# Vyšetřování průběhu funkce - přehled teorie

## Věta o nabývání minima a maxima

Pokud je funkce $f$ spojitá na uzavřeném intervalu $[a, b]$, pak existují body $x_1, x_2 \in [a, b]$, ve kterých funkce dosahuje své největší a nejmenší hodnoty.

- V bodě $x_1$ funkce nabývá svého **maxima**: $f(x_1) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$.
- V bodě $x_2$ funkce nabývá svého **minima**: $f(x_2) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$.
- Tedy pro všechna $x \in [a, b]$ platí: $f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_1)$.

**Poznámka:** Tato věta platí pouze pro funkce spojité na *uzavřeném intervalu*. Pokud by byl interval otevřený nebo by funkce nebyla spojitá, extrémy nemusí existovat.

## Rostoucí a klesající funkce v bodě

- Funkce $f$ je **rostoucí v bodě** $x_0$, pokud existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechna $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$ a pro všechna $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$.
- Funkce je **klesající v bodě** $x_0$, jestliže v nějakém okolí bodu $x_0$ platí pro všechna $x < x_0$, že $f(x) > f(x_0)$, a pro všechna $x > x_0$, že $f(x) < f(x_0)$.

## Význam znaménka první derivace

- Pokud je $f'(x_0) > 0$, pak je funkce $f$ **rostoucí v bodě** $x_0$.
- Pokud je $f'(x_0) < 0$, pak je funkce $f$ **klesající v bodě** $x_0$.

## l'Hospitalovo pravidlo

Jestliže platí

$$\lim f(x) = \lim g(x) = 0 \quad \text{nebo} \quad \lim |g(x)| = +\infty.$$

a existuje vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje i limita

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{a platí} \quad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Symbol lim může znamenat: $\lim\limits_{x \to c}$, $\lim\limits_{x \to c^+}$, $\lim\limits_{x \to c^-}$, $\lim\limits_{x \to +\infty}$, $\lim\limits_{x \to -\infty}$.

**Příklad 1:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

**Příklad 2:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

## Konvexnost a konkávnost v intervalu

Máme přímku danou rovnicí: $y = y_0 + k(x - x_0)$. Říkáme, že bod $P = [x, y]$ leží **nad přímkou**, pokud platí

$$y > y_0 + k(x - x_0),$$

a že leží **pod přímkou**, pokud

$$y < y_0 + k(x - x_0).$$

Předpokládejme, že funkce $f$ je definovaná v intervalu $I$ a pro **každá tři čísla** $x_1 < x_2 < x_3$ z tohoto intervalu sestrojíme přímku procházející body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$.

- Pokud bod $P_2$ vždy leží **pod** přímkou spojující $P_1$ a $P_3$ nebo **na** ní, říkáme, že funkce je **konvexní** v intervalu $I$.
- Pokud bod $P_2$ vždy leží **nad** přímkou spojující $P_1$ a $P_3$ nebo **na** ní, říkáme, že funkce je **konkávní** v intervalu $I$.
- Pokud bod $P_2$ vždy leží **pod** přímkou spojující $P_1$ a $P_3$, říkáme, že funkce je **ryze konvexní** v intervalu $I$.
- Pokud bod $P_2$ vždy leží **nad** přímkou spojující $P_1$ a $P_3$, říkáme, že funkce je **ryze konkávní** v intervalu $I$.

## Ryze konvexní a konkávní funkce v bodě

Máme funkci $f$, která má derivaci v bodě $x_0$. Sestrojíme tečnu v bodě $x_0$: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pokud existuje $\delta > 0$, tak že pro všechna $x$ splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí:

- $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ řekneme, že funkce $f$ je **ryze konvexní v bodě** $x_0$ - tedy existuje okolí bodu $x_0$, v němž všechny body grafu funkce leží **nad tečnou** ke grafu v bodě $x_0$.
- $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ řekneme, že funkce $f$ je **ryze konkávní v bodě** $x_0$ - tedy existuje okolí bodu $x_0$, v němž všechny body grafu funkce leží **pod tečnou** ke grafu v bodě $x_0$.

### Znaménko druhé derivace a zakřivení grafu funkce

- Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce v tomto bodě ryze konvexní.
- Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce v tomto bodě ryze konkávní.

## Lokální a absolutní (globální) extrémy funkce

### Absolutní (globální) extrémy

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **absolutní maximum** na intervalu $M$, pokud:

  $$\forall x \in M : \quad f(x) \leq f(c)$$

  Hodnota $f(c)$ je největší možná hodnota funkce na daném intervalu.

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **absolutní minimum** na intervalu $M$, pokud:

  $$\forall x \in M : \quad f(x) \geq f(c)$$

  Hodnota $f(c)$ je nejmenší možná hodnota funkce na daném intervalu.

