

Booleova algebra, minimalizace logických výrazů

*Prof. Ing. Ondřej Novák, CSc.
ITE*



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Projekt ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
**Modernizace didaktických metod
a inovace výuky technických předmětů.**

Booleova algebra

- Booleova algebra je úplný, komplementární a distributivní svaz
- Booleova algebra s dvěma log. hodnotami se nazývá minimální Booleovou algebrou
 - + , · jsou binární operace na B (*log. součet a součin*)
 - je unární operace na B (*negace*)
 - 0, 1 jsou nulární operace (*logické konstanty*) na B
 - a kde platí dále uvedené zákony pro všechna $a, b, c \in B$:

Booleova algebra

- Základní zákony Booleovy algebry (7 axiomů)

Komutativita	$a + b = b + a$	$ab = ba$
Asociativita	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a(bc) = (ab)c$
Distributivita	$a + (bc) = (a + b)(a + c)$	$a(b + c) = (ab) + (ac)$
Neutralita 0 a 1	$a + 0 = a$	$a1 = a$
Vlastnosti komplementu	$a + \bar{a} = 1$	$a\bar{a} = 0$
Agresivita 0 a 1	$a0 = 0$	$a + 1 = 1$
Idempotence	$aa = a$	$a + a = a$

Booleova algebra- odvozené zákony

Dvojí negace	$\bar{\bar{a}} = a$	
Absorbce	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$
Absorpce negace	$a + \bar{a}b = a + b$	$a(\bar{a} + b) = ab$
De Morgan	$\overline{(a + b)} = \bar{a}\bar{b}$	$\overline{(ab)} = \bar{a} + \bar{b}$
Consensus	$ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c$	$(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c)$

- Zobecněné zákony absorbce

$$a + F(a, \bar{a}, b, c, \dots, z) = a + F(0, 1, b, c, \dots, z)$$

$$\bar{a} + F(a, \bar{a}, b, c, \dots, z) = \bar{a} + F(1, 0, b, c, \dots, z)$$

$$a \cdot F(a, \bar{a}, b, c, \dots, z) = a \cdot F(1, 0, b, c, \dots, z)$$

$$\bar{a} \cdot F(a, \bar{a}, b, c, \dots, z) = \bar{a} \cdot F(0, 1, b, c, \dots, z)$$

Zákon negace, Shannonův teorém

- zobecněný zákon negace (logické funkce) :

$$\overline{F}(a, b, \dots, z, 0, 1, +, \cdot) = F(\bar{a}, \bar{b}, \dots, \bar{z}, 1, 0, \cdot, +)$$

- rozklad logické funkce (Shannonův expanzní teorém) :

$$F(a, b, \dots, z) = a \cdot F(1, b, \dots, z) + \bar{a} \cdot F(0, b, \dots, z)$$

$$F(a, b, \dots, z) = [a + F(0, b, \dots, z)] \cdot [\bar{a} + F(1, b, \dots, z)]$$

Vyjádření logických funkcí

- slovní popis
- pravdivostní tabulka
- logický výraz
- seznam indexů vstupních písmen
- mapa
- vícerozměrná krychle

Algebraický (Booleový) výraz

- Představuje funkci nad B. Jednu funkci lze popsat více výrazy. Používá se standartní (kanonický) tvar. Tento tvar se též někdy nazývá normální formou.
- **term** - výraz tvořený pouze proměnnými v přímém a negovaném tvaru a operací logického součtu nebo součinu
- **P-term (součinový term)** - term s operací součinu
- **S-term (součtový term)** - operace součtu
- **minterm** - P-term obsahující všechny nezávislé proměnné
- **maxterm** - S-term obsahující všechny nezávislé proměnné
- **vstupní písmeno** - kombinace hodnot vstupních proměnných

- Každou log. funkci je možno vyjádřit pomocí součtu mintermů nebo součinu maxtermů
- Každý minterm (resp. maxterm) nabývá hodnoty log1 (resp. log0) právě pro jedno vstupní písmeno dané log. funkce
- Stavový index - desítkový zápis kombinace hodnot nezávisle proměnných
- Úplná normální disjunktní forma (UNDF) log. výraz tvořený součtem všech mintermů
- Úplná normální konjunktivní forma (UNKF) - log. výraz tvořený součinem všech maxtermů.

