

# 1. Zobrazení

**Zadání z okruhů:** Základní pojmy spojené se zobrazením: jednoznačnost, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, vzor prvku, vzor podmnožiny oboru hodnot. Inverzní zobrazení, prosté zobrazení. Skládání zobrazení, identita

- **Zobrazení ( $f: M \rightarrow N$ ):**
  - Předpis, kde ke **každému**  $x$  (vzor) existuje **PRÁVĚ JEDNO**  $y$  (obraz).
  - Nesmí nikdy vyjít více  $y$
  - Např.  $5 + 5 = 10$  (nemůže se to rovnat ještě třeba 11 nebo 12 atd)
- **Jednoznačnost:** Jeden vzor nesmí mít více obrazů.
- **Definiční obor ( $D_f$ ):** Množina vstupů
- **Obor hodnot ( $H_f$ ):** Množina výstupů
- **Vzor:** Vstup, který jsme do zobrazení dali
- **Obraz:** To, co z toho vzoru vzniklo (VÝSLEDEK)
- **Vzor prvku ( $f^{-1}(y)$ ):**
  - Množina všech  $x$ , které se zobrazí na konkrétní  $y$ .

Představ si funkci  $f(x) = x^2$  (umocňování na druhou):

## 1. Vzor prvku 9:

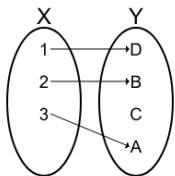
- Která čísla po umocnění dají 9? Jsou to 3 a  $-3$ .
- **Zápis:**  $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$ .

- **Vzor podmnožiny:**
  - Všechny prvky z  $M$ , které se zobrazí do vybrané podmnožiny  $B \subseteq N$

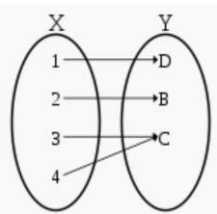
Mějme zobrazení  $f(x) = x^2$ .

- **Tvoje vybraná podmnožina výsledků:**  $\{4, 9\}$  (To jsou ty výsledky, co tě zajímají).
- **Vzor této podmnožiny:** Čísla  $\{-2, 2, -3, 3\}$ .
  - *Proč? Protože všechna tato čísla po umocnění "vyrobí" buď 4, nebo 9.*

- **Prosté (injektivní) zobrazení:** Různé vzory mají různé obrazy. Nemůže mít 1 obraz více vzorů



- 
- **Na (surjektivní) zobrazení:** Obor hodnot je celá cílová množina ( $H_f = N$ ).



○

- **Inverzní zobrazení ( $f^{-1}$ ):** Cesta zpátky. Pokud  $f$  udělalo z  $A \rightarrow B$ , inverzní zobrazení udělá  $B \rightarrow A$ .
- **Skládání ( $f \circ g$ ):**

Mějme funkce:  $f(x) = 2x$  a  $g(x) = x + 3$ .

- **Složení ( $g \circ f$ )( $x$ ):** Nejdřív násobíš dvěma, pak přičteš tři  $\rightarrow 2x + 3$ .
- **Složení ( $f \circ g$ )( $x$ ):** Nejdřív přičteš tři, pak to celé násobíš dvěma  $\rightarrow 2(x + 3) = 2x + 6$ .

- **Identita:** Zobrazení, které nemění vstup  $\rightarrow \text{Id}(5) = 5$

## 2. Těleso zbytkových tříd s prvočíselným modulem

**Zadání z okruhů:** Pojem zbytkové třídy, operace sčítání a násobení. Řešení lineárních rovnic a jejich soustav.

- Množina  $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$ , kde  $p$  je prvočíslo.
  - **Proč prvočíslo?** Protože v tělese musí ke každému nenulovému prvku existovat **inverzní prvek** (dělení). Kdyby  $p$  nebylo prvočíslo (např. 4), tak existují 'dělitelé nuly' (např.  $2 \cdot 2 = 4 \equiv 0$  a tím pádem k dvojce neexistuje inverze).
- **Zbytková třída:**
  - Každý prvek v množině je zbytková třída
  - Když máme mod 5, tak naše zbytkové třídy jsou (0, 1, 2, 3, 4)
  - Např. třída  $[2]_5$  reprezentuje čísla, která mají po dělení 5 zbytek 2 (... , 7, 12, 17, ...)
- **Operace:**

**Příklad pro  $\mathbb{Z}_5$ :**

- **Sčítání:**  $3 + 4 = 7 \rightarrow (\text{zbytek po dělení } 5) \rightarrow 2$
- **Násobení:**  $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow (\text{zbytek po dělení } 5) \rightarrow 2$

- **Řešení lineárních rovnic:**

- **Příklad v  $\mathbb{Z}_5$ :** Řeš rovnici  $2x = 1$ .
- Normálně bys řekl  $x = 0, 5$ . Ale v  $\mathbb{Z}_5$  číslo 0, 5 neexistuje.
- Musíš najít číslo z  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ , které když vynásobíš dvojkou, zbytek bude 1.
- Zkusíš:  $2 \cdot 3 = 6 \rightarrow \text{zbytek po dělení } 5 \text{ je } 1$ .
- **Výsledek:**  $x = 3$ .

