Vybrané kapitoly středoškolské matematiky

1 Pravidla pro počítání se zlomky

$$
\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a \cdot k}{b \cdot k} && \text{rozšíření zlomku, } k \neq 0 \\
\frac{a \cdot k}{b \cdot k} &= \frac{a}{b} && \text{krácení zlomku, } k \neq 0 \\
\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{a \cdot c}{b \cdot d} && \text{pro } b, d \neq 0 \\
\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} &= \frac{a \cdot d}{b \cdot c} && \text{pro } b, c, d \neq 0 \\
\frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} && \text{pro } b, d \neq 0 \\
\frac{a}{b} - \frac{c}{d} &= \frac{ad - bc}{bd} && \text{pro } b, d \neq 0 \\
\frac{a}{1} &= a && \text{každé celé číslo je zlomek} \\
\frac{a}{a} &= 1 && \text{pro } a \neq 0 \\
\frac{0}{a} &= 0 && \text{pro } a \neq 0
\end{aligned}
$$

2 Pravidla pro počítání s mocninami

Základní pravidla pro práci s mocninami:

$$
\begin{aligned}
a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\
\frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n}, \quad \text{pro } a \neq 0 \\
(a^m)^n &= a^{mn} \\
(a \cdot b)^n &= a^n \cdot b^n \\
\left(\frac{a}{b}\right)^n &= \frac{a^n}{b^n}, \quad \text{pro } b \neq 0 \\
a^0 &= 1, \quad \text{pro } a \neq 0 \\
a^{-n} &= \frac{1}{a^n}, \quad \text{pro } a \neq 0.
\end{aligned}
$$

3 Pravidla pro počítání s odmocninami (2. odmocnina)

Základní pravidla pro práci s druhou odmocninou $\sqrt{a}$, kde vždy předpokládáme, že $a \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{a \cdot b}, \quad \text{pro } a \geq 0,\ b \geq 0 \\
\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad \text{pro } a \geq 0,\ b > 0 \\
\sqrt{a^2} &= |a| \\
\sqrt{a} + \sqrt{b} &\neq \sqrt{a+b} \quad \text{(obecně neplatí!)} \\
\sqrt{a} - \sqrt{b} &\neq \sqrt{a-b} \quad \text{(obecně neplatí!)}
\end{aligned}$$

Poznámka: Pro záporná čísla nemá druhá odmocnina v reálném oboru smysl a výrazy jako $\sqrt{-4}$ se řeší až v oboru komplexních čísel.

4 Obecné odmocniny a racionální mocniny

Obecná odmocnina n-tého stupně ze čísla a se zapisuje jako:

$$\sqrt[n]{a}$$

Pokud je n liché, pak je odmocnina definována pro všechna reálná čísla a. Pokud je n sudé, je definována pouze pro $a \geq 0$ v reálných číslech.

Zápis pomocí racionálních mocnin

Odmocninu lze přepsat jako mocninu s racionálním exponentem:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Základní pravidla

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[n]{a \cdot b}, && \text{pro } a \geq 0,\ b \geq 0 \text{ nebo } n \text{ liché} \\
\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} &= \sqrt[n]{\frac{a}{b}}, && \text{pro } a \geq 0,\ b > 0 \text{ nebo } n \text{ liché} \\
\left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}, && \text{pro } a \geq 0 \text{ nebo } n \text{ liché} \\
\sqrt[n]{a} &= a^{\frac{1}{n}}, && \text{pro } a \geq 0 \text{ nebo } n \text{ liché} \\
\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} &= \sqrt[mn]{a} = a^{\frac{1}{mn}}, && \text{pro } a \geq 0 \text{ nebo } m, n \text{ lichá} \\
\sqrt[n]{a^n} &= \begin{cases} |a|, & \text{pro sudé } n \\ a, & \text{pro liché } n \end{cases}
\end{aligned}$$

Poznámka: Pro výrazy jako $a^{\frac{m}{n}}$ platí běžná pravidla pro mocniny:

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} &= a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} \\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^k &= a^{\frac{mk}{n}} \\ \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} &= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} \end{aligned}$$

5 Mnohočleny (polynomy)

5.1 Definice polynomu

Mnohočlen (polynom) v jedné proměnné x je výraz tvaru

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla a n je přirozené číslo nebo nula. Nejvyšší mocnina proměnné určuje stupeň polynomu.