Stavový index	Logické proměnné			Funkční hodnota	Minterm	Maxterm
s	c	b	a	f(c, b, a)	P _s	S _s
0	0	0	0	0	$\bar{c}\bar{b}\bar{a}$	$c + b + a$
1	0	0	1	1	$\bar{c}\bar{b}a$	$c + b + \bar{a}$
2	0	1	0	1	$\bar{c}b\bar{a}$	$c + \bar{b} + a$
3	0	1	1	0	$\bar{c}ba$	$c + \bar{b} + \bar{a}$
4	1	0	0	1	$c\bar{b}\bar{a}$	$\bar{c} + b + a$
5	1	0	1	0	$c\bar{b}a$	$\bar{c} + b + \bar{a}$
6	1	1	0	1	$cb\bar{a}$	$\bar{c} + \bar{b} + a$
7	1	1	1	0	cba	$\bar{c} + \bar{b} + \bar{a}$

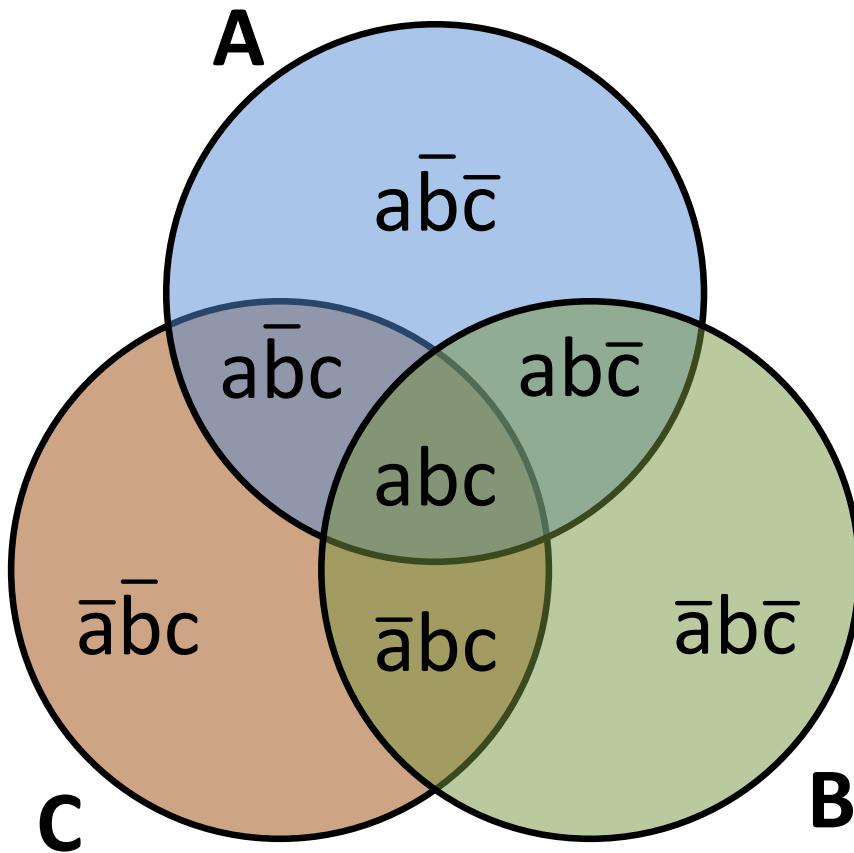
Pravdivostní tabulka se všemi mintermy a maxtermy

- **UNDF:** $f(c, b, a) = \bar{c}\bar{b}a + \bar{c}b\bar{a} + c\bar{b}\bar{a} + cba$
- **UNKF:** $f(c, b, a) = (c + b + a) \cdot (c + \bar{b} + \bar{a}) \cdot (\bar{c} + b + \bar{a}) \cdot (\bar{c} + \bar{b} + \bar{a})$
- **Seznam stavových indexů (zkrácený tabulkový tvar):**
 $f(c, b, a) = \Sigma(1, 2, 4, 6) = \Pi(0, 3, 5, 7)$