- **Počítání:**
  - **Malé rovnice:** Jde jednoduše vyřešit zkoušet dosazovat.
  - **Soustava:** Řeší se Gaussovou el. stejně jako v  $\mathbb{R}$ , jen sčítáme/násobíme modulo  $p$ .

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies \mathbf{y} = 2, \mathbf{x} = 0$$

### 3. Vektorový prostor

**Zadání z okruhů:** Definice, vlastnosti operací. Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech.

- Definice: Množina prvků (vektorů), na které máme definované 2 operace:
  - Sčítání (+)
  - Násobení ( $\cdot$ ).
  - Dělení a Odčítání není potřeba, protože je to schované v sčítání a násobení.
- **Vlastnosti operací (Axiomy):**
  - **Pravidla pro SČÍTÁNÍ:**
    - **Nezáleží na pořadí:**  $1 + 2 = 2 + 1$
    - **Závorky jsou jedno:**  $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$
    - **Nulový vektor:**  $1 + 0 = 1$
    - **Opačný vektor:**  $1 + (-1) = 0$
  - **Pravidla pro NÁSOBENÍ:**
    - **Roznásobovat závorky:**  $2 \cdot (1 + 3) = 8$
    - **Jednotka:**  $2 \cdot 1 = 2$
- **Příklady vektorů:**

**Sčítání:** První s prvním, druhý s druhým.

- $(1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$

**Násobení:** Každou složku vynásobíme číslem.

- $2 \cdot (1, 5) = (2, 10)$

- 
- **Příklady maticí stejných rozměrů:**

**1. Sčítání matic (po složkách)** Sčítají se vždy čísla na stejných pozicích. Matice musí mít stejný rozměr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**2. Násobení matice číslem (každý prvek)** Každé číslo uvnitř matice se vynásobí daným koeficientem.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Podprostor:** Podmnožina vektorového prostoru, která je sama o sobě vektorovým prostorem (tzn. operace sčítání a násobení nás nevyvedou ven). Obsahuje nulový vektor. Je uzavřená na sčítání a na násobení číslem. Příklad: Přímka procházející počátkem v  $R^2$ .
- **Lidské vysvětlení:**
  - Definice: Je to „hřiště“, kde platí pravidla slušného chování. Když sečtete dva členy hřiště, výsledek musí být zase na hřišti. Když člena zvětšíte/zmenšíte, musí být zase na hřišti.

## 4. Lineární kombinace vektorů

**Zadání z okruhů:** Definice, lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti. Změny v množině vektorů, které zachovávají lineární obal. Gaussova eliminační metoda.

- **Definice:** Vektor se rovná součtu jiných vektorů, které jsou jednotlivě násobeny koeficienty
- $$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$
- **Lineární obal ( $\langle M \rangle$ ):** množina **všech možných lineárních kombinací**, které dokážete z daných vektorů vytvořit.
    - **1 Vektor:** Lineární obal je celá PŘÍMKA.
    - **2 Vektory:** Jejich lineární obal je celá PLOCHA (pokud nejsou na jedné přímce).
    - **3 Vektory:** Jejich lineární obal je celý 3D PROSTOR.
  - **Vlastnosti:**
    - Musí procházet body (0, 0, 0).
    - Co se stane v podprostoru, zůstane v podprostoru (neexistuje operace, které by nás vyhodila ven).
  - **Změny zachovávající obal:**
    - Vynásobení vektoru **nenulovým** číslem.
    - Přičtení násobku jednoho vektoru k druhému. (výsledek se možná natočí jinak, ale bude furt v rovině).
    - Prohození vektoru.
  - GEM: Gaussova eliminace není nic jiného než **opakované děláni lineárních kombinací**, dokud se vektory „nevyčistí“.

## 5. Soustavy lineárních rovnic

**Zadání z okruhů:** Prostor lineárních rovnic o více neznámých, soustavy se stejnou množinou řešení, řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace a zdůvodnění funkčnosti metody.

- **Prostor rovnic:** Všechny možné pravdivé důsledky původního zadání
  - **Např.  $x + y = 2$**

Rovnice	Patří do prostoru?	Proč?
$2x + 2y = 4$	✓ ANO	Je to jen násobek (stejná informace).
$x + 2y = 2$	✗ NE	Je to nová, nezávislá informace (nedá se namíchat).

- **Soustavy se stejnou množinou řešení (Ekvivalentní soustavy):**

- Mají stejnou množinu řešení.
- Soustava rovnic o 2 neznámých.
- Stejná pravda, jen jinak napsaná.

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\ 2x - y &= 1\end{aligned}$$

- **Proč GEM funguje:** Protože EKVIVALENTNĚ upravuje rovnice.

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

- $0 = 5$  (Žádné řešení)
- $0 = 0$  (Nekonečně mnoho řešení, je potřeba nějaký PARAMETR)

$$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

## 6. Lineární závislost vektorů

**Zadání z okruhů:** Různé definice lineární nezávislosti. Báze vektorového prostoru. Dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v bázi, izomorfismus konečněrozměrného prostoru s  $T^n$ . Souřadnice vektoru v různých bázích.