5.2 Druhé a třetí mocniny dvojčlenů

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \end{aligned}$$

5.3 Rozdíl a součet mocnin

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\ a^n + b^n &= (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + b^{n-1}), \quad \text{pro lichá } n \end{aligned}$$

5.4 Binomická věta

Pro přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

kde $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ jsou binomické koeficienty.

5.5 Dělení polynomu se zbytkem

Spočtěme podíl $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.

1. krok:

Vydělíme nejvyšší mocniny: $\dfrac{x^3}{x^2} = x$. Tento člen je první část podílu. Vynásobíme jím dělitel:

$$x \cdot (x^2 - x + 1) = x^3 - x^2 + x$$

Odečteme tento výraz od původního dělence:

$$(x^3 + 2x^2 + x + 1) - (x^3 - x^2 + x) = 3x^2 + 1$$

A máme: $\dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = x + \dfrac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{3x^2 + 1}$.

2. krok:

Znovu vydělíme nejvyšší mocniny: $\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$. Tento člen je druhá část podílu. Vynásobíme jím dělitel:

$$3 \cdot (x^2 - x + 1) = 3x^2 - 3x + 3$$

Odečteme od předchozího zbytku:

$$(3x^2 + 1) - (3x^2 - 3x + 3) = 3x - 2$$

Závěr:

Získali jsme podíl $x + 3$ a zbytek $3x - 2$. Výsledek dělení tedy je:

$$\boxed{\frac{x^3 + 2x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1} = x + 3 + \frac{3x - 2}{x^2 - x + 1}}$$

Schéma dělení:

$$\begin{array}{rrrrl}
\big(x^3 & +2x^2 & +x & +1\,\big) & \div \big(x^2 - x + 1\big) = x + 3 + \dfrac{3x - 2}{x^2 - x + 1} \\
-x^3 & +x^2 & -x & & \\
\hline
 & 3x^2 & & +1 & \\
- & 3x^2 & +3x & -3 & \\
\hline
 & & 3x & -2 & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(zbytek)}
\end{array}$$

5.6 Doplnění na čtverec a rozklad kvadratického trojčlenu

Rozložme kvadratický trojčlen

$$x^2 + 6x + 5$$

na součin lineárních členů pomocí doplnění na čtverec.

1. Výraz připomíná začátek druhé mocniny:

$$(x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2.$$

   Porovnáme členy u x:

$$2a = 6 \implies a = 3.$$

2. Doplníme a odečteme $9 - 9$ (protože $a^2 = 9$), abychom vytvořili čtverec:

$$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4.$$

3. Využijeme vzorec pro rozdíl dvou čtverců $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ a máme tedy:

$$(x+3)^2 - 2^2 = ((x+3) - 2)((x+3) + 2) = (x+1)(x+5).$$

Závěr: Kvadratický trojčlen $x^2 + 6x + 5$ jsme rozložili na součin $(x+1)(x+5)$ pomocí doplnění na čtverec a vzorce pro rozdíl dvou čtverců.

6 Řešení rovnic

6.1 Lineární rovnice s absolutní hodnotou

Řešíme rozdělením reálné osy pomocí nulových bodů na intervaly, kde se nemění znaménko výrazů uvnitř absolutních hodnot.

Příklad: Řešme rovnici

$$|x - 2| = |x + 1|.$$

Výrazy uvnitř absolutních hodnot mění znaménko v bodech:

$$x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2, \qquad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Podle těchto nulových bodů rozdělíme reálnou osu na 3 intervaly:

$$\text{I: } x < -1, \quad \text{II: } -1 \leq x < 2, \quad \text{III: } x \geq 2.$$

Pro každý interval odstraníme absolutní hodnoty podle znamének výrazů:

I. $x < -1 \quad \Rightarrow$ oba výrazy jsou záporné a tedy na tomto intervalu platí:

$$|x - 2| = -(x - 2), \quad |x + 1| = -(x + 1).$$

$$-(x-2) = -(x+1) \quad \Rightarrow \quad -x + 2 = -x - 1 \quad \Rightarrow \quad 2 = -1 \quad \text{(spor)}.$$

Žádné řešení v tomto intervalu.

