

Najděte hodnoty x, y, z, α tak, aby platilo

$$(0, x, y, z) = (-9, 1, 3, -1) + \alpha(5, -7, -6, -5).$$

α	=	1.80
x	=	-11.60
y	=	-7.80
z	=	-10.00

Výsledky uveďte s přesností na setiny.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} -x - y - 2z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 1 \\ -x - 3y - 3z &= -1 \end{aligned}$$

x	=	-11
y	=	0
z	=	4

Řešte Gaussovou eliminací soustavu rovnic

$$\begin{array}{rrr|c} 1.25x & +0.03y & -0.01z & 0.15 \\ -0.12x & +1.23y & +0.17z & 0.01 \\ 0.02x & +0.05y & +0.87z & 0.24 \end{array}$$

1. sloupec:	0.096	-0.016
(* 0.030)	-0.010	0.150
(0 1.233)	0.169	0.024
(0 0.050)	0.870	0.238
2. sloupec:		-0.040
(0 0 0.863)	0.237	

$x = 0.12, y = -0.02, z = 0.27$

Do výsledku uveďte také průběh eliminace (tvary upravené matice soustavy po jednotlivých krocích).

Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} -3u - 6x - 6y + 6z &= 15, \\ -3u - 6x - 6y + 3z &= 6, \\ u + 5x + 2y - z &= 1, \\ u + 2x + 2y - z &= -2. \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{array} \right) + \alpha \left(\begin{array}{c} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

V tělese \mathbb{Z}_7 řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 5 \\ 5x + 2y &= 5 \end{aligned}$$

x	=	5
y	=	4

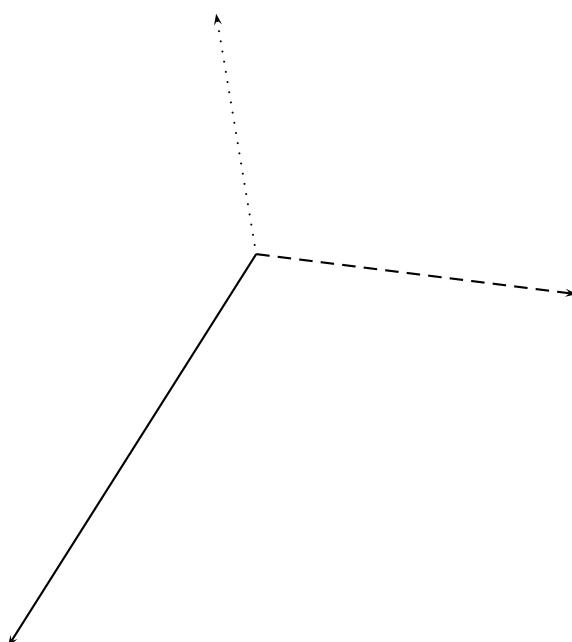
Najděte hodnotu x tak, aby trojice čísel $(1, -9, x)$ byla lineární kombinací trojic $(3, -1, -7)$ a $(5, -6, -5)$. Výsledek uveďte s přesností na setiny.

$$x = 11.00$$

Trojici čísel $(26, 54, 12)$ vyjádřete jako lineární kombinaci trojic $(-1, -7, -6)$, $(-6, -5, 3)$ a $(1, 2, 3)$. Koeficienty kombinace uveďte s přesností na setiny.

$$\begin{aligned} -6 \cdot (-1, -7, -6) + \\ -4 \cdot (-6, -5, 3) + \\ -4 \cdot (1, 2, 3) \end{aligned}$$

Vektor **c** (plný) vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů **a** (čárkováný) a **b** (tečkováný). Uveďte koeficienty lineární kombinace s přesností na setiny, toleruje se odchylka do 10%



$$c = -1.0a - 1.8b$$

V rovině je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Vyjádřete vektor \vec{HF} jako lineární kombinaci vektorů \vec{HA} , \vec{CA} . Koeficienty lineární kombinace uveďte s přesností na tisíce, toleruje se chyba ± 0.002 .

