++) {  
            dp[i][j] = j;  
            int l = 1, r = j, m = 0;  
            while (l < r) {  
                m = (l + r) / 2;  
                if (dp[i-1][m-1] < dp[i][j-m]) l = m + 1; // < 左边随 m 递增，< 右边随 m 递减，这个性质在这里很重要，所以  
                else r = m;  
            } // 这里查找的右边界也注意一下  
            dp[i][j] = Math.min(dp[i][j], Math.max(dp[i-1][r-1], dp[i][j-r]) + 1); // 用这个鸡蛋测试了一次了  
        }  
    }  
    return dp[k][n];  
}
```

进一步来想，对于固定的 k ， $dp[i][j-k]$ 会随着 j 的增加而增加，最优决策点也会随着 j 单调递增，所以在每次移动 j 后，从上一次的最优决策点的位置来继续向后查找最优点即可，这样时间复杂度就优化到了 $O(KN)$ ，我们使用一个变量 s 表示当前的 j 值下的的最优决策点，然后当 j 值改变了，我们用一个 while 循环，来找到第下一个最优决策点 s ，使得 $dp[i - 1][s - 1]$ 不小于 $dp[i][j - s]$ ，参见代码如下：

```
public int superEggDrop(int k, int n) { // O(KN)  
    int [][] dp = new int [k+1][n+1];  
    for (int i = 1; i <= n; i++) dp[1][i] = i; // 把只有一个鸡蛋的情况初始化为最大值  
    for (int i = 2; i <= k; i++) {  
        int s = 1; // k  
        for (int j = 1; j <= n; j++) { // n  
            dp[i][j] = j;  
            while (s < j && dp[i-1][s-1] < dp[i][j-s]) s++; // 因为单调性，s 一直向右滑动，总共执行 n 次  
            dp[i][j] = Math.min(dp[i][j], Math.max(dp[i-1][s-1], dp[i][j-s]) + 1);  
        }  
    }  
    return dp[k][n];  
}
```

其实我们还可以进一步优化时间复杂度到 $O(K \lg N)$ ，不过就比较难想到了，需要将问题转化一下，变成已知鸡蛋个数，和操作次数，求最多能测多少层楼的临界点。还是使用动态规划 Dynamic Programming 来做，用一个二维 DP 数组，其中 $dp[i][j]$ 表示当有 i 次操作，且有 j 个鸡蛋时能测出的最高的楼层数。再来考虑状态转移方程如何写，由于 $dp[i][j]$ 表示的是在第 i 次移动且使用第 j 个鸡蛋测试第 $dp[i-1][j-1]+1$ 层，因为上一个状态是第 $i-1$ 次移动，且用第 $j-1$ 个鸡蛋。此时还是有两种情况：

鸡蛋碎掉：说明至少可以测到的不会碎的层数就是 $dp[i-1][j-1]$ 。

鸡蛋没碎：那这个鸡蛋可以继续利用，此时我们还可以再向上查找 $dp[i-1][j]$ 层。

那么加上当前层，总共可以通过 i 次操作和 j 个鸡蛋查找的层数范围是 $[0, dp[i-1][j-1] + dp[i-1][j] + 1]$ ，这样就可以得到状态转移方程如下：

$$dp[i][j] = dp[i - 1][j - 1] + dp[i - 1][j] + 1$$

当 $dp[i][K]$ 正好小于 N 的时候， i 就是我们要求的最小次数了，参见代码如下：

```
public int superEggDrop(int k, int n) { // O(KlgN): 为什么说这里就是 O(klgN) 呢？因为 dp[m][k] 的增长呈指数级的？
    int [][] dp = new int [n+1][k+1]; // 在第 i 次移动且使用第 j 个鸡蛋测试第 dp[i-1][j-1]+1 层
    int m = 0; // 最小测试次数
    while (dp[m][k] < n) { // 当 dp[m][k] == n, 退出循环的时候, m 就是要求的最小操作次数了
        ++m;
        for (int j = 1; j <= k; j++)
            dp[m][j] = dp[m-1][j-1] + dp[m-1][j] + 1; // 分上一次测的 第 j-1 个鸡蛋 碎了 和 没有碎 两种情况来更新当前值
    }
    return m;
}
```

我们可以进一步的优化空间，因为当前的操作次数值的更新只跟上一次操作次数有关，所以我们并不需要保存所有的次数，可以使用一个一维数组，其中 $dp[i]$ 表示当前次数下使用 i 个鸡蛋可以测出的最高楼层。状态转移方程的推导思路还是跟上面一样，参见代码如下：

```
public int superEggDrop(int k, int n) { // O(KlgN): 空间压缩
    int [] dp = new int [k+1]; // dp[i] 表示当前次数下使用 i 个鸡蛋可以测出的最高楼层
    int ans = 0;
    for (; dp[k] < n; ans++) // 压缩代码到一行
        for (int i = k; i >= 1; i--) // 压缩空间后，因为是想要根据上一行 [ans-1] 时的 i-1/i 来更新当前结果，需要倒序遍历以
            dp[i] = dp[i] + dp[i-1] + 1;
    return ans;
}
```

下面这种方法就非常的 tricky 了，居然推导出了使用 k 个鸡蛋，移动 x 次所能测的最大楼层数的通项公式，推导过程可以参见 [这个帖子]([https://leetcode.com/problems/super-egg-drop/discuss/181702/C%2B%2B-codeRuntime-O-msO\(1\)-spacewith-explation-DPWhat-we-need-is-mathematical-thought!](https://leetcode.com/problems/super-egg-drop/discuss/181702/C%2B%2B-codeRuntime-O-msO(1)-spacewith-explation-DPWhat-we-need-is-mathematical-thought!))，通项公式如下：

$$f(k,x) = x(x-1)..(x-k)/k! + \dots + x(x-1)(x-2)/3! + x(x-1)/2! + x$$

这数学功底也太好了吧，有了通向公式后，我们就可以通过二分搜索法 Binary Search 来快速查找满足题目的 x 。这里其实是博主之前总结贴 [LeetCode Binary Search Summary 二分搜索法小结](<http://www.cnblogs.com/grandyang/p/6854825.html>) 中的第四类，用子函数当作判断关系，这里子函数就是用来实现上面的通向公式的，不过要判断，当累加和大于等于 N 的时候，就要把当的累加和返回，这样相当于进行了剪枝，因为在二分法中只需要知道其跟 N 的大小关系，并不 care 到底大了多少，这样快速定位 x 的方法运行速度貌似比上面的 DP 解法要快不少，但是这通项公式尼玛谁能容易的推导出来，只能膜拜叹服了，参见代码如下：

```
public int superEggDrop(int k, int n) { // O(KlgN): 数学推导找出了推理公式，速度最快
    int l = 1, r = n;
    while (l < r) { // 寻找右边界
        int m = l + (r - l) / 2;
        if (helper(m, k, n) < n) l = m + 1;
        else r = m;
    }
    return r;
}
int helper(int m, int k, int n) { // 能查找到的最大楼层数
    int ans = 0, r = 1;
    for (int i = 1; i <= k; i++) {
        r *= m - i + 1;
        r /= i;
        ans += r;
        if (ans >= n) break;
    }
    return ans;
}
```

1.3.40 1981. Minimize the Difference Between Target and Chosen Elements

You are given an $m \times n$ integer matrix mat and an integer target. Choose one integer from each row in the matrix such that the absolute difference between target and the sum of the chosen

elements is minimized. Return the minimum absolute difference. The absolute difference between two numbers a and b is the absolute value of $a - b$.

```
// DP + BitSet : 这里面有个小问题需要挑出来
// 使用一个 DP 数组存下当前行和之前行每行选一个数可能构成的和,
// 在本题中, 可以使用 BitSet(简介)来存储之前行可以组成的和(由于所有数的最大值为 70, 而行数最大也为 70, 故 BitSet 最大的位数即为 70)
// 对于当前行, 遍历 BitSet 已经 set 过的位(即代表之前行可能组成的和), 然后加上当前数, set 新的和
// 最后遍历 BitSet, 求出当前位置与 target 的最小值
public int minimizeTheDifference(int[][] mat, int target) {
    int m = mat.length;
    int n = mat[0].length;
    BitSet sum = new BitSet(); // 遍历每一行, 存下当前行和之前行可能组成的和
    for (int i = 0; i < n; i++) // 初始时存下第一行
        sum.set(mat[0][i]);
    for (int i = 1; i < m; i++) {
        BitSet newSum = new BitSet(); // 用来存新的和
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            // 注意: 要遍历 BitSet 中的真实位, 请使用以下循环: previousSetBit() 方法 用于查找在指定的起始索引上或之前是否存在任何真位
            // for (int i = bs.length(); (i = bs.previousSetBit(i-1)) >= 0; ) {
            //     // operate on index i here
            // }
            for (int k = sum.length(); (k = sum.previousSetBit(k-1)) >= 0; ) {
                newSum.set(k+mat[i][j]);
            }
        }
        sum = newSum;
    }
    int ans = 4900;
    for (int k = sum.length(); (k = sum.previousSetBit(k-1)) >= 0;) {
        int diff = Math.abs(k - target);
        ans = Math.min(ans, diff);
    }
    return ans;
}

public int minimizeTheDifference(int[][] mat, int target) {
    int m = mat.length;
    int n = mat[0].length;
    int diff = Integer.MAX_VALUE, limit = 4900;
    int[] dp = new int[limit];
    for (int i = 0; i < n; i++) // 相当于是手工实现 java BitSet
        dp[mat[0][i]] = 1;
    for (int i = 1; i < m; i++) {
        int[] tmp = new int[limit];
        for (int v = limit-1; v >= 0; v--) {
            if (dp[v] == 0) continue;
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (v + mat[i][j] < limit)
                    tmp[v+mat[i][j]] = 1;
            }
        }
        System.arraycopy(tmp, 0, dp, 0, dp.length);
    }
    for (int i = 0; i < limit; i++)
        if (dp[i] > 0) diff = Math.min(diff, Math.abs(i-target));
    return diff; // min difference
}
```

1.3.41 801. Minimum Swaps To Make Sequences Increasing - Hard

You are given two integer arrays of the same length `nums1` and `nums2`. In one operation, you are allowed to swap `nums1[i]` with `nums2[i]`.

For example, if `nums1 = [1,2,3,8]`, and `nums2 = [5,6,7,4]`, you can swap the element at $i = 3$ to obtain `nums1 = [1,2,3,4]` and `nums2 = [5,6,7,8]`. Return the minimum number of needed operations to make `nums1` and `nums2` strictly increasing. The test cases are generated so that the given input always makes it possible.

An array `arr` is strictly increasing if and only if $\text{arr}^1 < \text{arr}^2 < \text{arr}^3 < \dots < \text{arr}[\text{arr.length} - 1]$.

```
// 设 dp[0][i] 表示不交换 A[i] 和 B[i] 在下标 i 的交换次数
// 设 dp[1][i] 表示交换 A[i] 和 B[i] 在下标 i 的交换次数
// 可以看到交换与否只取决于前一个状态, 可以将空间复杂度压缩到 O(1)
```

```

//    时间复杂度为 O(n), 空间复杂度为 O(1)
public int minSwap(int[] a, int[] b) {
    int n = a.length;
    int [][] dp = new int [2][n];
    for (int [] row : dp)
        Arrays.fill(row, Integer.MAX_VALUE);
    dp[0][0] = 0;
    dp[1][0] = 1;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        if (a[i] > a[i-1] && b[i] > b[i-1]) {
            dp[0][i] = Math.min(dp[0][i], dp[0][i-1]); // 不需要交换不用增加交换次数
            dp[1][i] = Math.min(dp[1][i], dp[1][i-1]+1); // 如果要交换前一个也必须交换才能满足递增的条件
        }
        if (a[i] > b[i-1] && b[i] > a[i-1]) {
            dp[0][i] = Math.min(dp[0][i], dp[1][i-1]); // 表示 i - 1 位置发生交换
            dp[1][i] = Math.min(dp[1][i], dp[0][i-1]+1); // 表示在 i - 1 不换的基础上, i 发生了交换
        }
    }
    return Math.min(dp[0][n-1], dp[1][n-1]);
}

```

1.3.42 837. New 21 Game - Medium

Alice plays the following game, loosely based on the card game "21".

Alice starts with 0 points and draws numbers while she has less than k points. During each draw, she gains an integer number of points randomly from the range [1, maxPts], where maxPts is an integer. Each draw is independent and the outcomes have equal probabilities.

Alice stops drawing numbers when she gets k or more points.

Return the probability that Alice has n or fewer points.

Answers within 10-5 of the actual answer are considered accepted.