II. $-1 \leq x < 2 \quad \Rightarrow$ první záporný, druhý kladný a tedy na tomto intervalu platí:

$$|x - 2| = -(x - 2), \quad |x + 1| = x + 1.$$

$$-(x-2) = x + 1 \quad \Rightarrow \quad -x + 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad 2 - 1 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

Zkontrolujeme, že $x = \frac{1}{2} \in [-1, 2)$ a to platí, takže máme jedno řešení.

III. $x \geq 2 \quad \Rightarrow$ oba výrazy jsou nezáporné a tedy na tomto intervalu platí:

$$|x - 2| = x - 2, \quad |x + 1| = x + 1.$$

$$x - 2 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad -2 = 1 \quad \text{(spor)}.$$

Žádné řešení v tomto intervalu.

Závěr: Rovnice má jediné řešení:

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}.$$

6.2 Kvadratická rovnice

Obecný tvar kvadratické rovnice je:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0.$$

Metoda doplnění na čtverec:

$$x^2 + 6x + 5 = (x^2 + 6x + 9) - 9 + 5 = (x+3)^2 - 4 =$$

$$(x+3)^2 - 2^2 = ((x+3) - 2)((x+3) + 2) = (x+1)(x+5).$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = -5, \quad x_2 = -1}.$$

Podle vzorce:

Pro rovnici $ax^2 + bx + c = 0$, platí:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- Výraz $D = b^2 - 4ac$ se nazývá **diskriminant**.
- Dle hodnoty diskriminantu:
  - $D > 0 \ldots$ dvě různá reálná řešení
  - $D = 0 \ldots$ jedno reálné řešení (dvojnásobný kořen)
  - $D < 0 \ldots$ žádné reálné řešení (řešení jsou komplexní čísla)

6.3 Iracionální rovnice

Iracionální rovnice obsahují neznámou pod odmocninou. Nejčastěji je řešíme pomocí umocnění. Musíme však být opatrní: umocnění obou stran je **neekvivalentní úprava**, která může přidat **falešné (nesmyslné) kořeny**. Proto je třeba na konci vždy udělat **zkoušku**.

Příklad:

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

Podmínky: Aby měl výraz pod odmocninou smysl, musí platit:

$$x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1$$

Řešení: Umocníme obě strany rovnice:

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

Převedeme vše na jednu stranu:

$$x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + 3x = 0$$

Vytkneme:

$$x(-x + 3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \text{nebo} \quad x = 3$$

Zkouška dosazením do zadání:
- Pro $x = 0$: $\sqrt{0+1} = 1 \neq 0 - 1 = -1$ a tedy nalezený bod není řešením!
- Pro $x = 3$: $\sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 = 3 - 1 = 2$ a tedy nalezený bod je řešením!

Závěr: Rovnice má jediné reálné řešení:

$$\boxed{x = 3}$$

Poznámka: Řešením kvadratické rovnice po umocnění jsme získali dvě hodnoty, ale jen **jedna** z nich je skutečným řešením původní rovnice. **Zkouška je nutná!**