- **Lineární Závislost (Závislé):** Alespoň jeden vektor je možný vytvořit pomocí ostatních, takže tam je zbytečný
  - $(1, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 1)$  – Ten třetí vektor je zbytečný, protože jde vyrobit po sečtení prvních dvou.
- **Lineární Nezávislost (Nezávislé):** Vektory, které míří každý jiným směrem. Nelze z prvního vyrobit druhý.
- **Báze:** Nejmenší počet vektorů, se kterým lze popsat všechno v daném prostoru.
  - Jsou to vektory, které jsou lineárně nezávislé (není tam nic navíc).
  - Generují celý prostor.
  - Bází je nekonečně mnoho.
  - **STANDARDNÍ BÁZE:**

$$E = ((1, 0), (0, 1)).$$

- **Dimenze:** Počet VEKTORŮ v bázi.
  - V rovině  $\mathbb{R}^2$  je dimenze 2
  - V rovině  $\mathbb{R}^3$  je dimenze 3
- **Souřadnice:** Jednoznačná n-tice koeficientů vyjadřující vektor v dané bázi.

$$B = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = (1, 1)$$

$$b_2 = (0, 2)$$

$$u = (3, 7)$$

$$a \cdot (1, 1) + b \cdot (0, 2) = (3, 7)$$

$$[u]_B = (3, 2)$$

○ **Izomorfismus:**

- Pokud jádro je 0 (nic se neztratilo) a obrazem je celý cílový prostor
- „Dokonalé zrcadlo“
- Splňuje INJEKTIVNOST (Prosté) a SURJEKTIVNOST (Na) = Bijekce

## 7. Číselné matice a operace

**Zadání z okruhů:** Násobení matice vektorem, násobení matic. Matice přechodu. Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě. Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou. Lineární kombinace matic. Transpozice matice. Vztahy mezi různými maticovými operacemi. Blokové matice a výpočty s nimi.

- **Násobení:** Lze, pokud počet sloupců matice A je roven počet řádků matice B

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 10 + 2 \times 20 + 3 \times 30 & 1 \times 11 + 2 \times 21 + 3 \times 31 \\ 4 \times 10 + 5 \times 20 + 6 \times 30 & 4 \times 11 + 5 \times 21 + 6 \times 31 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10+40+90 & 11+42+93 \\ 40+100+180 & 44+105+186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- **Matice přechodu:**

- Slouží k PŘEPOČTU SOUŘADNIC z báze do druhé báze
- Obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů jedné báze vzhledem k druhé bázi.

**Zadání:** Stará báze  $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$  Nová báze  $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$

**Výpočet koeficientů (sloupců):**

$$(1, 0) = 1 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (0, 1)$$

$$(0, 1) = 0 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (0, 1)$$

**Výsledná matice přechodu:**

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

○

- **Jednotková matice ( $I$ ):** Na diagonále 1, jinde 0.
- **Inverzní matice:**  $AA^{-1} = I$ . Výpočet  $(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$ .
- **Transpozice ( $A^T$ ):** Záměna řádků a sloupců.
- **Lineární kombinace matic:** Kombinace matematických operací (např.  $2 \cdot A - 3 \cdot B$ )
- **Blokové matice:** Matice rozdělená na podmatice. Operace se provádí jako s prvky (pokud sedí rozměry).

$$M = \left( \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

- **VZTAHY:**

Transpozice součinu	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Inverze součinu	$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
Transpozice inverze	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Dvojitá transpozice	$(A^T)^T = A$
Dvojitá inverze	$(A^{-1})^{-1} = A$

## 8. Lineární zobrazení

**Zadání z okruhů:** Definice lineárního zobrazení, aditivní a homogenní zobrazení. Přípustné operace s lineárními zobrazeními. Jádro lineárního zobrazení, vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot.

- **Definice:**
  - Lineární zobrazení  $L$  je funkce mezi 2 vektory, např.  $U$  a  $V$ .
- Zachovává  $L(u + v) = L(u) + L(v)$  a  $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ .
- **Aby bylo zobrazení  $L : U \rightarrow V$  lineární, musí splňovat:**
  - Sčítání (Aditivita):  $L(u + v) = L(u) + L(v)$
  - Násobení (Homogenita):  $L(\alpha u) = \alpha L(u)$ .
- **Přípustné operace s lineárními zobrazeními:**
  - **SOUČET:**  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ : Neboli  $2x + 5x = 7x$
  - **NÁSOBENÍ:**  $(af)(x) = a * f(x)$
  - **SKLÁDÁNÍ:**  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ :
    - Čte se to – “f po g”
    - Záleží na pořadí
    - Vstup se hodí do  $g$  a výstup z toho se hodí do  $f$
- **Jádro (Ker):**

- $\text{Ker}(L) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$ .
- “Ker říká, co se vše ztratilo”
- Je to podprostor definičního oboru ( $U$ ).
- Vždy obsahuje aspoň nulový vektor  $\{0\}$
- Zobrazení je INJEKTIVNÍ právě tehdy, když v jádru leží nula
- **Obor hodnot ( $\text{Im}$ ):**
  - Je to podprostor cílového prostoru ( $V$ ).
  - “Im říká, co zůstalo”
  - Zobrazení je SURJEKTIVNÍ, pokud obor hodnot splývá s celým cílovým prostorem
- **Platí:**
  - $\dim \text{Ker} + \dim \text{Im} = \dim V$ . ( $\dim V$  je Dimenze definiční obor)
  - Příklad:
    - $\dim(V) = 3\text{D}$  svět ( $x, y, z$ )
    - $\dim(\text{Im}) = 2\text{D}$  ( $x, y$  – fotka na papíře)
    - $\dim(\text{Ker}) = 1\text{D}$  ( $z$  – ztratila se hloubka)

## 9. Frobeniova věta

**Zadání z okruhů:** (pro obecná lineární zobrazení): Množina vzorů daného vektoru při lineárním zobrazení. Postup hledání neznámého vzoru při známém obrazu. Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.