```

// When the draws sum up to K, it stops, calculate the possibility K<=sum<=N.
// Think about one step earlier, sum = K-1, game is not ended and draw largest card W.
// K-1+W is the maximum sum could get when game is ended. If it is <= N, then for sure the possibility when games end an
// Because the maximum is still <= 1.
// Otherwise calculate the possibility sum between K and N.
// Let dp[i] denotes the possibility of that when game ends sum up to i.
// i is a number could be got equally from i - m and draws value m card.
// Then dp[i] should be sum of dp[i-W] + dp[i-W+1] + ... + dp[i-1], devided by W.
// We only need to care about previous W value sum, accumlate winSum, reduce the possibility out of range.
// Time Complexity: O(N).
// Space: O(N).

public double new21Game(int n, int k, int w) { // k : threshold
    if (k == 0 || n >= (k + w)) return 1.0;
    if (k > n) return 0;
    double [] dp = new double [n+1];
    dp[0] = 1.0;
    double winSum = 1;
    double res = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        dp[i] = winSum / w;
        if (i < k) winSum += dp[i];
        else res += dp[i];
        if (i >= w) winSum -= dp[i-w];
    }
    return res;
}

```

1.3.43 1105. Filling Bookcase Shelves - Medium

You are given an array books where books[i] = [thicknessi, heighti] indicates the thickness and height of the ith book. You are also given an integer shelfWidth.

We want to place these books in order onto bookcase shelves that have a total width shelfWidth.

We choose some of the books to place on this shelf such that the sum of their thickness is less than or equal to shelfWidth, then build another level of the shelf of the bookcase so that

the total height of the bookcase has increased by the maximum height of the books we just put down. We repeat this process until there are no more books to place.

Note that at each step of the above process, the order of the books we place is the same order as the given sequence of books.

For example, if we have an ordered list of 5 books, we might place the first and second book onto the first shelf, the third book on the second shelf, and the fourth and fifth book on the last shelf. Return the minimum possible height that the total bookshelf can be after placing shelves in this manner.

```
// 求摆放前 i 本书需要的最小高度，首先需要求摆放前 i-1 书需要的最小高度，以此类推，最初需要计算的是摆放第 0 本书需要的最小高度，也就
// 根据前 i-1 本书求前 i 书需要的最小高度的思路是：
// 尝试将第 i 本书放在前 i-1 本书的下面
// 以及将前 i-1 本书的最后几本和第 i 本书放在同一层两种方案，看哪种方案高度更小就用哪种方案，依次求出摆放前 1, …, n 本书需要的最小高
public int minHeightShelves(int[][] books, int shelfWidth) {
    int[] dp = new int[books.length + 1];
    for (int i = 1; i < dp.length; i++) { // 依次求摆放前 i 本书的最小高度
        int width = books[i-1][0];
        int height = books[i-1][1];
        dp[i] = dp[i-1] + height;
        // 将前 i - 1 本书从第 i - 1 本开始放在与 i 同一层，直到这一层摆满或者所有的书都摆好
        for (int j = i-1; j > 0 && width + books[j-1][0] <= shelfWidth; j--) {
            height = Math.max(height, books[j-1][1]); // 每层的高度由最高的那本书决定
            width += books[j-1][0];
            dp[i] = Math.min(dp[i], dp[j-1] + height); // 选择高度最小的方法
        }
    }
    return dp[books.length];
}
```

- 后来又出的 bug

```
public int minHeightShelves(int[][] b, int w) {
    int n = b.length, curLayerWidth = 0, max = 0;
    int[] dp = new int[n+1];
    Arrays.fill(dp, n+1);
    dp[0] = 0;
    for (int i = 1; i <= n; i++) { // 依次求摆放前 i 本书的最小高度
        dp[i] = dp[i-1] + b[i-1][1]; // 初始化为最大值：单列一行，再看之前的行有没有空隙可以放入之前的层 ?
        curLayerWidth = b[i-1][0];
        max = b[i-1][1];
        for (int j = i-1; j > 0 && curLayerWidth + b[j-1][0] <= w; j--) { // 将前 i - 1 本书从第 i - 1 本开始放在与 i 同一层
            curLayerWidth += b[j-1][0];
            max = Math.max(max, b[j-1][1]);
            // dp[i] = Math.min(dp[i], dp[j] + max); // bug: dp[j] + max 是从第 j 本开始，包括第 j 本，这与之后的书放到最后一层所能形成的高度不一致
            dp[i] = Math.min(dp[i], dp[j - 1] + max); // 所以，是用 j 之前所开成的最小高度，dp[j-1] 加上最后一层所能形成的最小高度
        }
    }
    return dp[n];
}
```

1.3.44 790. Domino and Tromino Tiling

You have two types of tiles: a 2×1 domino shape and a tromino shape. You may rotate these shapes.

Given an integer n , return the number of ways to tile an $2 \times n$ board. Since the answer may be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

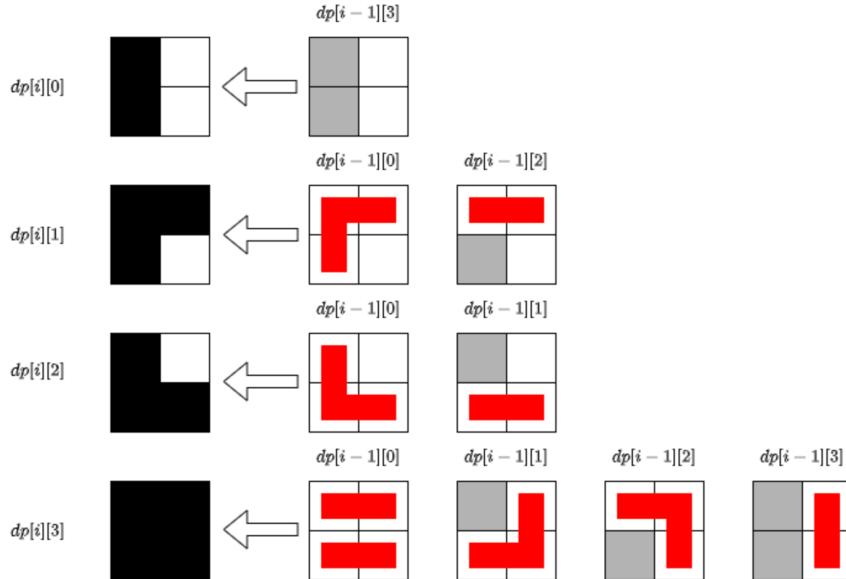
In a tiling, every square must be covered by a tile. Two tilings are different if and only if there are two 4-directionally adjacent cells on the board such that exactly one of the tilings has both squares occupied by a tile.

1. 官方的：更为直接的图形动规题的分析方法

考虑这么一种平铺的方式：在第 i 列前面的正方形都被瓷砖覆盖，在第 i 列后面的正方形都没有被瓷砖覆盖（ i 从 1 开始计数）。那么第 i 列的正方形有四种被覆盖的情况：

- 一个正方形都没有被覆盖，记为状态 0；
- 只有上方的正方形被覆盖，记为状态 1；
- 只有下方的正方形被覆盖，记为状态 2；
- 上下两个正方形都被覆盖，记为状态 3。

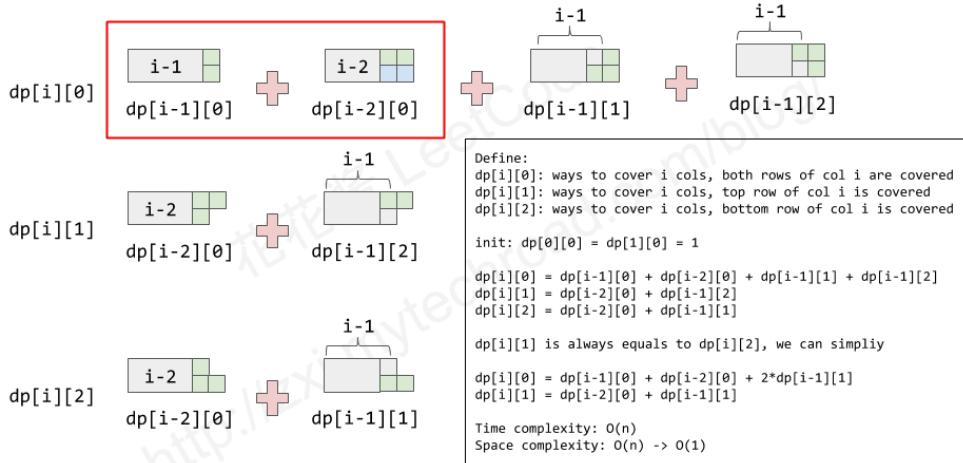
使用 $dp[i][s]$ 表示平铺到第 i 列时，各个状态 s 对应的平铺方法数量。考虑第 $i - 1$ 列和第 i 列正方形，它们之间的状态转移如下图（红色条表示新铺的瓷砖）：



初始时 $dp[0][0] = 0, dp[0][1] = 0, dp[0][2] = 0, dp[0][3] = 1$ ，对应的状态转移方程 ($i > 0$) 为：

```
static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int numTilings(int n) {
    long [][] f = new long [n+1][4];
    f[0][3] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        f[i][0] = f[i-1][3];
        f[i][1] = (f[i-1][0] + f[i-1][2]) % mod;
        f[i][2] = (f[i-1][0] + f[i-1][1]) % mod;
        f[i][3] = (f[i-1][0] + f[i-1][1] + f[i-1][2] + f[i-1][3]) % mod;
    }
    return (int)f[n][3];
}
```

2. 解题思路与分析



```
public int numTilings(int n) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int [][] dp = new int [n+1][2];
    dp[0][0] = 1;
    dp[1][0] = 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        dp[i][0] = (int)((dp[i-1][0] + dp[i-2][0]) % mod + (2 * dp[i-1][1]) % mod) % mod;
        dp[i][1] = (int)(dp[i-2][0] + dp[i-1][1]) % mod;
    }
    return dp[n][0];
}
```

1.3.45 1997. First Day Where You Have Been in All the Rooms - Medium

There are n rooms you need to visit, labeled from 0 to $n - 1$. Each day is labeled, starting from 0. You will go in and visit one room a day.

Initially on day 0, you visit room 0. The order you visit the rooms for the coming days is determined by the following rules and a given 0-indexed array `nextVisit` of length n :

Assuming that on a day, you visit room i , if you have been in room i an odd number of times (including the current visit), on the next day you will visit a room with a lower or equal room number specified by `nextVisit[i]` where $0 \leq nextVisit[i] \leq i$; if you have been in room i an even number of times (including the current visit), on the next day you will visit room $(i + 1) \bmod n$. Return the label of the first day where you have been in all the rooms. It can be shown that such a day exists. Since the answer may be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

```
public int firstDayBeenInAllRooms(int [] nextVisit) {
    int n = nextVisit.length, mod = (int)1e9 + 7;
    long [] dp = new long [n];
    dp[0] = 0;
    for (int i = 1; i < n; i++)
        dp[i] = (2 * dp[i-1] % mod + mod - dp[nextVisit[i-1]] + 2) % mod;
    return (int)dp[n-1];
}
```

1.3.46 943. Find the Shortest Superstring - Hard

Given an array of strings `words`, return the smallest string that contains each string in `words` as a substring. If there are multiple valid strings of the smallest length, return any of them.

You may assume that no string in `words` is a substring of another string in `words`.

- 深搜 + 记忆数组 + 裁枝

```
public String shortestSuperstring(String [] sa) { // 回溯: 暴搜 + 剪枝, 但回溯仍然是最慢的方法
    n = sa.length;
```

```

max = new int [n][n];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        if (i == j) continue;
        for (int k = Math.min(sa[i].length(), sa[j].length()); k >= 1; k--) // 不想遍历所有，找到一个有效最优解，就剪枝中断
            if (sa[i].substring(sa[i].length()-k).equals(sa[j].substring(0, k))) {
                max[i][j] = k; // sa[i] 的尾与 sa[j] 的头的最长公共后缀长度
                break;
            }
    }
}
dp = new int [1 << n][n];
ans = new int [n]; // 最终答案：最小长度的字符串下标位置
vis = new boolean [n];
dfs(new int [n], 0, 0, 0);
String s = sa[ans[0]];
for (int i = 1; i < n; i++) { // 当前字符串的前缀已经被上一个字符串的后缀 cover 了，所以只取后没被覆盖住的后半部分
    int cmnLen = max[ans[i-1]][ans[i]];
    s += sa[ans[i]].substring(cmnLen);
}
return s;
}
int [][] dp;
int [][] max; // max common length between two strings
boolean [] vis;
int n, maxLen = Integer.MIN_VALUE; // BUG: has to be initialized
int [] ans;
private void dfs(int [] a, int idx, int sum, int state) {
    if (idx == n) {
        if (sum > maxLen) {
            maxLen = sum;
            // ans = Arrays.copyOf(a, n);
            ans = a.clone(); // 效果一样
        }
        return ;
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        if (vis[i]) continue;
        int mask = state | (1 << i);
        int curLen = sum + (idx == 0 ? 0 : max[a[idx-1]][i]);
        if (dp[mask][i] > 0 && dp[mask][i] >= curLen) continue; // == 的情况可以剪枝，因为 dp[][] 本来就是记忆着各路径状态下的最大值
        vis[i] = true;
        a[idx] = i;
        dp[mask][i] = curLen; // BUG: 需要这一行记忆化，加速搜索与剪枝，重中之重不可记忆，otherwise tle !!!
        dfs(a, idx+1, curLen, mask);
        vis[i] = false;
    }
}
}

```

- 动态规划

```

public String shortestSuperstring(String[] s) {
    int n = s.length;
    String [][] dp = new String [1 << n][n]; // 这个 dp 的设计还比较新颖奇特：
    int [][] max = new int [n][n];
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (i == j) continue;
            for (int k = Math.min(s[i].length(), s[j].length()); k >= 1; k--)
                if (s[i].substring(s[i].length()-k).equals(s[j].substring(0, k))) {
                    max[i][j] = k;
                    break;
                }
        }
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) dp[1 << i][i] = s[i]; // 初始化：每个字符串与自己的最长公共后缀串就是它本身
    for (int r = 1; r < 1 << n; r++)
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (((r >> i) & 1) == 0) continue;
            for (int j = 0; j < n; j++) {
                if (i == j || (((r >> j) & 1) == 0)) continue; // 保证状态 r 是包含了字符串 i 和 j 的有效 state
                String cur = dp[r ^ (1 << j)][i] + s[j].substring(max[i][j]);
                if (dp[r][j] == null || dp[r][j].length() > cur.length()) // dp[i][j]: 这里比较字符串的长度操作起来就比较复杂了
                    dp[r][j] = cur;
            }
        }
    int r = (1 << n) - 1;
}

```