6.4 Exponenciální rovnice

Exponenciální rovnice obsahuje neznámou v exponentu. Základním nástrojem pro řešení je převod na stejný základ:

$$a^x = a^y \quad \Leftrightarrow \quad x = y$$

Příklad:

$$3^{x+1} = 9^{x-2}$$

Nejprve přepíšeme číslo 9 jako 3^2:

$$3^{x+1} = \left(3^2\right)^{x-2} = 3^{2(x-2)}$$

Máme stejný základ, takže porovnáme exponenty:

$$x + 1 = 2(x - 2) \Rightarrow x + 1 = 2x - 4 \Rightarrow 5 = x$$

$$\boxed{x = 5}$$

6.5 Logaritmické rovnice

Logaritmické rovnice obsahují neznámou uvnitř logaritmu. Základním nástrojem pro řešení je převod mezi logaritmickým a exponenciálním tvarem:

$$\log_b a = c \quad \Leftrightarrow \quad a = b^c$$

Obecné podmínky: Aby měl logaritmus smysl, musí platit:

$$\begin{cases} a > 0 & \text{(argument logaritmu)} \\ b > 0,\ b \neq 1 & \text{(základ logaritmu)} \end{cases}$$

Příklad 1: Řešení pomocí převodu do mocninného tvaru

$$\log_{10}(x-1) = 1.$$

Podmínka: $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$
Převedeme rovnici do exponenciálního tvaru:

$$\log_{10}(x-1) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x - 1 = 10^1 = 10 \quad \Rightarrow \quad x = 11$$

Ověření podmínky: $11 > 1$ a tedy řešení je přípustné.

$$\boxed{x = 11}$$

Příklad 2: Řešení pomocí úpravy na stejný základ Řešme rovnici:

$$\log_2(x+1) = \log_2(5)$$

Oba logaritmy mají stejný základ, proto platí:

$$x + 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

Ověření podmínky: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$, což platí.

$$\boxed{x = 4}$$

7 Nerovnice

Nerovnice jsou podobné rovnicím, ale místo rovnosti obsahují vztah typu:

$$<, \quad >, \quad \leq, \quad \geq$$

Řešení nerovnice je množina všech reálných čísel, pro která je tento vztah pravdivý.

7.1 Lineární nerovnice

Lineární nerovnice mají tvar např.:

$$ax + b < 0 \quad \text{nebo} \quad ax + b \geq c$$

Při řešení postupujeme jako u rovnic – izolujeme neznámou, ale musíme si dát pozor při násobení nebo dělení záporným číslem: **Pozor:** Při násobení nebo dělení nerovnosti záporným číslem se **otáčí znaménko nerovnosti**.

Příklad: Vyřešme nerovnici:

$$3x - 5 \leq 1$$

Postup:

$$\begin{aligned} 3x - 5 &\leq 1 \\ 3x &\leq 6 \quad \text{(přičteme 5)} \\ x &\leq 2 \quad \text{(vydělíme 3)} \end{aligned}$$

Odpověď:

$$\boxed{x \leq 2}$$

Grafické znázornění: Na číselné ose jsou řešením všechna čísla nalevo od dvojky včetně.

7.2 Lineární nerovnice s absolutní hodnotou

Při řešení nerovnic s absolutní hodnotou vycházíme z definice absolutní hodnoty:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{je-li } x \geq 0 \\ -x, & \text{je-li } x < 0 \end{cases}$$

Postup:

- Určíme **nulové body**, tj. hodnoty, kdy výraz v absolutní hodnotě je nulový.
- Rozdělíme řešení na jednotlivé intervaly podle těchto bodů (uvnitř každého z těchto intervalů se znaménko výrazu nemění).
- V každém intervalu absolutní hodnotu odstraníme podle znaménka výrazu a řešíme klasickou nerovnici.

Příklad: Vyřešme nerovnici:

$$|x - 2| < 3$$

Nulový bod: $x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$
Rozdělíme na dvě oblasti podle tohoto bodu:

(1) Pro $x \geq 2$: $|x - 2| = x - 2$, tedy řešíme:

$$x - 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad x < 5$$

Spojením s podmínkou $x \geq 2$ dostáváme:

$$\boxed{2 \leq x < 5}$$

(2) Pro $x < 2$: $|x - 2| = -(x - 2) = -x + 2$, tedy řešíme:

$$-x + 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad -x < 1 \quad \Rightarrow \quad x > -1$$

