

Cvičení 12

Příklad 1. Vypočtěte (také jako určité integrály)

- $\int 2x \sin(2x) dx \quad \left(\stackrel{c}{=} -x \cos(2x) + \frac{1}{2} \sin(2x) \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $\int 3x^2 e^{x^3} + 2 \sin x \cos x dx \quad \left(\stackrel{c}{=} e^{x^3} - \cos^2 x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $\int \frac{7x - 3}{x^2 - 3x - 4} dx$
 $\left(\stackrel{c}{=} 2 \ln |x + 1| + 5 \ln |x - 4| \quad \text{v intervalu, který neobsahuje body } x = -1, x = 4 \right),$
- $\int \frac{2x^3 - 3x^2 + 4x - 5}{(x - 1)^2} dx$
 $\left(\stackrel{c}{=} x^2 + x + 4 \ln |x - 1| + \frac{2}{x - 1} \quad \text{pro } x \in (-\infty, 1) \text{ nebo } x \in (1, \infty) \right),$
- $\int \frac{3}{x^2 - 4x + 8} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} \frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{x - 2}{2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} \frac{1}{3 \cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} \quad \text{např. pro } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right),$
- $\int \frac{dx}{3^x + 1} \quad \left(\stackrel{c}{=} x - \frac{\ln(3^x + 1)}{\ln 3} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right),$
- $\int (2x^3 - 3x^2 - 6x + 2)e^{2x} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} (x^3 - 3x^2 + 1)e^{2x} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R} \right).$

Složitější příklady

Příklad 2. Vypočtěte (také jako určité integrály)

- $\int \frac{5x + 7}{\sqrt{5 - 4x - x^2}} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} -5\sqrt{5 - 4x - x^2} - 3 \arcsin \frac{x + 2}{3} \quad \text{pro } x \in (-5, 1) \right),$
- $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{-12 + 7x - x^2}} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} -2\sqrt{-12 + 7x - x^2} + 8 \arcsin(2x - 7) \quad \text{pro } x \in (3, 4) \right),$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x} + 1)^2} \quad (\text{substituce } \sqrt[6]{x} = t) \quad \left(\stackrel{c}{=} 3 \operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} - \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x} + 1} \quad \text{pro } x \in (0, \infty) \right),$

- $\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x + 2 \operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad \text{např. pro } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right),$
- $\int \frac{1}{\sin^3 x} dx \quad \left(\stackrel{c}{=} \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| - \frac{\cos x}{2 \sin^2 x} \quad \text{např. pro } x \in (0, \pi) \right),$
- $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} \quad (\text{substitute } \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t)$
 $(\stackrel{c}{=} \sqrt{x^2 + x + 1} - x + 2 \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - 2| - \frac{1}{2} \ln |\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \frac{1}{2}|$
 $\text{pro } x \in (-\infty, -1) \text{ nebo } x \in (-1, \infty)) ,$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}, \quad a \neq 0 \quad (\text{substitute } \sqrt{x^2 + a^2} = t - x)$
 $\left(\stackrel{c}{=} \ln(\sqrt{x^2 + a^2} + x) \quad \text{pro } x \in (-\infty, \infty) \right) .$