```

String ans = dp[r][0];
for (int i = 1; i < n; i++)
    if (dp[r][i].length() < ans.length()) ans = dp[r][i];
return ans;
}

```

1. 解题思路与分析

我们的算法包括三个部分：

预先计算出所有的 $\text{overlap}(A[i], A[j])$ ；

使用动态规划计算出所有的 $\text{dp}(\text{mask}, i)$ ，并记录每个状态从哪个状态转移得来，记为 parent ；

通过 parent 还原这个字符串。

```

public String shortestSuperstring(String[] A) {
    int N = A.length;
    int[][] overlaps = new int[N][N];
    for (int i = 0; i < N; ++i)
        for (int j = 0; j < N; ++j) if (i != j) {
            int m = Math.min(A[i].length(), A[j].length());
            for (int k = m; k >= 0; --k)
                if (A[i].endsWith(A[j].substring(0, k))) {
                    overlaps[i][j] = k;
                    break;
                }
        }
    int[][] dp = new int[1<<N][N]; // dp[mask][i] = most overlap with mask, ending with ith element
    int[][] parent = new int[1<<N][N];
    for (int mask = 0; mask < (1<<N); ++mask) {
        Arrays.fill(parent[mask], -1);
        for (int bit = 0; bit < N; ++bit) if (((mask >> bit) & 1) > 0) {
            // Let's try to find dp[mask][bit]. Previously, we had a collection of items represented by pmask.
            int pmask = mask ^ (1 << bit);
            if (pmask == 0) continue;
            for (int i = 0; i < N; ++i) if (((pmask >> i) & 1) > 0) {
                // For each bit i in pmask, calculate the value if we ended with word i, then added word 'bit'
                int val = dp[pmask][i] + overlaps[i][bit];
                if (val > dp[mask][bit]) {
                    dp[mask][bit] = val;
                    parent[mask][bit] = i;
                }
            }
        }
    }
    // # Answer will have length sum(len(A[i])) for i) - max(dp[-1])
    // Reconstruct answer, first as a sequence 'perm' representing the indices of each word from left to right.
    int[] perm = new int[N];
    boolean[] vis = new boolean[N];
    int t = 0;
    int mask = (1 << N) - 1;
    // p: the last element of perm (last word written left to right)
    int p = 0;
    for (int j = 0; j < N; ++j)
        if (dp[(1<<N) - 1][j] > dp[(1<<N) - 1][p])
            p = j;
    // Follow parents down backwards path that retains maximum overlap
    while (p != -1) {
        perm[t++] = p;
        vis[p] = true;
        int p2 = parent[mask][p];
        mask ^= 1 << p;
        p = p2;
    }
    // Reverse perm
    for (int i = 0; i < t/2; ++i) {
        int v = perm[i];
        perm[i] = perm[t-1-i];
        perm[t-1-i] = v;
    }
    // Fill in remaining words not yet added
    for (int i = 0; i < N; ++i)
        if (!vis[i]) perm[t++] = i;
    // Reconstruct final answer given perm
}

```

```

StringBuilder ans = new StringBuilder(A[perm[0]]);
for (int i = 1; i < N; ++i) {
    int overlap = overlaps[perm[i-1]][perm[i]];
    ans.append(A[perm[i]].substring(overlap));
}
return ans.toString();
}

```

1.3.47 964. Least Operators to Express Number - Hard

Given a single positive integer x , we will write an expression of the form $x \text{ (op1)} x \text{ (op2)} x \text{ (op3)} \dots$ where each operator op1, op2, etc. is either addition, subtraction, multiplication, or division (+, -, *, or /). For example, with $x = 3$, we might write $3 * 3 / 3 + 3 - 3$ which is a value of 3.

When writing such an expression, we adhere to the following conventions:

The division operator (/) returns rational numbers. There are no parentheses placed anywhere. We use the usual order of operations: multiplication and division happen before addition and subtraction. It is not allowed to use the unary negation operator (-). For example, " $x - x$ " is a valid expression as it only uses subtraction, but " $-x + x$ " is not because it uses negation. We would like to write an expression with the least number of operators such that the expression equals the given target. Return the least number of operators used.

博主看了一会儿，发现没思路就直接放弃了，直奔论坛上找解法。这里直接参考 donggua_fu 大神的解法吧，首先处理 edge cases，当 x 等于 target 的话，不用加任何运算符，返回 0 即可。若 x 大于 target，比如 $x=5$, $target=3$ ，我们其实可以迅速的求出运算符的个数，因为 5 比 3 大，要凑 3 就只能先变成 1，这里就有两种变法，一种是全部都变成 1，然后来凑 3，即 $5/5 + 5/5 + 5/5$ ，这时的运算符个数是 $target * 2 - 1$ ，因为加号的个数总是比除号少一个。另一种凑法就是 $5 - 5/5 - 5/5$ ，这时候的运算符个数是 $(x - target) * 2$ ，此时的加号和除号的个数相同，均为 x 和 target 的差值。

接下来就要处理 x 小于 target 的情况了，此时由于不知道 x 到底比 target 小多少，若差距太大的话，肯定不能用加号，所以应该先用乘号来让 x 变大，直到刚好大于等于 target 停止，并每次增加次数 cnt。若此时 sum 正好等于 target，太幸运了，直接返回 cnt。但通常情况下 sum 会大于 target，此时 sum - target 的差值就需要另行计算了。这里差值跟 target 的大小关系又要分为两种情况来讨论，当 $sum - target < target$ 时，比如 $x=5$, $sum=25$, $target=15$ ，则 $sum - target = 10$ ，就是说现在已经乘到了 25，但需要再减去 10，这个差值 10 可以再次调用原函数来计算，此时新的 target 代入 10 即可，记得返回值要加上 cnt。当然之后还是要再计算一下另一种凑的方法，由于 sum 超过了 target，所以回退一个 x ，变成 sum / x ，此时小于 target，那么它们的差值 $target - (sum / x)$ 就可以通过再次调用函数来计算，注意这里加上 cnt 之后还要减去 1，因为回退了一个 x ，少了一个乘号。最终二者的较小值即为所求，记得要加上个 1，以为多加了个运算符，参见代码如下：

```

public int leastOpsExpressTarget(int x, int target) {
    if (x == target) return 0;
    if (x > target) return Math.min(target*2-1, (x-target)*2);
    int cnt = 0;
    long sum = x;
    while (sum < target) {
        sum *= x;
        ++cnt;
    }
    if (sum == target) return cnt;
    int min = Integer.MAX_VALUE, max = Integer.MIN_VALUE;
    // int tmp = sum - target; // -
    if (sum - target < target)
        min = leastOpsExpressTarget(x, (int)(sum - target)) + cnt;
    max = leastOpsExpressTarget(x, (int)(target - (sum / x))) + cnt - 1;
    return Math.min(min, max) + 1; // -
}

```

- 和 race car 那道题类似。注意到，符号的添加就是对数字进行 $-x^i$ 的操作，最后要减到 0， $k = \log_2(t)$ ，有两种方式，可以先到 t 前面的数字， 2^k ，或者 t 后面的数字 2^{k+1} 。

注意， 2^k 需要的符号是 k ，最后因为第一个一定可以是正的，省一个符号。

看了花花酱的题解，感觉更像是 bfs。cost 小的点先扩展。这个再看一下

```
int leastOpsExpressTarget(int x, int target) {
    priority_queue<pair<int, int>, vector<pair<int, int>>, greater<pair<int, int>> que;
    unordered_set<int> s;
    que.emplace(0, target);
    while(!que.empty()) {
        int cost = que.top().first;
        int t = que.top().second;
        que.pop();
        if (t == 0) return cost-1;
        if (s.count(t)) continue;
        s.insert(t);
        int k = log(t) / log(x);
        int l = t - pow(x, k);
        que.emplace(cost+(k == 0 ? 2 : k), l);
        int r = pow(x, k+1) - t;
        que.emplace(cost+k+1, r);
    }
    return -1;
}
```

1.3.48 1955. Count Number of Special Subsequences - Hard 把这些个递推公式记住

A sequence is special if it consists of a positive number of 0s, followed by a positive number of 1s, then a positive number of 2s.

For example, [0,1,2] and [0,0,1,1,1,2] are special. In contrast, [2,1,0], 2^2 , and [0,1,2,0] are not special. Given an array nums (consisting of only integers 0, 1, and 2), return the number of different subsequences that are special. Since the answer may be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

A subsequence of an array is a sequence that can be derived from the array by deleting some or no elements without changing the order of the remaining elements. Two subsequences are different if the set of indices chosen are different.

定义：

- $f[i][0]$ 表示前 i 项得到的全 0 子序列个数
- $f[i][1]$ 表示前 i 项得到的先 0 后 1 的子序列个数
- $f[i][2]$ 表示前 i 项得到的特殊子序列个数

遍历数组 $nums$ ，对于 $f[i][j]$ ，若 $j \neq nums[i]$ ，则直接从前一项转移过来，即 $f[i][j] = f[i-1][j]$ 。

若 $j = nums[i]$ 则需要分类计算：

对于 $f[i][0]$ ，当遇到 0 时，有选或不选两种方案，不选 0 时有 $f[i][0] = f[i-1][0]$ ，选 0 时，可以单独组成一个子序列，也可以与前面的 0 组合，因此有 $f[i][0] = f[i-1][0] + 1$ ，两者相加得 $f[i][0] = 2 \cdot f[i-1][0] + 1$ 。

对于 $f[i][1]$ ，当遇到 1 时，有选或不选两种方案，不选 1 时有 $f[i][1] = f[i-1][1]$ ，选 1 时，可以单独与前面的 0 组成一个子序列，也可以与前面的 1 组合，因此有 $f[i][1] = f[i-1][1] + f[i-1][0]$ ，两者相加得 $f[i][1] = 2 \cdot f[i-1][1] + f[i-1][0]$ 。

$f[i][2]$ 和 $f[i][1]$ 类似，有 $f[i][2] = 2 \cdot f[i-1][2] + f[i-1][1]$ 。

最后答案为 $f[n-1][2]$ 。

代码实现时，可以把第一维压缩掉。

```
public int countSpecialSubsequences(int[] arr) { // 去找个降维的参考一下
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int n = arr.length;
    long [][] dp = new long [n][3];
    for (int i = 0; i < n; i++)
```

