segmentTree

deepwaterooo

May 7, 2023

Contents

Chapter 1

Segment Tree 与 Binary Index Tree 线段树与树状数组

- 【要解决的问题:】快速区间查找：O（logN）线段树主要用于高效解决连续区间的动态查询问题，由于二叉结构的特性，使用线段树可以快速的查找某一个节点在若干条线段中出现的次数，时间复杂度为 O(logN)。

- 【其它操作效率】对应于树状数组，线段树进行更新（update）的操作为 O(logn)，进行区间查询（range query）的操作也为 O(logn)。

- 【缺点：空间占用大】而未优化的空间复杂度为 2N，因此有时需要离散化让空间压缩。

- 【与树状数组的区别:】与树状数组不同的是，线段树不止可以适用于【区间求和的查询】，也可以进行【区间最大值，区间最小值（Range Minimum/Maximum Query problem）或者区间异或值的查询】。

- 【分类】：就目前的理解，暂分为两类，一类求和的，一类求最大最小值、或是位操作值（|ˆ&）等等。权值线段树是属于哪里的？

1.1 求和 Sum 的线段树

1.1.1 327. Count of Range Sum - Hard 重点这几个题要好好再理解消化几遍

Given an integer array nums and two integers lower and upper, return the number of range sums that lie in [lower, upper] inclusive.

Range sum S(i, j) is defined as the sum of the elements in nums between indices i and j inclusive, where i <= j.

1. 解题思路与分析: 分治法，自底向上的解决问题

方法一：归并排序

思路与算法

设前缀和数组为 $preSum$，则问题等价于求所有的下标对 (i,j)，满足

$$preSum[j] - preSum[i] \in [lower, upper]$$

我们先考虑如下的问题：给定两个**升序排列**的数组 n_1, n_2，试找出所有的下标对 (i,j)，满足

$$n_2[j] - n_1[i] \in [lower, upper]$$

在已知两个数组均为升序的情况下，这一问题是相对简单的：我们在 n_2 中维护两个指针 l, r。起初，它们都指向 n_2 的起始位置。

随后，我们考察 n_1 的第一个元素。首先，不断地将指针 l 向右移动，直到 $n_2[l] \geq n_1[0] + lower$ 为止，此时， l 及其右边的元素均大于或等于 $n_1[0] + lower$；随后，再不断地将指针 r 向右移动，直到 $n_2[r] > n_1[0] + upper$ 为止，则 r 左边的元素均小于或等于 $n_1[0] + upper$。故区间 $[l, r)$ 中的所有下标 j，都满足

$$n_2[j] - n_1[0] \in [lower, upper]$$

接下来，我们考察 n_1 的第二个元素。由于 n_1 是递增的，不难发现 l, r 只可能向右移动。因此，我们不断地进行上述过程，并对于 n_1 中的每一个下标，都记录相应的区间 $[l, r)$ 的大小。最终，我们就统计得到了满足条件的下标对 (i,j) 的数量。

在解决这一问题后，原问题就迎刃而解了：我们采用归并排序的方式，能够得到左右两个数组排序后的形式，以及对应的下标对数量。对于原数组而言，若要找出全部的下标对数量，只需要再额外找出左端点在左侧数组，同时右端点在右侧数组的下标对数量，而这正是我们此前讨论的问题。

- 下面是最原始的归并排序的解法与写法

```java
// 【最基本的数据结构的解法】: 归并排序。整个过程是一个自底向上，不断求值与归并的过程
public int countRangeSum(int[] a, int lo, int hi) {
    int n = a.length;
    long [] s = new long [n+1]; // 用来求和 prefixSum
    for (int i = 0; i < n; i++) s[i+1] = s[i] + a[i]; // 不一定是: 升序排列
    return countRangeSumRecursive(s, lo, hi, 0, n);
}
int countRangeSumRecursive(long [] sum, int lo, int hi, int l, int r) { // l: 左下标, r: 右下标
    if (l == r) return 0;
    int m = (l + r) / 2;
    // 【首先，递归，分别解决左右半部分的问题】: 分别解决了左右部分之后，左右部分分别是有序排列的片段
    int n1 = countRangeSumRecursive(sum, lo, hi, l, m);
    int n2 = countRangeSumRecursive(sum, lo, hi, m+1, r);
    int ans = n1 + n2;
    // 【再来解决归并相关】
    // 首先统计下标对的数量
    int i = l, left = m+1, right = m+1;
    while (i <= m) {
        while (left <= r && sum[left] - sum[i] < lo) left++; // 左边界右移，直到达标【 lo, 。。。
        right = left; // 可要可不要，要了可以少遍历上面的过程。。。
        while (right <= r && sum[right] - sum[i] <= hi) right++; // 右边界右移，直到不达标越界。。。 hi-1 】 hi...
        ans += right - left;
        i++;
    }
    // 随后合并两个排序数组
    long [] sorted = new long [r - l + 1];
    int x = l, y = m+1, z = 0; //x,y,z: 分别为左右两个片段的遍历下标，以及合并数组的遍历下标
    while (x <= m || y <= r)
        if (x > m) sorted[z++] = sum[y++];
        else if (y > r) sorted[z++] = sum[x++];
        else if (sum[x] < sum[y]) sorted[z++] = sum[x++];
        else sorted[z++] = sum[y++];
    // 再把这个排序好的数组，更新同步到累积和数组里去
    for (int j = 0; j < sorted.length; j++)
        sum[l+j] = sorted[j];
    return ans;
}
```

- 复杂度分析为：

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N\log N)$，其中 N 为数组的长度。设执行时间为 $T(N)$，则两次递归调用的时间均为 $T(N/2)$，最后需要 $O(N)$ 的时间求出下标对数量以及合并数组，故有

$$T(N) = 2 \cdot T(N/2) + O(N)$$

  根据主定理，有 $T(N) = O(N\log N)$。

- 空间复杂度：$O(N)$。设空间占用为 $M(N)$，递归调用所需空间为 $M(N/2)$，而合并数组所需空间为 $O(N)$，故

$$M(N) = \max\{M(N/2), O(N)\} = M(N/2) + O(N)$$

  根据主定理，有 $M(N) = O(N)$。

- 下面是一个代码更为简洁的写法，排序的步骤本地用语言自带的排序法

```java
public int countRangeSum(int[] a, int lower, int upper) { // 这个 merge sort 的思维很奇特: 二分, O(NlogN)
    long [] sum = new long[a.length+1];
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
        sum[i+1] = sum[i] + a[i];
    return mergeAnalyse(sum, 0, a.length+1, lower, upper);
}
int mergeAnalyse(long [] a, int l, int r, int lo, int hi) { // l, r: 寻找【l, r) 范围内和为【lower, upper】的片段的个数
    if (r - l <= 1) return 0;
    int m = l + (r - l) / 2;
    // int mid = l + (r - l) / 2;
    // int m = mid, n = mid, ans = 0;
    int ans = mergeAnalyse(a, l, m, lo, hi) + mergeAnalyse(a, m, r, lo, hi);
    int x = m, y = m;
    for (int i = l; i < m; i++) { // 遍历 [l, r) 的半段长度:  pivot 右移, 滑动窗口, 寻找合法窗口 // 通过遍历寻找当前范围中符合要求的个数,
        while (x < r && a[x] - a[i] < lo) x++; // 左端点右移, 直到找到合法 (sum >= lo) 的解: m 合法
        y = x; // 可要可不要。。。
        while (y < r && a[y] - a[i] <= hi) y++; // 右端点右移, 直到右端点右移至不再合法 (sum > hi) , n 不合法
        ans += y - x; // 对于 [l, r) 范围内的当前 i 来说, 满足要求的总个数为 n - m
    }
    Arrays.sort(a, l, r); // 将 【l, r) 片段排序, 本地排序
    return ans;
}
```

2. 解题思路与分析: 求和 sum 线段树 + 离散化数据的连续化处理

方法二：线段树

思路与算法

依然考虑前缀和数组 $preSum$。

对于每个下标 j，以 j 为右端点的下标对的数量，就等于数组 $preSum[0..j-1]$ 中的所有整数，出现在区间 $[preSum[j]-upper, preSum[j]-lower]$ 的次数。故很容易想到基于线段树的解法。

我们从左到右扫描前缀和数组。每遇到一个数 $preSum[j]$，我们就在线段树中查询区间 $[preSum[j]-upper, preSum[j]-lower]$ 内的整数数量，随后，将 $preSum[j]$ 插入到线段树当中。