Spojením s podmínkou $x < 2$ dostáváme:

$$\boxed{-1 < x < 2}$$

Celkové řešení: Výsledné řešení tvoří sjednocení obou dílčích výsledků:

$$\boxed{-1 < x < 5}$$

Poznámka: Tato nerovnice má také ekvivalentní zápis bez absolutní hodnoty:

$$|x - 2| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 < x - 2 < 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{-1 < x < 5}$$

8 Soustavy lineárních rovnic

Máme několik základních metod:

- **Dosazovací metoda**
- **Sčítací (eliminační) metoda**
- **Srovnávací metoda**

Ukažme si jednotlivé metody na příkladu:

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 2x - y &= 4 \end{aligned}$$

Dosazovací metoda

1. Vyjádříme jednu neznámou z jedné rovnice, např. z první:

$$y = 5 - x$$

2. Dosadíme do druhé rovnice místo y:

$$2x - (5 - x) = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x - 5 + x = 4 \quad \Rightarrow \quad 3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

3. Dosadíme zpět do rovnice $y = 5 - x$:

$$y = 5 - 3 = 2$$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

Sčítací (eliminační) metoda

1. Sečteme obě rovnice tak, aby vypadla jedna neznámá. Např.:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \text{sečteme: } (x + y) + (2x - y) = 5 + 4$$

$$3x = 9 \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

2. Dosadíme do první rovnice:

$$3 + y = 5 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

Srovnávací metoda

1. Vyjádříme y z obou rovnic:
$$\begin{cases} y = 5 - x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

2. Porovnáme pravé strany:
$$5 - x = 2x - 4 \quad \Rightarrow \quad 9 = 3x \quad \Rightarrow \quad x = 3$$

3. Dosadíme zpět:
$$y = 5 - 3 = 2$$

$$\boxed{x = 3, \quad y = 2}$$

9 Obecná rovnice přímky

Obecná rovnice přímky je ve tvaru: $ax + by + c = 0$.

Typy rovnic přímek

- **Přímka rovnoběžná s osou x:** Má tvar:
$$y = c$$
kde c je výška, ve které přímka protíná osu y.

- **Přímka rovnoběžná s osou y:** Má tvar:
$$x = c$$
kde c je souřadnice, ve které přímka protíná osu x.

- **Obecný případ – šikmá přímka:** Pokud přímka není rovnoběžná s žádnou osou, lze ji zapsat např. ve směrnicovém nebo obecné tvaru:
$$y = kx + q \quad \text{(směrnicový tvar)} \quad \text{nebo} \quad ax + by + c = 0 \quad \text{(obecný tvar)}$$

9.1 Příklad: Určete rovnici přímky procházející body $A[1, 2]$, $B[3, 6]$

Přímka není rovnoběžná s osou x (obě hodnoty x jsou různé) ani s osou y (hodnoty y jsou různé), proto má přímka směrnicový tvar:
$$y = kx + q$$

Postup 1: Směrnicový tvar - vzorec

1. Určíme směrnici:
$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6-2}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$$

2. Použijeme tvar $y = kx + q$, dosadíme bod $A[1, 2]$:
$$2 = 2 \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

3. Rovnice přímky:
$$\boxed{y = 2x}$$

Postup 1: Směrnicový tvar - dosazení

1. Dosadíme bod $A = [1; 2]$ do rovnice $y = kx + q$:
$$2 = k \cdot 1 + q \quad \Rightarrow \quad k + q = 2 \tag{1}$$

2. Dosadíme bod $B = [3; 6]$ do téže rovnice:
$$6 = k \cdot 3 + q \quad \Rightarrow \quad 3k + q = 6 \tag{2}$$

3. Řešíme soustavu rovnic:
$$\begin{aligned} k + q &= 2 \quad (1) \\ 3k + q &= 6 \quad (2) \end{aligned}$$

4. Odečteme (1) od (2):
$$(3k + q) - (k + q) = 6 - 2 \quad \Rightarrow \quad 2k = 4 \quad \Rightarrow \quad k = 2$$

5. Dosadíme $k = 2$ zpět do (1):
$$2 + q = 2 \quad \Rightarrow \quad q = 0$$

6. Rovnice přímky je:
$$\boxed{y = 2x}$$