

Přehled témat ke zkoušce z Úvodu do lineární algebry a diskrétní matematiky, zimní semestr 2025/2026

- **Zobrazení:** Základní pojmy spojené se zobrazením: jednoznačnost, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, vzor prvku, vzor podmnožiny oboru hodnot. Inverzní zobrazení, prosté zobrazení. Skládání zobrazení, identita, .
- **Těleso zbytkových tříd s prvočíselným modulem:** Pojem zbytkové třídy, operace sčítání a násobení. Řešení lineárních rovnic a jejich soustav.
- **Vektorový prostor:** Definice, vlastnosti operací. Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech.
- **Lineární kombinace vektorů:** Definice, lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti. Změny v množině vektorů, které zachovávají lineární obal. Gaussova eliminační metoda.
- **Soustavy lineárních rovnic:** Prostor lineárních rovnic o více neznámých, soustavy se stejnou množinou řešení, řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace a zdůvodnění funkčnosti metody.
- **Lineární závislost vektorů:** Různé definice lineární nezávislosti. Baze vektorového prostoru. Dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v bazi, izomorfismus konečněrozměrného prostoru s \mathcal{T}^n . Souřadnice vektoru v různých bazích.
- **Číselné matice a operace s nimi:** Násobení matice vektorem, násobení matic. Matice přechodu. Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě. Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou. Lineární kombinace matic. Transpozice matice. Vztahy mezi různými maticovými operacemi. Blokové matice a výpočty s nimi.
- **Lineární zobrazení na vektorových prostorech:** Definice lineárního zobrazení, aditivní a homogenní zobrazení. Přípustné operace s lineárními zobrazeními. Jádro lineárního zobrazení, vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot.
- **Frobeniova věta (pro obecná lineární zobrazení):** Množina vektorů daného vektoru při lineárním zobrazení. Postup hledání neznámého vektoru při známém obrazu. Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.
- **Maticová reprezentace lineárního zobrazení:** Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vektoru. Konstrukce maticové reprezentace. Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních. Změna matice při změně bazí ve výchozím a cílovém prostoru.
- **Lineární zobrazení vektorového prostoru do sebe:** Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení, vlastnosti vlastních vektorů. Hlavní vektory. Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorech.
- **Skládání lineárního endomorfismu se sebou samotným:** Mocniny a mohočleny z lineárních endomorfismů. Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu.

- **Determinant:** Možné definice a metody jeho výpočtu, geometrická interpretace.
- **Skalární součin:** Definice, vlastnosti. Norma vektoru a její vlastnosti. Skalární součiny na různých vektorových prostorech. Speciálně: prostor l_2 a výpočet skalárního součinu geometrických posloupností. Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bazi. Výpočet souřadnic vektoru v dané bazi pomocí skalárního součinu.
- **Úhel vektorů a ortogonalita:** Schwartzova nerovnost, úhel mezi vektory, speciálně kolmost dvou vektorů. Ortogonální množiny a jejich vlastnosti. Gramův-Schmidtův algoritmus. Tříčlenné rekurence pro ortogonalizaci speciálně konstruovaných množin.
- **Optimální aproximace:** Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, podstata pojmu „nejbližší“. Konstrukce aproximace: vlastnosti odchylky, výpočet souřadnic aproximace v dané bazi, výpočet velikosti odchylky.
- **Použití nejlepších aproximací:** Metoda nejmenších čtverců, metoda sdružených gradientů, JPEG komprese. Úplná ortogonální množina v prostoru a Fourierovy řady.
- **Výpočetní náročnost operací s maticemi:** Počty operací nutné k násobení matice vektorem, násobení matic, použití Gaussovy eliminační metody a Gaussovy-Jordanovy eliminace. Strassenův algoritmus.
- **Matematická indukce:** princip, použití.
- **Základní pravidla kombinatoriky:** pravidlo součtu, součinu, princip inkluze a exkluze. Dirichletův princip.
- **Kombinatorické výpočty:** Variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním. Kombinatorické identity, Pascalův trojúhelník. Binomická věta. Zobecněná kombinační čísla, Newtonův vzorec.
- **Číselné posloupnosti:** Prostor číselných posloupností. Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností. Rekurentně definované posloupnosti. Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice. Počáteční podmínky. Lineární rekurentní vztahy konečného řádu.
- **Řešení lineárních rekurentních vztahů:** Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty. Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu. Vlastní čísla a vlastní a hlavní vektory posunutí posloupnosti, reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel. Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami.
- **Rovinné grafy:** základní pojmy, incidence, matice sousednosti. Skóre grafu, Havlův algoritmus. Souvislost grafů – sled, tah, cesta. Speciální typy grafů. Eulerovské a hamiltonovské grafy.
- **Ohodnocené grafy:** Optimalizační algoritmy – minimální kostra, nejkratší cesta.

Zkouška je písemná a ústní.

Při zkoušce je nutno mít u sebe průkaz totožnosti s fotografií (nejlépe studentský průkaz), preferuje se fyzická forma.

Písemná část obsahuje čtyři úlohy, každá je hodnocena 0–3 body, k úspěšnému absolvování je potřeba získat aspoň 6 bodů. Čas na vypracování je 90 minut. Jsou povoleny psací a rýsovací potřeby a kalkulačka (doporučují se vlastní), zakázána jsou všechna zařízení umožňující kontakt s vnějším prostorem. Nejsou povoleny oděvní součásti, které by mohly sloužit jako úkryt komunikačních zařízení.

Ústní část se koná v případě úspěšného zvládnutí písemné části. Skládá se zpravidla ze tří otázek, je nutno prokázat základní orientaci ve všech tématech. Vstupní částí ústní zkoušky je otázka, která se týká některého ze základních pojmů, je nutno na ni odpovědět správně bez otálení; odpovědi na další zadané otázky si student může připravit. V případě neúspěchu se opakuje i písemná část.