První zápočtový test – vzorové řešení

1. Inverzní funkce

Zadaná funkce:

$$f(x) = \frac{2 - \operatorname{tg}(3-4x)}{5}.$$

Definiční obor funkce f

Standardně volíme pro tangens interval

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

na kterém je $\operatorname{tg} t$ ryze rostoucí a prostá, a inverzní funkcí k ní je $\operatorname{arctg} t$. Omezíme tedy argument $t = 3 - 4x$ právě na tento interval:

$$-\frac{\pi}{2} < 3 - 4x < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} - 3 < -4x < \frac{\pi}{2} - 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3 - \frac{\pi}{2}}{4} < x < \frac{3 + \frac{\pi}{2}}{4}.$$

Definiční obor, na kterém je f prostá i definovaná, zvolíme

$$D(f) = \left(\frac{3 - \frac{\pi}{2}}{4}, \ \frac{3 + \frac{\pi}{2}}{4}\right).$$

Obor hodnot funkce f

Pro

$$3 - 4x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

nabývá $\operatorname{tg}(3-4x)$ všech reálných hodnot a tedy

$$H(f) = \mathbb{R}.$$

Odvození inverzní funkce

Začneme od předpisu:

$$y = \frac{2 - \operatorname{tg}(3-4x)}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 5y = 2 - \operatorname{tg}(3-4x) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(3-4x) = 2 - 5y.$$

Na obě strany použijeme inverzní funkci k funkci tangens, tedy arctg:

$$3 - 4x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(3-4x)) = \operatorname{arctg}(2-5y).$$

Odsud vyjádříme x:

$$-4x = \operatorname{arctg}(2-5y) - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{3 - \operatorname{arctg}(2-5y)}{4}.$$

Po záměně označení proměnných ($x \leftrightarrow y$) získáme předpis inverzní funkce:

$$f^{-1}(x) = \frac{3 - \operatorname{arctg}(2 - 5x)}{4}.$$

Doména a obor hodnot inverzní funkce:

$$D(f^{-1}) = H(f) = \mathbb{R}, \qquad H(f^{-1}) = D(f) = \left(\frac{3 - \frac{\pi}{2}}{4}, \frac{3 + \frac{\pi}{2}}{4} \right).$$

---

2. Limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2^{24}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{11}{10}\right)^{-n} + \frac{9 - 7n + 6n^2}{-3n^2 - 8n + 17} \right)$ Rozepíšeme člen po členu:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{24}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{11}{10}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{10}{11}\right)^n = 0,$$

protože $\left|\frac{10}{11}\right| < 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9 - 7n + 6n^2}{-3n^2 - 8n + 17} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(\frac{9}{n^2} - \frac{7}{n} + 6\right)}{n^2\left(-3 - \frac{8}{n} + \frac{17}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{9}{n^2} - \frac{7}{n} + 6}{-3 - \frac{8}{n} + \frac{17}{n^2}} = \frac{0 - 0 + 6}{-3 - 0 + 0} = -2.$$

Celková limita:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{2^{24}} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{11}{10}\right)^{-n} + \frac{9 - 7n + 6n^2}{-3n^2 - 8n + 17} \right) = 1 + e + 0 - 2 = e - 1.$$

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(-2x)}$ limita je typu $\frac{0}{0}$ a můžeme použít l'Hospitalovo pravidlo:

$$\lim_{x\to0} \frac{\operatorname{tg}(-3x)}{\operatorname{arctg}(-2x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0} \frac{(\operatorname{tg}(-3x))'}{(\operatorname{arctg}(-2x))'} = \lim_{x\to0} \frac{\frac{-3}{\cos^2(-3x)}}{\frac{-2}{1+4x^2}} = \frac{\frac{-3}{\cos^2(0)}}{\frac{-2}{1+4(0)^2}} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}.$$

c) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(-3x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim\limits_{x\to0} \frac{(\sin(-3x))'}{(\operatorname{arctg}(x^2))'} = \lim\limits_{x\to0} \frac{-3\cos(-3x)}{\frac{2x}{1+x^4}}$ Pro $x \to 0$ platí $\cos(-3x) \to 1$ a $1 + x^4 \to 1$, takže se jedná o limitu typu $\frac{-3}{0}$. Musíme tedy spočítat jednostranné limity:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin(-3x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{-3\cos(-3x)}{\frac{2x}{1+x^4}} = \lim_{x\to0^+} (1+x^4)\cos(-3x) \lim_{x\to0^+} \frac{-3}{2x} = \lim_{x\to0^+} \frac{-3}{2x} \overset{\text{typ } \frac{-3}{0}}{\underset{2x\geq0}{=}} -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin(-3x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{-3\cos(-3x)}{\frac{2x}{1+x^4}} = \lim_{x\to 0^-} (1+x^4)\cos(-3x) \lim_{x\to 0^-} \frac{-3}{2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-3}{2x} \overset{\text{typ } \frac{-3}{0}}{\underset{2x\leq 0}{=}} \infty$$

Jednostranné limity se liší, proto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(-3x)}{\operatorname{arctg}(x^2)} \quad \textbf{neexistuje}.$$

---

3. Průběh funkce

$$f(x) = x^2 e^{-x}.$$

Definiční obor a spojitost

Exponenciální funkce e^{-x} je definována a spojitá pro všechna reálná čísla a polynom x^2 také. Proto

$$D(f) = \mathbb{R}.$$

Na celém $\mathbb{R}$ je f spojitá.