- **Definice věty:**
  - Říká nám, jestli má rovnice vůbec smysl
  - Řešení existuje  $\Leftrightarrow h(A) = h(A|b)$
  - **Hodnost matice = Hodnost rozšířené matice.** Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků (nebo sloupců) té matice. Značíme  $h(A)$ .
  - $0 = 5$  (nemá řešení)
  - $0 = 0$  (nekonečně mnoho řešení)

**Pokud  $h(A) \neq h(A|b)$ :** Soustava **nemá řešení** (rovnice si odporují).

**Pokud  $h(A) = h(A|b) = n$  (počet neznámých):** Soustava má právě **jedno řešení**.

**Pokud  $h(A) = h(A|b) < n$ :** Soustava má **nekonečně mnoho řešení** (máme volné parametry).

- **Množina vzorů daného vektoru:**

$$M = x_p + \text{Ker}(A)$$

▪

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

▪

- $x_p$  = Partikulární řešení, neboli jeden konkrétní vzor, který FUNGUJE



- $\text{Ker}(A)$  = Jádru. To je množina všech vektorů, které se zobrazí na nulu
- $M = (\text{Jeden funkční input}) + (\text{Cokoliv, co funkce ignoruje/vynuluje})$
- **Postup hledání:**
  - 1. **Rovnice:**  $2x = 6$  a  $2y = 12$ .
  - 2. **Matice:**  $\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{array} \right)$ .
  - 3. **Výsledek:**  $x = 3, y = 6$ .
  - 4. **Vzor:** Vektor  $(3, 6)$ .

## 10. Maticová reprezentace

**Zadání z okruhů:** Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru. Konstrukce maticové reprezentace. Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních. Změna matice při změně bazí ve výchozím a cílovém prostoru.

- **Definice:** Je to předpis zapsaný do tabulky, který umožňuje vypočítat lineární zobrazení pomocí násobení souřadnic.
- **Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru:**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}: \text{Maticová reprezentace zobrazení } f.$$

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{Souřadnice } \mathbf{vzoru} \text{ v bázi } \mathcal{B} \text{ (vstupní data).}$$

$$[f(x)]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}: \text{Souřadnice } \mathbf{obrazu} \text{ v bázi } \mathcal{E} \text{ (výsledek po zobrazení).}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- **Zobrazení je jednoznačně určeno obrazy bazových vektorů:**
  - Vzor ( $x$ ): Vstupní vektor
  - Obraz ( $y$ ): Výstup
  - Matice ( $A$ )

$$y = A \cdot x$$

- **Konstrukce matice:** Popisuje výrobu té matice z vektorů
- **Maticová reprezentace na lin. zobrazeních:**
  - $(f + g) = A + B$
  - $(a * f) = a * A$
  - $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ :
    - Čte se to – “f po g”
    - Záleží na pořadí
    - Vstup se hodí do  $g$  a výstup z toho se hodí do  $f$
- **Změna báze:**

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

- 
- $A$  = Stará matice
- $T$  = Matice přechodu
- $T^{-1}$  = Inverzní matice přechodu
- Proč se to dělá: Matice může být jednodušší v jiné bázi

## 11. Lineární zobrazení do sebe (Endomorfismus)

**Zadání z okruhů:** Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení, vlastnosti vlastních vektorů. Hlavní vektory. Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorech.

- **Definice:** Lineární zobrazení, které jde do stejného prostoru
- **Vlastní číslo ( $\lambda$ ):**
  - $\det(A - \lambda I) = 0$ .
  - Faktor, kterým se ten směr natáhne.
- **Vlastní vektor:**
  - Je to nenulový vektor  $v$ , pro který platí, že má furt STEJNÝ SMĚR, ale může měnit velikost kvůli násobení číslem  $\lambda$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$(A - \lambda I)v = 0$$

- **Hlavní vektory:** Pokud mám málo vlastních vektorů, doplňujeme bázi hlavními vektory
- **Výpočet:**

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 1 \\ 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

(Pak se počítá determinant)

$$\lambda^2 - \lambda - 43 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{173}}{2}$$

(Vlastní čísla)

- Jordanův řetězec:

$$(A - \lambda I)v_{hlavní} = v_{vlastní}$$

## 12. Skládání endomorfismu se sebou

**Zadání z okruhů:** Mocniny a mnohočleny z lineárních endomorfismů. Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu.

- **Mocniny zobrazení  $f^n$ :**

- $f(f(f(\dots f(x))))$ . Prostě tu operaci zopakujes n-krát.
- **Odpovídající matice  $A^n$ :** V maticovém světě to odpovídá  $A * A * A * \dots * A$ .
- **Příklad:** Pokud matice  $A^1$  otočí vektor o  $90^\circ$ , pak  $A^2$  ho otočí o  $180^\circ$ , ...

