Primitivní funkce

$$\text{Jestliže platí} \qquad F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in (a,b)$$

pak říkáme, že funkce $F(x)$ je **primitivní funkcí** k funkci $f(x)$ v otevřeném intervalu (a,b) (může být i neomezený). Primitivní funkci také nazýváme neurčitým integrálem a značíme ji

$$F(x) = \int f(x)\,dx.$$

Jednoznačnost neurčitého integrálu

Jsou-li $F(x)$, $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a,b), pak platí

$$G(x) = F(x) + C \qquad \forall x \in (a,b) \qquad \text{nebo-li} \qquad F(x) \overset{c}{=} G(x) \qquad \forall x \in (a,b),$$

kde C je libovolná konstanta. Tedy dvě primitivní funkce se liší pouze o konstantu.

Základní vzorce

- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro } n \in \mathbb{R},\ n \neq -1,\ x \in (0,\infty),$
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad \int 1\,dx \overset{c}{=} x \quad \text{pro } n \in \mathbb{N},\ x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int x^n\,dx \overset{c}{=} \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{pro } n \in \mathbb{Z},\ n < -1, x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0),$
- $\displaystyle\int a^x\,dx \overset{c}{=} \frac{a^x}{\ln a}, \quad \int e^x\,dx \overset{c}{=} e^x \quad \text{pro } a > 0, a \neq 1,\ x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx \overset{c}{=} \ln|x| \quad \text{pro } x \in (0,\infty) \text{ nebo } x \in (-\infty,0),$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx \overset{c}{=} -\cos x, \quad \int \cos x\,dx \overset{c}{=} \sin x \quad \text{pro } x \in (-\infty,\infty),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{tg} x, \quad \text{pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi,\ \frac{\pi}{2} + k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z},'$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx \overset{c}{=} -\operatorname{cotg} x, \quad \text{pro } x \in (k\pi,\ (k+1)\pi),\ k \in \mathbb{Z},$
- $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \overset{c}{=} \arcsin x \overset{c}{=} -\arccos x \quad \text{pro } x \in (-1,1),$
- $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \overset{c}{=} \operatorname{arctg} x \overset{c}{=} -\operatorname{arccotg} x \quad \text{pro } x \in (-\infty,\infty).$

Existence neurčitého integrálu

Jestliže funkce f je spojitá v otevřeném intervalu (a, b). Potom pro libovolné číslo c z intervalu (a, b) je funkce

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

primitivní funkcí k funkci f v intervalu (a, b). **Tedy ke každé spojité funkci v intervalu (a, b) existuje v tomto intervalu primitivní funkce.**

Linearita neurčitého integrálu

Existují-li v intervalu (a, b) neurčité integrály $\displaystyle\int f_1(x)\, dx, \cdots, \int f_n(x)\, dx$ a jsou-li $c_1, \cdots,$ c_n libovolná reálná čísla, potom existuje i integrál $\displaystyle\int c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n\, dx$ a platí

$$\int c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x)\, dx \stackrel{c}{=} c_1 \int f_1(x)\, dx + \cdots + c_n \int f_n(x)\, dx.$$

Příklad:

$$\int (3\sin x + 2\cos x)\, dx = 3\int \sin x\, dx + 2\int \cos x\, dx \stackrel{c}{=} -3\cos x + 2\sin x \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty).$$

Integrace per partes

Jestliže funkce u a v mají v intervalu (a, b) spojité derivace potom v intervalu (a, b) platí

$$\int u(x)v'(x)\, dx \stackrel{c}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\, dx.$$

Příklad: Spočtěme neurčitý integrál $\int x \sin x\, dx$ pro $x \in (-\infty, \infty)$. Chceme vyderivovat polynom na konstantu, takže zvolíme:

$$u(x) = x, \qquad v'(x) = \sin x.$$

Potom

$$u'(x) = 1, \qquad v(x) = -\cos x.$$

Dosadíme do vzorce:

$$\int x \sin x\, dx \stackrel{c}{=} x(-\cos x) - \int 1 \cdot (-\cos x)\, dx \stackrel{c}{=} -x\cos x + \int \cos x\, dx \stackrel{c}{=} -x\cos x + \sin x.$$

Příklad: Spočtěme neurčitý integrál $\int \ln x\, dx$ pro $x \in (0, \infty)$. Chceme vyderivovat logaritmus (před logaritmus napíšeme krát jedna), takže zvolíme:

$$u(x) = \ln x, \qquad v'(x) = 1.$$

Potom
$$u'(x) = \frac{1}{x}, \qquad v(x) = x.$$
Dosadíme do vzorce:
$$\int \ln x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - \int \frac{1}{x} x \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - \int 1 \, dx \stackrel{c}{=} x \ln x - x.$$

Praktický návod pro integraci per partes podle typu funkcí:

- **Polynom $P(x)$ krát trigonometrická nebo exponenciální funkce:**
$$P(x) \sin x, \ P(x) \cos x, \ P(x) e^x$$
$\Rightarrow$ *derivujeme polynom, integrujeme druhou funkci.*

- **Polynom $P(x)$ krát logaritmus nebo cyklometrická funkce:**
$$P(x) \ln x, \ P(x) \operatorname{arctg} x, \ P(x) \operatorname{arccotg} x$$
$\Rightarrow$ *integrujeme polynom, derivujeme druhou funkci.*

- **Samostatný logaritmus nebo cyklometrická funkce:**
$$\ln x, \ \operatorname{arctg} x, \ \operatorname{arccotg} x, \ \arcsin x, \ \arccos x$$
$\Rightarrow$ *zvolíme ji za u (derivujeme) a* $v' = 1$.

- **Obecné pravidlo:** vždy volíme k derivaci tu funkci, jejíž derivace zjednoduší integrál, a k integraci tu, kterou lze snadno integrovat.

Substituce

Jestliže funkce f je spojitá v intervalu (a, b), funkce φ má v intervalu (α, β) vlastní derivaci φ' a pro každé t z intervalu (α, β) platí $\varphi(t) \in (a, b)$. Potom

$$\text{při substituci } x = \varphi(t) \qquad \int f(x) \, dx \stackrel{c}{=} \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt \qquad t \in (\alpha, \beta).$$

Příklad: Spočtěme $\int 2x \cos(x^2) \, dx$. Vidíme vnitřní funkci $\varphi(x) = x^2$ a její derivaci $\varphi'(x) = 2x$, takže zvolíme substituci:
$$t = x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 2x \, dx.$$
Dosadíme do integrálu:
$$\int 2x \cos(x^2) \, dx \stackrel{c}{=} \int \cos(t) \, dt \stackrel{c}{=} \sin(t) \stackrel{c}{=} \sin(x^2).$$

Příklad: Spočtěme $\int \frac{dx}{9+x^2}$. Tady nemáme vnitřní funkci a její derivaci, ale vidíme, že bez 9 to půjde snadno integrovat, takže zvolíme substituci:

$$x = 3t \quad \Rightarrow \quad dx = 3\,dt.$$

Dosadíme do integrálu:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} \stackrel{c}{=} \int \frac{3\,dt}{9+9t^2} \stackrel{c}{=} \int \frac{dt}{3(1+t^2)} \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} t \stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3}.$$