Druhý zápočtový test – vzorové řešení

1. Spočítejte
$$\int_0^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}} \frac{4x^3\big(1-\operatorname{tg}(x^4)\big)^3}{\cos^2(x^4)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme postupně dvě substituce.
Nejprve
$$t = x^4, \qquad \mathrm{d}t = 4x^3\,\mathrm{d}x, \qquad x \in \left[0, \sqrt[4]{\tfrac{\pi}{4}}\right] \Rightarrow t \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right].$$
Dostáváme
$$\int_0^{\sqrt[4]{\frac{\pi}{4}}} \frac{4x^3\big(1-\operatorname{tg}(x^4)\big)^3}{\cos^2(x^4)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/4} \frac{\big(1-\operatorname{tg} t\big)^3}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$
Nyní použijeme substituci
$$u = \operatorname{tg} t, \qquad \mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}, \qquad t \in \left[0, \tfrac{\pi}{4}\right] \Rightarrow u \in [0,1].$$
Integrál přejde na
$$\int_0^{\pi/4} \frac{\big(1-\operatorname{tg} t\big)^3}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 (1-u)^3\,\mathrm{d}u = \left[\frac{-(1-u)^4}{4}\right]_0^1 = \frac{-(1-1)^4}{4} - \frac{-(1-0)^4}{4} = \frac{1}{4}.$$

2. Spočtěte
$$\int_0^{1/2} x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Použijeme integraci per partes
$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$
Volíme
$$u(x) = x, \quad v'(x) = \mathrm{e}^{2x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \quad v(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}.$$
Pak
$$\int x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} - \int 1 \cdot \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{x\mathrm{e}^{2x}}{2} - \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4} \overset{C}{=} \frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x-1).$$
Dosadíme do určitého integrálu:
$$\int_0^{1/2} x\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{2x}}{4}(2x-1)\right]_0^{1/2} = \frac{\mathrm{e}^1}{4}(1-1) - \frac{\mathrm{e}^0}{4}(0-1) = 0 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}.$$

3. Spočtěte

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1}{x\big(\ln^2 x + 4\ln x + 4\big)}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení: Přirozená substituce

$$t = \ln x, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \ln \mathrm{e}^2 = 2\ln \mathrm{e} = 2$$

vede na

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1}{x\big(\ln^2 x + 4\ln x + 4\big)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{t^3+t^2+t+1}{t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{(t^3+4t^2+4t)-3t^2+3t+1}{t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_1^2 \frac{(t^3+4t^2+4t)-(3t^2+12t+12)+9t+13}{t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 t-3+\frac{9t+13}{t^2+4t+4}\,\mathrm{d}t$$

(alternativa je dělení polynomů).
Zlomek v integrálu rozložíme na parciální zlomky: Hledáme konstanty A, B tak, aby

$$\frac{9t+13}{(t+2)^2} = \frac{A}{t+2} + \frac{B}{(t+2)^2}.$$

Po vynásobení jmenovatelem $(t+2)^2$ dostaneme

$$9t+13 = A(t+2)+B \qquad \Rightarrow \qquad t(9-A)+1\cdot(13-2A-B)=0.$$

Porovnáním koeficientů u t a konstanty:

$$A=9, \qquad 2A+B=13 \quad \Rightarrow \quad B=13-18=-5.$$

Tedy

$$\frac{9t+13}{(t+2)^2} = \frac{9}{t+2} - \frac{5}{(t+2)^2}$$

(alternativou k rozkladu na parciální zlomky je substituce za $y=t+2$) a celkem máme:

$$\int_1^2 \frac{\ln^3 x + \ln^2 x + \ln x + 1}{x\big(\ln^2 x + 4\ln x + 4\big)}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(t-3+\frac{9}{t+2}-\frac{5}{(t+2)^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[\frac{t^2}{2}-3t+9\ln|t+2|+\frac{5}{t+2}\right]_1^2 = \left(\frac{2^2}{2}-3\cdot 2+9\ln 4+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1^2}{2}-3\cdot 1+9\ln 3+\frac{5}{3}\right) =$$

$$= \left(2-6+9\ln 4+\frac{5}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}-3+9\ln 3+\frac{5}{3}\right) = -1+\frac{15-6-20}{12}+9\ln\frac{4}{3} =$$

$$= -1+\frac{-11}{12}+9\ln\frac{4}{3} = \frac{-12-11}{12}+9\ln\frac{4}{3} = 9\ln\frac{4}{3}-\frac{23}{12}.$$