- **UNDF obsahuje tolik mintermů, kolik je počet vstupních písmen, pro které nabývá uvažovaná logická funkce hodnoty 1**
- **UNKF obsahuje tolik maxtermů, kolik je počet vstupních písmen, pro které nabývá uvažovaná logická funkce hodnoty 0**
- **Vytvoření UNDF z UNKF - roznásobením**
- **UNKF z UNDF**
 - určíme doplněk množiny mintermů s hodnotou 1
 - pro příslušná vstupní písmena určíme maxtermy
 - UNKF je součin těchto maxtermů

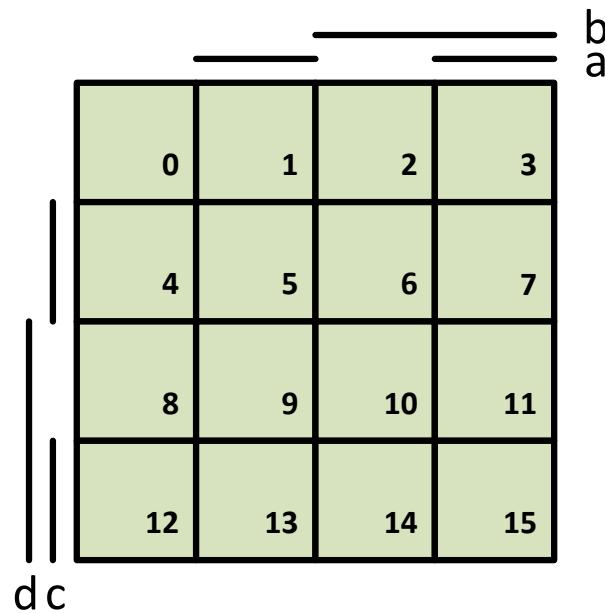
- Algebraické výrazy nabývají řady forem, které nejsou čistě disjunktivní nebo konjunktivní. Nazýváme je **smíšené formy**.
- Disjunktivní nebo konjunktivní formou můžeme popsat všechny výrazy - používá se pro minimalizaci
- Tyto formy lze snadno transformovat do Shefferovy algebry (samé NANDy) nebo Pierceovy algebry (samé NORy)

Vennovy diagramy



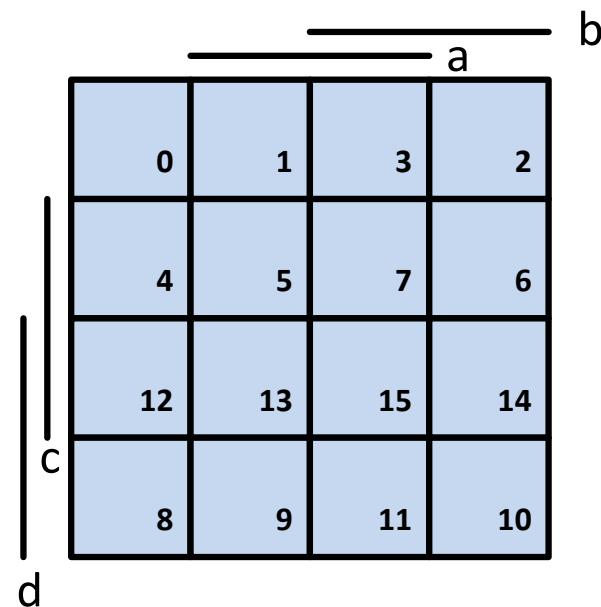
- Mapa je Vennuv diagram, kde jednotlivé oblasti mají tvar obdélníků