注意到整数的范围可能很大，故需要利用哈希表将所有可能出现的整数，映射到连续的整数区间内。

```java
// 最基本的【求和 sum 线段树】: 将前缀和数值中的取值范围, 分布到 Bit 的数组上来, 可能需要必要的取值偏移【不是偏移, 用个策略!!!】, 以保证 bit 每个元素取值 >= 1
// 这里还是来参考别人更为精典的解决办法
public int countRangeSum(int[] a, int lo, int hi) {
    int n = a.length;
    long [] s = new long [n+1];
    for (int i = 0; i < n; i++) s[i+1] = s[i] + a[i];
    // Set<Long> allNumbers = new HashSet<>(); // 考量: 去重作用【BUGGLY CODING:】没有考虑到这里的排序作用。。。
    Set<Long> allNumbers = new TreeSet<>();    // 考量: 去重作用【BUGGLY CODING:】没有考虑到这里的排序作用。。。【狠狠狠重要! 否则不成解!!!】
    for (long v : s) {
        allNumbers.add(v);
        allNumbers.add(v - lo);
        allNumbers.add(v - hi);
    }
    // 利用哈希表进行离散化: 这里离散化的本质是: 将离散的取值, 重新序列化为【0,n-1】下标的值序列片段!!!
    // 注意到整数的范围可能很大, 故需要利用哈希表将所有可能出现的整数, 映射到连续的整数区间内。
```

```
    // 【前面的离散长整形数据，如果不排列，映射到连续片段的下标计数，没有意义。。。】
    Map<Long, Integer> values = new HashMap<>();
    int idx = 0;
    for (long v : allNumbers)
        values.put(v, idx++); // 【只有 allNumbers 排序过】: 映射过来的 idx 的取值才能正确反映离散值在线段树中所处的正确位置。。。
    Node root = build(0, values.size()-1);
    int ans = 0;
    for (long v : s) {
        int l = values.get(v - hi), r = values.get(v - lo);
        ans += count(root, l, r); // 【理解困难的地方:】第一次的数个数，是什么时候，这个时候调用，会更新哪些？
        insert(root, values.get(v)); // 这里就添加了【0,n-1】下标范围内的某个下标，把离散的值连续化到一个有效片段，最小区间求和 sum 线段树
    }
    return ans;
}
// 求和 sum 线段树: 三个最基本的方法: 构建线段树，更新 (插入一个值) 线段树，查询区间内的个数
public Node build(int lo, int hi) { // 【lo,hi】: 问题是，创建树的时候，没有，不曾数过、更新过每个区间的元素个数和 ???
    Node r = new Node(lo, hi);
    if (lo == hi) return r;
    int m = (hi + lo) / 2;
    r.left = build(lo, m);
    r.right = build(m+1, hi);
    // r.s = r.left.s + r.right.s; // 父节点的个数 = 左右子树节点个数的和【为什么它这里没有更新 ?】
    return r;
}
public int count(Node r, int left, int right) { // 求和线段树: 是否与 BST 一样，右边节点计数大于左边与根节点呢？
    // 因为下面这一行的处理: 区间外完全不用考虑，返回 0
    if (left > r.r || right < r.l) return 0; // 查询区间，当前区间节点，完全不用考虑
    if (left <= r.l && r.r <= right) return r.s; // 【我是什么时候，才来更新这个计数 s 的 ?】
    // 所以，这里就可以直接调用，递归左右子数，求计数和
    return count(r.left, left, right) + count(r.right, left, right);
}
public void insert(Node r, int v) { // 这里可以理解为: 动态更新，过程中随机增加一个元素
    r.s++; // 这个时候，才知道，计数，计算区间内元素个数，原来是如此精妙地完成的。。。
    if (r.l == r.r) return ; // 叶子节点
    int m = (r.l + r.r) / 2;
    if (v <= m) insert(r.left, v);
    else insert(r.right, v);
}
class Node {
    int l, r, s; // 区间值的范围【l, r】
    Node left, right;
    public Node(int left, int right) {
        l = left;
        r = right;
        s = 0;
        this.left = null;
        this.right = null;
    }
}
```

- 线段树：方法的复杂度分析

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N\log N)$。使用哈希离散化之后，线段树维护的区间大小为 $O(N)$，故其深度、单次查询或插入的时间复杂度均为 $O(\log N)$。而离散化本身的复杂度也为 $O(N\log N)$。
- 空间复杂度：$O(N)$。线段树的深度为 $O(N)$，而第 i 层拥有的节点数量为 2^{i-1}，故线段树总的节点数量为 $2^{O(\log N)} = O(N)$。

3. 解题思路与分析: 动态增加节点的线段树

方法三：动态增加节点的线段树

思路与算法

与方法二类似，但我们可以不实用哈希表进行映射，而是只在线段树的插入操作过程中**动态地**增加树中的节点。而当我们进行查询操作时，如果到达一个空节点，那么说明对应的区间中暂时还没有值，就可以直接返回 0。

```
class Node {
    long l, r; // 区间值的范围【l, r】
    int s;
    Node left, right;
    public Node(long left, long right) {
        l = left;
        r = right;
        s = 0;
        this.left = null;
        this.right = null;
```

```java
        }
    }
    public int countRangeSum(int[] a, int lo, int hi) {
        int n = a.length;
        long [] s = new long [n+1];
        for (int i = 0; i < n; i++) s[i+1] = s[i] + a[i];
        // 可以不实用哈希表进行映射，而是只在线段树的插入操作过程中动态地增加树中的节点。
        // 而当我们进行查询操作时，如果到达一个空节点，那么说明对应的区间中暂时还没有值，就可以直接返回 0
        long lowrBound = Long.MAX_VALUE, highBound = Long.MIN_VALUE;
        for (long v : s) {
            lowrBound = Math.min(Math.min(lowrBound, v), Math.min(v - lo, v - hi));
            highBound = Math.max(Math.max(highBound, v), Math.max(v - lo, v - hi));
        }
        Node root = new Node(lowrBound, highBound);
        int ans = 0;
        for (long v : s) {
            ans += count(root, v - hi, v - lo); // 【理解困难的地方:】第一次的数个数，是什么时候，这个时候调用，会更新哪些？
            insert(root, v); // 这里就添加了【0,n-1】下标范围内的某个下标，把离散的值连续化到一个有效片段，最小区间求和 sum 线段树
        }
        return ans;
    }
    // 求和 sum 线段树：这里精简成了，两个方法。。。因为不曾分步构建过树，所以必要的时候，必须先判断是否为空，添加节点
    public long count(Node r, long left, long right) { // 求和线段树：是否与 BST 一样，右边节点计数大于左边与根节点呢？
        if (r == null) return 0;
        // 因为下面这一行的处理：区间外完全不用考虑，返回 0
        if (left > r.r || right < r.l) return 0; // 查询区间，当前区间节点，完全不用考虑
        if (left <= r.l && r.r <= right) return r.s; // 【我是什么时候，才来更新这个计数 s 的?】
        // 所以，这里就可以直接调用，递归左右子数，求计数和
        return count(r.left, left, right) + count(r.right, left, right);
    }
    public void insert(Node r, long v) { // 这里可以理解为：动态更新，过程中随机增加一个元素
        r.s++; // 这个时候，才知道，计数，计算区间内元素个数，原来是如此精妙地完成的。。。
        if (r.l == r.r) return ; // 叶子节点
        // int m = (r.l + r.r) / 2;
        long m = (r.l + r.r) >> 1;
        if (v <= m) {
            if (r.left == null)
                r.left = new Node(r.l, m);
            insert(r.left, v);
        } else {
            if (r.right == null)
                r.right = new Node(m+1, r.r);
            insert(r.right, v);
        }
    }
```

- 复杂度分析：

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N \log C)$，其中 C 是线段树根节点对应的区间长度。由于我们使用 64 位整数类型进行存储，因此 $\log C$ 不会超过 64。使用动态增加节点的线段树，单次查询或插入的时间复杂度均为 $O(\log C)$。
- 空间复杂度：$O(N \log C)$。需要进行 N 次线段树的插入操作，每次会添加不超过 $\log C$ 个新节点。

4. 解题思路与分析: 树状数组

方法四：树状数组

思路与算法

树状数组与线段树基于类似的思想，不过树状数组支持的基本查询为求出 $[0, val]$ 之间的整数数量。为了查询区间 $[preSum[j] - upper, preSum[j] - lower]$ 内的整数数量，需要执行两次查询，即分别查询 $[0, preSum[j] - upper - 1]$ 区间的整数数量 L 和$[0, preSum[j] - lower]$ 区间的整数数量 R，答案即为两者作差 $R - L$。

```java
// 【方法四:】树状数组。好像我前面没能区分，线段树，与树状数组的区别？
public int countRangeSum(int[] a, int lo, int hi) {
    int n = a.length;
    long [] s = new long [n+1];
    for (int i = 0; i < n; i++) s[i+1] = s[i] + a[i];
    Set<Long> allNumbers = new TreeSet<>();
    for (long v : s) {
        allNumbers.add(v);
        allNumbers.add(v - lo);
        allNumbers.add(v - hi);
    }
    // 利用哈希表进行离散化
    Map<Long, Integer> values = new HashMap<Long, Integer>();
```

```
    int idx = 0;
    for (long v : allNumbers)
        values.put(v, idx++);
    int ans = 0;
    BIT bit = new BIT(values.size());
    for (int i = 0; i < s.length; i++) {
        int left = values.get(s[i] - hi), right = values.get(s[i] - lo);
        ans += bit.query(right + 1) - bit.query(left);
        bit.update(values.get(s[i]) + 1, 1);
    }
    return ans;
}
class BIT {
    int [] tree;
    int n;
    public BIT(int n) {
         this.n = n;
         this.tree = new int[n+1];
     }
    public static int lowbit(int x) {
        return x & (-x);
    }
    public void update(int idx, int d) {
        while (idx <= n) {
            tree[idx] += d;
            idx += lowbit(idx);
        }
    }
    public int query(int x) {
        int ans = 0;
        while (x != 0) {
            ans += tree[x];
            x -= lowbit(x);
        }
        return ans;
    }
}
```