```

for (int j = 0; j < 3; j++) {
    if (arr[i] != j) dp[i][j] = (i == 0 ? 0 : dp[i-1][j]);
    else {
        if (j == 0)
            dp[i][j] = (i == 0 ? 0 : dp[i-1][j]) * 2 % mod + 1;
        else
            dp[i][j] = ((i == 0 ? 0 : dp[i-1][j]) * 2 % mod + (i == 0 ? 0 : dp[i-1][j-1])) % mod;
    }
}
return (int)dp[n-1][2];
}

```

1.3.49 446. Arithmetic Slices II - Subsequence - Hard

Given an integer array nums, return the number of all the arithmetic subsequences of nums.

A sequence of numbers is called arithmetic if it consists of at least three elements and if the difference between any two consecutive elements is the same.

For example, [1, 3, 5, 7, 9], [7, 7, 7, 7], and [3, -1, -5, -9] are arithmetic sequences. For example, [1, 1, 2, 5, 7] is not an arithmetic sequence. A subsequence of an array is a sequence that can be formed by removing some elements (possibly none) of the array.

For example, [2,5,10] is a subsequence of [1,2,1,2,4,1,5,10]. The test cases are generated so that the answer fits in 32-bit integer.

1. 解题思路与分析 这道题是之前那道 Arithmetic Slices 的延伸，那道题比较简单是因为要求等差数列是连续的，而这道题让我们求是等差数列的子序列，可以跳过某些数字，不一定非得连续，那么难度就加大了，但还是需要用动态规划 Dynamic Programming 来做。

好，既然决定要用 DP 了，那么首先就要确定 dp 数组的定义了，刚开始我们可能会考虑使用一个一维的 dp 数组，然后 $dp[i]$ 定义为范围为 $[0, i]$ 的子数组中等差数列的个数。定义的很简单，OK，但是基于这种定义的状态转移方程却十分的难想。我们想对于 $(0, i)$ 之间的任意位置 j ，如何让 $dp[i]$ 和 $dp[j]$ 产生关联呢？是不是只有 $A[i]$ 和 $A[j]$ 的差值 $diff$ ，跟 $A[j]$ 之前等差数列的差值相同，才会有关联，所以差值 $diff$ 是一个很重要的隐藏信息 Hidden Information，我们必须要在 dp 的定义中考虑进去。所以一维 dp 数组是罩不住的，必须升维，但是用二维 dp 数组的话，差值 $diff$ 那一维的范围又是个问题，数字的范围是整型数，所以差值的范围也很大，为了节省空间，我们建立一个一维数组 dp ，数组里的元素不是数字，而是放一个 $HashMap$ ，建立等差数列的差值和当前位置之前差值相同的数字个数之间的映射。我们遍历数组中的所有数字，对于当前遍历到的数字，又从开头遍历到当前数字，计算两个数字之差 $diff$ ，如果越界了不做任何处理，如果没越界，我们让 $dp[i]$ 中 $diff$ 的差值映射自增 1，因为此时 $A[i]$ 前面有相差为 $diff$ 的 $A[j]$ ，所以映射值要加 1。然后我们看 $dp[j]$ 中是否有 $diff$ 的映射，如果有的话，说明此时相差为 $diff$ 的数字至少有三个了，已经能构成题目要求的等差数列了，将 $dp[j][diff]$ 加入结果 res 中，然后再更新 $dp[i][diff]$ ，这样等遍历完数组， res 即为所求。

我们用题目中给的例子数组 [2, 4, 6, 8, 10] 来看，因为 2 之前没有数字了，所以我们从 4 开始，遍历前面的数字，是 2，二者差值为 2，那么在 dp^2 的 $HashMap$ 就可以建立 $2 \rightarrow 1$ 的映射，表示 4 之前有 1 个差值为 2 的数字，即数字 2。那么现在 $i=2$ 指向 6 了，遍历前面的数字，第一个数是 2，二者相差 4，那么在 dp^3 的 $HashMap$ 就可以建立 $4 \rightarrow 1$ 的映射，第二个数是 4，二者相差 2，那么先在 dp^3 的 $HashMap$ 建立 $2 \rightarrow 1$ 的映射，由于 dp^2 的 $HashMap$ 中也有差值为 2 的映射， $2 \rightarrow 1$ ，那么说明此时至少有三个数字差值相同，即这里的 [2 4 6]，我们将 dp^2 中的映射值加入结果 res 中，然后当前 dp^3 中的映射值加上 dp^2 中的映射值。这应该不难理解，比如当 $i=3$ 指向数字 8 时， $j=2$ 指向数字 6，那么二者差值为 2，此时先在 dp^4 建立 $2 \rightarrow 1$ 的映射，由于 dp^3 中有 $2 \rightarrow 2$ 的映射，那么加上数字 8 其实新增了两个等差数列 [2,4,6,8] 和 [4,6,8]，所以结果 res 加上的值就是 $dp[j][diff]$ ，即 2，并且 $dp[i][diff]$ 也需要加上这个值，才能使得 dp^4 中的映射变为 $2 \rightarrow 3$ ，后面数字 10 的处理情况也相同，这里就不多赘述了，最终的各个位置的映射关系如下所示：

2	4	6	8	10
2->1	4->1	6->1	8->1	
2->2	4->1	6->1		

2->3 4->2
2->4

最终累计出来的结果是跟上面红色的数字相关，分别对应着如下的等差数列：

2->2: [2, 4, 6]
2->3: [2, 4, 6, 8] [4, 6, 8]
4->2: [2, 6, 10]
2->4: [2, 4, 6, 8, 10] [4, 6, 8, 10] [6, 8, 10]

- Both time and space complexities are $O(n^2)$

方法一：动态规划 + 哈希表

我们首先考虑至少有两个元素的等差子序列，下文将其称作弱等差子序列。

由于尾项和公差可以确定一个等差数列，因此我们定义状态 $f[i][d]$ 表示尾项为 $nums[i]$ ，公差为 d 的弱等差子序列的个数。

我们用一个二重循环去遍历 $nums$ 中的所有元素对 $(nums[i], nums[j])$ ，其中 $j < i$ 。将 $nums[i]$ 和 $nums[j]$ 分别当作等差数列的尾项和倒数第二项，则该等差数列的公差 $d = nums[i] - nums[j]$ 。由于公差相同，我们可以将 $nums[i]$ 加到以 $nums[j]$ 为尾项，公差为 d 的弱等差子序列的末尾，这对应着状态转移 $f[i][d] += f[j][d]$ 。同时， $(nums[i], nums[j])$ 这一对元素也可以当作一个弱等差子序列，故有状态转移

$$f[i][d] += f[j][d] + 1$$

由于题目要统计的等差子序列至少有三个元素，我们回顾上述二重循环，其中「将 $nums[i]$ 加到以 $nums[j]$ 为尾项，公差为 d 的弱等差子序列的末尾」这一操作，实际上就构成了一个至少有三个元素的等差子序列，因此我们将循环中的 $f[j][d]$ 累加，即为答案。

代码实现时，由于 $nums[i]$ 的范围很大，所以计算出的公差的范围也很大，我们可以将状态转移数组 f 的第二维用哈希表代替。

Define the type of the difference as Integer type instead of Long. This is because there is no valid arithmetic subsequence slice that can have difference out of the Integer value range. But we do need a long integer to filter out those invalid cases.

Preallocate the HashMap to avoid reallocation to deal with extreme cases.

Refrain from using lambda expressions inside loops.

```
public int numberOfArithmeticSlices(int[] a) {
    int n = a.length, ans = 0;
    Map<Integer, Integer>[] dp = new HashMap[n];
    dp[0] = new HashMap<>();
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        dp[i] = new HashMap<>();
        for (int j = 0; j < i; j++) {
            // for (int j = i-1; j >= 0; j--) { // BUG: 反向遍历不可以
            long diff = (long)a[i] - a[j]; // bug: (long)a[i]
            if (diff > Integer.MAX_VALUE || diff < Integer.MIN_VALUE) continue;
            int dif = (int)diff;
            dp[i].put(dif, dp[i].getOrDefault(dif, 0) + 1); // bug: 这里加的是 1, 不是 2 // 这里先更新上
            if (dp[j].containsKey(dif)) {
                ans += dp[j].get(dif); // 只自增 1 (而不是记为 2), 为的是方便这里统计结果
                dp[i].put(dif, dp[i].get(dif) + dp[j].get(dif)); // 再加上之前累积的
            }
        }
    }
    return ans;
}
```

1.3.50 639. Decode Ways II - Hard

A message containing letters from A-Z can be encoded into numbers using the following mapping:

'A' -> "1" 'B' -> "2" ... 'Z' -> "26" To decode an encoded message, all the digits must be grouped then mapped back into letters using the reverse of the mapping above (there may be multiple ways). For example, "11106" can be mapped into:

"AAJF" with the grouping (1 1 10 6) "KJF" with the grouping (11 10 6) Note that the grouping (1 11 06) is invalid because "06" cannot be mapped into 'F' since "6" is different from "06".

In addition to the mapping above, an encoded message may contain the '*' character, which can represent any digit from '1' to '9' ('0' is excluded). For example, the encoded message "1*" may represent any of the encoded messages "11", "12", "13", "14", "15", "16", "17", "18", or "19". Decoding "1*" is equivalent to decoding any of the encoded messages it can represent.

Given a string s consisting of digits and '*' characters, return the number of ways to decode it.

Since the answer may be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

- 解题思路与分析 给定一个只含数字的长 n nn 的字符串 s ss, 再给定一个对应规则, 每个大写字母 ch 可以对应一个数字 ch - 'A' + 1。问该 s ss 有多少种不同的解码方式。s ss 中可能含有'*', 这个符号可以对应除了 0 00 以外的任意一位数。答案模 $10^9 + 7$ 后返回。

思路是动态规划。设 $f[i]$ $f[i]f[i]$ 是 s ss 的长 i ii 的前缀的解码方式数, 那么可以按照最后一位 (或者两位) 是解码成什么字母来分类进行累加。

```
public int numDecodings(String t) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int n = t.length();
    char[] s = t.toCharArray();
    System.out.println(Arrays.toString(s));
    int[] dp = new int[Math.max(2, n+1)];
    dp[0] = 1;
    dp[1] = s[0] == '*' ? 9 : s[0] == '0' ? 0 : 1;
    for (int i = 2; i <= n; i++) {
        System.out.println("i: " + i);
        for (int j = 1; j <= 26; j++) { // 枚举 s 的长 i 前缀的末尾可以解码为哪个大写字母
            char c = s[i-1];
            if (j <= 9) { // 如果是要解码为 A 到 I, 那么最后一个数字得单独解码
                if (c == '*' || c == '0' + j)
                    dp[i] += dp[i-1];
            } else { // 否则最后两个数字得一起解码
                char p = s[i-2];
                int x = j % 10, y = j / 10;
                if ((p == '*' || p == y + '0') && ((c == '*' && x != 0) || c == x + '0'))
                    dp[i] += dp[i-2];
            }
            dp[i] %= mod;
        }
    }
    return dp[n];
}
```

- 解题思路与分析

定义 $dp[i]$ 是 nums 前 i 个字符可以得到的解码种数, 假设之前的字符串是 abcx, 现在加入了 y, 则有以下 5 种情况:

如果 $x == '0'$, 且 $y == '0'$, 无法解码, 返回 0;
 如果只有 $x == '0'$, 则 y 只能单独放在最后, 不能与 x 合并 (不能以 0 开头), 此时有: $dp[i] = dp[i-1]$
 如果只有 $y == '0'$, 则 y 不能单独放置, 必须与 x 合并, 并且如果合并结果大于 26, 返回 0, 否则有: $dp[i] = dp[i-2]$
 如果 $xy <= 26$: 则 y 可以 "单独" 放在 abcx 的每个解码结果之后后, 并且如果 abcx 以 x 单独结尾, 此时可以合并 xy 作为结尾, 而这种解码种数就是
 如果 $xy > 26$: 此时 x 不能与 y 合并, y 只能单独放在 $dp[i]$ 的每一种情况的最后, 此时有: $dp[i+1] = dp[i]$

```
public int numDecodings(String s) {
    char[] arr = s.toCharArray();
    int[] dp = new int[s.length() + 1];
    dp[0] = 1;
    dp[1] = arr[0] == '0' ? 0 : 1;
    if (s.length() <= 1) return dp[1];
    for (int i = 2; i <= s.length(); i++) {
        int n = (arr[i-2] - '0') * 10 + (arr[i-1] - '0');
        if (arr[i-1] == '0' && arr[i-2] == '0')
            dp[i] = dp[i-1];
        else if (n <= 26)
            dp[i] = dp[i-1] + dp[i-2];
        else
            dp[i] = dp[i-1];
    }
    return dp[s.length()];
}
```

```

        return 0;
    }else if(arr[i-2]=='0'){
        dp[i] = dp[i-1];
    }else if(arr[i-1]=='0'){
        if(n>26) return 0;
        dp[i] = dp[i-2];
    }else if(n>26){
        dp[i] = dp[i-1];
    }else{
        dp[i] = dp[i-1]+dp[i-2];
    }
}
return dp[dp.length-1];
}

```

1.3.51 629. K Inverse Pairs Array - Hard

For an integer array nums, an inverse pair is a pair of integers [i, j] where $0 \leq i < j < \text{nums.length}$ and $\text{nums}[i] > \text{nums}[j]$.

Given two integers n and k, return the number of different arrays consist of numbers from 1 to n such that there are exactly k inverse pairs. Since the answer can be huge, return it modulo $10^9 + 7$.

1. 解题思路与分析

比较容易辨别出来是一道 DP 的题目，但是确实算是比较难的了，下面是参考网上的代码之后我的理解。定义 $dp[n][k]$ 表示从 1 到 n 构成的数中含有 k 个逆序对的个数，则我们可以推导出 $dp[n][k]$ 和 $dp[n-1][i]$ 之间的递推关系：

如果我们把 n 放在最后一位，则所有的 k 个逆序对均来自于前 n - 1 个数所构成的逆序对，和 n 无关；

如果我们把 n 放在倒数第二位，则有 1 个逆序对和 n 有关，有 k - 1 个逆序对来自前 n - 1 个数所构成的逆序对；

.....

如果我们把 n 放在第一位，则有 n - 1 个逆序对和 n 有关， $k - (n - 1)$ 个逆序对来自前 n - 1 个数所构成的逆序对。

所以： $dp[n][k] = dp[n-1][k] + dp[n-1][k-1] + dp[n-1][k-2] + \dots + dp[n-1][k+1-n+1] + dp[n-1][k-n+1]$ // A
 $dp[n][k+1] = dp[n-1][k+1] + dp[n-1][k] + dp[n-1][k-1] + dp[n-1][k-2] + \dots + dp[n-1][k+1-n+1]$ // B
 $dp[n][k+1] - dp[n][k] = dp[n-1][k+1] - dp[n-1][k-n+1];$ // B-A
 $dp[n][k+1] = dp[n][k] + dp[n-1][k+1] - dp[n-1][k-n+1];$ // 移项
// 将 k+1 换回成 k, 可以得到：
 $dp[n][k] = dp[n][k-1] + dp[n-1][k] - dp[n-1][k-n]$

把上面两个式子相减可以推导出： $dp[n][k+1] = dp[n][k] + dp[n-1][k+1] - dp[n-1][k+1-n]$ 。这样就可以写出代码了。

当然由于 $dp[n][k]$ 只和 $dp[n][x]$, $dp[n-1][x]$ 有关，所以该代码还可以进一步将空间复杂度从 $O(nk)$ 降低到 $O(k)$ 。时间复杂度是 $O(nk)$ 。

```

public int kInversePairs(int n, int k) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    long [][] dp = new long [n+1][k+1];
    dp[0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        dp[i][0] = 1;
        for (int j = 1; j <= k; j++) {
            dp[i][j] = dp[i][j-1] + dp[i-1][j];
            if (j >= i)

```