9 $\vec{HF} = -1.414\vec{HA} - 1.000\vec{CA}$

Vypočítejte dimenzi lineárního obalu množiny vektorů z \mathbf{R}^5 :

$$\begin{aligned} u_1 &= (-2, 0, 1, 1, 1) \\ u_2 &= (2, 2, -2, 0, -2) \\ u_3 &= (0, -4, 2, 6, 2) \\ u_4 &= (2, 2, -2, 0, -2) \\ u_5 &= (-4, 0, 2, 2, 2) \end{aligned}$$

10 3

Určete souřadnice polynomu

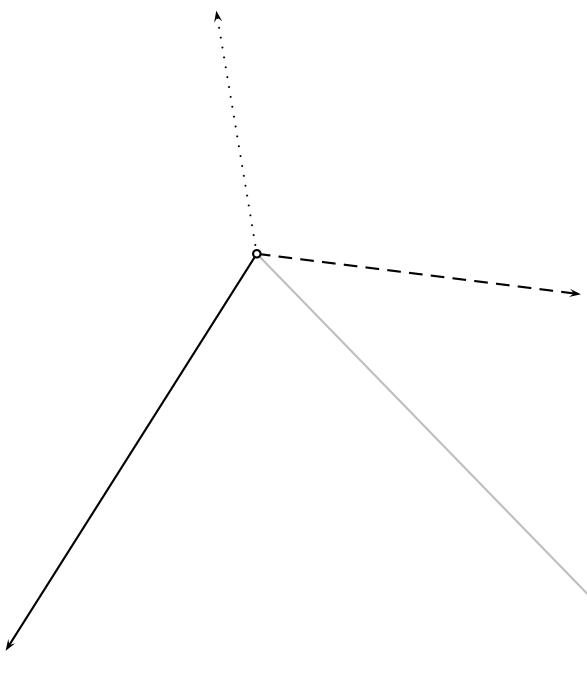
$$P(x) = -x^2 - 10$$

v bazi $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ tvořené mnohočleny

$$\begin{aligned} Q_1 &= x(x+4) \\ Q_2 &= (x-3)(x+4) \\ Q_3 &= (x-3)x . \end{aligned}$$

11 $\begin{bmatrix} -\frac{19}{21} \\ \frac{5}{6} \\ -\frac{13}{14} \end{bmatrix}$

Najděte matici přechodu od baze $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ k bazi $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$. Vektor e_1 je na obrázku zobrazen plně, vektor e_2 šedě, vektor f_1 čárkován a vektor f_2 tečkován. Prvky matice přechodu uveďte s přesností na setiny, toleruje se odchylka do 10%



12 $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -1.0 & 1.1 \\ -1.8 & -1.6 \end{pmatrix}$

Najděte matici přechodu od baze $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ prostoru kvadratických funkcí tvořené mnohočleny

$$\begin{aligned} P_1 &= (x-2)(x+5) \\ P_2 &= (x+1)(x+5) \\ P_3 &= (x+1)(x-2) \end{aligned}$$

13 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 28 \\ -9 & -6 & -13 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

k bazi $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ tvořené mnohočleny

$$\begin{aligned} Q_1 &= 1 \\ Q_2 &= x+5 \\ Q_3 &= (x+5)(x+7) . \end{aligned}$$

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

14

$$\begin{aligned} A \cdot A &= \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 15 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vypočítejte součiny matic $A \cdot A$, $A \cdot B$, $B \cdot A$, $B \cdot B$.

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

15

$$\begin{pmatrix} 9 & -25 & 7 \\ -9 & 3 & -18 \\ 3 & 10 & -16 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte výraz

$$A^3 + A^2 + A.$$

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

16

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} .

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

17

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} .