Limity v krajních bodech a asymptoty

a) Limita pro $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} \overset{\frac{2}{\infty}}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \text{ je vodorovná asymptota.}$$

b) Limita pro $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x} \overset{\infty\cdot\infty}{=} +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ nemá absolutní maximum.}$$

Asymptoty: Ještě potřebujeme ověřit asymptotu v $-\infty$:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} x e^{-x} \overset{-\infty\cdot\infty}{=} -\infty.$$

A tedy funkce f nemá další asymptotu.

První derivace, monotónnost a lokální extrémy

$$f'(x) = (x^2)'e^{-x} + x^2(e^{-x})' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}x(2 - x).$$

Nulové body derivace jsou řešením

$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}x(2 - x) = 0.$$

Exponenciála e^{-x} je vždy kladná, takže

$$x(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{nebo} \quad x = 2.$$

Rozdělíme reálnou osu podle nulových bodů 0 a 2. A určíme znaménko derivace na jednotlivých intervalech.

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
x	$-$	$+$	$+$
$2 - x$	$+$	$+$	$-$
$e^{-x}x(2 - x)$	$-$	$+$	$-$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	klesá	roste	klesá

- V bodě $x = 0$ se mění derivace znaménko z $-$ na $+$, takže $f(0) = 0^2e^0 = 0$ je **lokální minimum**. A srovnáním s výsledky limit (0 a ∞) plyne, že $f(0) = 0$ je i **absolutní minimum**.
- V bodě $x = 2$ se mění derivace znaménko z $+$ na $-$, takže $f(2) = 4e^{-2}$ je **lokální maximum**.

Druhá derivace, konvexnost, konkávnost a inflexní body

$$f''(x) = (e^{-x})'x(2 - x) + e^{-x}(x(2 - x))' = -e^{-x}x(2 - x) + e^{-x}(2 - 2x) =$$
$$= e^{-x}\left(-x(2 - x) + (2 - 2x)\right) = e^{-x}\left(x^2 - 2x + 2 - 2x\right) = e^{-x}\left(x^2 - 4x + 2\right).$$

Nulové body druhé derivace řešíme z rovnice: ($e^{-x} > 0$)

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-x}(x^2 - 4x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0$$

Jde o kvadratickou rovnici:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}.$$

Protože koeficient u x^2 je kladný, platí

$$x^2 - 4x + 2 > 0 \quad \text{pro } x < 2 - \sqrt{2} \text{ a pro } x > 2 + \sqrt{2},$$

a

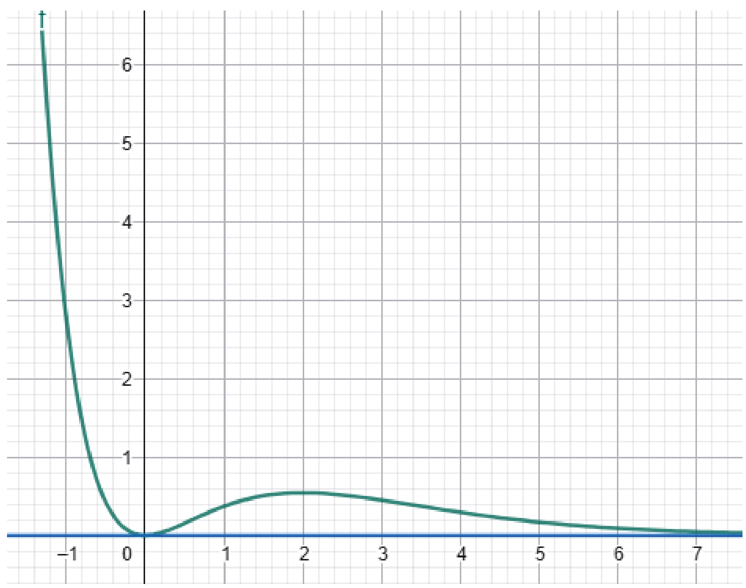
$$x^2 - 4x + 2 < 0 \quad \text{pro } x \in (2 - \sqrt{2},\, 2 + \sqrt{2}).$$

Exponenciála $e^{-x} > 0$ znaménko nemění. Rozdělíme reálnou osu podle nulových bodů $2-\sqrt{2}$ a $2+\sqrt{2}$. A určíme znaménko derivace na jednotlivých intervalech.

x	$(-\infty, 2-\sqrt{2})$	$(2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2})$	$(2+\sqrt{2}, +\infty)$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
f je	konvexní	konkávní	konvexní

Změna znaménka $f''(x)$ v bodech x_1, x_2 znamená, že funkce má v těchto bodech **inflexní body**.

Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = x^2e^{-x}$ a vodorovná asymptota $y = 0$ pro $x \to +\infty$.