

Cvičení 13

Příklad 1. Vypočtěte (také jako určité integrály)

- $\int_0^{\pi/6} (2x + 1) \cos(3x) dx \quad \left(= \frac{1 + \pi}{9} \right),$
- $\int \left(e^{3x} + 3 + \frac{4e^x}{2 + 5e^x} + 7e^x \right) dx \quad \left(= \frac{1}{3}e^{3x} + 3x + \frac{4}{5} \ln(2 + 5e^x) + 7e^x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $\int_0^{\pi/2} \frac{(5 \cos x - 1) \sin x}{\cos^2 x + 3 \cos x + 2} dx \quad (= 11 \ln 3 - 17 \ln 2).$

Příklad 2. Určete obsah obrazce ohraničeného parabolou $y = -x^2 + 4x - 3$ a jejími tečnami v bodech $[0, -3]$ a $[3, 0]$. $\left(\frac{9}{4} \right)$

Příklad 3. Určete obsah obrazce ohraničeného funkcemi $f_1(x) = \frac{x^3 - 16x}{6}$ a $f_2(x) = \frac{x^3 - 16x}{24}$. (16)

Složitější příklady

Příklad 4. Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $y = a \sin^3 t$, $x = a \cos^3 t$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$, kde $a > 0$ a osami $x = 0$ a $y = 0$. $\left(\frac{3a^2\pi}{32} \right)$

Příklad 5. Obsah obrazce ohraničeného grafem spojitě a nezáporné funkce $r = f(\varphi)$ a přímkami určenými polárními úhly α a β , kde $\alpha < \beta$ a $\beta - \alpha \leq 2\pi$ je roven

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Určete obsah obrazce ohraničeného křivkou $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2xy(x^2 - y^2)$, kde $a > 0$.
Nápověda: Nejprve transformujte zadanou křivku do polárních souřadnic a pak aplikujte výše uvedený vzorec. (a^2)