Je dána matice

$$A_p = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ p & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

18

$$\begin{aligned} &\frac{1}{-2p+3} \cdot \\ &\cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ p & -p+3 & 3 \\ -p & 3p-6 & -3 \end{pmatrix} \\ &p \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

závislá na reálném parametru p . Vypočítejte inverzní matici A_p^{-1} a zjistěte, pro které hodnoty parametru p není definována.

V průběhu výpočtu inverzní matice Gaussovou-Jordanovou eliminací se došlo k následujícímu schématu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{29}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{31}{2} & -\frac{5}{2} & 0 & 1 \end{array} \right).$$

19

$$\begin{pmatrix} -11 & -139 & -65 \\ -5 & -62 & -29 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Dopočítejte hledanou inverzní matici.

V prostoru dimenze 2 jsou dány baze \mathcal{E} , \mathcal{F} , \mathcal{G} a matice přechodu

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

20

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Najděte matici přechodu od baze \mathcal{G} k bazi \mathcal{E} .

Najděte matici lineárního zobrazení f dvoudimenzionálního vektorového prostoru do sebe, které vektoru se souřadnicemi $\begin{pmatrix} -10 \\ -1 \end{pmatrix}$ přiřazuje vektor se souřadnicemi $\begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$ a vektoru se souřadnicemi $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ přiřazuje jeho opačně orientovaný dvojnásobek.

21

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{13} & -\frac{27}{13} \end{pmatrix}$$

V prostoru \mathcal{V} orientovaných úseček v rovině je dána baze $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, přičemž \mathbf{e}_2 dostaneme otočením \mathbf{e}_1 o pravý úhel proti směru hodinových ručiček. Lineární zobrazení $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ přiřazuje vektoru $u \in \mathcal{V}$ vektor, který dostaneme pomocí čtyř operací (v uvedeném pořadí):

1. kolmý průmět vektoru u do směru vektoru \mathbf{e}_2 zvětšíme 2krát, kolmý průmět vektoru u do směru vektoru \mathbf{e}_1 se nezmění,
2. výsledek otočíme o úhel $\frac{1}{6}\pi$ po směru hodinových ručiček,
3. kolmý průmět výsledku do směru vektoru \mathbf{e}_2 zvětšíme 4krát, kolmý průmět výsledku do směru vektoru \mathbf{e}_1 se nezmění,
4. výsledek otočíme o úhel $\frac{2}{3}\pi$ proti směru hodinových ručiček.

Najděte matici, která reprezentuje zobrazení f v bazi \mathcal{E} . Výsledek uveďte s přesností na desetitisíciny.

Zjistěte, pro kterou hodnotu x má determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \\ x & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1.2990 & -6.5000 \\ 1.7500 & -2.5981 \end{pmatrix}$$

hodnotu 0.

Rozhodněte, které z vektorů

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -12 & 22 & -10 & -30 \\ 23 & -27 & 10 & 46 \\ 17 & -22 & 11 & 34 \\ 15 & -22 & 10 & 33 \end{pmatrix}.$$

$$23 \quad 27$$

Pro vektory, které vyhodnotíte jako vlastní, určete příslušná vlastní čísla.

Najděte matici lineárního zobrazení f , jehož vlastní vektory mají souřadnice

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ a jejich vlastní hodnoty jsou } \lambda_a = 2, \lambda_b = 0, \lambda_c = 2.$$

$$24 \quad \mathbf{a} : \lambda = -5$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 18 \\ 2 & 6 & 6 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

$$25 \quad \begin{pmatrix} 8 & 12 & 18 \\ 2 & 6 & 6 \\ -4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$$

Určete parametry p, q tak, aby vektor $u_q = (-1, q, -1)^T$ byl vlastním vektorem matice

$$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & -6 & p \\ 3 & 9 & 8 \end{pmatrix}.$$

26 $\begin{array}{rcl} p & = & -5 \\ q & = & 1 \\ \lambda & = & 2 \end{array}$

Najděte odpovídající vlastní číslo.