```

        dp[i][j] -= dp[i-1][j-i];
        dp[i][j] = (dp[i][j] + mod) % mod;
    }
    return (int)dp[n][k];
}

```

2. 解题思路与分析

给定两个整数 n 和 k , $n \geq 1$ 并且 $k \geq 0$, 问恰好含 k 个逆序对的 n 全排列有多少个。

思路是动态规划。设 $f[n][k]$ 是恰有 k 个逆序对的全排列个数, 那么可以按照 n 被排在了哪儿来分类, 设全排列出的数组是 A , 如果 $A[n-1] = n$, 那么 n 贡献的逆序对个数是 0, 所以此时个数是 $f[n-1][k]$; 如果 $A[n-2] = n$, 那么 n 贡献的逆序对个数是 1, 所以此时个数是 $f[n-1][k-1]$, 以此类推。所以有:

$$f[n][k] = \sum_{s=0}^{\min\{n-1,k\}} f[n-1][k-s]$$

初始条件 $f[0][0] = 1$, $f[0][s > 0] = 0$ 。而如果直接循环枚举 s 的话, 很多区间和都是重复计算的。考虑:

$$\begin{aligned} f[n][k+1] &= \sum_{s=0}^{\min\{n-1,k+1\}} f[n-1][k+1-s] \\ &= \sum_{s=-1}^{\min\{n-2,k\}} f[n-1][k-s] \\ &= f[n-1][k+1] + \sum_{s=0}^{\min\{n-2,k\}} f[n-1][k-s] \end{aligned}$$

也就是计算的时候, 我们维护 $f[n-1]$ 这一行的长 $n-1$ 的滑动窗口的和即可。代码如下:

```

public int kInversePairs(int n, int k) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int [][] dp = new int [n+1][k+1];
    dp[0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        long sum = 0;
        for (int j = 0; j <= k; j++) {
            sum += dp[i-1][j];
            if (j >= i)
                sum -= dp[i-1][j-i];
            dp[i][j] = (int)(sum % mod);
        }
    }
    return (int)dp[n][k];
}

```

1.3.52 1787. Make the XOR of All Segments Equal to Zero - Hard

You are given an array nums and an integer k . The XOR of a segment $[\text{left}, \text{right}]$ where $\text{left} \leq \text{right}$ is the XOR of all the elements with indices between left and right , inclusive: $\text{nums}[\text{left}] \text{ XOR } \text{nums}[\text{left}+1] \text{ XOR } \dots \text{ XOR } \text{nums}[\text{right}]$.

Return the minimum number of elements to change in the array such that the XOR of all segments of size k is equal to zero.

1. 解题思路与分析

解题思路：

容易发现，最后得到的数组一定满足：

- $a_1 = a_{k+1} = a_{2k+1} = \dots$
- $a_2 = a_{k+2} = a_{2k+2} = \dots$
- \dots

因此可以考虑将同一组中的数放在一起进行考虑。

首先，我们对每一组分别进行计数。

接下来，我们用动态规划求解。 $dp[val]$ 表示处理到当前组时，异或值为 val 的最小修改次数。显然初值（考虑第一组之前）为：

- $dp[0] = 0$
- $dp[val] = \infty (val \neq 0)$

在转移时，我们有两种选择：

1. 将当前组的数全都改为同一个值，此时不管我们之前如何选择，都可以利用这一个值的选择得到任何一个异或值，那么我们自然应该选择之前的代价中最小的那个，此时的代价为 $size[i] + \min dp[val]$ ，新状态的异或值可以为 $[0, 2^D)$ 中的任意一个值。这一转移需要进行 K 次。
 2. 使用当前组中的某一个值 val' 。此时我们需要枚举之前的异或值 val （或枚举达到的目标值，二者是等价的），此时的代价为 $size[i] - cnt[i][val'] + dp[val]$ ，新状态的异或值为 $val \oplus val'$ 。这一转移最多需要进行 N 次。
- 时间复杂度 $\mathcal{O}(2^D \cdot (K + N))$ 。其中 $D = 10$ 。
 - 空间复杂度 $\mathcal{O}(N + 2^D)$ 。

- 根据题目特点，最后所有长度为 k 的区间异或结果等于零，可推出得到的数组满足：

$a_1 = a_{k+1} = a_{2k+1} = \dots$
 $a_2 = a_{k+2} = a_{2k+2} = \dots$

因此可将数组中的元素按上述规律，每间隔 k 个的数字为一组进行分组。

在此基础上，设计一个动态规划数组 $dp[j]$ ，表示到当前第 i 组为止，所有元素异或到对应数字 j 时的更改次数。则对第 i 组 $dp[j]$ 的状态转移方程可能为：

j 可由某一数值和当前组中的某个数 num 异或得到， $newDp[j] = dp[j \& num] + size[i] - 组中 num 的数量$

j 可通过和任一数字异或得到， $newDp[j] = 前一 dp 中最小的改变次数 + size[i]$

完成 k 个组的动态规划后， dp^1 就是所求的解。

```
public int minChanges(int[] a, int k) {
    int n = a.length;
    Map<Integer, Integer>[] group = new HashMap[k]; // 存储 k 个组、各组中各个数字数量
    int[] cnt = new int[k]; // k 元素片段里，每个下标对应的所有元素总个数 // 各组大小，它们会有可能不同吗？
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        group[i] = new HashMap<>();
        for (int j = i; j < n; j += k) { // 将数组中的每个元素分布到其在 k 元素片段中下标位置所在的组里去，并统计重复出现次数
            group[i].put(a[j], group[i].getOrDefault(a[j], 0) + 1);
            cnt[i]++;
        }
    }
    int r = 1 << 10; // 题中 nums[i] < 2^10，为的是遍历所有可能更改值，以取最小
    int[] dp = new int[r], curDp = new int[r]; // 当前组异或到对应数字时的更改次数
    Arrays.fill(dp, Integer.MAX_VALUE);
    dp[0] = 0;
    for (int i = 0; i < k; i++) { // 遍历 k 个元素的片段——中的每个元素，逐元素优化出全局最优解
        int minValue = Arrays.stream(dp).min().getAsInt(); // 累积到上一个元素的全局最优解
        Arrays.fill(curDp, minValue + cnt[i]); // 变为当前组中不存在数字的改变次数：之前的最小改变次数 + 当前组元素个数
        for (int j = 0; j < r; j++) {
            if (dp[j] == Integer.MAX_VALUE) continue;
            for (Map.Entry<Integer, Integer> en : group[i].entrySet()) {
                int num = en.getKey(), v = en.getValue(), xorNum = num ^ j;
                curDp[xorNum] = Math.min(curDp[xorNum], dp[v]);
            }
        }
        dp = curDp;
    }
}
```

```

        curDp[xorNum] = Math.min(curDp[xorNum], dp[j] + cnt[i] - v);
    }
}
dp = Arrays.copyOf(curDp, r); // 将遍历到当前组、累积较优解的 curDp 复制入全局最优解 dp 数组中
}
return dp[0];
}

```

1.3.53 1735. Count Ways to Make Array With Product - Hard 乘积为 K 的质因子数排列组合的总个数：分解质因子

You are given a 2D integer array, queries. For each queries[i], where queries[i] = [ni, ki], find the number of different ways you can place positive integers into an array of size ni such that the product of the integers is ki. As the number of ways may be too large, the answer to the ith query is the number of ways modulo 109 + 7.

Return an integer array answer where answer.length == queries.length, and answer[i] is the answer to the ith query.

1. 解题思路与分析

题意分析

回顾题意：对于一个查询 (n, k) 而言，我们需要找出 n 个整数的一个排列，使得它们的乘积为 k 。

首先对 k 做质因数分解。设其全部的质因子为 p_1, p_2, \dots, p_m ，则会有

$$k = p_1^{c_1} \cdot p_2^{c_2} \cdots \cdot p_m^{c_m}$$

考虑质因子 p_1 ：整数 k 中共有 c_1 个质因子 p_1 。那么，如果要找出乘积为 k 的 n 个正整数，那么这 n 个数中一共也应当有 c_1 个质因子 p_1 。其中，每个数最少有 0 个 p_1 ，最多有 c_1 个 p_1 。这也就意味着，我们要将 c_1 个 p_1 在这 n 个正整数之间「分配」。

于是，问题转化成了下面的子问题形式：「给定一个正整数 c_1 ，找出所有长度为 n 的非负整数的排列，使得它们的加和为 c_1 」。

转化后的子问题是一个动态规划类型的问题。设 $dp[i][j]$ 代表「给定一个正整数 j ，满足长度为 i ，且加和为 j 」的非负整数排列的数量。为了求解 $dp[i][j]$ ，我们考虑排列中的第一个整数，它的取值范围为 $[0, j]$ ，若它取值为 k ，则余下 $i - 1$ 个整数的加和需要为 $j - k$ ，对应的方案数目为 $dp[i - 1][j - k]$ 。因此，

$$dp[i][j] = \sum_{k=0}^{j} dp[i-1][j-k]$$

在解决完毕子问题之后，原问题就迎刃而解了。为了分配 c_1 个 p_1 ，共有 $dp[n][c_1]$ 种方法；为了分配 c_2 个 p_2 ，共有 $dp[n][c_2]$ 种方法。因此，总的方法数目为

$$\prod_{k=1}^{m} dp[n][c_k]$$

算法细节

首先，我们需要遍历数组，找到所有 n, k 的最大值 $maxn, maxk$ 。此外，还要找出「加和」的最大值 $cmax$ 。根据前面的描述， $cmax$ 即为质因数数量的最大值。而由于质因数最小为 2， $maxk$ 最大为 10^4 ，因此质因数数量不会超过 $\log_2 10^4 < 15$ 。

在找出每个变量的上界之后，就可以在 $O(maxn \cdot maxc^2)$ 的时间内预处理 dp 数组。

随后，我们还要预先求出 $[2, maxn]$ 之间的全部质数，复杂度为 $O(maxn)$ 。

最后，我们就可以回答每个查询了。

```

// 在找出每个变量的上界之后，就可以在 O(maxn * maxc^2) 的时间内预处理 dp 数组。
// 随后，我们还要预先求出 [2, maxn] 之间的全部质数，复杂度为 O(maxn)。
public int[] waysToFillArray(int[][] q) {
    int n = q.length;
    int mod = (int)1e9 + 7;

```

```

int maxC = 15;           // 找出「加和」的最大值  $c_{max}$ 。根据前面的描述， $c_{max}$  即为质因数数量的最大值。
int maxN = 0, maxK = 0; // 而由于质因数最小为 22,  $maxK$  最大为  $10^4$  因此质因数数量不会超过  $\log_2 10^4 < 15$ 
for (int i = 0; i < n; i++) { // 需要遍历数组，找到所有  $n, kn, k$  的最大值  $maxN, maxK$ 
    maxN = Math.max(maxN, q[i][0]);
    maxK = Math.max(maxK, q[i][1]);
}
long [][] dp = new long [maxN + 1][maxC + 1]; //  $dp[i][j]$  代表给定一个正整数  $jj$ , 满足长度为  $ii$ , 且加和为  $jj$  的非负整数解的方案数
for (int i = 1; i <= maxC; i++)
    dp[1][i] = 1;
for (int i = 1; i <= maxN; i++)
    dp[i][0] = 1;
for (int i = 2; i <= maxN; i++)
    for (int j = 1; j <= maxC; j++)
        for (int k = 0; k <= j; k++) { // 为了求解  $dp[i][j]$ , 我们考虑排列中的第一个整数, 它的取值范围为  $[0, j][0, j]$ ,
            dp[i][j] += dp[i-1][j-k]; // 若它取值为  $kk$ , 则余下  $i-1$  个整数的加和需要为  $j-kk$ , 对应的方案数目为  $dp[i-1][j-k]$ 
            dp[i][j] %= mod;
        }
int [] isPrime = new int [maxK + 1]; // 分解乘积的质因子
Arrays.fill(isPrime, 1);
List<Integer> primes = new ArrayList<>();
for (int i = 2; i <= maxK; i++) {
    if (isPrime[i] == 1)
        primes.add(i);
    for (int j = i*2; j <= i*i && j <= maxK; j += i) // 最大乘积为  $maxK$  的数组, 分解出小的质因子了, 那么凡是小质因子的倍数都置为 0
        isPrime[j] = 0;
}
int [] ans = new int [n];
for (int i = 0; i < n; i++) {
    int m = q[i][0], k = q[i][1];
    List<Integer> cs = new ArrayList<>(); // 乘积  $k$  的质因子表
    for (int p : primes) {
        if (p > k) break;
        int cnt = 0, left = k;
        while (left % p == 0) {
            left /= p;
            cnt++;
        }
        if (cnt > 0) cs.add(cnt); // 乘积  $k$  中各质因子的个数 (指数)
    }
    long res = 1;
    for (int c : cs) {
        res *= dp[m][c]; // 数组长度为  $n$ , 数组和为质因子  $c$  的指数个数的所有可能的分布数合数, 各质因子之间个数之间相乘
        res %= mod;
    }
    ans[i] = (int)res;
}
return ans;
}

```

- 下面这种方法理解得还不是很透

