Rozšířená reálná osa a operace s nekonečny

Pro vyjadřování některých matematických situací, zejména limit, rozšíříme množinu reálných čísel $\mathbb{R}$ o dva speciální symboly:

- ∞ (plus nekonečno),
- $-\infty$ (mínus nekonečno).

Tuto novou množinu nazýváme **rozšířená reálná osa** a označujeme:

$$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Pro každý prvek $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$-\infty < x < +\infty.$$

Definované operace s nekonečny

- $\pm\infty + x = \pm\infty \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R},$
- $|\pm\infty| = +\infty,$
- $+\infty + \infty = +\infty, \quad -\infty - \infty = -\infty,$
- $x \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty & \text{pro } x > 0, \\ \mp\infty & \text{pro } x < 0, \end{cases}$
- $\dfrac{\pm\infty}{x} = \begin{cases} \pm\infty & \text{pro } x > 0, \\ \mp\infty & \text{pro } x < 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$
- $\dfrac{x}{\pm\infty} = 0 \quad \text{pro každé } x \in \mathbb{R}.$

Poznámka: Násobení nebo dělení nekonečna nenulovým záporným reálným číslem mění znaménko.

Nedefinované operace s nekonečny

Následující výrazy nejsou definované a je třeba se jim vyhýbat:

- $\infty - \infty,$
- $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$,
- $\dfrac{\infty}{\infty}, \quad \dfrac{-\infty}{\infty}, \quad \dfrac{\infty}{-\infty}, \quad \dfrac{-\infty}{-\infty},$

- Dělení nulou, např. $\frac{x}{0}$, $\frac{\infty}{0}$, apod.

Poznámka: Symboly $+\infty$ a $-\infty$ nejsou čísla v obvyklém smyslu, ale pouze značky pro „nekonečně velké“ hodnoty. Používají se například při studiu limit. Algebraické operace s nimi je třeba chápat jako zvláštní pravidla – nelze je odvozovat z běžné aritmetiky.

Otevřené a uzavřené intervaly

Při práci s funkcemi, definičními obory, nerovnicemi a limity často používáme intervaly — souvislé části reálné osy. Každý interval je určen krajními body a tím, zda tyto body do intervalu patří, nebo ne.

Značení a význam

- **Otevřený interval:** (a, b)

  Interval obsahuje všechna reálná čísla mezi a a b, ale *bez* krajních bodů. Platí:

  $$x \in (a, b) \quad \Leftrightarrow \quad a < x < b$$

- **Uzavřený interval:** $[a, b]$

  Interval obsahuje všechna čísla mezi a a b *včetně* krajních bodů. Platí:

  $$x \in [a, b] \quad \Leftrightarrow \quad a \leq x \leq b$$

- **Polouzavřené intervaly:**
  - $[a, b)$: krajní bod a do intervalu patří, b nepatří. $(a \leq x < b)$
  - $(a, b]$: krajní bod b do intervalu patří, a nepatří. $(a < x \leq b)$

Intervaly s nekonečnem

Nekonečno (∞) a mínus nekonečno $(-\infty)$ nelze nikdy použít jako uzavřený krajní bod — nejsou to konkrétní čísla.

- (a, ∞): všechna čísla větší než a,
- $[a, \infty)$: všechna čísla větší nebo rovna a,
- $(-\infty, b)$: všechna čísla menší než b,
- $(-\infty, b]$: všechna čísla menší nebo rovna b.

Úvod do komplexních čísel

Komplexní čísla rozšiřují množinu reálných čísel tak, abychom mohli řešit rovnice, které nemají řešení v reálné oblasti (například $x^2 + 1 = 0$).

Zápis komplexního čísla

Každé komplexní číslo z můžeme zapsat ve tvaru:

$$z = a + ib$$

kde:

- a je **reálná část**, značíme $\Re(z)$,
- b je **imaginární část**, značíme $\Im(z)$,
- i je imaginární jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$.

Například:

$$z = 3 - 2i \quad \Rightarrow \quad \Re(z) = 3, \quad \Im(z) = -2$$

Komplexně sdružené číslo

Ke každému komplexnímu číslu $z = a + ib$ přiřazujeme tzv. **komplexně sdružené číslo**:

$$\overline{z} = a - ib$$

Využívá se například při dělení komplexních čísel.

Dělení komplexních čísel

Abychom mohli určit reálnou a imaginární část podílu dvou komplexních čísel, převedeme podíl do tvaru $a + ib$ tak, že čitatel i jmenovatel vynásobíme komplexně sdruženým číslem ke jmenovateli:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Příklad

Určete reálnou a imaginární část podílu:

$$z = \frac{3 + 4i}{1 - 2i}$$

Nejprve vynásobíme čitatel i jmenovatel komplexně sdruženým číslem k jmenovateli:

$$z = \frac{3+4i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(3+4i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-(2i)^2} =$$

$$z = \frac{3+6i+4i+8i^2}{1-(2i)^2} = \frac{3+10i-8}{1+4} = \frac{-5+10i}{5} = -1+2i$$

Výsledek: $\Re(z) = -1, \quad \Im(z) = 2$