Určete vlastní čísla a jím odpovídající vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

27 $\begin{array}{l} \frac{1+\sqrt{173}}{2} : \begin{pmatrix} \frac{-13+\sqrt{173}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{1-\sqrt{173}}{2} : \begin{pmatrix} \frac{-13-\sqrt{173}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$

Výsledky uveďte přesně (**nevýjadřujte** odmocniny v desetinném tvaru).

Určete vlastní čísla a jím odpovídající vlastní vektory matice

$$\begin{pmatrix} -8 & -15 & -24 \\ -2 & -3 & -6 \\ 5 & 9 & 15 \end{pmatrix}.$$

28 $\begin{array}{c|c} \lambda & \text{vektor} \\ \hline 0 & (-3, 0, 1) \\ 3 & (-3, -1, 2) \\ 1 & (-1, -1, 1) \end{array}$

V prostoru \mathbf{R}^3 můžeme zavést skalární součin předpisem

$$\langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle_G = \sum_{i,j=1}^3 u_i g_{ij} v_j,$$

kde g_{ij} jsou prvky matice

$$G = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 4 \\ 11 & 14 & 6 \\ 4 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

29 $x = -\frac{127}{37}$

Najděte takovou hodnotu x , pro kterou jsou vektory $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (x, 2, 3)$ navzájem kolmé při skalárním součinu $\langle \cdot | \cdot \rangle_G$.

Na prostoru \mathcal{P}_5 mnohočlenů nejvyšše pátého stupně lze definovat skalární součin $\langle \cdot | \cdot \rangle$ předpisem

$$\begin{aligned} \langle P | Q \rangle &= 3P(-3)Q(-3) + 4P(-2)Q(-2) + 5P(-1)Q(-1) + \\ &\quad + 6P(0)Q(0) + 7P(1)Q(1) + 8P(2)Q(2) \end{aligned}$$

30 $\begin{array}{l} \|P\| = \sqrt{306} = \\ = 1.74929e+01 \end{array}$

Vypočítejte normu mnohočlenu $P(x) = x^2 - 1$ definovanou uvedeným skalárním součinem.

V lineárním obalu množiny vektorů v E_4

$$\mathcal{A} = \{a_1 = (1, -1, -1, -1), a_2 = (6, 1, 0, 1), a_3 = (7, 3, -1, 1)\}$$

31 $\begin{array}{l} e_2 = (5, 2, 1, 2) \\ e_3 = (-\frac{3}{17}, \frac{26}{17}, -\frac{21}{17}, -\frac{8}{17}) \end{array}$

Vytvořte Gramovou-Schmidtovou ortogonalizaci ortogonální množiny.

V lineárním obalu množiny vektorů v E_4

$$\mathcal{A} = \{a_1 = (2, 5, 6, 14), a_2 = (5, 1, -8, 12)\}$$

32 $\begin{array}{l} \mathbf{u}_\perp = (\frac{7}{9}, \frac{7}{9}, 0, \frac{28}{9}) \\ \|\Delta\| = \sqrt{\frac{370}{9}} = 6.41179 \end{array}$

najděte vektor nejbližší k vektoru $\mathbf{u} = (-5, -1, -1, 5)$. Určete velikost odchylky vektoru \mathbf{u} od jeho approximace v lineárním obalu množiny \mathcal{A}