复杂度分析

- 时间复杂度：$O(N \log N)$。离散化本身的复杂度为 $O(N \log N)$，而树状数组单次更新或查询的复杂度为 $O(\log N)$。
- 空间复杂度：$O(N)$。

5. 解题思路与分析: 平衡二叉搜索树

方法五：平衡二叉搜索树

思路与算法

考虑一棵平衡二叉搜索树。若其节点数量为 N，则深度为 $O(\log N)$。二叉搜索树能够在 $O(\log N)$ 的时间内，对任意给定的值 val，查询树中所有小于或等于该值的数量。

因此，我们可以从左到右扫描前缀和数组。对于 $preSum[j]$ 而言，首先进行两次查询，得到区间 $[preSum[j] - upper, preSum[j] - lower]$ 内的整数数量；随后再将 $preSum[j]$ 插入到平衡树中。

平衡二叉搜索树有多种不同的实现，最经典的为 AVL 树与红黑树。此外，在算法竞赛中，还包括 Treap、SBT 等数据结构。

下面给出基于 Treap 的实现。

```
// 【方法五：平衡二叉搜索树】
public int countRangeSum(int[] a, int lo, int hi) {
    long [] s = new long [a.length+1];
    for (int i = 0; i < a.length; i++) s[i+1] = s[i] + a[i];
    BT tr = new BT();
    int ans = 0;
    for (long v : s) {
        long numLeft = tr.lowerBound(v - hi);
        int rankLeft = (numLeft == Long.MAX_VALUE ? (int)(tr.getSize()+1) : tr.rank(numLeft)[0]);
        long numRight = tr.upperBound(v - lo);
        int rankRight = (numRight == Long.MAX_VALUE ? (int)tr.getSize() : tr.rank(numRight)[0]-1);
        ans += rankRight - rankLeft + 1;
        tr.insert(v);
    }
    return ans;
}
```

```java
class BT {// Treap = Tree+Heap:
  private class Node {
        long v, s;
        int cnt, size;
        Node l, r;
        Node(long val, long seed) {
            v = val;
            s = seed; // 为什么要这个种子？伪随机数吗？【Treap 的修正值】: 修正值满足最小堆性质
            cnt = 1;
            size = 1;
            l = null; r = null;
        }
        //   this         r <== root
        //  /    \      /    \
        // l      r   this   r.r(root.r)
        //           /    \
        //          l     r.l(root.l)
        Node leftRotate() { // 左旋: 当前根 this 变成左子节点; 先前右变成根
            int prevSize = size;
            int currSize = (l != null ? l.size : 0) + (r.l != null ? r.l.size : 0) + cnt; // 左右子树的 size +当前根节点的 cnt
            Node root = r; // 这里先把 root 当作 r 的另一个索引指针
            r = root.l;
            root.l = this;
            root.size = prevSize; // 【没看明白:】是怎么变过来的？
            size = currSize;
            return root;
        }
        //       this         l <== root
        //      /    \      /    \
        //     l      r   l.l    this
        //   /    \             /    \
        // l.l    l.r         l.r     r
        Node rightRotate() {
            int prevSize = size;
            int currSize = (r != null ? r.size : 0) + (l.r != null ? l.r.size : 0) + cnt;
            Node root = l;
            l = root.r;
            root.r = this;
            root.size = prevSize; // 【没看明白:】是怎么变过来的？
            size = currSize;
            return root;
        }
    }
    private Node root;
    private int size;
    private Random rand;
    public BT() {
        this.root = null;
        this.size = 0;
        this.rand = new Random();
    }
    public long getSize() {
        return size;
    }
    public void insert(long v) {
        ++size;
        root = insert(root, v);
    }
    public long lowerBound(long v) { // 这是找，最小的一个不小于 v 【 > = v】的值吗？
        Node r = root;
        long ans = Long.MAX_VALUE;
        while (r != null) {
            if (v == r.v) return v;
            if (v < r.v) {
                ans = r.v;
                r = r.l;
            } else r = r.r;
        }
        return ans;
    }
    public long upperBound(long v) { // 找一个最大的【 <= v】的值
        Node r = root;
        long ans = Long.MAX_VALUE;
        while (r != null) {
            if (v < r.v) {
                ans = r.v;
                r = r.l;
            } else r = r.r;
        }
        return ans;
    }
    public int [] rank(long v) {
        Node r = root;
        int ans = 0;
        while (r != null) {
            if (v < r.v) r = r.l;
            else { // v >= r.v
                ans += (r.l != null ? r.l.size : 0) + r.cnt;
                if (v == r.v)
```

```
                return new int [] {ans - r.cnt + 1, ans};
            r = r.r;
        }
    }
    return new int [] {Integer.MIN_VALUE, Integer.MAX_VALUE};
}
private Node insert(Node r, long v) {
    if (r == null) return new Node(v, rand.nextInt());
    ++r.size;
    if (v < r.v) { // 左子树
        r.l = insert(r.l, v);
        if (r.l.s > r.s) // 这里有步检查是否平衡的步骤？
            r = r.rightRotate();
    } else if (v > r.v) { // 右子树
        r.r = insert(r.r, v);
        if (r.r.s > r.s)
            r = r.leftRotate();
    } else ++r.cnt; // 当前根节点
    return r;
}
}
```

- 复杂度分析
  - 时间复杂度：O(NlogN)。
  - 空间复杂度：O(N)。
- 这里简单介绍一下 Treap 这个数据结构，因为最易编程，被广泛使用，应该掌握。

(1) Treap = Tree + Heap

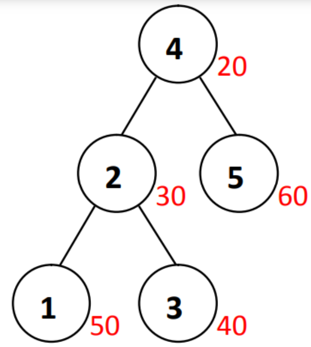


图 5

Treap 是一种平衡树。Treap 发音为[tri:p]。这个单词的构造选取了 Tree(树)的前两个字符和 Heap(堆)的后三个字符，Treap = Tree + Heap。顾名思义，Treap 把 BST 和 Heap 结合了起来。它和 BST 一样满足许多优美的性质，而引入堆目的就是为了维护平衡。

Treap 在 BST 的基础上，添加了一个**修正值**。在满足 BST 性质的基础上，Treap 节点的修正值还满足**最小堆性质**[2]。最小堆性质可以被描述为每个子树根节点都小于等于其子节点。于是，Treap 可以定义为有以下性质的二叉树：

1. 若它的左子树不空，则左子树上所有结点的值均小于它的根结点的值，而且它的根节点的修正值小于等于左子树根节点的修正值；
2. 若它的右子树不空，则右子树上所有结点的值均大于它的根结点的值，而且它的根节点的修正值小于等于右子树根节点的修正值；
3. 它的左、右子树也分别为 Treap。

图 5 为一个 Treap。

修正值是节点在插入到 Treap 中时**随机**生成的一个值，它与节点的值无关。代码 6 给出了 Treap 的一般定义。

```
struct Treap_Node
{
    Treap_Node *left,*right; //节点的左右子树的指针
    int value,fix; //节点的值和修正值
};
```

代码 6

- 维护平衡的原因：修正值
  - 为什么平衡: 我们发现，BST 会遇到不平衡的原因是因为有序的数据会使查找的路径退化成链，而随机的数据使 BST 退化的概率是非常小的。在 Treap 中，修正值的引入恰恰是使树的结构不仅仅取决于节点的值，还取决于修正值的值。然而修正值的值是随机生成的，出现有序的随机序列是小概率事件，所以 Treap 的结构是趋向于随机平衡的。

1.1.2 2407. Longest Increasing Subsequence II: 【线段树】:【贴出来方便自己查询，解题印象深刻】活宝妹就是一定要嫁给亲爱的表哥!!!

You are given an integer array nums and an integer k.

Find the longest subsequence of nums that meets the following requirements:

The subsequence is strictly increasing and The difference between adjacent elements in the subsequence is at most k. Return the length of the longest subsequence that meets the requirements.

A subsequence is an array that can be derived from another array by deleting some or no elements without changing the order of the remaining elements.