```

public int[] waysToFillArray(int[][] queries) {
    int[] result = new int[queries.length];
    int resultIdx = 0;
    Combination combination = new Combination(10030, 20);
    for (int[] q : queries) {
        int n = q[0]; // 长度为  $n$ 
        int k = q[1]; // 乘积为  $k$ 
        long product = 1L;
        for (int power : getPrimeFactors(k).values()) {
            // power 个球, 分到  $n$  个位置, 每个位置可以为空
            // 等价于:  $(power+n)$  个球, 分到  $n$  个位置, 每个位置不能为空
            // Why? 等价后得到一种分法, 每组减去 1, 就是原来的解
            // 插板法可得  $C(power + n - 1, n - 1) = C(power + n - 1, power)$ 
            product = (product * combination.get(n + power - 1, power)) % mod;
        }
        result[resultIdx++] = (int)(product);
    }
    return result;
}
long mod = (int)1e9 + 7;
public HashMap<Integer, Integer> getPrimeFactors(int n) {
    HashMap<Integer, Integer> map = new HashMap<>();
    for(int i = 2; i <= n; i++) {

```

```

        if (n % i == 0) {
            int cnt = 0;
            while (n % i == 0) {
                cnt++;
                n = n / i;
            }
            map.put(i, cnt);
        }
    }
    return map;
}
class Combination {
    long[][] c;
    Combination (int n, int m) {
        c = new long[n + 1][m + 1];
        c[0][0] = 1;
        for(int i = 1; i <= n; i++){
            c[i][0] = 1;
            for(int j = 1; j <= m; j++)
                c[i][j] = (c[i-1][j-1] + c[i-1][j]) % mod;
        }
    }
    public long get(int n, int m) {
        return c[n][m];
    }
}

```

1.3.54 1359. Count All Valid Pickup and Delivery Options - Hard

Given n orders, each order consist in pickup and delivery services.

Count all valid pickup/delivery possible sequences such that delivery(i) is always after of pickup(i).

Since the answer may be too large, return it modulo $10^9 + 7$.

1. 解题思路与分析

就是总共有 $2N$ 个位置，每次放一两个，还剩下多少个位置可以合理占用

```

public int countOrders(int n) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    int spots = n * 2;
    long ans = 1;
    for (int i = n; i >= 2; i--) {
        ans = (ans * spots * (spots - 1) / 2l) % mod;
        spots -= 2;
    }
    return (int)ans;
}

```

1.3.55 1187. Make Array Strictly Increasing - Hard 需要重写

Given two integer arrays arr1 and arr2, return the minimum number of operations (possibly zero) needed to make arr1 strictly increasing.

In one operation, you can choose two indices $0 \leq i < \text{arr1.length}$ and $0 \leq j < \text{arr2.length}$ and do the assignment $\text{arr1}[i] = \text{arr2}[j]$.

If there is no way to make arr1 strictly increasing, return -1.

1. 解题思路与分析

```

public int makeArrayIncreasing(int[] a, int[] b) {
    b = Arrays.stream(b).distinct().toArray();
    Arrays.sort(b);
    int m = a.length, n = b.length;
    int minCnt = 0, minValue = 0;
    Queue<int []> q = new LinkedList<>();
    q.offer(new int [] {-1, 0}); // 初始化，假想第 0 位的前一位是-1
    for (int i = 0; i < m; i++) {

```

```

minCnt = Integer.MAX_VALUE;
for (int size = q.size()-1; size >= 0; size--) {
    int [] cur = q.poll(); // 取前一位的一个选择
    if (a[i] > cur[0]) minCnt = Math.min(minCnt, cur[1]); // 先不急将当前选择加入 queue 中, 找到最小的再说
    minValue = binarySearchMin(b, cur[0]); // 查找一个比前一个数大的最小数
    if (minValue != -1) q.offer(new int [] {minValue, cur[1] + 1}); // 将这个最小数加入到 queue 中, 操作次数在前一位
}
if (minCnt != Integer.MAX_VALUE) // 如果当前位可以保持不变, 将最小次数加入到 queue 中
    q.offer(new int [] {a[i], minCnt});
}
if (q.size() == 0) return -1; // 如果最后一位没有合法的选择方案, 返回-1
int ans = Integer.MAX_VALUE;
while (!q.isEmpty()) ans = Math.min(ans, q.poll()[1]);
return ans;
}

private int binarySearchMin(int [] arr, int v) {
    int l = 0, r = arr.length-1, m = 0;
    while (l < r) { // l,r: [0, 1]
        m = l + (r-l) / 2;
        if (arr[m] <= v) l = m+1;
        else r = m;
    }
    return arr[l] > v ? arr[l] : -1; // 所以这里要再判断一下
}

```

2. 解题思路与分析

这里若是要替换后面的数字为较大的数字, 那么就需要在 arr2 中找到比当前数字大的数字, 为了让整个数组更容易的递增, 那么这个较大数据应该尽量越小越好, 所以就是要找到第一个比当前数字大的数。为了更容易的在 arr2 中查找, 而不是每次都遍历整个数组, 需要给 arr2 排个序, 然后用二分搜索来查找更高效一些, 这里也可以将 arr2 放到一个 TreeSet 中, 利用其自动排序的特点, 之后再进行二分搜索就行了。这道题的正确解法是用动态规划 Dynamic Programming, 这里的 dp 表达式比较难想, 一般来说, dp 值都是定义为题目中要求的值, 而这道题是个例外, 这里的 dp[i][j] 表示对于数组中的前 j 个数字组成的子数组中, 需要替换 i 次可以使得其变为严格递增, 且第 j 个数字的最小值为 dp[i][j]。这里的 dp 值不是定义为替换次数, 而是第 j 个数字的最小值 (可能是替换后的值), 因为要保证数组严格递增, 最后一个数字的大小很重要, 这是个关键信息, 而这个数字的大小跟数组坐标之间没有啥必然联系, 所以这个信息不太好放到 dp 数组的坐标中, 而所求的替换次数跟数组长度是相关的, 因为其不可能超过数组的总长度, 最差的情况也就是将整个 arr1 数组都替换了 (当然还需要考虑 arr2 的长度)。

接下来就来考虑状态转移方程怎么写, 由于这里的 j 表示前 j 个数字, 那么第 j 个数字实际上是 arr1[j-1], 若第 j 个数字大于 dp[i][j-1], 这里表示对于前 j-1 个数字, 替换 i 次可以使得其严格递增, 且第 j-1 个数字为 dp[i][j-1], 这样的话就不需要额外的替换操作, 还是严格递增的, 则 dp[i][j] 可以赋值为 arr1[j-1]。若此时 i 大于 0, 说明之前已经进行过替换操作, 则上一个操作状态是 dp[i-1][j-1], 当前操作是从 arr2 中选一个数字替换 arr1 的第 j 个数字, 这里就要在 arr2 中选择第一个大于 dp[i-1][j-1] 的数字, 若存在的话, 就用这个数字来更新 dp[i][j] 的值。若某个时刻 j 等于 n 了, 说明已经到 arr1 的末尾了, 若此时 dp[i][j] 不等于 INT_MAX (初始值), 说明是可以将整个 arr1 替换成严格递增的数组的, 替换次数就是 i, 直接返回即可。最终循环退出了, 返回 -1, 参见代码如下:

```

int makeArrayIncreasing(vector<int>& arr1, vector<int>& arr2) {
    int n = arr1.size();
    if (n == 1) return 0;
    set<int> st(arr2.begin(), arr2.end());
    vector<vector<int>> dp(n + 1, vector<int>(n + 1, INT_MAX));
    dp[0][0] = INT_MIN;
    for (int j = 1; j <= n; ++j) {
        for (int i = 0; i <= j; ++i) {
            if (arr1[j - 1] > dp[i][j - 1]) {
                dp[i][j] = arr1[j - 1];
            }
            if (i > 0) {
                auto it = st.upper_bound(dp[i - 1][j - 1]);
                if (it != st.end()) dp[i][j] = min(dp[i][j], *it);
            }
        }
    }
    return dp[n][n] == INT_MAX ? -1 : n;
}

```

```

        }
        if (j == n && dp[i][j] != INT_MAX) return i;
    }
    return -1;
}

```

1.4 多维数个数、数种类数多一维 k 介入的 $dp[i][j][k]$

1.4.1 920. Number of Music Playlists - Hard

Your music player contains n different songs. You want to listen to goal songs (not necessarily different) during your trip. To avoid boredom, you will create a playlist so that:

Every song is played at least once. A song can only be played again only if k other songs have been played. Given n , $goal$, and k , return the number of possible playlists that you can create. Since the answer can be very large, return it modulo $10^9 + 7$.

1. 解题思路与分析

当加入的是一首新歌，则表示之前的 $L-1$ 首歌中有 $j-1$ 首不同的歌曲，其所有的组合情况都可以加上这首新歌，那么当前其实有 $N-(j-1)$ 首新歌可以选。

当加入的是一首重复的歌，则表示之前的 $L-1$ 首歌中已经有了 j 首不同的歌，那么若没有 K 的限制，则当前有 j 首重复的歌可以选。但是现在有了 K 的限制，意思是两首重复歌中间必须要有 K 首其他的歌，则当前只有 $j-K$ 首可以选。而当 $j < K$ 时，其实这种情况是为 0 的。
 $li="">$

综上所述可以得到状态转移方程：

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i-1][j-1] * (N - (j-1)) + dp[i-1][j] * (j - k) & (j > K) \\ dp[i-1][j-1] * (N - (j-1)) & (j \leq K) \end{cases}$$

```

public int numMusicPlaylists(int n, int goal, int k) {
    long mod = (int)1e9 + 7;
    long [][] dp = new long [goal+1][n+1]; // dp[i][j]: 播完 i 首用了 j 首不同的曲子, 分第 i 首播不播第 j 首两种情况 (i >= 0)
    for (int i = 1; i <= goal; i++) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            if (i < j) dp[i][j] = 0; // 这行不能省略
            else if (i == 1 && j == 1) dp[i][j] = n; // 用 1 首歌放完 1 次, 共有 n 种不同的选择
            else if (i > 1 && j == 1) {
                if (k == 0) dp[i][j] = n; // 相当于没有任何外加限制条件
                // else dp[i][j] = 0; // 这行可略
            } else // 分两种情况: 第 i 首不播第 j 首歌 (那么可以从前面 j-k 首里面选择一首), 和第 i 首播第 j 首歌 (第 j 首就
                dp[i][j] = (dp[i-1][j] * Math.max(j-k, 0) + (j == 0 ? 0 : dp[i-1][j-1] * (n - (j-1)))) % mod;
        }
    }
    return (int)dp[goal][n];
}

```

- 简化一下代码

```

static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int numMusicPlaylists(int n, int goal, int k) {
    long [][] dp = new long [goal+1][n+1]; // dp[i][j]: 播完 i 首用了 j 首不同的曲子, 分第 i 首播不播第 j 首两种情况 (i >= 0)
    dp[0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= goal; i++) {
        for (int j = 1; j <= n; j++) {
            dp[i][j] = (dp[i-1][j-1] * (n - (j-1))) % mod; // 第 j 首放新歌
            if (j > k) // 第 j 首放 (j-k) 之前的某首歌
                dp[i][j] = (dp[i][j] + dp[i-1][j] * (j-k)) % mod;
        }
    }
    return (int)dp[goal][n];
}

```

1.4.2 1866. Number of Ways to Rearrange Sticks With K Sticks Visible - Hard

There are n uniquely-sized sticks whose lengths are integers from 1 to n . You want to arrange the sticks such that exactly k sticks are visible from the left. A stick is visible from the left if there are no longer sticks to the left of it.

For example, if the sticks are arranged [1,3,2,5,4], then the sticks with lengths 1, 3, and 5 are visible from the left. Given n and k , return the number of such arrangements. Since the answer may be large, return it modulo $10^9 + 7$.