Jméno	výsledky	25981
K dispozici je sada 16 znaků A, B, C, \dots, P . Jaký je maximální počet slov o 16 znacích, která z nich lze vytvořit, pokud požadujeme, aby obsahovala znak A právě jednou, znak B právě dvakrát, znak C právě jednou a ostatní znaky nejvíše jednou? (bez ohledu na to, jestli mají smysl)	33	$\approx 1.3599813427e + 14$
V Newtonově vzorci pro výpočet hodnoty $\frac{1}{\sqrt[4]{(x+81)^3}}$ určete koeficient u x^4 .	34	
V mnohočlenu, který dostanete roznásobením výrazu $(1 + x + 3x^2)^6 ,$ určete koeficient u mocniny $x^9.$	35	2970
Najděte 50. člen posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$ definované tak, že $a_1 = 3, a_2 = -4$ a $a_n = -3a_{n-1} - 2a_{n-2} + 12$ pro $n \geq 3.$	36	$\begin{aligned} & -\frac{5}{2}(-2)^{50} + 4(-1)^{50} + 2 \\ & \approx -2.81475e + 15 \end{aligned}$
Najděte 59. člen posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$ definované tak, že $a_1 = -5, a_2 = -2$ a $a_n = -1.8a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geq 3.$	37	$\begin{aligned} & \phi = \arccos(-0.9) = 2.69057, \\ & 11 \cos(59\phi) + \frac{245}{5\sqrt{19}} \sin(59\phi) \\ & \approx 10.17179861 \end{aligned}$
Najděte všechny posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$, jejichž členy vyhovují rekurentnímu vztahu $a_n = \frac{4}{5}a_{n-1} + \frac{1}{5}a_{n-2} - 180n^2 + 120n - 40$ pro $n \geq 3$ (člen a_n vyjádřete jako funkci jeho pořadového čísla n).	38	$\begin{aligned} a_n = & -50n^3 - 50n^2 \\ & +C + D\left(-\frac{1}{5}\right)^n \end{aligned}$
Je-li to možné, načrtněte graf, jehož skóre je $(1, 1, 1, 3, 1, 7, 5, 1, 3, 1, 8) .$	39	

Jméno

výsledky

25982

Najděte hodnoty x, y, z, α tak, aby platilo

$$(0, x, y, z) = (-8, 2, 4, 0) + \alpha(6, -6, -5, -4).$$

1

Výsledky uveděte s přesností na setiny.

Řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}x + z &= -3 \\-2x - y - 2z &= 2 \\-2y - z &= 1\end{aligned}$$

2

Řešte Gaussovou eliminací soustavu rovnic

$$\begin{aligned}1.26x + 0.04y - 0.00z &= 0.16 \\-0.11x + 1.24y + 0.18z &= 0.02 \\0.03x + 0.06y + 0.88z &= 0.25\end{aligned}$$

3

Do výsledku uveděte také průběh eliminace (tvary upravené matice soustavy po jednotlivých krocích).

Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}-2u + 5x + 5y - 2z &= 6, \\-2u + 5x + 5y - 2z &= 6, \\2u - 4y + 2z &= -2, \\2u - 4x - 4y + 2z &= -6.\end{aligned}$$

4

V tělese \mathbb{Z}_7 řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned}5x + 6y &= 4 \\4x + 3y &= 4\end{aligned}$$

5

Najděte hodnotu x tak, aby trojice čísel $(2, -8, x)$ byla lineární kombinací trojic $(4, 0, -6)$ a $(6, -5, -4)$. Výsledek uveděte s přesností na setiny.