### Lokální extrémy

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **lokální maximum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

  $$\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : \quad f(x) \leq f(c).$$

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **ostré lokální maximum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

  $$\forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) : \quad f(x) < f(c).$$

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **lokální minimum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

  $$\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : \quad f(x) \geq f(c)$$

- Funkce $f$ má v bodě $c$ **ostré lokální minimum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

  $$\forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) : \quad f(x) > f(c).$$

## Hledání absolutních extrémů

- Pokud má funkce $f$ na intervalu $I$ **absolutní maximum** v bodě $c \in I$, pak tento bod musí být buď krajním bodem intervalu $I$, nebo bodem, kde má funkce $f$ **lokální maximum**.
- Stejně tak, pokud má funkce $f$ na intervalu $I$ **absolutní minimum** v bodě $d \in I$, pak tento bod je buď krajním bodem intervalu $I$, nebo bodem, kde má funkce $f$ **lokální minimum**.

**Chceme-li najít absolutní extrémy funkce na uzavřeném intervalu**, stačí:

1. najít krajní body intervalu,
2. najít body, ve kterých je první derivace rovna nule nebo neexistuje,
3. porovnat funkční hodnoty v těchto bodech.

**Chceme-li najít absolutní extrémy funkce na otevřeném intervalu** $(a, b)$, stačí:

1. v krajních bodech intervalu spočítat jednostranné limity $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to b^-} f(x)$,
2. tyto limity porovnat s funkčními hodnotami v bodech, ve kterých je první derivace rovna nule nebo neexistuje,
3. pokud jsou limity větší (nebo menší) než všechny vnitřní hodnoty, pak funkce nenabývá absolutního maxima (nebo minima) – pouze se k němu blíží.

## Nutná podmínka existence lokálního extrému

Pokud $f'(x_0) \neq 0$, potom v bodě $x_0$ **není** lokální extrém. Rovnost $f'(x_0) = 0$ je **nutná**, ale **nestačí** k tomu, aby v bodě byl extrém.

## Postačující podmínka existence lokálního extrému

Předpokládejme, že funkce $f$ je spojitá v intervalu $(a, b)$ a má derivaci ve všech bodech tohoto intervalu kromě bodu $x_0 \in (a, b)$. Dále předpokládejme existenci $\delta > 0$, tak že:

- Buď $\quad f'(x) > 0$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f'(x) < 0$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce $f$ v bodě $x_0$ **ostré lokální maximum**.
- Nebo $\quad f'(x) < 0$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f'(x) > 0$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce $f$ v bodě $x_0$ **ostré lokální minimum**.
- Nebo $\quad f'(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce $f$ v bodě $x_0$ **rostoucí**.
- Nebo $\quad f'(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce $f$ v bodě $x_0$ **klesající**.

## Inflexní bod

Jestliže má funkce $f$ v bodě $x_0$ derivaci, sestrojíme v tomto bodě **tečnu**: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pokud existuje číslo $\delta > 0$, pro které nastává jeden z následujících dvou případů:

- Buď bod $[x, f(x)]$ leží pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **pod tečnou** a pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **nad tečnou**,
- nebo bod $[x, f(x)]$ leží pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **nad tečnou** a pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **pod tečnou**.

Pak říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x_0$ **inflexi** nebo také, že graf funkce má v bodě $[x_0, f(x_0)]$ **inflexní bod**. V takovém bodě dochází ke změně zakřivení grafu: funkce se mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

## Nutná podmínka existence inflexního bodu

**Pokud $f''(x_0) \neq 0$, pak funkce v bodě $x_0$ nemá inflexi.** Tato podmínka je **nutná**, nikoliv postačující. Tedy i když $f''(x_0) = 0$, nemusí tam inflexe být.

## Postačující podmínka existence inflexního bodu

Jestliže funkce $f$ má spojitou první derivaci v intervalu $(a, b)$, má druhou derivaci v každém bodě $(a, b)$ kromě bodu $x_0 \in (a, b)$ a jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že:

- Buď $\quad f''(x) < 0 \quad$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f''(x) > 0 \quad$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, potom má funkce $f$ v bodě $x_0$ inflexní bod.
- Nebo $\quad f''(x) > 0 \quad$ pro $x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f''(x) < 0 \quad$ pro $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, potom má funkce $f$ v bodě $x_0$ inflexní bod.
- Nebo $f''(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, potom je funkce v bodě $x_0$ ryze konvexní.
- Nebo $f''(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$, potom je funkce v bodě $x_0$ ryze konkávní.

## Asymptoty

**Asymptota** je přímka, ke které se graf funkce blíží, když se $x \to \pm\infty$ nebo když $f(x) \to \pm\infty$.

- **Svislá asymptota:** Funkce má v bodě $x = c$ svislou asymptotu, pokud platí:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty.$$

- **Šikmá nebo vodorovná asymptota:** Pokud existují vlastní limity:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx),$$

  potom má funkce asymptotu $y = kx + q$. Pro $k = 0$ máme vodorovnou asymptotu.