- **Mnohočlen zobrazení:**

- Matice můžeme dosazovat do rovnic jako čísla
- **POZOR:** u konstant je potřeba přidat **JEDNOTKOVOU MATICI**

- $x^2 - 1 \xrightarrow{\text{dosadíme } A} A^2 - 1 \cdot I.$

- Základní vzorec:

- $$P(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$

- **Jádro mnohočlenu:** Jsou to VEKTORY, které výsledná matice VYNULUJE (odpadkové koš)

- $$P(A) \cdot v = 0$$

- **Vztah kořenů k jádru:** Pokud VLASTNÍ ČÍSLO  $\lambda$  vynuluje **rovnici**, potom i jeho VLASTNÍ VEKTOR vynuluje **matici**.

## 13. Determinant

**Zadání z okruhů:** Možné definice a metody jeho výpočtu, geometrická interpretace.

- **Definice:** Číslo, co určuje, zda se matice zvětšila/zmenšila atd.

$\det(A) > 1$	<b>Zvětší se</b> (Nafoukne)
$\det(A)$ je 0 až 1	<b>Zmenší se</b> (Scvrkne)
$\det(A) = 0$	<b>Zničí se</b> (Rozplácne na placku)
$\det(A)$ je minus	<b>Otočí se</b> (Jako v zrcadle)

- $\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$
- Vzorec pro INVERZNÍ MATICI.

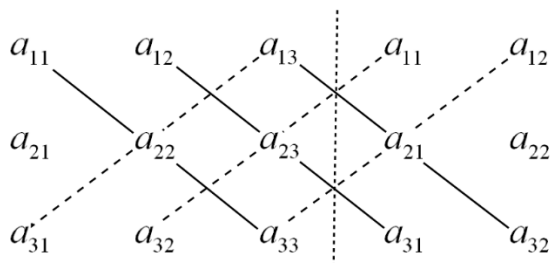
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

- **adj(A) – Adjungovaná matice:** Matice složená z determinantů všech podmatic původní matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjungovaná}} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

○ **Metody:**

- Sarrusovo pravidlo (pouze  $n = 3$ )



- Gaussova eliminace na trojúhelníkový tvar (součin diagonály).
- Laplaceův rozvoj

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -9. \end{aligned}$$

○ **Geometrie:**

- **Matice 2x2** -> Vytvoříme **2 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBSAH plochy** je roven determinantu
- **Matice 3x3** -> Vytvoříme **3 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBJEM tělesa** je roven determinantu
- Kdyby determinant byl např. **-5**, tak to nevadí, protože bereme **ABSOLUTNÍ hodnotu**

## 14. Skalární součin

**Zadání z okruhů:** Definice, vlastnosti. Norma vektoru a její vlastnosti. Skalární součiny na různých vektorových prostorech. Speciálně: prostor  $l_2$  a výpočet skalárního součinu geometrických posloupností. Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bázi. Výpočet souřadnic vektoru v dané bázi pomocí skalárního součinu.

○ **Definice:**

- Operace, která ze 2 vektorů udělá jedno číslo (skalár)
- Pomocí toho zjistím, jestli vektory jsou na sebe kolmé (=0)

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$$

○ **Vlastnosti:**

- Symetrie:  $u \cdot v = v \cdot u$
- Funguje roznásobování závorek:  $a \cdot (u + v) = au + av$
- Skalární součin vektoru se sebou samým je vždy **KLADNÝ** nebo **NULA**

- $u \cdot u \geq 0.$
- **Norma:**  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$ 
  - Vždy je kladný nebo roven 0
- **Prostor  $l_2$ :**
  - $l_2$  = Nekonečněrozměrný prostor, který se využívá v pokročilé matematice
  - Pokud máme vektor, který má nekonečně mnoho složek
- $u = (u_1, u_2, u_3, \dots)$
- Musí platit podmínka, aby “nevybouchnul” do nekonečna:
- $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty$
- **Metrická matice ( $G$ ):**
  - Nástroj, který nám umožní vypočítat skalární součin 2 vektorů v LIBOVOLNÉ BÁZI
- $a^T \cdot G \cdot b = 0$

## 15. Úhel a ortogonalita

**Zadání z okruhů:** Schwartzova nerovnost, úhel mezi vektory, speciálně kolmost dvou vektorů. Ortogonální množiny a jejich vlastnosti. Gramův-Schmidtův algoritmus. Tříčlenné rekurence pro ortogonalizaci speciálně konstruovaných množin.

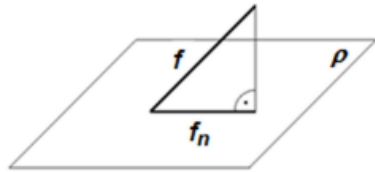
- **Schwartzova nerovnost:**
  - Velikost skalárního součinu nemůže být větší než součin jejich délek.
- $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
- **Úhel:**
  - Díky této nerovnosti víme, že výpočet výjde vždy mezi -1 a 1.
- $\cos(\phi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$
- **Kolmost:**
  - **Kolmost = ORTOGONÁLNÍ**
  - $\langle u, v \rangle = 0.$
- **Ortogonální množiny:**
  - Množina vektorů, kde každý vektor je s každým kolmý
  - Každý vektor míří jiným směrem
- **Gram-Schmidt:**
  - Algoritmus, který transformuje BÁZI na BÁZI ORTOGONÁLNÍ

- Výsledné vektory jsou tak kolmé
- Pokud i délky jsou jedna, jedná se o **ORTONORMÁLNÍ BÁZI**

## 16. Optimální aproximace

**Zadání z okruhů:** Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, podstata pojmu „nejbližší“. Konstrukce aproximace: vlastnosti odchylky, výpočet souřadnic aproximace v dané bázi, výpočet velikosti odchylky.

- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitějšího za něco jednoduššího)
- **Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru:**
  - Říká se tomu ORTOGONÁLNÍ projekce



- **Konstrukce aproximace:**
  - **Vlastnosti odchylky:**
    - Odchylka je definována jako rozdíl mezi původním vektorem a jeho projekcí

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}.$$

- **Výpočet souřadnic v OBECNÉ bázi:**
  - Přes Gramovu matici

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$

- **Výpočet souřadnic v ORTOGONÁLNÍ bázi:**

$$c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$$

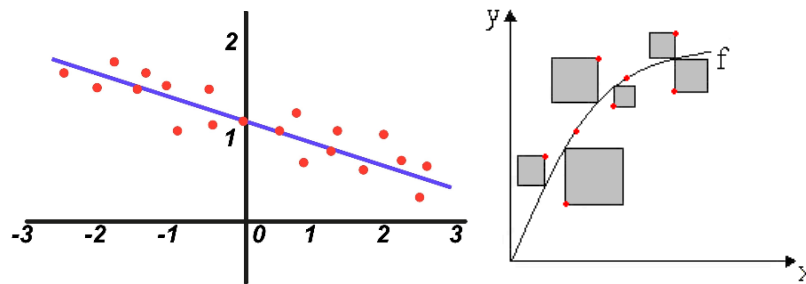
- Výpočet velikosti odchylky:
  - Pomocí Pythagorovy věty
  - $\|\mathbf{v}\|^2$  = Čtverec délky původního vektoru
  - $\|\hat{\mathbf{v}}\|^2$  = Čtverec délky jeho ortogonální projekce

$$\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \|\hat{\mathbf{v}}\|^2}$$

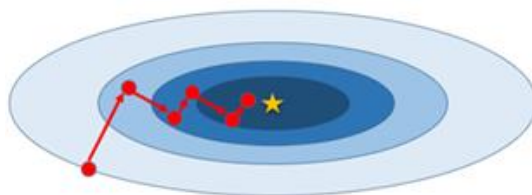
## 17. Použití aproximací

**Zadání z okruhů:** Metoda nejmenších čtverců, metoda sdružených gradientů, JPEG komprese. Úplná ortogonální množina v prostoru a Fourierovy řady.

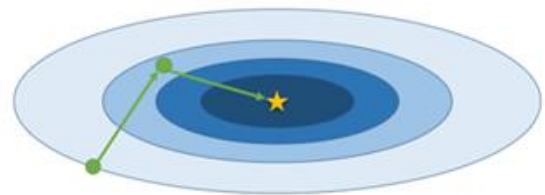
- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitějšího za něco jednoduššího)
- **Metoda nejmenších čtverců:**
  - Řešení přeuročené soustavy  $Ax = b$ . Obvykle nemá řešení, protože čára nemůže projít přes všechny body.
  - Minimalizujeme přes  $\|Ax - b\|^2$  a hledáme nejmenší možnou chybu.
  - Příklad: Máme několik teček v grafu, které měli ležet v jedné přímce, ale kvůli chybám měření, tam jsou odchylky.
  - Princip: Hledáme takovou přímku, aby součet chyb "vzdálenosti bodů od přímky" byl co nejmenší



- **Metoda sdružených gradientů:**
  - Conjugate Gradient - Sdružené gradienty
    - Udělá první krok a druhý krok volí chytře, že zamíří přímo do středu terče (do řešení)
  - Steepest Descent - Metoda největšího spádu
    - Udělá první krok a pak každý následující je kolmý. Dlouho to trvá, než dojde k cíli.



M. největšího spádu



M. sdružených gradientů

- **Fourierovy řady:** Rozklad složité funkce na součet jednoduchých goniometrických funkcí (sinus a kosinus – jsou na sebe kolmé a nezávislé) = lze z nich složit libovolný signál.
- **JPEG komprese:** Využívá aproximaci k redukci dat (lidské oko nepozná rozdíl, ale počítač ušetří data)
- **Úplná ortogonální množina:** Je to taková množina vzájemně kolmých (ortogonálních) vektorů, ke které už nelze přidat žádný další nenulový vektor, aby byl kolmý na všechny ostatní.

## 18. Výpočetní náročnost

**Zadání z okruhů:** Počty operací nutné k násobení matice vektorem, násobení matic, použití Gaussovy eliminační metody a Gaussovy-Jordanovy eliminace. Strassenův algoritmus.

- **Matice × Vektor:**
  - $A * v = b$
  - $O(n^2)$ .
- **Matice × Matice:**
  - $A * B = C$
  - $O(n^3)$ .
- **GEM:**  $O(n^3)$ .
- **Determinant:**  $O(n^3)$ .
- **GJE:**
  - Je to o trochu pomalejší než GEM, ale řádově je to stejné
  - $O(n^3)$ .
- **Strassenův algoritmus:**
  - Algoritmus pro násobení matic s náročností cca  $O(n^{2.807})$ .
    - Máme matici 2x2
    - Klasický postup potřebuju 8 násobení
    - Strassenův postup jich potřebuje 7, ale je potřeba více sčítání (které je levné)
    - Vyplatí se jen opravdu pro obrovské matice.