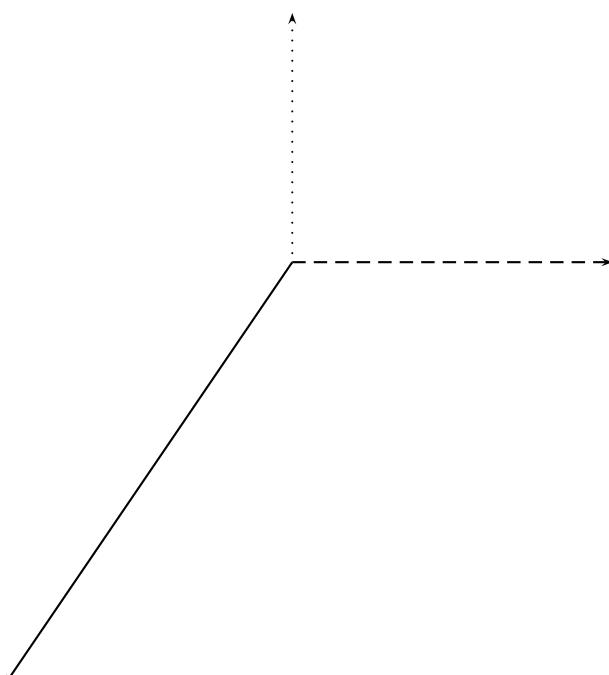
6

Trojici čísel $(12, 36, 4)$ vyjádřete jako lineární kombinaci trojic $(0, -6, -5)$, $(-5, -4, 4)$ a $(1, 2, 3)$. Koeficienty kombinace uveděte s přesností na setiny.

7

Vektor **c** (plný) vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů **a** (čárkováný) a **b** (tečkováný). Uveďte koeficienty lineární kombinace s přesností na setiny, toleruje se odchylka do 10%

8



V rovině je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$. Vyjádřete vektor \vec{DC} jako lineární kombinaci vektorů \vec{BC}, \vec{BF} . Koeficienty lineární kombinace uveďte s přesností na tisíce, toleruje se chyba ± 0.002 .

9

Vypočítejte dimenzi lineárního obalu množiny vektorů z \mathbf{R}^5 :

$$u_1 = (1, 0, 0, -1, -2)$$

$$u_2 = (-2, -2, 2, 2, 2)$$

$$u_3 = (2, 4, -4, -2, 0)$$

$$u_4 = (-2, -2, 2, 2, 2)$$

$$u_5 = (2, 0, 0, -2, -4)$$

10

Určete souřadnice polynomu

$$P(x) = x^2 + x - 9$$

v bazi $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ tvořené mnohočleny

11

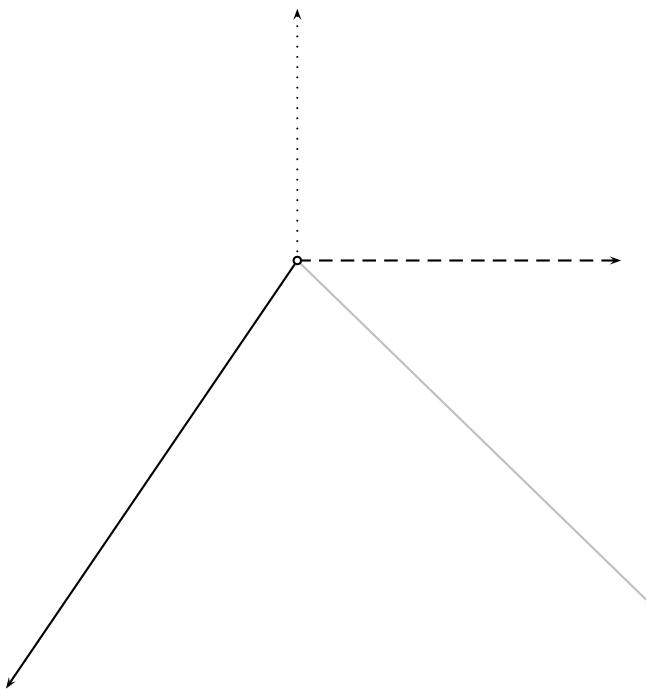
$$Q_1 = (x - 2)(x + 2)$$

$$Q_2 = (x + 3)(x + 2)$$

$$Q_3 = (x + 3)(x - 2).$$

Najděte matici přechodu od baze $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ k bazi $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$. Vektor e_1 je na obrázku zobrazen plně, vektor e_2 šedě, vektor f_1 čárkováně a vektor f_2 tečkováně. Prvky matice přechodu uveďte s přesností na setiny, toleruje se odchylka do 10%

12



Najděte matici přechodu od baze $\mathcal{P} = (P_1, P_2, P_3)$ prostoru kvadratických funkcí tvořené mnohočleny

$$P_1 = (x - 1)(x + 3)$$

$$P_2 = (x + 4)(x + 3)$$

$$P_3 = (x + 4)(x - 1)$$

13

k bazi $\mathcal{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$ tvořené mnohočleny

$$Q_1 = 1$$

$$Q_2 = x + 3$$

$$Q_3 = (x + 3)(x + 6).$$

Jméno

výsledky

25982

Jsou dány matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

14

Vypočítejte součiny matic $A \cdot A, A \cdot B, B \cdot A, B \cdot B$.