- 添加这个题目，主要是昨天晚上写的时候，感觉对于开闭区间，下标等，似乎还没有理解透彻。这个题算是比较简单，自己基本上会写的题，再总结一下。

在求解「上升子序列（IS）」问题时，一般有两种优化方法：

1. 维护固定长度的 IS 的末尾元素的最小值 + 二分优化；
2. 基于**值域**的线段树、平衡树等数据结构优化。

这两种做法都可以用 $O(n \log n)$ 的时间解决 300. 最长递增子序列。

对于本题，由于有一个差值不超过 k 的约束，用线段树更好处理。

具体来说，定义 $f[i][j]$ 表示 $nums$ 的前 i 个元素中，以元素 j（注意不是 $nums[j]$）结尾的满足题目两个条件的子序列的最长长度。

当 $j \neq nums[i]$ 时，$f[i][j] = f[i-1][j]$。

当 $j = nums[i]$ 时，我们可以从 $f[i-1][j']$ 转移过来，这里 $j-k \leq j' < j$，取最大值，得

$$f[i][j] = 1 + \max_{j'=j-k}^{j-1} f[i-1][j']$$

上式有一个「区间求最大值」的过程，这非常适合用**线段树**计算，且由于 $f[i]$ 只会从 $f[i-1]$ 转移过来，我们可以把 f 的第一个维度优化掉。这样我们可以**用线段树表示整个 f 数组**，在上面查询和更新。

最后答案为 $\max(f[n-1])$，对应到线段树上就是根节点的值。

1. 线段树的标准简洁写法：

```java
public int lengthOfLIS(int[] a, int k) {  // 动规：+线段树来找前 f【i】【v-k】范围内的最大值
    int n = a.length, m = Arrays.stream(a).max().getAsInt();
    t = new int [4 * m]; // 线段树？下标是从 1 开始的吗？这里感觉取不到最大值【m】
    for (int v : a)
        if (v == 1) update(1, 1, m, 1, 1); // 更新单点：【v, res】成 t[1] = 1
        else {
            int res = 1 + query(1, 1, m, Math.max(1, v-k), v-1); // 查询区间：【v-k, v-1】
            update(1, 1, m, v, res); // 更新单点：【v, res】成 t[v] = res
        }
    return t[1];
}
int [] t; // 线段树：最大值线段树，下标从 1 开始的标准写法
void update(int u, int l, int r, int i, int v) { // 更新下标为 i 元素的值为 v，从 u 节点开始遍历
    if (l == r) {
        t[u] = v;
        return ;
    }
    int m = l + (r - l) / 2;
    if (i <= m) update(u << 1, l, m, i, v);
    else update(u << 1 | 1, m+1, r, i, v); // 【左右节点的下标:】 U 《 1 | 1
    t[u] = Math.max(t[u << 1], t[u << 1 | 1]); // 根节点最大值：取左右节点的最大值
}
// 查询【L,R】范围内的最大值，线段树的跨越区间为【l,r】. L 和 R 在整个递归过程中均不变，将其大写，视作常量
int query(int u, int l, int r, int L, int R) { // 返回区间 [L,R] 内的最大值
    if (L <= l && r <= R) return t[u]; // 整个线段树，处于查询区间内，返回根节点最大值
    int m = l + (r - l) / 2, leftMax = 0, rightMax = 0;
    if (L <= m)   leftMax = query(u << 1, l, m, L, R);
    if (m+1 <= R) rightMax = query(u << 1 | 1, m+1, r, L, R);
    return Math.max(leftMax, rightMax);
}
```

2. 线段树的【奇葩版本的】写法：

```java
public int lengthOfLIS(int[] a, int k) {  // 动规：+线段树来找前 f【i】【v-k】范围内的最大值【这个题仍然成了学习题】
    int n = a.length, m = Arrays.stream(a).max().getAsInt()+1, ans = 1;
    t = new int [4 * m]; // 不是说，线段树？下标是从 1 开始的吗？最大值 m 元素在哪里
    int [][] f = new int [n][m]; // 第二维表达的是以当前数 a[i] 为结尾的最长合法子序列长度，所以取最值
    for (int i = 0; i < n; i++) { // 注意【0】下标更新线段树。。。
        int v = a[i];
        f[i][v] = 1;
        // 这里要找：前所有 i 个数【0,i-1】中，以【v-k,v-1】结尾的最大值，最大长度，
// 这里我是在想要遍历，总复杂度为【O(N^2)】，线段树可以做到【O(NlogN)】线段树中的第一维就给消除掉，只累加更新【0,maxVal+1】范围内的最大值
        // for (int j = Math.max(0, v - k); j < v; j++) // 因为线段树区间求最大值：这里就不用遍历，一次【 O(logN)】查询就可以了
            // f[i][v] = Math.max(f[i][v], f[i-1][j] + 1); // 【分不清：哪个 i?】
        f[i][v] = Math.max(f[i][v], getMax(0, 0, m-1, v-k, v-1, t) + 1); // 查询线段树【v-k,v-1】区间最大值：下标 1 开始，左闭右闭区间
        // f[i][v] = Math.max(f[i][v], getMax(0, 0, n-1, v-k, v-1, t) + 1); // 查询线段树【v-k,v-1】区间最大值：下标 1 开始，左闭右闭区间
        update(0, 0, m-1, v, f[i][v], t); // 更新线段树单点元素： v 下标值为 f[i][v]
```

```
            // update(0, 0, n-1, i, f[i][v], t); // 更新线段树单点元素： v 下标值为 f[i][v]
            // ans = Math.max(ans, f[i][v]);
        }
        return t[0];
    }
    int [] t; // 【奇葩线段树】: 下标从 0 开始的
    void update(int u, int l, int r, int idx, int v, int [] t) { // 我这里参考别人的奇葩写法, 写得自己稀里糊涂的。。。重写一遍
        if (l == r) {
            t[u] = v;
            return ;
        }
        int m = l + (r - l) / 2;
        if (idx <= m) update(u << 1 | 1, l, m, idx, v, t);
        else update((u << 1) + 2, m+1, r, idx, v, t);
        t[u] = Math.max(t[u << 1 | 1], t[(u << 1) + 2]); // 最大值线段树: 根节点最大值, 取左右子节点最大值
    }
    int getMax(int u, int l, int r, int L, int R, int [] t) { // 【 l,r】: 现存线段树的有效区间跨度;【L,R】: 查询区间跨度
        if (R < l || r < L) return 0;
        if (L <= l && r <= R) return t[u];
        int m = l + (r - l) / 2;
        int ll = getMax(u << 1 | 1, l, m, L, R, t);
        int rr = getMax((u << 1) + 2, m+1, r, L, R, t);
        return Math.max(ll, rr);
    }
```

1.1.3 1157. Online Majority Element In Subarray - Hard

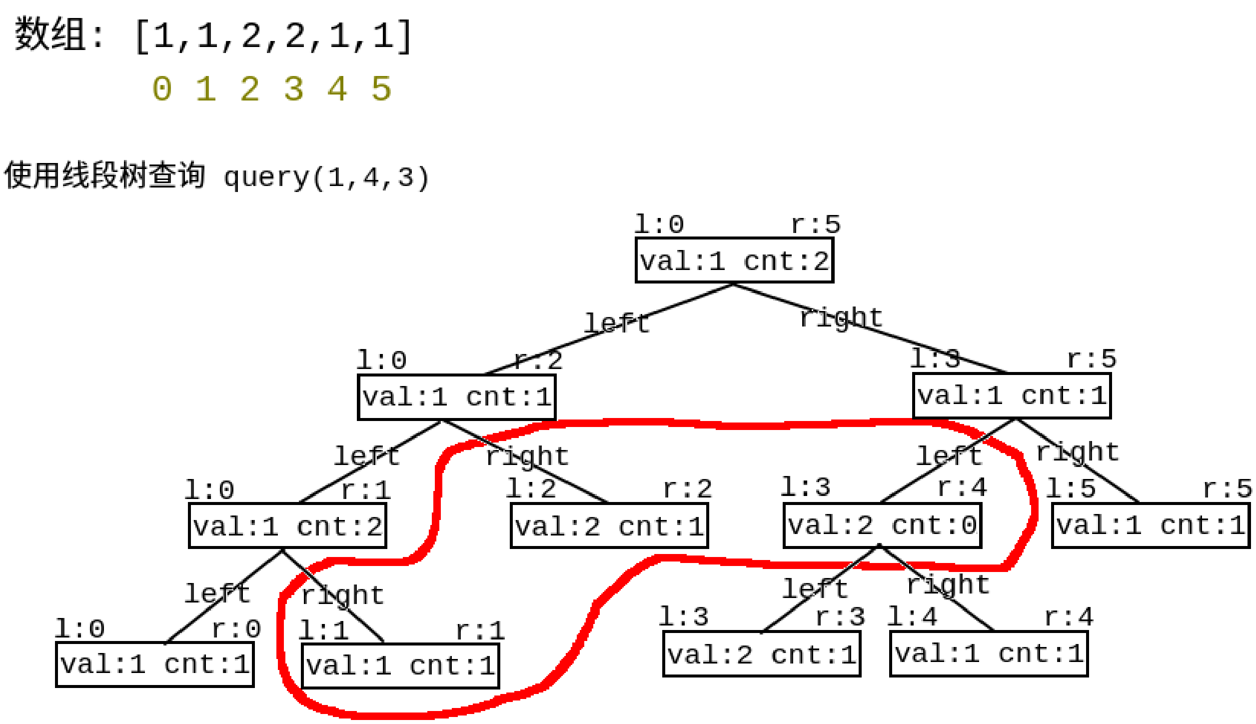
Design a data structure that efficiently finds the majority element of a given subarray.

The majority element of a subarray is an element that occurs threshold times or more in the subarray.

Implementing the MajorityChecker class:

MajorityChecker(int[] arr) Initializes the instance of the class with the given array arr. int query(int left, int right, int threshold) returns the element in the subarray arr[left. . . right] that occurs at least threshold times, or -1 if no such element exists.