## 19. Matematická indukce

**Zadání z okruhů:** Princip, použití.

- Definice: Je to metoda, která dokazuje, že něco platí pro všechna  $\mathbb{N}$
- **1. Základní krok:**  $n = 1$  (Musíme ověřit, že pravidlo platí pro nejmenší číslo. Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **2. Indukční krok:**  $n = n + 1$  (Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **REKURZE:** Např. v programování můžeme naprogramovat funkci FAKTORIAL, kde používáme rekurzi (Funkce volá sama na sebe, dokud nenarazí na nejmenší číslo)
- **Použití:**

- Gaussovský součet =  $\frac{n(n+1)}{2}$
- V programování se to používá např. u REKURZÍ

$$\begin{aligned} n = k: & \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \\ n = k+1: & \quad 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ & \quad \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ & \quad 0 = 0 \end{aligned}$$



## 20. Pravidla kombinatoriky

**Zadání z okruhů:** Pravidlo součtu, součinu, princip inkluze a exkluze. Dirichletův princip.

- **Pravidlo součinu:**

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

- Příklad: Mám 3 trička a 5 kalhot. Mohu z toho vytvořit  $3 \times 5 = 15$  outfitů.

- **Pravidlo součtu:**

- $|A \cup B| = |A| + |B|$

- Příklad: Mám peníze na jedno jídlo a mohu si vybrat ze 3 polívek nebo 5 hlavních jídel:  $3 + 5 = 8$  možností.

- **Princip inkluze a exkluze:**

- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

- Příklad: Ve třídě je 20 programátorů, 15 z nich umí Python a 10 z nich umí Javu. Kolik lidí umí OBA jazyky?
  - $15 + 10 = 25$  (to je větší než 20, musíme z výsledku odečíst počet lidí)
  - $25 - 20 = 5$

- **Dirichletův princip:**

- $n + 1$  předmětů do  $n$  přihrádek  $\Rightarrow$  aspoň jedna přihrádka má 2 předměty.
  - Příklad: Mám 13 studentů, takže je 100% šance, že se někteří narodili ve stejný měsíc ( $n + 1 = 13$  studentů,  $n = 12$  měsíců)

## 21. Kombinatorické výpočty

**Zadání z okruhů:** Variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním.

Kombinatorické identity, Pascalův trojúhelník, Pascalova Identita. Binomická věta.

Zobecněná kombinační čísla, Newtonův vzorec.

- **Variace:**

- $\frac{n!}{(n-k)!}$

- $n$  = počet prvků
  - $k$  = kolik
  - Příklad: Běží 10 lidí, a 3 dostanou medaili ( $10! / 7!$ )
  - ZÁLEŽÍ NA POŘADÍ

- **Permutace:**

- $P(n) = n!$  - pořadí.
  - Např. mám 5 lidí vedle sebe, kolika způsoby je můžu seřadit? =  $5!$

- **Kombinace (bez opakování):**

- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

- NEzáleží NA POŘADÍ, výsledek je stejný
- Příklad: Sportka

○ **Kombinace (s opakováním):**

$$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

- Příklad: 3 druhy zmrzliny, chceme 2 kopečky. Zmrzliny můžeme opakovat.

○ **Pascalův trojúhelník:**

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

$$(a+b)^4$$



$$1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

○ **Pascalova IDENTITA:**

- Matematický zápis, jak funguje sčítání v P. trojúhelníku

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

○ **Binomická věta:**

- Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat pomocí P. trojúhelníku např.

$$(a+b)^4$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

○ **Zobecněná kombinační čísla:**

- $n$  = může být klidně REÁLNÉ číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

○ **Newtonův vzorec:**

- Platí jen, když  $|x|$  je  $< 1$ . Kdyby to bylo velké, řada by šla do NEKONEČNA
- Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat např.  $(1+x)^{0,5}$  i když mocnina není celé číslo (může být i záporné)

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

## 22. Číselné posloupnosti

**Zadání z okruhů:** Prostor číselných posloupností. Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností. Rekurentně definované posloupnosti. Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice. Počáteční podmínky. Lineární rekurentní vztahy konečného řádu.

- Definice:

- Zobrazení  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- Nekonečný seznam čísel
- Pokud je to lineární zobrazení, platí pro ně:

**Aditivita:**  $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$

▪ **Homogenita:**  $\Delta(5 \cdot a) = 5 \cdot \Delta a$

- Lineární zobrazení:

- **Posun (Shift):**  $S(a_n) = a_{n+1}$  (Zahod' první prvek a posuň se dál)
- **Diference:**  $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$  (Počítá změnu mezi sousedy)

- Rekurence: Rovnice  $L(a_n) = 0$ .

- Je to něco jako Fibonacci
- Pravidlo, jak vypočítat další člen, když neznáš ten předchozí

▪  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  (Fibonacci).