Mapy



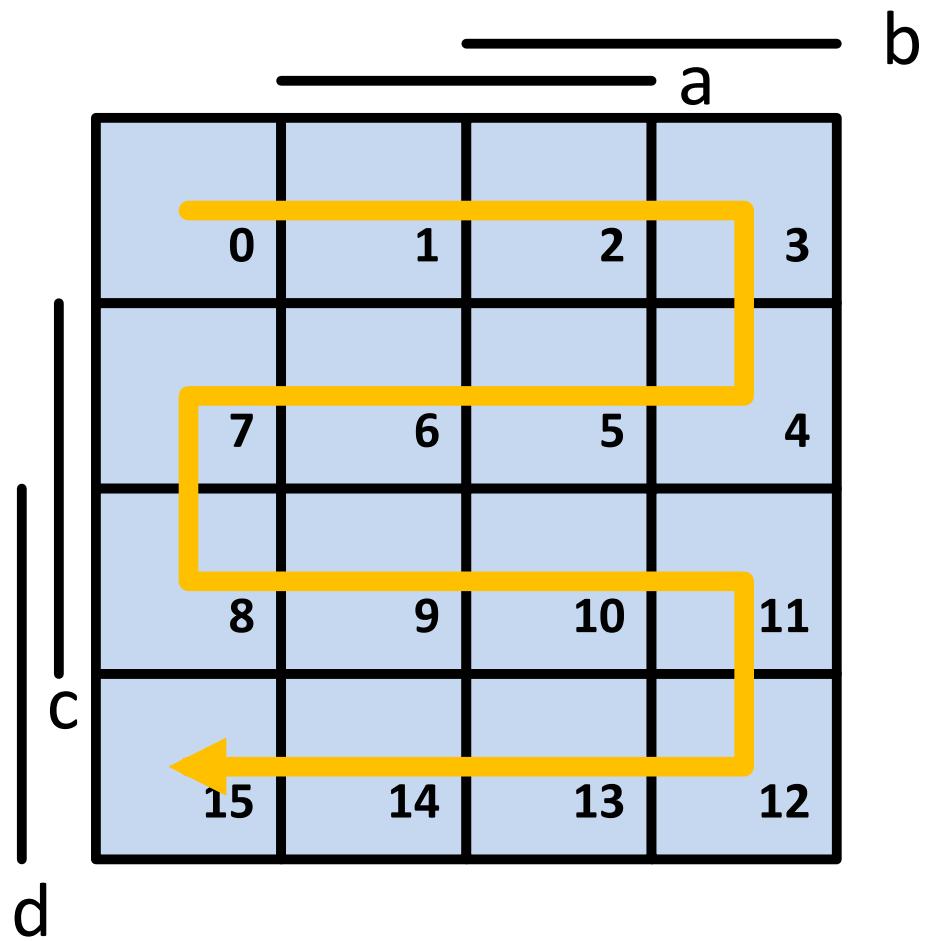
a)

a) Svobodova mapa



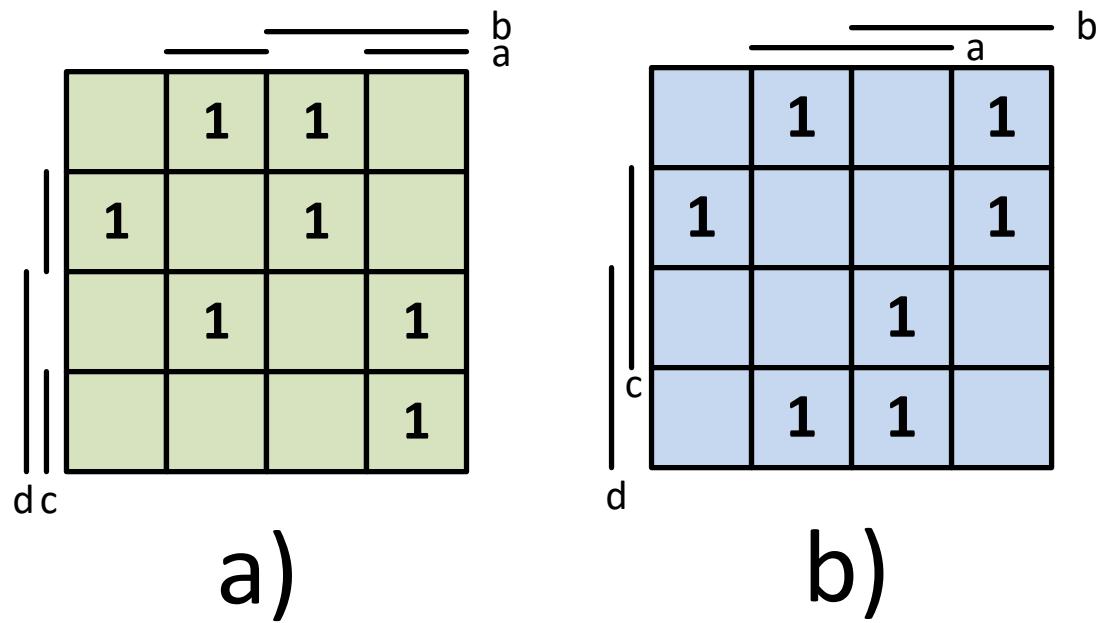
b)