- https://www.cnblogs.com/slowbirdoflsh/p/11381565.html 思路比较清晰




```
Map<Integer, List<Integer>> idx; // idx 存储数组出现元素种类 以及该元素下标索引
Node root; // 线段树的根节点
int key = 0, cnt = 0; // key 所查找的区域众数; count 所查找的区域众数出现次数,
public MajorityChecker(int[] a) {
    idx = new HashMap<>(); // idx 存储数组出现元素种类 以及该元素下标索引
    for (int i = 0; i < a.length; i++)
        idx.computeIfAbsent(a[i], z -> new ArrayList<>()).add(i);
    root = buildTree(a, 0, a.length-1);
}
public int query(int left, int right, int threshold) {
    key = 0; cnt = 0; // 初始化 所查询众数 key 及辅助判断的计数 cnt
```

```
    searchTree(root, left, right); // 查询线段树
    // 如果查询区域没有众数 即 key 没被更改; 或者,
    // 所查询出来的众数 在原数组中根本没有超出阈值的能力
    if (key == 0 || idx.get(key).size() < threshold) return -1;
    // 上确界 排序数组中 第一个大于 right 的下标
    int r = upper_bound(idx.get(key), right);
    // 下确界 排序数组中 第一个大于等于 left 的下标
    int l = lower_bound(idx.get(key), left);
    cnt = r - l;
    return cnt >= threshold ? key : -1;
}
int upper_bound(List<Integer> list, int v) { // 排序数组中 第一个大于 tar 的下标
    int l = 0, r = list.size();
    while (l < r) {
        int mid = l + (r - l) / 2;
        if (list.get(mid) <= v) l = mid + 1;
        else r = mid;
    }
    return l;
}
int lower_bound(List<Integer> list, int v) { // 排序数组中 第一个大于等于 tar 的下标
    int l = 0, r = list.size();
    while (l < r) {
        int mid = l + (r - l) / 2;
        if (list.get(mid) < v) l = mid+1;
        else r = mid;
    }
    return l;
}
void searchTree(Node root, int l, int r) {
    if (root == null || l > r) return ;
    if (root.l > r || root.r < l) return ;
    if (root.l >= l && root.r <= r) { // 当查询边界被节点边界覆盖, 该节点就是查询区域
        if (key == root.v) cnt += root.cnt;
        else if (cnt <= root.cnt) {
            key = root.v;
            cnt = root.cnt - cnt;
        } else cnt = cnt - root.cnt;
        return ;
    }
    int mid = (root.l + root.r) / 2; // 这两个查询条件再好好想想 !!!!!!!!!!!!!!
    if (l <= mid)   // root.l <= l <= mid 左节点也可以是查询区域
        searchTree(root.left, l, r);
    if (r >= mid+1) // mid+1 <= r <= root.r 右节点也可以是查询区域
        searchTree(root.right, l, r);
}
Node buildTree(int [] a, int l, int r) {
    if (l > r) return null;
    Node root = new Node(l, r); // 初始一个线段树的根节点
    if (l == r) { // 叶子节点
        root.v = a[l];
        root.cnt = 1;
        return root;
    }
    int mid = (l + r) / 2;
    root.left = buildTree(a, l, mid);
    root.right = buildTree(a, mid+1, r);
    makeRoot(root); // 整合父节点
    return root;
}
void makeRoot(Node r) { // 整合父节点
    if (r == null) return ;
    if (r.left != null) { // 如果该节点有左子节点 该节点的值" 先" 等于左子节点
        r.v = r.left.v;
        r.cnt = r.left.cnt;
    }
    if (r.right != null) { // 如果该节点还有右子节点 融合父节点和子节点
        if (r.v == r.right.v)
            r.cnt = r.cnt + r.right.cnt;
        else {
            if (r.cnt >= r.right.cnt)
                r.cnt = r.cnt - r.right.cnt;
            else {
                r.v = r.right.v;
                r.cnt = r.right.cnt - r.cnt;
            }
        }
    }
}
class Node {
    int l, r, v, cnt;
    Node left, right;
    public Node(int l, int r) {
        this.l = l; this.r = r;
        v = 0; cnt = 0;
        left = null; right = null;
    }
}
```

1.1.4 1825. Finding MK Average - Hard

You are given two integers, m and k, and a stream of integers. You are tasked to implement a data structure that calculates the MKAverage for the stream.

The MKAverage can be calculated using these steps:

If the number of the elements in the stream is less than m you should consider the MKAverage to be -1. Otherwise, copy the last m elements of the stream to a separate container. Remove the smallest k elements and the largest k elements from the container. Calculate the average value for the rest of the elements rounded down to the nearest integer. Implement the MKAverage class:

MKAverage(int m, int k) Initializes the MKAverage object with an empty stream and the two integers m and k. void addElement(int num) Inserts a new element num into the stream. int calculateMKAverage() Calculates and returns the MKAverage for the current stream rounded down to the nearest integer.

```
// 根据题意需要找到前 k 大的数，又需要求区间和，就自然想到线段树. 写起来较不容易出错。
// 维护 2 个线段树数组，一个记录数的个数，一个记录区间值，
// 注意一般线段树中 [s, e] 指固定的区间，这里类似线段数求第 k 小的数，所以 [s,e] 指第 s 小的值到第 e 小的值的区间。
    Deque<Integer> q = new ArrayDeque<>(); // 始终维护 m 个数
    int [] cnt;  // 每个元素出现的次数
    long [] sum; // 累积和
    int m, k, n = 100000, N = n * 4 + 1; // 线段树所占用的空间为数组的四倍大小
    public MKAverage(int m, int k) {
        cnt = new int [N];
        sum = new long [N];
        this.m = m;
        this.k = k;
    }
    public void addElement(int num) {
        if (q.size() == m) {
            int v = q.pollFirst();
            insert(1, 0, n, v, -1); // 当删除掉一个元素的时候，需要更新线段树中的和
        }
        insert(1, 0, n, num, 1);
        q.offerLast(num);
    }
    public int calculateMKAverage() {
        if (q.size() < m) return -1;
        int bgn = k + 1, end = m - k; // idx: 1 - based
        return (int)(query(1, 0, n, bgn, end) / (m - 2 * k));
    }
    void insert(int idx, int l, int r, int v, long d) { // d:
        cnt[idx] += d;
        sum[idx] += d * v;
        if (l == r) return ;
        int m = l + (r - l) / 2;
        if (v <= m)
            insert(idx << 1, l, m, v, d);       // 向左子树查询
        else insert(idx << 1 | 1, m+1, r, v, d);// 向右子树查询
    }
    long query(int idx, int l, int r, int bgn, int end) { // 线段中第 bgn 个到第 end 个
        if (l == r) { // 起始和结束最多出现 2 次此情况 ?
            int c = end - bgn + 1;
            return (long)c * l; //
        } else if (cnt[idx] == end - bgn + 1)
            return sum[idx];
        else {
            int m = l + (r - l) / 2;
            int cl = cnt[idx << 1];     // left child cnt
            // int cr = cnt[idx << 1 | 1];     // left child cnt
            if (cl >= end) // 搜索 左 子树
                return query(idx << 1, l, m, bgn, end);
            else if (cl >= bgn) // 搜索 左 右 子树
                return query(idx << 1, l, m, bgn, cl) + query(idx << 1 | 1, m+1, r, 1, end - cl);
            else // cl < bgn, 搜索 右 子树
                return query(idx << 1 | 1, m+1, r, bgn - cl, end - cl);
        }
    }
```

1. 解题思路与分析: 三个 TreeMap, 自定义 TreeMap

```
CusTreeMap [] ms;
Deque<Integer> q;
int m, k, n;
public MKAverage(int m, int k) {
    this.m = m;
    this.k = k;
    q = new ArrayDeque<>();
    if (m - 2 * k > 0) {
        n = 3;
        ms = new CusTreeMap[n];
        ms[1] = new CusTreeMap(m - 2 * k);
    } else {
        n = 2;
        ms = new CusTreeMap[n];
    }
```

```java
        ms[0] = new CusTreeMap(k);
        ms[n-1] = new CusTreeMap(k);
    }
    // 删除 num, 结果总是使 mapList 的小、中、大三个 treemap 依次填充。(先保证最小的 treeMap 填充、再保证中间的 treeMap 填充、最后是最大的填充)
    private void removeElement(int num) {
        boolean removed = false;
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (!removed)
                removed = ms[i].remove(num);
            else { // 将后现一两个图中的最小元素向前一个图中挪动一个数值
                Integer minK = ms[i].pollFirst();
                if (minK == null) break;
                ms[i-1].add(minK);
            }
        }
    }
    public void addElement(int num) {
        if (q.size() == m) {
            int v = q.pollFirst();
            removeElement(v);
        }
        q.offerLast(num);
        Integer vtoAdd = num;
        for (int i = 0; i < n && vtoAdd != null; i++)
            vtoAdd = ms[i].add(vtoAdd); // 记得这里返回的是: 如果图中已有 k 个元素, 扔出来的最大键
    }
    public int calculateMKAverage() {
        if (q.size() < m || n < 3) return -1;
        return ms[1].avg();
    }
    class CusTreeMap {
        TreeMap<Integer, Integer> m;
        final int capacity;
        int size, sum;
        public CusTreeMap(int capacity) {
            m = new TreeMap<>();
            this.capacity = capacity;
        }
        public boolean remove(int key) {
            if (m.containsKey(key)) {
                m.put(key, m.get(key)-1);
                if (m.get(key) == 0) m.remove(key);
                sum -= key;
                size--;
                return true;
            }
            return false;
        }
        public Integer pollFirst() { // return key
            if (m.size() > 0) {
                int k = m.firstKey();
                // m.remove(k); // BUG: 你也不能用原始的 TreeMap.remove(), 因为它会移走所有的重复 (如果这个元素存在重复的话)
                remove(k); // !!!
                return k;  // 这里没有自动更新 和
                // return m.firstKey(); // BUG: 这里并没有真正移走这个元素, 只是返回了第个元素的键
            }
            return null;
        }
        public Integer add(int key) { // 返回的是删除掉元素的键
            m.put(key, m.getOrDefault(key, 0) + 1); // 这里新填入的元素是否是最后一个元素, 关系不大
            size++;
            sum += key;
            if (size > capacity) {
                int last = m.lastKey();
                m.put(last, m.get(last)-1);
                if (m.get(last) == 0) m.remove(last);
                sum -= last;
                size--;
                return last;
            }
            return null;
        }
        public int avg() {
            return sum / size;
        }
    }
```

