

Rozklad na parciální zlomky

Budeme integrovat racionální funkce ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \quad P, Q \text{ polynomy, } Q(x) \neq 0.$$

Cíl: převést integrál

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx \quad \text{na součet jednoduchých integrálů.}$$

Krok 1: dělení polynomů

Nejprve zkontrolujeme stupně polynomů (zkratka deg):

- Pokud $\deg P < \deg Q$, dělení není potřeba a můžeme pokračovat.
- Pokud $\deg P \geq \deg Q$, provedeme dělení mnohočlenů:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je polynom a $R(x)$ má nižší stupeň než $Q(x)$. Integrujeme

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int S(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx.$$

Dále předpokládáme, že pracujeme pouze se situací:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}, \quad \deg R < \deg Q = 2 \text{ (kvadratický jmenovatel).}$$

Krok 2: kvadratický jmenovatel (lineární čitatel) a diskriminant

Uvažujeme kvadratický jmenovatel ve tvaru (pokud před x^2 nebude jednička, můžeme tuto konstantu vytknout před integrál):

$$Q(x) = x^2 + px + q.$$

Diskriminant je

$$D = p^2 - 4q.$$

Podle D nastanou tři základní případy:

- $D > 0$ dva různé reálné kořeny a, b ,
- $D = 0$ jeden dvojnásobný reálný kořen a ,
- $D < 0$ komplexně sdružené kořeny.

1. Dva různé reálné kořeny

Předpokládejme

$$Q(x) = x^2 + px + q = (x - a)(x - b), \quad a \neq b.$$

Pak platí, že existují konstanty A, B takové, že

$$\frac{R(x)}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}.$$

Určení koeficientů A, B

Vynásobíme obě strany jmenovatelem:

$$R(x) = A(x - b) + B(x - a).$$

To je rovnost polynomů. Nejjednodušší je dosadit

$$x = a, \quad x = b.$$

- Pro $x = a$ dostaneme $R(a) = A(a - b)$.
- Pro $x = b$ dostaneme $R(b) = B(b - a)$.

Z těchto dvou rovnic spočítáme A a B . **Připomínám, že to funguje jen po dělení polynomů - tedy $R(x)$ je lineární funkce.**

Příklad 1. Rozložte a integrujte

$$\int \frac{3}{(x - 1)(x + 2)} dx.$$

Hledáme A, B tak, aby

$$\frac{3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}.$$

Po vynásobení jmenovatelem:

$$3 = A(x + 2) + B(x - 1).$$

Dosadíme

$$x = 1 : \quad 3 = 3A \Rightarrow A = 1,$$

$$x = -2 : \quad 3 = -3B \Rightarrow B = -1.$$

Tedy

$$\frac{3}{(x - 1)(x + 2)} = \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2}.$$

Integrál:

$$\int \frac{3}{(x - 1)(x + 2)} dx = \int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 2} dx \stackrel{c}{=} \ln|x - 1| - \ln|x + 2|$$

na intervalu $x \in (-\infty, -2)$ nebo $x \in (-2, 1)$ případně $x \in (1, \infty)$.

2. Dvojnásobný reálný kořen

Předpokládejme

$$Q(x) = x^2 + px + q = (x - a)^2.$$

Pak existují konstanty A, B takové, že

$$\frac{R(x)}{(x - a)^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{(x - a)^2}.$$

Určení koeficientů A, B

Vynásobíme $(x - a)^2$:

$$R(x) = A(x - a) + B.$$

Porovnáním koeficientů u x a u konstanty najdeme A, B .