b) Karnaughova mapa



Zápis Grayova kódu do mapy

	d	c	b	a
0	0	0	0	0
1	0	0	0	1
2	0	0	1	1
3	0	0	1	0
4	0	1	1	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	1	0	0
8	1	1	0	0
9	1	1	0	1
10	1	1	1	1
11	1	1	1	0
12	1	0	1	0
13	1	0	1	1
14	1	0	0	1
15	1	0	0	0

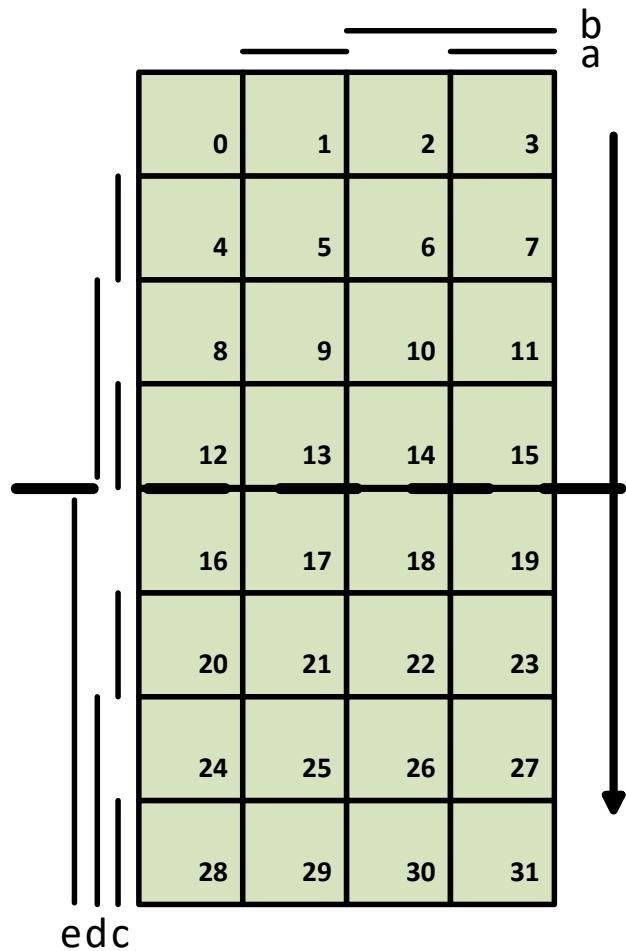


Zápis funkce do mapy:

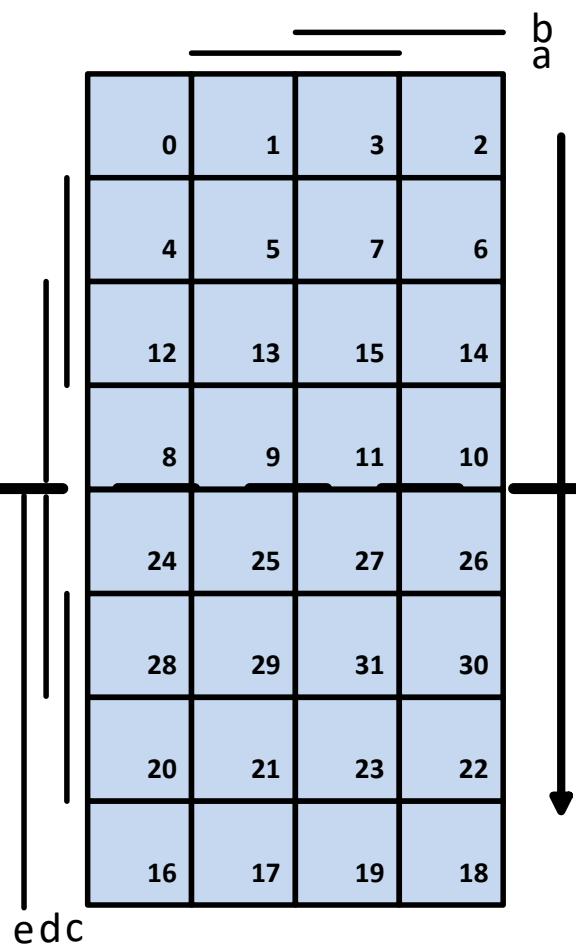
- a) **Svobodovy**
- b) **Karnaughovy**

	d	c	b	a	y
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	1
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	0
8	1	0	0	0	0
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	0
11	1	0	1	1	1
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	0
15	1	1	1	1	1