2. 解题思路与分析: 树状数组

- 数状数组的解法: 另外第一次看到别人二分 + 树状数组也能求前 k 大的值。

```java
// We can have a queue to maintain m elements
// Use two Fenwick tree, 1 for count and 1 for prefix sum
// Do 2 times binary search for the first k elements and the last k elements by using the count from our first fenwick tree
// We can get the sum by subtrating the sum of first k elements and sum of last k element by using our second fenwick tree
Queue<Integer> q = new LinkedList<>();
FenWick fone, ftwo;
int [] cnt = new int [100010];
```

```java
long sum = 0;
int m,k;
public MKAverage(int m, int k) {
    this.m = m;
    this.k = k;
    long A [] = new long [100010];
    long B [] = new long [100010];
    fone = new FenWick(A);
    ftwo = new FenWick(B);
}
public void addElement(int num) {
    q.add(num);
    sum += num;
    fone.update(num, 1);
    ftwo.update(num, num);
    cnt[num]++;
}
public int calculateMKAverage() {
    if (q.size() < m) return -1;
    while (q.size() > m) {
        int cur = q.poll();
        cnt[cur]--;
        sum -= cur;
        fone.update(cur, -1);
        ftwo.update(cur, -cur);
    }
    // binary search for the first k (there may be duplicated)
    int l = 0, r = cnt.length-1;
    int i = -1, j = -1; // pos1, pos2
    while (l <= r) { // 二分查找总计数
        int m = (r + l) / 2;
        long count = fone.sumRange(0, m);
        if (count >= k) {
            i = m;
            r = m -1;
        } else l = m+1;
    }
    // binary search for the last k (there may be duplicated)
    l = 0;
    r = cnt.length-1;
    while (l <= r) {
        int m = l + (r-l)/2;
        long count = fone.sumRange(m, cnt.length-1);
        if (count >= k) {
            j = m;
            l = m + 1;
        } else r = m-1;
    }
    long sum1 = ftwo.sumRange(0,  i);
    long sum2 = ftwo.sumRange(j, cnt.length-1);
    long cnt1 = fone.sumRange(0, i);
    long cnt2 = fone.sumRange(j, cnt.length-1);
    if (cnt1 > k)
        sum1 -= i*(cnt1-k);
    if (cnt2 > k)
        sum2 -= j*(cnt2-k);
    long remain = sum - sum1 - sum2; // 总和, 减去两边最小最大各 K 个数的和
    return (int)(remain / (m-2*k));
}
class FenWick {
    long tree []; //1-index based
    long A [];
    long arr[];
    public FenWick(long [] A) {
        this.A = A;
        arr = new long [A.length];
        tree = new long [A.length + 1];
    }
    public void update(int i, int v) {
        arr[i] += v;
        i++;
        while (i < tree.length) {
            tree[i] += v;
            i += (i & -i); // 这是的原理细节再回去复习一下
        }
    }
    public long sumRange(int i, int j) {
        return pre(j+1)-pre(i);
    }
    public long pre(int i) {
        long sum = 0;
        while (i > 0) {
            sum += tree[i];
            i -= (i & -i);
        }
        return sum;
    }
}
```

- 其它比较有兴趣以的 BST 二叉树的解法，改天补起来

1.1.5 315. Count of Smaller Numbers After Self - Hard

You are given an integer array nums and you have to return a new counts array. The counts array has the property where counts[i] is the number of smaller elements to the right of nums[i].

1. 解题思路与分析: 二分查找的插入排序

```
public List<Integer> countSmaller(int[] a) { // O(NlogN) 插入排序
    int n = a.length;
    List<Integer> ans = new ArrayList<>();
    List<Integer> list = new ArrayList<>(); // 新建一个 list, 用于排序
    int [] tmp = new int [n]; // 为了提高效率, 新建一个数组型的返回结果
    for (int i = n-1; i >= 0; i--) {
        int v = a[i];       // 将当前数字插入到新建 list 中, 使用二分查找找到插入位置
        int l = 0, r = list.size()-1; // l: left; r: right 从排好序的 list 中二分查找正确的插入位置
        while (l <= r) {
            int m = l + (r - l) / 2;
            if (v <= list.get(m)) r = m-1;
            else l = m + 1;
         }
        list.add(l, v); // 将当前数字插入到相应位置, 保证 list 升序排列
        tmp[i] = l; // 当前位置前所有数字均小于当前数字, 将个数加入返回结果
    }
    for (Integer v : tmp) ans.add(v);
    return ans;
}
```

2. 解题思路与分析: 数状数组

- 官方题解:https://leetcode-cn.com/problems/count-of-smaller-numbers-after-self/solution/ji-suan-you-

```
private int[] c;
private int[] a; // 离散化、去重复 后的数组
public List<Integer> countSmaller(int[] nums) {
    List<Integer> ans = new ArrayList<Integer>();
    discretization(nums);
    init(nums.length + 5);
    for (int i = nums.length - 1; i >= 0; --i) {
        int id = getId(nums[i]);
        ans.add(query(id - 1));
        update(id);
    }
    Collections.reverse(ans);
    return ans;
}
private void init(int length) {
    c = new int[length];
    Arrays.fill(c, 0);
}
private int lowBit(int x) {
    return x & (-x);
}
private void update(int pos) {
    while (pos < c.length) {
        c[pos] += 1;
        pos += lowBit(pos);
    }
}
private int query(int pos) {
    int ret = 0;
    while (pos > 0) {
        ret += c[pos];
        pos -= lowBit(pos);
    }
    return ret;
}
private void discretization(int[] nums) { // 离散化、去重复 ?
    Set<Integer> set = new HashSet<Integer>(Arrays.stream(nums).boxed().collect(Collectors.toList()));
    int size = set.size();
    a = new int[size];
    int index = 0;
    for (int num : set) a[index++] = num;
    Arrays.sort(a);
}
private int getId(int x) {
    return Arrays.binarySearch(a, x) + 1; //
}
```

3. 解题思路与分析: 归并排序 todo 补上

1.1.6 699. Falling Squares - Hard

There are several squares being dropped onto the X-axis of a 2D plane.

You are given a 2D integer array positions where positions[i] = [lefti, sideLengthi] represents the ith square with a side length of sideLengthi that is dropped with its left edge aligned with X-coordinate lefti.

Each square is dropped one at a time from a height above any landed squares. It then falls downward (negative Y direction) until it either lands on the top side of another square or on the X-axis. A square brushing the left/right side of another square does not count as landing on it. Once it lands, it freezes in place and cannot be moved.

After each square is dropped, you must record the height of the current tallest stack of squares.

Return an integer array ans where ans[i] represents the height described above after dropping the ith square.