- To stejné platí i pro $x \to -\infty$, takže šikmé asymptoty mohou být maximálně dvě.

# Příklad: Vyšetření průběhu funkce

**Zadaná funkce:**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

## 1. Definiční obor

Funkce není definována v bodě, kde je jmenovatel roven nule, tj. v bodě $x = 2$.

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

## 2. Limity v krajních bodech definičního oboru

**a) Limita pro $x \to 2^-$:**

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{3}{x - 2} \overset{\substack{\text{typ } \frac{3}{0} \\ x-2<0}}{=} -\infty$$

**b) Limita pro $x \to 2^+$:**

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x\to 2^+} \frac{3}{x - 2} \overset{\substack{\text{typ } \frac{3}{0} \\ x-2>0}}{=} +\infty$$

$\Longrightarrow$ **Funkce má svislou asymptotu:** $x = 2$ a **funkce nemá absolutní extrémy**.

## 3. Chování v nekonečnu a šikmá asymptota

Zjednodušíme dělením: $\dfrac{x^2-1}{x-2} = \dfrac{(x^2-2x)+2x-1}{x-2} = x + \dfrac{(2x-4)+4-1}{x-2} = x+2+\dfrac{3}{x-2}$

**c) Limita pro $x \to +\infty$:**

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left( x + 2 + \frac{3}{x-2} \right) = \infty + 2 - 0 = \infty$$

**d) Limita pro $x \to -\infty$:**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left( x + 2 + \frac{3}{x-2} \right) = -\infty + 2 - 0 = -\infty$$

$\Longrightarrow$ **Funkce má šikmou asymptotu:** $y = x + 2$, protože $f(x) - x - 2$ jde k nule, když $x \to \pm\infty$.

## 4. Vyšetření první derivace

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left( x + 2 + \frac{3}{x-2} \right)' = 1 + 0 - \frac{3}{(x-2)^2}$$

Hledáme body, kde $f'(x) = 0$ nebo kde derivace neexistuje.

$$1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 3}{(x-2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

Dělení nulou v bodě $x = 2$ není problém, protože tento bod zároveň není ani v definičním oboru funkce $f$.

Zkoumáme znaménko derivace $f'(x) = \frac{(x-2)^2 - 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$. Pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

| $x$ | $(-\infty,\ 2-\sqrt{3})$ | $(2-\sqrt{3},\ 2)$ | $(2,\ 2+\sqrt{3})$ | $(2+\sqrt{3},\ +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | $-$ | $-$ | $+$ |
| Monotonie | rostoucí | klesající | klesající | rostoucí |

- V bodě $x = 2 - \sqrt{3}$ derivace mění znaménko z $+$ na $-$ $\Rightarrow$ **lokální maximum**
- V bodě $x = 2$ funkce není definovaná
- V bodě $x = 2 + \sqrt{3}$ derivace mění znaménko z $-$ na $+$ $\Rightarrow$ **lokální minimum**

## 5. Vyšetření druhé derivace

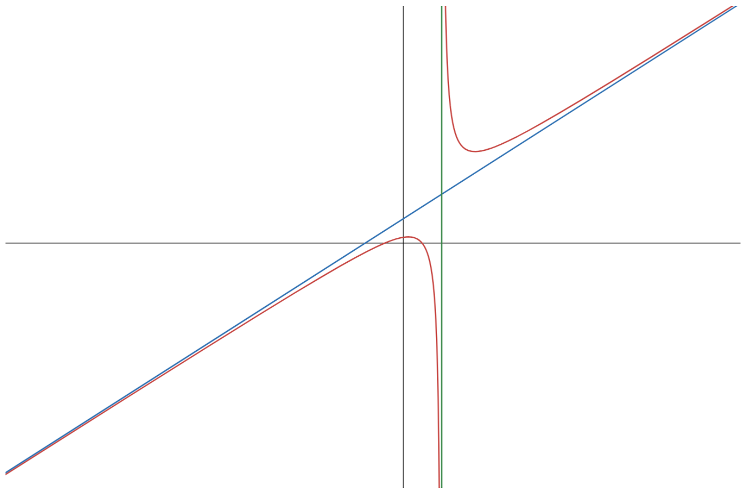
Zkoumáme znaménko druhé derivace

$$f''(x) = \left( 1 - \frac{3}{(x-2)^2} \right)' = 0 + \left( -3(x-2)^{-2} \right)' = 6(x-2)^{-3} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

| $x$ | $(-\infty, 2)$ | $2$ | $(2, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | $-$ | nedefinována | $+$ |
| Charakterizace | konkávní | není inflexní bod | konvexní |

## 6. Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$