```
// dp[i][j] 表示前面 i 根木棍可以看到 j 根
// 设 dp[i][j] 表示从高度为 1, 2, ..., i 的木棍中, 高度逐渐递减地插入新的木棍, 从左侧看恰好看到 k 根木棍的方案数。
// 后面说看到 ith 根, 不是指从小到大的第 ith 根棍子, 而是指 ith 这个位置上的棍子
// 如果可以看到 ith 根的话, 那么数量为 dp[i-1][j-1]
// 如果看不到 ith 的话, 那么取前面 (i-1) 里面任意一个出来放在 ith 的最后, 接下来就是从前面 i-1 个棍子里面看到 j 根, 所以结果是 (i-1)
public int rearrangeSticks(int n, int k) {
    int mod = (int)1e9 + 7;
    long [][] dp = new long [n+1][k+1];
    dp[0][0] = 1;
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 1; j <= k; j++) {
            dp[i][j] = (dp[i-1][j-1] + (i - 1) * dp[i-1][j]) % mod;
        }
    }
    return (int)dp[n][k];
}
```

- dfs + memo

```
public int rearrangeSticks(int n, int k) {
    dp = new long [n+1][k+1];
    return (int)dfs(n, k);
}
int mod = (int)1e9 + 7;
long [][] dp;
private long dfs(int n, int k) {
    if (n < k || k == 0) return 0;
    if (n == k) return 1;
    if (dp[n][k] != 0) return dp[n][k];
    // instead of iterating for every stick
    // we are just multiplying number of ways with (n - 1)
    return dp[n][k] = (dfs(n-1, k-1) + (n - 1) * dfs(n-1, k)) % mod;
}
```

1.4.3 1916. Count Ways to Build Rooms in an Ant Colony - Hard

You are an ant tasked with adding n new rooms numbered 0 to $n-1$ to your colony. You are given the expansion plan as a 0-indexed integer array of length n , prevRoom, where $\text{prevRoom}[i]$ indicates that you must build room $\text{prevRoom}[i]$ before building room i , and these two rooms must be connected directly. Room 0 is already built, so $\text{prevRoom}^1 = -1$. The expansion plan is given such that once all the rooms are built, every room will be reachable from room 0.

You can only build one room at a time, and you can travel freely between rooms you have already built only if they are connected. You can choose to build any room as long as its previous room is already built.

Return the number of different orders you can build all the rooms in. Since the answer may be large, return it modulo $10^9 + 7$.

对每个节点，可根据所有以其子节点为根的树的节点及排列数量，计算出以当前节点为根的树的节点及排列数量。

本题求解过程涉及较多前置知识点，包括排列组合、乘法逆元、快速乘方等

读者需要掌握如下进阶知识点才能解决本题：

- 排列数计算。假设有 a_0 个物品 0, a_1 个物品 1, ..., a_{n-1} 个物品 $n-1$, 我们需要将它们排成一排, 那么方案数为

$$\frac{(a_0 + a_1 + \dots + a_{n-1})!}{a_0! \cdot a_1! \cdot \dots \cdot a_{n-1}!}$$

- 乘法逆元。如果需要计算 $\frac{b}{a}$ 对 m 取模的值, b 和 a 均为表达式 (例如上面排列数的分子与分母) 并且它们实际的值非常大, 无法直接进行计算, 那么我们可以求出 a 在模 m 意义下的乘法逆元 a^{-1} , 此时有

$$\frac{b}{a} \equiv b \cdot a^{-1} \pmod{m}$$

这样将除法运算转化为乘法运算, 就可以在计算的过程中进行取模了。

乘法逆元的具体计算方法可以参考题解的最后一节「进阶知识点：乘法逆元」。

方法一：动态规划

提示 1

由于除了 0 号房间以外的每一个房间 i 都有唯一的 $prevRoom[i]$, 而 0 号房间没有 $prevRoom[0]$, 并且我们可以从 0 号房间到达每个房间, 即任意两个房间都是可以相互到达的, 因此:

如果我们把所有的 n 间房间看成 n 个节点, 任意的第 $i (i > 0)$ 号房间与 $prevRoom[i]$ 号房间之间连接一条有向边, 从 $prevRoom[i]$ 指向 i , 那么它们就组成了一棵以 0 号房间为根节点的树, 并且树上的每条有向边总是从父节点指向子节点。

提示 2

根据题目要求, 对于任意的 $i > 0$, 我们必须先构筑 $prevRoom[i]$, 再构筑 i , 而我们根据提示 1 构造的树中恰好有一条从 $prevRoom[i]$ 指向 i 的边, 因此:

题目中的要求与拓扑排序的要求是等价的。

也就是说, 构筑所有房间的不同顺序的数目, 等于我们构造的树的不同拓扑排序的方案数。

思路与算法

我们可以使用动态规划的方法求出方案数。

设 $f[i]$ 表示以节点 i 为根的子树的拓扑排序方案数，那么：

- 任意一种拓扑排序中的第一个节点一定是节点 i ；
- 假设节点 i 有子节点 $ch_{i,0}, ch_{i,1}, \dots, ch_{i,k}$ ，那么以 $ch_{i,0}, ch_{i,1}, \dots, ch_{i,k}$ 为根的这 $k+1$ 棵子树，它们均有若干种拓扑排序的方案。如果我们希望把这些子树的拓扑排序方案「简单地」合并到一起，可以使用乘法原理，即方案数为：

$$f[ch_{i,0}] \times f[ch_{i,1}] \times \dots \times f[ch_{i,k}]$$

乘法原理会忽略子树之间拓扑排序的顺序，所以我们还需要考虑这一层关系。记 $cnt[i]$ 表示以节点 i 为根的子树中节点的个数，那么除了拓扑排序中第一个节点为 i 以外，还剩余 $cnt[i] - 1$ 个位置。我们需要在 $cnt[i] - 1$ 个位置中，分配 $cnt[ch_{i,0}]$ 个给以 $ch_{i,0}$ 为根的子树，放置该子树的一种拓扑排序；分配 $cnt[ch_{i,1}]$ 个给以 $ch_{i,1}$ 为根的子树，放置该子树的一种拓扑排序。以此类推，分配的方案数乘以上述乘法原理得到的方案数，即为 $f[i]$ 。根据「前言」部分，我们知道分配的方案数为：

$$\frac{(cnt[i] - 1)!}{cnt[ch_{i,0}]! \times cnt[ch_{i,1}]! \times \dots \times cnt[ch_{i,k}]!}$$

因此，我们就可以得到状态转移方程：

$$f[i] = \left(\prod_{ch} f[ch] \right) \times \frac{(cnt[i] - 1)!}{\prod_{ch} cnt[ch]!}$$

细节

当节点 i 为叶节点时，它没有子节点，因此对应着 1 种拓扑排序的方案，即 $f[i] = 1$ 。

状态转移方程中存在除法，因此我们需要使用「前言」部分的乘法逆元将其转换为除法。

观察状态转移方程，它包含一些阶乘以及阶乘的乘法逆元，因此我们可以将它们全部预处理出来，这样就可均摊 $O(1)$ 的时间在一对「父-子」节点之间进行状态转移。

```
static final int mod = (int)1e9 + 7;
public int waysToBuildRooms(int[] prevRoom) {
    int n = prevRoom.length;
    // 求阶乘数列及对应逆元
    this.fac = new int [n]; // fac[i]=i!
    this.inv = new int [n]; // inv[i]=i!^(-1)
    fac[0] = inv[0] = 1;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        fac[i] = (int)((long)fac[i-1] * i % mod); // 算阶层
        inv[i] = quickMultiply(fac[i], mod - 2); // 乘法逆元：费马小定理：(fac[i]^(-1))%mod = (fac[i]^(mod-2))%mod 转换成快
    }
    for (int i = 0; i < n; i++) // 记录各个节点与子节点之间的边
        m.computeIfAbsent(prevRoom[i], z -> new ArrayList<>()).add(i);
    return dfs(0)[1]; // 动态规划得到总体顺序数量 x
}
Map<Integer, List<Integer>> m = new HashMap<>();
int [] fac, inv;
private int [] dfs(int idx) { // 返回以当前节点为根的子树节点个数 及 内部排列数
    if (!m.containsKey(idx)) return new int [] {1, 1}; // 子节点，节点个数及内部排列数均为 1
    int cnt = 1, ans = 1; // 子树的结点个数、内部排列数
    for (Integer next : m.get(idx)) {
        int [] cur = dfs(next); // 递归得到子节点对应树的节点个数和排列数
        cnt += cur[0];
        ans = (int)((long)ans * cur[1] % mod * inv[cur[0]] % mod);
    }
    ans = (int)((long)ans * fac[cnt-1] % mod);
    return new int [] {cnt, ans};
}
private int quickMultiply(int x, int y) { // 快速幂：快速计算 x^y 的乘方
    long ans = 1, base = x;
    while (y > 0) {
        if ((y & 1) == 1)
            ans = (ans * base) % mod; // 指数是奇数次，就先乘一次底数
    }
}
```

```

        base = base * base % mod; // 指数剩偶数次了，就可以直接底数先平方，指数除以 2
        y >>= 1; // 指数除 2
    }
    return (int) ans;
}

```

1.4.4 1504. Count Submatrices With All Ones - Medium

Given an $m \times n$ binary matrix mat , return the number of submatrices that have all ones.

1. 解题思路与分析

首先我们对矩阵进行数据初始化。即求出每一行以及每一列上的前缀和。

遍历矩阵每一个点（两层循环），并以该点最为起点（ row, col ），向右下方向画矩形（两层循环，分别循环矩形的宽 width 和高 height ），注意矩形范围不能越界。起始时 width 和 height 分别为 0，即当前点自身是一个矩形。

当 width 扩大一格后，实际上是增加了 $(\text{row}, \text{col}+\text{width})$ 到 $(\text{row}+\text{height}, \text{col}+\text{width})$ 这一部分的面积（宽为 width ，高为 height ），我们通过前缀和数组求出该区域和是否等于 height ，如果等于，返回结果加一即可。

width 扩大一格的操作同理。

```

public int numSubmat(int[][] mat) {
    int m = mat.length, n = mat[0].length;
    int[][] row = new int[m][n]; // 每一行的前缀和
    int[][] col = new int[m][n]; // 每一列的前缀和
    for (int i = 0; i < m; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            row[i][j] = (j == 0 ? 0 : row[i][j-1]) + mat[i][j];
    for (int j = 0; j < n; j++)
        for (int i = 0; i < m; i++)
            col[i][j] = (i == 0 ? 0 : col[i-1][j]) + mat[i][j];
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < m; i++)
        for (int j = 0; j < n; j++)
            for (int r = 0; i+r < m; r++) // 以当前点为顶点，向下扩大一格，r = 0 起点是 0，当前格自身也是答案
                for (int c = 0; j+c < n; c++) { // 以当前点为顶点，向右扩大一格
                    int x = i + r, y = j + c;
                    // 数新扩张区域内每行每列区域内长度累加和都等于长度，即新增区域每格都是 1
                    if ((j == 0 && row[x][y] == c+1 || j > 0 && row[x][y] - row[x][j-1] == c+1)
                        && (i == 0 && col[x][y] == r+1 || i > 0 && col[x][y] - col[i-1][y] == r+1))
                        ans++;
                    else break;
                }
    return ans;
}

```

2. 解题思路与分析：单调栈 todo

```

private int res = 0;
private int n;
public int numSubmat(int[][] mat) {
    this.n = mat[0].length;
    // dp[j] : the height (number of consecutive '1's) of column j
    int[] dp = new int[n];
    for (int i = 0; i < mat.length; i++) {
        // calculating (updating) heights
        for (int j = 0; j < n; j++)
            dp[j] = mat[i][j] == 1 ? dp[j] + 1 : 0;
        enumerateRowByMinHeight(dp);
    }
    return res;
}
public void enumerateRowByMinHeight(int[] dp) {
    // monotonic stack storing indices : for index p < q in stack, dp[p] < dp[q]
    Deque<Integer> stack = new LinkedList<>();
    stack.offerLast(-1);
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        while (stack.peekLast() != -1 && dp[stack.peekLast()] >= dp[j]) {

```

```

        int idx = stack.pollLast();
        res += dp[idx] * (idx - stack.peekLast()) * (j - idx);
    }
    stack.offerLast(j);
}
while (stack.peekLast() != -1) {
    int idx = stack.pollLast();
    res += dp[idx] * (idx - stack.peekLast()) * (n - idx);
}
}

// Used two Arrays to store number of consecutive ones on the left, and number of consecutive ones above(up)
// In one m*n loop we can count the number of order 1xM rectangles where M belongs to [1,m-1]
// and we can count rectangles of order MxN each time where M>1. in the k index loop.
public int numSubmat(int[][] mat) {
    int m = mat.length, n = mat[0].length;
    int [][] left = new int [m][n]; // 每一行的前缀和
    int [][] abov = new int [m][n]; // 每一列的前缀和
    int ans = 0;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < n; j++) {
            if (mat[i][j] == 1) {
                left[i][j] = (j == 0 ? 0 : left[i][j-1]) + 1;
                ans += (j == 0 ? 1 : left[i][j]);
                abov[i][j] = (i == 0 ? 0 : abov[i-1][j]) + 1;
                if (i > 0) {
                    int min = left[i][j];
                    for (int k = 1; k < abov[i][j]; k++) {
                        min = Math.min(min, left[i-k][j]);
                        ans += min;
                    }
                }
            }
        }
    }
    return ans;
}

// In the first pass through the matrix, we store the heights of 1s above a given i,j
// In the second pass, we go through each element that is nonzero, scan leftwards,
// adding the minimum of the heights encountered until we reach the beginning of the row or hit a zero.
public int numSubmat(int[][] mat) {
    int m = mat.length, n = mat[0].length;
    for (int j = 0; j < n; j++) {
        int colsum = 0;
        for (int i = 0; i < m; i++) {
            if (mat[i][j] == 0) colsum = 0;
            else colsum += mat[i][j];
            mat[i][j] = colsum;
        }
    }
    int tot = 0;
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < mat[i].length; j++) {
            int k = j;
            int min = Integer.MAX_VALUE;
            while (k >= 0 && mat[i][k] != 0) {
                min = Math.min(min, mat[i][k]);
                tot += min;
                k--;
            }
        }
    }
    return tot;
}

```

1.5 BitMask 掩码相关的【这是第三次不会的】

1.5.1 1595. Minimum Cost to Connect Two Groups of Points

You are given two groups of points where the first group has size1 points, the second group has size2 points, and size1 \geq size2.

The cost of the connection between any two points are given in an size1 x size2 matrix where cost[i][j] is the cost of connecting point i of the first group and point j of the second

group. The groups are connected if each point in both groups is connected to one or more points in the opposite group. In other words, each point in the first group must be connected to at least one point in the second group, and each point in the second group must be connected to at least one point in the first group.

Return the minimum cost it takes to connect the two groups.

- 主要是，它可能涉及的过程状态很多，要想全了