1. 解题思路与分析: O(N^2) 本能土办法 方块的大小不是固定的，有可能很大，但是不管方块再大，只要有一点点部分搭在其他方块上面，整个方块都会在上面，并不会掉下来，让我们求每落下一个方块后的最大高度。我们知道返回的是每落下一个方块后当前场景中的最大高度，那么返回的数组的长度就应该和落下方块的个数相同。所以我们可以建立一个 heights 数组，其中 heights[i] 表示第 i 块方块落下后所在的高度，那么第 i 块方块落下后场景的最大高度就是 [0, i] 区间内的最大值。那么我们在求出 heights 数组后，只要不停返回 [0, i] 区间内的最大值即可。继续来看，这道题的难点就是方块重叠的情况，我们先来想，如果各个方块不重叠，那么 heights[i] 的高度就是每个方块自身的高度。一旦重叠了，就得在已有的基础上再加上自身的高度。那么我们可以采用 brute force 的思想，对于每个一个下落的方块，我们都去看和后面将要落下的方块有没有重叠，有的话，和后面将要落下的方块的位置相比较，取二者中较大值为后面要落下的方块位置高度 heights[j]。判读两个方块是否重叠的方法是如果方块 2 的左边界小于方块 1 的右边界，并且方块 2 点右边界大于方块 1 点左边界。就拿题目中的例子 1 来举例吧，第一个下落的方块的范围是 [1, 3]，长度为 2，则 heights[1]=2，然后我们看其和第二个方块 [2, 5] 是否重叠，发现是重叠的，则 heights[2]更新为 2，再看第三个方块 [6, 7]，不重叠，不更新。然后第二个方块落下，此时累加高度，则 heights[2]=5，再看第三个方块，不重叠，不更新。然后第三个方块落下, heights[3]=1。此时我们 heights 数组更新好了，然后我们开始从头遍历，维护一个当前最大值 curMax，每次将 [0, i] 中最大值加入结果 res 即可，

```java
public List<Integer> fallingSquares(int[][] a) {
    List<Integer> ans = new ArrayList<>();
    int n = a.length, max = 0;
    int [] hi = new int [n]; // 表示第 i 块方块落下后所在的高度
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        int h = a[i][1], l = a[i][0], r = a[i][0] + h;
        hi[i] += h;
        for (int j = i+1; j < n; j++) {
            int ll = a[j][0], rr = ll + a[j][1];
            // [[6,1],[9,2],[2,4]] 因为不能保证是从左往下延 x 轴顺序掉落，所以加上 l < rr 也狠重要 确保不管左右边有交叠
            if (ll < r && rr > l) // 保证 j 在 i 的右边，并且有重叠区域
                hi[j] = Math.max(hi[j], hi[i]);
        }
        max = Math.max(max, hi[i]);
        ans.add(max);
    }
    return ans;
}
```

2. 解题思路与分析：线段树 + 离散化

   想象 x xx 轴是地面，如果某个方块掉落的过程中遇到了之前的某个方块（擦边而过不算），则该方块会叠到上面。现在给定一个长 n nn 数组 A AA，A [i] A[i]A[i] 存了第 i ii 个掉落的方块的信息，其中 A [i] [0] A[i][1]A[i][1]表示它的左下角的 x xx 坐标，A [i] [1] A[i][2]A[i][2]表示它的边长。要求返回一个长 n nn 数组 B BB，使得 B [i] B[i]B[i] 表示在 A [i] A[i]A[i] 掉落之后，当前所有方块的最高点的 y yy 坐标。

   思路是线段树 + 离散化。可以将 x xx 坐标离散化，这样可以节省存储空间（离散化的过程其实就是将一个数组 d dd 排序后去重，然后将每个数映射到它的下标。这样在线段树建树的时候，就只需维护 [0 , l d 1] [0,l_d-1][0,l_d1] 这个区间的信息就行了，这会极大减少线段树的空间消耗，也从而会减少要做的操作的时间消耗）。具体来说，给定一个将要下落的方块，比如该方块的左端点的 x xx 坐标和右端点的 x xx 坐标分别是 a aa 和 b bb，边长是 c cc，那么我们需要实现两个操作，第一是查询 (a , b) (a,b)(a,b) 里的最大值 M MM（注意这里查询的是开区间 (a , b) (a,b)(a,b) 的最大值，因为下落的方块擦着另一个方块的边的话，是不会叠上去的），另一个是将 [a , b] [a,b][a,b] 里所有值都变成 M + c M+cM+c。本质上是要求一个数据结构可以查询区间最大值，以及将区间修改为某一值，这可以用线段树 + 懒标记来做到。在离散化之后，为了使得区间 (a , b) (a,b)(a,b) 非空（注意这里 a aa 和 b bb 都是离散化之后的值，此时 (a , b) = [a + 1 , b 1] (a,b)=[a+1,b-1](a,b)=[a+1,b1]），我们可以在离散化的时候将方块的中点也加入一起做离散化，但是这会导致中点变成非整数，这里将原坐标乘以 2 22 就行了。

[1] DEFINITION NOT FOUND.
[2] DEFINITION NOT FOUND.
[3] DEFINITION NOT FOUND.

给定一个数学里的二维平面直角坐标系xOy，想象有若干正方形方块掉落，题目保证正方形方块的左下端点的坐标是正整数，也保证方块边长是正整数。想象x轴是地面，如果某个方块掉落的过程中遇到了之前的某个方块（擦边而过不算），则该方块会叠到上面。现在给定一个长n数组A，$A[i]$存了第i个掉落的方块的信息，其中$A[i][0]$表示它的左下角的x坐标，$A[i][1]$表示它的边长。要求返回一个长n数组B，使得$B[i]$表示在$A[i]$掉落之后，当前所有方块的最高点的y坐标。

思路是线段树 + 离散化。可以将x坐标离散化，这样可以节省存储空间（离散化的过程其实就是将一个数组d排序后去重，然后将每个数映射到它的下标。这样在线段树建树的时候，就只需维护$[0, l_d - 1]$这个区间的信息就行了，这会极大减少线段树的空间消耗，也从而会减少要做的操作的时间消耗）。具体来说，给定一个将要下落的方块，比如该方块的左端点的x坐标和右端点的x坐标分别是a和b，边长是c，那么我们需要实现两个操作，第一是查询(a, b)里的最大值M（注意这里查询的是开区间(a, b)的最大值，因为下落的方块擦着另一个方块的边的话，是不会叠上去的），另一个是将$[a, b]$里所有值都变成$M + c$。本质上是要求一个数据结构可以查询区间最大值，以及将区间修改为某一值，这可以用线段树 + 懒标记来做到。在离散化之后，为了使得区间(a, b)非空（注意这里a和b都是离散化之后的值，此时$(a, b) = [a + 1, b - 1]$），我们可以在离散化的时候将方块的中点也加入一起做离散化，但是这会导致中点变成非整数，这里将原坐标乘以2就行了。代码如

```java
public List<Integer> fallingSquares(int[][] a) { // 需要对数据进行离散化处理，离散化的目的是为了线段树处理起来方便；离散的是 x 轴的横坐标
    List<Integer> x = new ArrayList<>();
    for (int [] v : a) {
        int i = v[0], j = i + v[1];
        x.add(i * 2);
        x.add(j * 2);
        x.add(i + j);
    }
    x = getUniques(x);
    MaxSeg maxSeg = new MaxSeg(x.size());
    List<Integer> ans = new ArrayList<>();
    for (int [] v : a) {
        int i = v[0], j = i + v[1];
        i = getIdxInList(i * 2, x);
        j = getIdxInList(j * 2, x);
        int h = maxSeg.query(1, i+1, j-1);
        maxSeg.update(1, i, j, h + v[1]);
        ans.add(maxSeg.query());
    }
    return ans;
}
int getIdxInList(int v, List<Integer> list) { // 找到 x 在离散化之后的值是多少，其实就是求 xs 里 x 的下标，可以二分来找到
    int l = 0, r = list.size()-1;
    while (l < r) {
        int m = l + (r - l) / 2;
        if (list.get(m) >= v) r = m;
        else l = m + 1;
    }
    return l;
}
List<Integer> getUniques(List<Integer> l) {
    l.sort(Integer::compareTo);
    int j = 0; // 返回结果链表的下标 idx
    for (int i = 0; i < l.size(); i++) {
        if (i == 0 || l.get(j-1) != l.get(i))
            l.set(j++, l.get(i));
    }
    return l.subList(0, j);
}
class MaxSeg {   // 实现一下带懒标记的线段树 : 这棵树好强大
    class Node { // v 是 [l, r] 区间的最大值， lazy 是懒标记
        int l, r, v, lazy;
        public Node(int l, int r) {
            this.l = l;
            this.r = r;
        }
    }
    Node [] tree;
    public MaxSeg(int n) {
        tree = new Node[n << 2]; // n * 2 * 2
        buildTree(1, 0, n-1);    // 下标从 1 开始 自顶向下
    }
    void buildTree(int i, int l, int r) {
        tree[i] = new Node(l, r);
        if (l == r) return;
        int m = l + r >> 1; // (l + r) / 2
        buildTree(i << 1, l, m);
        buildTree(i << 1 | 1, m+1, r);
    }
    void pushUp(int i) { // 自底向上: 自左、右叶子节点向顶更新最大值，取左右节点的最大值
```

```java
        tree[i].v = Math.max(tree[i << 1].v, tree[i << 1 | 1].v);
    }
    void pushDown(int i) { // 懒标记向底、叶子方向推进一层
        int c = tree[i].lazy;
        if (c != 0) { // 打有懒标记
            tree[i].lazy = 0;
            tree[i << 1].v = tree[i << 1 | 1].v = c;
            tree[i << 1].lazy = tree[i << 1 | 1].lazy = c;
        }
    }
    void update(int i, int l, int r, int c) {   // 自顶向下传递懒标记，再自底向上更新父节点的值：取左右子节点的最大值
        if (l <= tree[i].l && tree[i].r <= r) { // 任务不需要下发，可以用懒标记懒住
            tree[i].v = tree[i].lazy = c; // 这里 tree[i].v = tree[i].lazy = c : c 是想要更新到的新值 v, 用它来更新懒标记和 v 值
            return ;
        }
        pushDown(i);  // 任务不得不下发，则先下发给两个孩子
        int m = tree[i].l + tree[i].r >> 1;
        if (l <= m) update(i << 1, l, r, c);  // 回归调用，下传更新至左右子节点
        if (m + 1 <= r) update(i << 1 | 1, l, r, c);
        pushUp(i);  // 孩子完成了任务，再修改自己的值
    }
    int query(int i, int l, int r) {
        if (l <= tree[i].l && r >= tree[i].r) return tree[i].v;
        pushDown(i);
        int ans = 0, m = tree[i].l + tree[i].r >> 1;
        if (l <= m) ans = Math.max(ans, query(i << 1, l, r));
        if (m + 1 <= r) ans = Math.max(ans, query(i << 1 | 1, l, r));
        return ans;
    }
    int query() {
        return tree[1].v;
    }
}
```