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

15

Vypočítejte výraz

$$A^3 + 2A^2 + 2A.$$

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

16

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} .

Je dána matice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

17

Vypočítejte inverzní matici A^{-1} .

Je dána matice

$$A_p = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & p & -1 \end{pmatrix}$$

18

závislá na reálném parametru p . Vypočítejte inverzní matici A_p^{-1} a zjistěte, pro které hodnoty parametru p není definována.

V průběhu výpočtu inverzní matice Gaussovou-Jordanovou eliminací se došlo k následujícímu schématu:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{4} & \frac{3}{4} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{13}{4} & -\frac{7}{4} & 0 & 1 \end{array} \right).$$

19

Dopočítejte hledanou inverzní matici.

V prostoru dimenze 2 jsou dány baze $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ a matice přechodu

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_{\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

20

Najděte matici přechodu od baze \mathcal{F} k bazi \mathcal{G} .Najděte matici lineárního zobrazení f dvoudimenzionálního vektorového prostoru do sebe, které vektoru se souřadnicemi $\begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ přiřazuje vektor se souřadnicemi $\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix}$ a vektoru se souřadnicemi $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ přiřazuje jeho dvojnásobek.

21

V prostoru \mathcal{V} orientovaných úseček v rovině je dána baze $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, přičemž \mathbf{e}_2 dostaneme otočením \mathbf{e}_1 o pravý úhel proti směru hodinových ručiček. Lineární zobrazení $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ přiřazuje vektoru $u \in \mathcal{V}$ vektor, který dostaneme pomocí čtyř operací (v uvedeném pořadí):

1. kolmý průmět vektoru u do směru vektoru \mathbf{e}_1 zvětšíme 3krát, kolmý průmět vektoru u do směru vektoru \mathbf{e}_2 se nezmění,
2. výsledek otočíme o úhel $\frac{1}{4}\pi$ proti směru hodinových ručiček,
3. kolmý průmět výsledku do směru vektoru \mathbf{e}_1 zvětšíme 5krát a obrátíme jeho orientaci, kolmý průmět výsledku do směru vektoru \mathbf{e}_2 se nezmění,
4. výsledek otočíme o úhel $\frac{3}{4}\pi$ po směru hodinových ručiček.

Najděte matici, která reprezentuje zobrazení f v bazi \mathcal{E} . Výsledek uveďte s přesností na desetitisíciny.

Zjistěte, pro kterou hodnotu x má determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

22

hodnotu 0.

Rozhodněte, které z vektorů

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jsou vlastními vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -6 & -8 & -18 & -26 \\ -21 & -12 & -37 & -44 \\ 1 & 8 & 13 & 26 \\ 7 & 0 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

23

Pro vektory, které vyhodnotíte jako vlastní, určete příslušná vlastní čísla.

Najděte matici lineárního zobrazení f , jehož vlastní vektory mají souřadnice $a = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, a jejich vlastní hodnoty jsou $\lambda_a = -2$,