Příklad 2. Rozložte a integrujte

$$\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx.$$

Hledáme A, B tak, aby

$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2}.$$

Po vynásobení $(x - 1)^2$:

$$x = A(x - 1) + B \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x(A - 1) + (B - A).$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin:

$$\text{u } x: \quad 1 = A, \quad \text{u konstanty: } 0 = B - A.$$

Odtud

$$A = 1, \quad B = 1.$$

Takže

$$\frac{x}{(x - 1)^2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}.$$

Integrál vyřešíme substitucí $t = x - 1$, $dt = dx$:

$$\int \frac{x}{(x - 1)^2} dx = \int \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} dx \stackrel{c}{=} \int \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} dt \stackrel{c}{=} \ln |t| - \frac{1}{t} \stackrel{c}{=} \ln |x - 1| - \frac{1}{x - 1}$$

na intervalu $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, \infty)$. **Tento integrál lze řešit i přímo substitucí $t = x - 1$ bez rozkladu na parciální zlomky. Pak se zlomek automaticky rozpadne na součet zlomků $\frac{1}{t}$ a $\frac{1}{t^2}$.**

3. Komplexně sdružené kořeny

Čitatel (připomeňme, že $R(x)$ a $Q'(x)$ jsou lineární funkce) napíšeme ve tvaru:

$$R(x) = A \cdot Q'(x) + B$$

pro vhodné konstanty A, B . Pak dostaneme rozklad

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = A \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)}.$$

- První část vede na logaritmus po substituci $t = Q(x)$, $dt = Q'(x)dx$.
- Druhá část vede po nalezení vhodné substituce doplněním na čtverec k typu $\int \frac{dt}{t^2 + 1}$ a tedy k funkci $\arctg t$.

Příklad 3. Spočtěme

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx.$$

1. Rozklad čitatele. Hledáme A, B tak, aby

$$x+2 = A(x^2+2x+5)' + B = A(2x+2) + B \Leftrightarrow 0 = x(2A-1) + (2A+B-2).$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin a dostaneme:

$$\text{u } x: \quad 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{1}{2}, \quad \text{u konstanty: } 2 = 2A + B = 1 + B \Rightarrow B = 1.$$

2. Rozklad zlomku.

$$\frac{x+2}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2) + 1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2} \frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

3. První integrál (logaritmus). Řešíme substitucí $t = x^2+2x+5$, $dt = (2x+2) dx$:

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln |t| \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5).$$

4. Druhý integrál (doplnění jmenovatele na čtverec, $\arctg t$).

$$x^2+2x+5 = (x+1)^2+4 = \frac{4}{4}(x+1)^2+4 = 4 \left(\frac{(x+1)^2}{4} + 1 \right) = 4 \left(\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1 \right).$$

Tímto postupem jsme odvodili optimální substituci $t = \frac{x+1}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{4} \int \frac{2}{t^2+1} dt \stackrel{c}{=} \frac{\arctg t}{2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{x+1}{2} \right).$$

5. Celkem máme:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5} dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln(x^2+2x+5) + \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{x+1}{2} \right) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Stručné shrnutí

- Vždy nejdříve zkontrolovat, zda je možné dělit. Pokud ano, vydělit polynomy.
- Pro kvadratický jmenovatel $x^2 + px + q$ spočítat diskriminant $D = p^2 - 4q$.
- Podle D použít:

- $D > 0$: rozklad

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$

dopočítat A, B dosazováním $x = a, x = b$.

- $D = 0$: rozklad

$$\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

- $D < 0$: rozložit čítelel do tvaru

$$R(x) = AQ'(x) + B,$$

tj.

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = A \frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)}.$$

První část vede na logaritmus, druhá po doplnění na čtverec na arctg.

- Základní vzorce pro integraci:

$$\int \frac{1}{x-a} dx \stackrel{c}{=} \ln |x-a|, \quad \int \frac{1}{(x-a)^2} dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{x-a}, \quad \text{pro } x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty),$$

$$\int \frac{1}{t^2+1} dt \stackrel{c}{=} \arctg t, \quad \int \frac{Q'(x)}{Q(x)} dx \stackrel{c}{=} \ln |Q(x)| \quad \text{pro } Q(x) > 0.$$