```
public int connectTwoGroups(List<List<Integer>> a) { // 看来这个题。。。1595 要好好多想几遍【爱表哥，爱生活!!!】
    int m = a.size(), n = a.get(0).size();
    int [][] r = new int [m][1 << n]; // 这里，就是准备，待用
    for (int i = 0; i < m; i++) {
        for (int j = 0; j < (1 << n); j++) {
            int sum = 0;
            for (int k = 0; k < n; k++)
                if ((j & (1 << k)) > 0) sum += a.get(i).get(k);
            r[i][j] = sum;
        }
    }
    int [][] f = new int [m+1][1 << n];
    Arrays.stream(f).forEach(z -> Arrays.fill(z, Integer.MAX_VALUE));
    // f[0][0] = 0; // 【BUG:】初始化得不对，这里一个点是不行的，得一行点...
    f[1] = r[0];
    for (int i = 1; i < m; i++) // 遍历每一行：左边的每个点，要么去更新已连的右边点减少消耗，要么去连一个新的点
        // for (int j = (1 << n)-1; j > 0; j--) { // 遍历每一种与右点配对现状的更新可能性
        for (int j = 1; j < (1 << n); j++) {
            // 【更新】右边现存连点中的每个状态下的每个点，将其换连成左边这个点【仍然不对】...
            for (int k = 0; k < n; k++) { // 遍历右边当前状态 mask 下，每个点，【与左边当前遍历点】的更新可能性【情况二分】
                // if ((j & (1 << k)) > 0) // 当前点连了一个某个左边点：这里遍历的状态，仍然不够，左边这个待连点，仍然是可以与右边
                // f[i][j | (1 << k)] = Math.min(f[i][j | (1 << k)], f[i-1][j] + a.get(i).get(k));
                // f[i+1][j] = Math.min(f[i+1][j], f[i][j ^ (1 << k)] + a.get(i).get(k)); // 把右边 k 点，换成连左边 i 点
                // f[i+1][j | (1 << k)] = Math.min(f[i+1][j | (1 << k)], f[i][j] + a.get(i).get(k)); // 把右边 k 点，换成连左边 i 点
            }
            // else // 【BUG:】出发点是对的，但没想全，就是左边这个点，不是只能连右边一个点，还可以是一片点？所以有很多状态...
            f[i+1][j | (1 << k)] = Math.min(f[i+1][j | (1 << k)], f[i][j] + a.get(i).get(k));
        }
        // 【更新】右边还没有连的连点中的每个状态下的每个还没能连的点，将其连接成左边这个点，左边这个点可以对应右边很多个点连接
        int rest = (1 << n)-1 - j; // 想要表示：右连，所有还不曾被连过的点，所有可能的状态 rest 表示截至第 i 行还没被选过的列
        for (int k = rest; k > 0; k = (k - 1) & rest) // 只遍历没选过的列的所有组合
            f[i+1][j | k] = Math.min(f[i+1][j | k], f[i][j] + r[i][k]);
            // f[i][j | k] = Math.min(f[i][j | k], f[i-1][j] + r[i][k]);
    }
    // return f[m-1][(1 << n) - 1];
    return f[m][(1 << n) - 1];
}
```

1.6 【第三次】不会的

1.6.1 1187. Make Array Strictly Increasing: 【动规:】思路独特

Given two integer arrays arr1 and arr2, return the minimum number of operations (possibly zero) needed to make arr1 strictly increasing.

In one operation, you can choose two indices $0 \leq i < \text{arr1.length}$ and $0 \leq j < \text{arr2.length}$ and do the assignment $\text{arr1}[i] = \text{arr2}[j]$.

If there is no way to make arr1 strictly increasing, return -1.

此题为经典的「[300. 最长递增子序列](#)」问题的变形题目，我们可以参考类似的题目解法。首先我们思考一下，由于要求数组严格递增，因此数组中不可能存在相同的元素，对于数组 arr_2 来说，可以不需要考虑数组中的重复元素，可以预处理去除 arr_2 的重复元素，假设数组 arr_1 的长度为 n ，数组 arr_2 的长度为 m ，此时可以知道最多可以替换的次数为 $\min(n, m)$ 。如何才能定义动态规划的递推公式，这就需要进行思考。我们设 $dp[i][j]$ 表示数组 arr_1 中的前 i 个元素进行了 j 次替换后组成严格递增子数组末尾元素的最小值。当我们遍历 arr_1 的第 i 个元素时，此时 $arr_1[i]$ 要么进行替换，要么进行保留，实际可以分类进行讨论：

- 此时如果 $arr_1[i]$ 需要进行保留，则 $arr_1[i]$ 一定严格大于前 $i - 1$ 个元素替换后组成的严格递增子数组最末尾的元素。假设前 $i - 1$ 个元素经过了 j 次变换后得到的递增子数组的末尾元素的最小值为 $dp[i - 1][j]$ ，如果满足 $arr_1[i] > dp[i - 1][j]$ ，则此时 $arr_1[i]$ 可以保留加入到该子数组中且构成的数组严格递增；
- 此时如果 $arr_1[i]$ 需要进行替换，则替换后的元素一定严格大于前 $i - 1$ 个元素替换后组成的严格递增子数组最末尾的元素。假设前 $i - 1$ 个元素经过了 $j - 1$ 次变换后得到的递增子数组的末尾元素的最小值为 $dp[i - 1][j - 1]$ ，此时我们从 arr_2 找到严格大于 $dp[i - 1][j - 1]$ 的最小元素 $arr_2[k]$ ，则此时将 $arr_2[k]$ 加入到该子数组中且构成数组严格递增；
- 综上可知，每个元素在替换时只有两种选择，要么选择保留当前元素 arr_1 ，要么从 arr_2 中选择一个满足条件的最小元素加入到数组中，最少替换方案一定包含在上述替换方法中。我们可以得到以下递推关系：

$$\begin{cases} dp[i][j] = \min(dp[i][j], arr_1[i]), & \text{if } arr_1[i] > dp[i - 1][j] \\ dp[i][j] = \min(dp[i][j], arr_2[k]), & \text{if } arr_2[k] > dp[i - 1][j - 1] \end{cases}$$

为了便于计算，我们将 $dp[i][j]$ 的初始值都设为 ∞ ，为了便于计算在最开始加一个哨兵，此时令 $dp[0][0] = -1$ 表示最小值。实际计算过程如下：

- 为了方便计算，需要对 arr_2 进行预处理，去掉其中的重复元素，为了快速找到数组 arr_2 中的最小元素，还需要对 arr_2 进行排序；
- 依次尝试计算前 i 个元素在满足 j 次替换时的最小元素：
 - 如果当前元素 $arr_1[i]$ 大于 $dp[i][j - 1]$ ，此时可以尝试将 $arr_1[i]$ 替换为 $dp[i][j]$ ，即此时 $dp[i][j] = \min(dp[i][j], arr_1[i])$ 。
 - 如果前 $i - 1$ 个元素可以满足 $j - 1$ 次替换后成为严格递增数组，即满足 $dp[i - 1][j - 1] \neq \infty$ ，可以尝试在第 j 次替换掉 $arr_1[i]$ ，此时根据贪心原则，利用二分查找可以快速的找到严格大于 $dp[i - 1][j - 1]$ 的最小值进行替换即可。
- 设当前数组 $arr_1[i]$ 的长度为 n ，如果前 n 个元素满足 j 次替换后成为严格递增数组，此时我们找到最小的 j 反向即可。

```
public int makeArrayIncreasing(int[] a, int[] b) {
    Arrays.sort(b);
    int n = a.length, p = -1, m = b.length;
    li = new ArrayList<>(); // 尽量写这种简单的，免得自己容易数错
    for (int v : b) {
        if (v != p) li.add(v);
        p = v;
    }
    m = li.size();
    int [][] f = new int [n+1][Math.min(m, n) + 1]; // 最多时行 Math.min(m, b) 次交换
    Arrays.stream(f).forEach(z -> Arrays.fill(z, Integer.MAX_VALUE));
    f[0][0] = -1; // 哨兵: -1
    for (int i = 1; i <= n; i++)
        for (int j = 0; j <= Math.min(i, m); j++) { // 分两种情况来更新
            /* 如果当前元素大于序列的最后一个元素 */
            if (a[i-1] > f[i-1][j])
                f[i][j] = a[i-1];
            /* 查找严格大于 dp[i - 1][j - 1] 的最小元素 */
            if (j > 0 && f[i-1][j-1] != Integer.MAX_VALUE) {
                int idx = binarySearch(j-1, f[i-1][j-1]);
                f[i][j] = Math.min(f[i][j], arr2[idx]);
            }
        }
}
```

```

        if (idx != m)
            f[i][j] = Math.min(f[i][j], li.get(idx));
    }
    if (i == n && f[i][j] != Integer.MAX_VALUE) return j;
}
return -1;
}
List<Integer> li;
int m;
int binarySearch(int l, int v) { // 找第一个 >= v 的下标
    int r = m; // 右边界: 不包括【l,r】: 感觉这里我还没有弄很透彻...
    while (l < r) {
        int mid = (l + r) / 2;
        if (li.get(mid) > v) r = mid;
        else l = mid + 1;
    }
    return l;
}

```

1.6.2 416. Partition Equal Subset Sum 同硬币和问题，感觉总容易忘记，有点儿提示才能回想起

Given an integer array nums, return true if you can partition the array into two subsets such that the sum of the elements in both subsets is equal or false otherwise.

1. 动规: 二维

创建二维数组 dp , 包含 n 行 $target+1$ 列, 其中 $dp[i][j]$ 表示从数组的 $[0, i]$ 下标范围内选取若干个正整数 (可以是 0 个), 是否存在一种选取方案使得被选取的正整数的和等于 j 。初始时, dp 中的全部元素都是 false。

在定义状态之后, 需要考虑边界情况。以下两种情况都属于边界情况。

- 如果不选取任何正整数, 则被选取的正整数等于 0。因此对于所有 $0 \leq i < n$, 都有 $dp[i][0] = \text{true}$ 。
- 当 $i == 0$ 时, 只有一个正整数 $nums[0]$ 可以被选取, 因此 $dp[0][nums[0]] = \text{true}$ 。

对于 $i > 0$ 且 $j > 0$ 的情况, 如何确定 $dp[i][j]$ 的值? 需要分别考虑以下两种情况。

- 如果 $j \geq nums[i]$, 则对于当前的数字 $nums[i]$, 可以选取也可以不选取, 两种情况只要有一个为 true, 就有 $dp[i][j] = \text{true}$ 。
 - 如果不选取 $nums[i]$, 则 $dp[i][j] = dp[i-1][j]$;
 - 如果选取 $nums[i]$, 则 $dp[i][j] = dp[i-1][j - nums[i]]$ 。
- 如果 $j < nums[i]$, 则在选取的数字的和等于 j 的情况下无法选取当前的数字 $nums[i]$, 因此有 $dp[i][j] = dp[i-1][j]$ 。

状态转移方程如下:

$$dp[i][j] = \begin{cases} dp[i-1][j] \mid dp[i-1][j - nums[i]], & j \geq nums[i] \\ dp[i-1][j], & j < nums[i] \end{cases}$$

最终得到 $dp[n-1][target]$ 即为答案。

```

// 【动规:】同拼硬币什么之类的题目是一样的. 所以, 有了最基本的提醒之后, 我是可以自己把它想出来的...
public boolean canPartition(int[] a) { // 好慢, 还没有上面的, 自己瓣出来的一维的快
    int n = a.length;
    if (n < 2) return false;
    int sum = Arrays.stream(a).sum(), max = Arrays.stream(a).max().getAsInt(), target = sum / 2;
    if (sum % 2 != 0 || max > sum / 2) return false;
    Arrays.sort(a); // 子集: 之类的, 一般顺序不重要, 所以解题时, 可以排序, 来帮助自己解答问题
    boolean[][] f = new boolean[n][target + 1];
    Arrays.stream(f).forEach(z -> Arrays.fill(z, false));
    for (int i = 0; i < n; i++) f[i][0] = true;
    f[0][a[0]] = true;
    for (int i = 1; i < n; i++) {
        int v = a[i];
        for (int j = 1; j < target + 1; j++) {
            if (j < v) f[i][j] = f[i-1][j];
            else f[i][j] = f[i-1][j] || f[i-1][j-v];
        }
    }
}

```

```

        for (int j = 1; j <= target; j++) {
            if (j < v) // 因为这些现取得的值 j, 不能通过当前数得到, 只能取它们先前只能得到的结果
                f[i][j] = f[i-1][j];
            else // 这些取值, 就可以通过添加一个当前数 a[i] 得到
                f[i][j] = f[i-1][j] | f[i-1][j-v];
        }
    }
    return f[n-1][target];
}

```

2. 动规: 一维, 压缩空间

```

public boolean canPartition(int[] a) { // 这里至少也得降序排列一下呀。。。先试着分两组, 往什么数组和小的一组里去添加之类的...
    int n = a.length;
    if (n < 2) return false;
    int sum = Arrays.stream(a).sum(), max = Arrays.stream(a).max().getAsInt(), target = sum / 2;
    if (sum % 2 != 0 || max > sum / 2) return false;
    Arrays.sort(a); // 子集: 之类的, 一般顺序不重要, 所以解题时, 可以排序, 来帮助自己解答问题
    boolean [] f = new boolean [target + 1];
    Arrays.fill(f, false);
    f[0] = true;
    // f[a[0]] = true; // 一维时, 这个初始化也不必要了...
    // for (int i = 1; i < n; i++) {
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int v = a[i];
        for (int j = target; j >= v; j--) {
            f[j] |= f[j-v];
        }
    }
    return f[target];
}

```