Ještě se podrobněji vrátíme k výše uvedenému integrálu, který můžeme spočítat substitucí za $y = t + 2$, $\mathrm{d}y = \mathrm{d}t$:

$$\int \left(\frac{9}{t+2} - \frac{5}{(t+2)^2} \right) \mathrm{d}t \overset{C}{=} \int \left(\frac{9}{y} - \frac{5}{y^2} \right) \mathrm{d}y \overset{C}{=} \int \left(9y^{-1} - 5y^{-2} \right) \mathrm{d}y \overset{C}{=} 9 \ln |y| - 5 \frac{y^{-1}}{-1} \overset{C}{=}$$

$$\overset{C}{=} 9 \ln |y| + \frac{5}{y} \overset{C}{=} 9 \ln |t+2| + \frac{5}{t+2}.$$

4. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

a přímkou procházející body $[0, -2]$ a $[2, -1]$ na intervalu $[0, 1]$.

Řešení: Nejprve určíme rovnici přímky procházející body $[0, -2]$ a $[2, -1]$. Směrnice je

$$k = \frac{-1 - (-2)}{2 - 0} = \frac{1}{2}.$$

Přímka tedy má rovnici

$$y = \frac{x}{2} + q \quad \text{a prochází bodem } [0, -2] \quad \Rightarrow \quad -2 = \frac{0}{2} + q \quad \Rightarrow \quad y = \frac{x}{2} - 2.$$

Funkce $\operatorname{arctg} x$ je na intervalu $[0, 1]$ kladná, zatímco přímka $y = \frac{x}{2} - 2$ je na intervalu $[0, 1]$ záporná.

Obrazec je tedy mezi horní křivkou $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a dolní křivkou $y = \frac{x}{2} - 2$ na intervalu $[0, 1]$ a jeho obsah je

$$S = \int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - \left(\frac{x}{2} - 2 \right) \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + 2 \right) \mathrm{d}x.$$

Potřebujeme spočítat primitivní funkci k funkci $\operatorname{arctg} x$ pomocí integrace per partes. Volíme

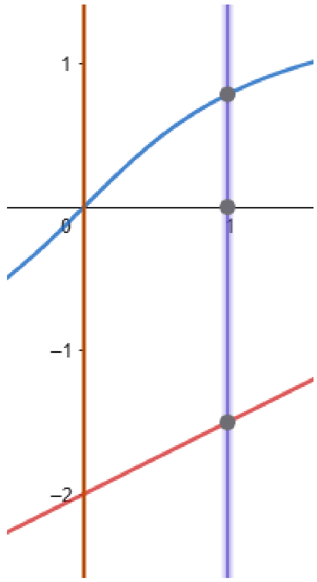
$$u = \operatorname{arctg} x, \qquad v' = 1, \quad \Rightarrow \quad u' = \frac{1}{1+x^2}, \qquad v = x.$$

Použijeme vzorec

$$\int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x : \qquad \int \operatorname{arctg} x \,\mathrm{d}x \overset{C}{=} x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Substituce $t = 1 + x^2$, $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ dává

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \overset{C}{=} \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{C}{=} \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \operatorname{arctg} x$ a přímky $y = \dfrac{x}{2} - 2$ na intervalu $[0, 1]$.

Celkem tedy

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x \stackrel{C}{=} x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2).$$

Celkem tedy máme

$$S = \int_0^1 \left(\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + 2\right) \mathrm{d}x = \left[x \ \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) - \frac{x^2}{4} + 2x\right]_0^1$$

$$= \left(1 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{4} + 2\right) - \left(0 \cdot \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2} \ln 1 - 0 + 0\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{7}{4}.$$