$$\lambda_b = 1, \lambda_c = 3.$$

24

25

Jméno	výsledky	25982
Určete parametry p, q tak, aby vektor $\mathbf{u}_q = (0, -1, q)^T$ byl vlastním vektorem matice		
$\mathbf{A}_p = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ p & -10 & 2 \end{pmatrix}.$	26	
Najděte odpovídající vlastní číslo.		
Určete vlastní čísla a jím odpovídající vlastní vektory matice		
$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}.$	27	
Výsledky uveďte přesně (nevýjadřujte odmocniny v desetinném tvaru).		
Určete vlastní čísla a jím odpovídající vlastní vektory matice		
$\begin{pmatrix} -12 & -10 & -14 \\ -6 & -3 & -6 \\ 12 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$	28	
V prostoru \mathbf{R}^3 můžeme zavést skalární součin předpisem		
$\langle \mathbf{u} \mathbf{v} \rangle_G = \sum_{i,j=1}^3 u_i g_{ij} v_j,$		
kde g_{ij} jsou prvky matice	29	
$G = \begin{pmatrix} 29 & 16 & -7 \\ 16 & 9 & -4 \\ -7 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$		
Najděte takovou hodnotu x , pro kterou jsou vektory $\mathbf{a} = (-3, 3, 1)$, $\mathbf{b} = (1, x, 3)$ navzájem kolmé při skalárním součinu $\langle \cdot \cdot \rangle_G$.		
Na prostoru \mathcal{P}_5 mnohočlenů nejvyšše pátého stupně lze definovat skalární součin $\langle \cdot \cdot \rangle$ předpisem		
$\begin{aligned} \langle P Q \rangle &= 4P(-4)Q(-4) + 5P(-2)Q(-2) + 6P(-1)Q(-1) + \\ &+ 7P(0)Q(0) + 8P(1)Q(1) + 9P(2)Q(2) + 10P(3)Q(3) \end{aligned}$	30	
Vypočítejte normu mnohočlenu $P(x) = x^4 - 1$ definovanou uvedeným skalárním součinem.		
V lineárním obalu množiny vektorů v E_4		
$\mathcal{A} = \{a_1 = (1, 1, 0, 0), a_2 = (1, 1, 1, 2), a_3 = (1, -3, 1, 1)\}$	31	
Vytvořte Gramovou-Schmidtovou ortogonalizaci ortogonální množiny.		
V lineárním obalu množiny vektorů v E_4		
$\mathcal{A} = \{a_1 = (2, 3, -4, -14), a_2 = (6, -4, 1, 10)\}$	32	
najděte vektor nejbližší k vektoru $\mathbf{u} = (-4, 0, 0, 6)$. Určete velikost odchylky vektoru \mathbf{u} od jeho approximace v lineárním obalu množiny \mathcal{A}		

Jméno	výsledky	25982
K dispozici je sada 17 znaků A, B, C, \dots, Q . Jaký je maximální počet slov o 10 znacích, která z nich lze vytvořit, pokud požadujeme, aby obsahovala znak A právě dvakrát, znak B právě třikrát, znak C právě dvakrát a ostatní znaky nejvýše jednou? (bez ohledu na to, jestli mají smysl)	33	
V Newtonově vzorci pro výpočet hodnoty $\frac{1}{\sqrt[3]{x+3^2}}$ určete koeficient u x^5 .	34	
V mnohočlenu, který dostanete roznásobením výrazu $(1 + 2x^2 - 2x^3)^7,$ určete koeficient u mocniny x^{10} .	35	
Najděte 51. člen posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$ definované tak, že $a_1 = -3, a_2 = -3$ a $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 12$ pro $n \geq 3.$	36	
Najděte 60. člen posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$ definované tak, že $a_1 = -4, a_2 = -1$ a $a_n = -1.0 a_{n-1} - a_{n-2}$ pro $n \geq 3.$	37	
Najděte všechny posloupnosti $(a_n)_{n \geq 1}$, jejichž členy vyhovují rekurentnímu vztahu $a_n = \frac{9}{10}a_{n-1} + \frac{1}{10}a_{n-2} - 132n^2 + 68n - 15$ pro $n \geq 3$ (člen a_n vyjádřete jako funkci jeho pořadového čísla n).	38	
Je-li to možné, načrtněte graf, jehož skóre je $(2, 2, 2, 4, 2, 1, 6, 2, 4, 2, 3, 4).$	39	