3. 解题思路与分析: 超简洁版的线段树，效率奇高

- http://www.noobyard.com/article/p-sxwzvpgp-nz.html
- 去找一下原文件中的优化步骤

```java
private class Node { // 描述方块以及高度
    int l, r, h, maxR;
    Node left, right;
    public Node(int l, int r, int h, int maxR) {
        this.l = l;
        this.r = r;
        this.h = h;
        this.maxR = maxR;
        this.left = null;
        this.right = null;
    }
}
public List<Integer> fallingSquares(int[][] positions) {
    List<Integer> res = new ArrayList<>(); // 建立返回值
    Node root = null; // 根节点，默认为零
    int maxH = 0; // 目前最高的高度
    for (int[] position : positions) {
        int l = position[0]; // 左横坐标
        int r = position[0] + position[1]; // 右横坐标
        int e = position[1]; // 边长
        int curH = query(root, l, r); // 目前区间的最高的高度
        root = insert(root, l, r, curH + e);
        maxH = Math.max(maxH, curH + e);
        res.add(maxH);
    }
    return res;
}
private Node insert(Node root, int l, int r, int h) {
    if (root == null) return new Node(l, r, h, r);
    if (l <= root.l)
        root.left = insert(root.left, l, r, h);
    else
        root.right = insert(root.right, l, r, h);
    root.maxR = Math.max(r, root.maxR); // 最终目标是仅仅须要根节点更新 maxR
    return root; // 返回根节点
}
private int query(Node root, int l, int r) {
    // 新节点的左边界大于等于目前的 maxR 的话，直接获得 0，不须要遍历了
    if (root == null || l >= root.maxR) return 0;
    int curH = 0; // 高度
    if (!(r <= root.l || root.r <= l)) // 是否跟这个节点相交
        curH = root.h;
    // 剪枝
    curH = Math.max(curH, query(root.left, l, r));
    if (r > root.l)
        curH = Math.max(curH, query(root.right, l, r));
    return curH;
}
```

1.1.7 1483. Kth Ancestor of a Tree Node - Hard 倍增法 binary lifting

You are given a tree with n nodes numbered from 0 to n - 1 in the form of a parent array parent where parent[i] is the parent of ith node. The root of the tree is node 0. Find the kth ancestor of a given node.

The kth ancestor of a tree node is the kth node in the path from that node to the root node.

Implement the TreeAncestor class:

TreeAncestor(int n, int[] parent) Initializes the object with the number of nodes in the tree and the parent array. int getKthAncestor(int node, int k) return the kth ancestor of the given node node. If there is no such ancestor, return -1.

1. 解题思路与分析: 倍增 binary lifting

给定一个n个节点的树，每个节点编号$0 \sim n-1$，另外给出每个节点的父亲节点是谁，以数组p给出。要求设计一个数据结构可以应答这样的询问，每次询问给出一个节点编号u和一个正整数k，问u的第k个祖先是谁（即u向上走k步是谁）。如果该祖先不存在则返回-1。

可以用倍增法。设$f[u][k]$是节点u向上走2^k步能走到的节点，那么有

$$f[u][k] = f[f[u][k-1]][k-1]$$

初始条件$f[u][0] = p[u]$，从而可以递推出f数组。因为一共有n个节点，树最高就是n，也就是说向上最多能走$n-1$步，我们找到最小的$2^k \geq n-1$，把f的第二维开$k = \lfloor \log_2 n - 1 \rfloor + 1$这么长，以保证询问都能被正确应答。接下来考虑如何应答询问，可以用类似快速幂的思想，比方说k的二进制表示是1101_2，那么$1101_2 = 2^0 + 2^2 + 2^3$，那么可以先求$u_1 = f[u][0]$，这样就跳了2^0步，再接着求$u_2 = f[u_1][2]$，这样又跳了2^2步，再接着求$f[u_2][3]$，这样就将k步全跳完了。中途如果发现要跳的幂次大于了f的第二维能取的最大值，或者跳到了-1，则直接返回-1。代码如下:

- 预处理时间复杂度 O(nlogn)，每次询问时间 O(logn)，空间 O(nlogn)。

```java
private int [][] p;
private int log;
public TreeAncestor(int n, int[] parent) {
    log = (int) (Math.log(n - 1) / Math.log(2)) + 1;
    p = new int[n][log];
    for (int i = 0; i < parent.length; i++) // 初始化 p 数组
        p[i][0] = parent[i];
    for (int i = 1; i < log; i++) // 按公式递推 p 数组
        for (int j = 0; j < n; j++)
            if (p[j][i-1] != -1)
                p[j][i] = p[p[j][i-1]][i-1];
            else p[j][i] = -1;
}
public int getKthAncestor(int node, int k) {
    int pow = 0;
    while (k > 0) {
        if (pow >= log || node == -1) return -1;
        if ((k & 1) == 1)
            node = p[node][pow];
        k >>= 1;
        pow++;
    }
    return node;
}
```

2. 解题思路与分析

```java
Map<Integer, List<Integer>> adj;
int [][] par;
public TreeAncestor(int n, int[] parent) {
    par = new int [n][30]; // 30 , 16: 不能证它是一棵很平衡的二叉树
    adj = new HashMap<>();
    for (int i = 0; i < n; i++) {
        Arrays.fill(par[i], -1);
        adj.put(i, new ArrayList<>());
    }
    for (int i = 0; i < parent.length; i++)
        if (parent[i] != -1) {
            adj.get(parent[i]).add(i); // 自顶向下: 父 --》 子节点
            par[i][0] = parent[i];     // 每个子节点的第一个父节点 (2^0 = 1), 即为父节点 // 自底向上: 子节点: 2^0 父节点、 2^1 节点、 2^2 节点
        }
    dfs(0);
}
public int getKthAncestor(int node, int k) {
    for (int i = 0; i < 30 && k > 0; i++, k >>= 1) // k /= 2
```

```
            if ((k & 1) == 1) {
                node = par[node][i];
                if (node < 0) return -1;
            }
        return node;
    }
    private void dfs(int idx) { // 自顶向下: 从父节点遍历子节点
        for (int i = 1; par[idx][i-1] >= 0; i++) // 穷追塑源: 一直找到整棵树的根节点:  0
            par[idx][i] = par[par[idx][i-1]][i-1]; // 这里多想想
        for (int next : adj.get(idx))
            dfs(next);
    }
```

1.1.8 236 二叉树的最近公共祖先

1.1.9 1505. Minimum Possible Integer After at Most K Adjacent Swaps On Digits - Hard BIT 树状数组

You are given a string num representing the digits of a very large integer and an integer k. You are allowed to swap any two adjacent digits of the integer at most k times.

Return the minimum integer you can obtain also as a string.

1. 解题思路与分析

```
public String minInteger(String t, int k) {
    int n = t.length();
    t = " " + t;
    char [] s = t.toCharArray();
    ArrayDeque<Integer> [] q = new ArrayDeque [10];
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        int j = s[i] - '0';
        if (q[j] == null) q[j] = new ArrayDeque<>();
        q[j].offerLast(i);
    }
    BIT bit = new BIT(n);
    StringBuilder sb = new StringBuilder();
    for (int i = 1; i <= n; i++) {
        for (int j = 0; j < 10; j++) { // 从小数值往大数值遍历
            if (q[j] == null || q[j].isEmpty()) continue;
            int top = q[j].peekFirst(), pos = top + bit.sum(top); // pos 是最优解的位置, 最优解的位置是原来的位置加上偏移量
            if (pos - i <= k) {
                k -= pos - i;
                sb.append(j);
                q[j].pollFirst();
                bit.add(1, 1); // 更新 [1, t) 这段的值每个加 1, 即向右偏移 1 位. 为什么要 从 1 开始更新: 假装每次都移动到最前端, 方便计算 ?
                bit.add(top, -1);
                break;
            }
        }
    }
    return sb.toString();
}
class BIT { // 开一个树状数组类, 维护每个位置的字符的向右的偏移量 ? 向左偏移量
    private int n;
    private int [] a;
    public BIT(int n) {
        this.n = n;
        this.a = new int [n+1];
    }
    public void add(int idx, int v) { // 只有发生偏移, 才移动某段区间的值
        while (idx <= n) {
            a[idx] += v;
            idx += lowbit(idx);
        }
    }
    public int sum(int idx) { // 得到以 i 为下标 1-based 的所有子、叶子节点的和, 也就是 [1, idx] 的和, 1-based
        int ans = 0;
        while (idx > 0) {
            ans += a[idx];
            idx -= lowbit(idx);
        }
        return ans;
    }
    int lowbit(int x) {
        return x & -x;
    }
}
```

1.2 求最大最小值、位操作值的线段树