- Rekurentně definovaná posloupnost: Neříká nám rovnou, jaký je výsledek, ale říká, jak se k němu dostat z předchozího kroku

$a_{n+1} = a_n + 3$  (Vztah)

$a_1 = 2$  (Počáteční podmínka - stojíme na čísle 2)

- Počáteční podmínky: Číslo zadané na začátku. Nutné pro jednoznačnost řešení

- Lineární rekurentní vztahy konečného řádu:

- Pokud vyšli 2 kořeny JINAK:

•  $a_n = C_1 \cdot (\lambda_1)^n + C_2 \cdot (\lambda_2)^n$

- Pokud vyšli 2 kořeny STEJNĚ:

•  $a_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot n \cdot \lambda^n$

## 23. Řešení lineárních rekurentních vztahů

**Zadání z okruhů:** Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty. Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu. Vlastní čísla a vlastní hlavní vektory posunutí posloupnosti,

reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel. Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami.

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 12$$

- Koeficienty: to jsou ty čísla před „a“, takže (2, 3)

- Charakteristický mnohočlen:

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

- Vlastní čísla:

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0. \text{ Vyjde ti } \lambda_1 = 3 \text{ a } \lambda_2 = -1.$$

- Vlastní hlavní vektory:

- To se dělá, pokud nám vyjdou 2 stejné kořeny
- Pokud máš násobný kořen, jeden vektor je  $3^n$ , ale druhý ti chybí. Musíš ho vyrobit uměle jako  $(3^n * n)$

- Posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel:

- Kdyby DISKRIMINANT byl 0 nebo záporný
- Místo  $3^n$  by se tam dali SINUS a KOSINUS

- Řešení nehomogenní části (Co s číslem na konci?):

- To je ta -12 na konci
- Homogenní: Kdyby tam byla 0
- Nehomogenní/Partikulární: To je ta -12 na konci

Dosadíme  $c$  místo všech  $a_n$ :

$$c = 2c + 3c - 12$$

Vyřešíme rovnici pro  $c$ :

$$c = 5c - 12$$

$$-4c = -12$$

$$c = 3$$

Naše partikulární řešení je 3.

## 24. Rovinné grafy

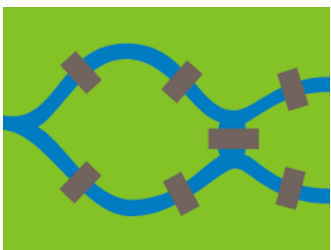
**Zadání z okruhů:** Základní pojmy, incidence, matice sousednosti. Skóre grafu, Havlův algoritmus. Souvislost grafů – sled, tah, cesta. Speciální typy grafů. Eulerovské a hamiltonovské grafy.

- **Rovinné grafy:** To je graf, který lze nakreslit na papíř, aniž by se křížily hrany
- **Základní pojmy:** Vrcholy  $V$ , hrany  $E$ .
- **Incidence:** Vztah, který nám říká, jestli hrana je napojená na vrchol. Často se z toho tvoří MATICE INCIDENCE.

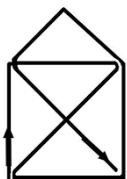
- **Matice sousednosti:** Ta nám ukazuje, zda např. vrchol A a B spolu sousedí.
- **Skóre grafu:** Počet hran, kolik je napojených na vrchol.
- **Havlův algoritmus:** Zjistí, zda jde z posloupnosti vytvořit graf.
  - Maže se vždy největší prvek a poté se od každého čísla odebere 1. Tohle se opakuje několikrát.
  - Pokud v posloupnosti zbydou jen 0, graf lze vytvořit.
- **Souvislost:**
  - **Sled:** Posloupnost vrcholů a hran (mohou se opakovat).
  - **Tah:** Neopakují se hrany (kreslení domečku jedním tahem).
  - **Cesta:** Neopakují se vrcholy.

Název	Opakování hran?	Opakování vrcholů?	Přísnost
Sled	✓ ANO	✓ ANO	Žádná
Tah	✗ NE	✓ ANO	Střední
Cesta	✗ NE	✗ NE	Nejvyšší

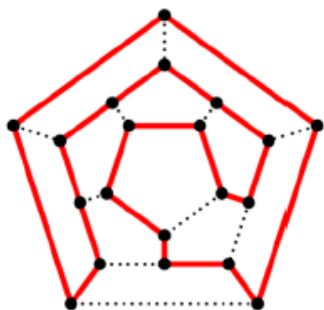
- **Eulerovský graf:** Tah, který projde každou **HRANOU** právě jednou a vrátíš se zpět. Existuje, pokud mají vrcholy sudý stupeň (Sudý počet hran).



- **Eulerovský tah:** Například kreslení domečku jedním tahem



- **Hamiltonovský graf:** Obsahuje kružnici procházející všemi **VRCHOLY**.



## 25. Ohodnocené grafy

**Zadání z okruhů:** Optimalizační algoritmy – minimální kostra, nejkratší cesta.

- Hrany mají ohodnocení  $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ . (každé hraně je PŘÍŘAZENO reálné číslo)
- **Minimální kostra:** Podgraf, který je stromem, obsahuje všechny vrcholy a má minimální součet vah. Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.
- **Borůvkův/Kruskalův algoritmus:** Spojování VŠECH vrcholů nejlevnější hranou.
- **Nejkratší cesta:** Cesta z  $u$  do  $v$  s minimálním součtem vah.
- **Dijkstrův algoritmus:** Hledá nejkratší cestu ze startu do cíle