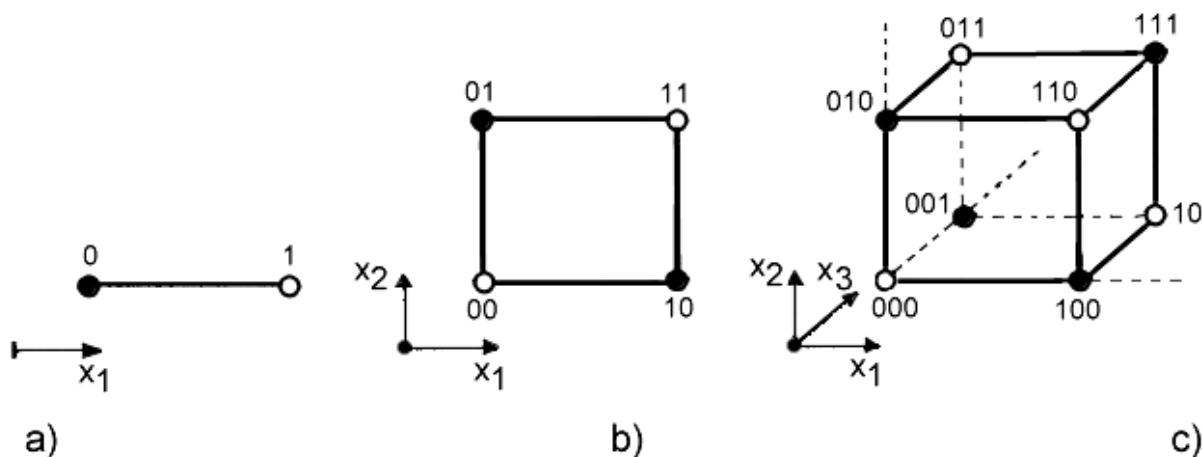
Rozšíření Svobodovy a Karnaughovy mapy



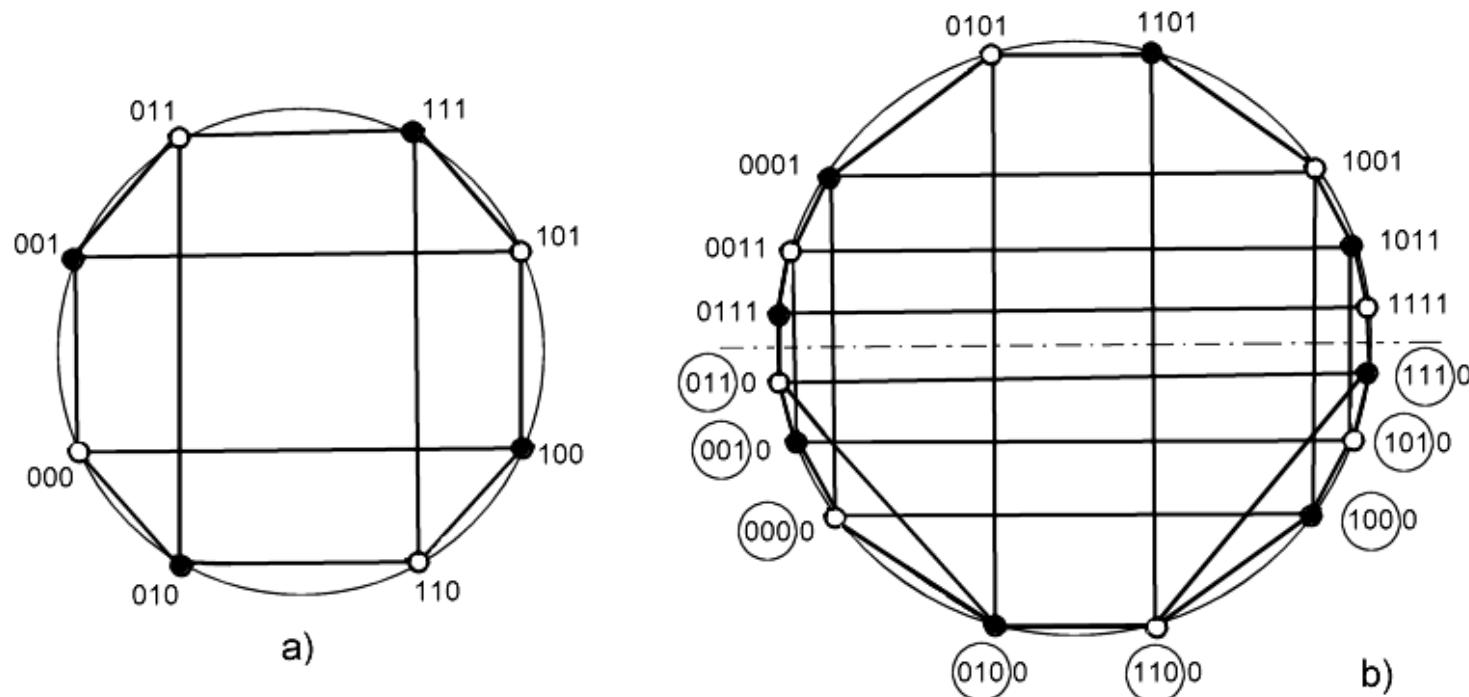
Svobodova mapa



Karnaughova mapa



Zobrazení logické funkce na n -rozměrné krychli ($n=1, 2, 3$)



Poznámka: formát X_i : $x_1x_2x_3$

formát X_i : $x_1x_2x_3x_4$

Rovinné zobrazení tří a čtyřrozměrného tělesa

Minimalizace logických výrazů

Kritérium minimality:

- minimální počet termů
- minimální počet nezávisle proměnných v každém termu
- minimální počet negovaných proměnných

Minimální normální disjunktní forma:

- logický součet minimálního počtu minimálních P-termů

Implikant logické funkce:

- součinový p-term, který implikuje danou funkci

Přímý implikant:

- implikant, který po vypuštění libovolné proměnné přestává být implikantem funkce

Minimální normální konjunktivní forma:

- logický součin minimálního počtu minimálních S-termů

Možnosti minimalizace

- **Algebraický přístup:** postupně aplikovat zákony Booleovy algebry
- **Metody založené na hledání sousedních stavů**
 - minimalizace pomocí mapy
 - metoda Quine-Mc Cluskey

Aplikace zákonů Booleovy algebry

Nalezněte MNDF funkce f zadanou Booleovým výrazem:

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}(c + d) + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Distributivní zákon: $f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + a\bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$

Absorbce negace: $\{\bar{a}d + a\bar{b}d = d(\bar{a} + \bar{b})\}$

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d}$$

Absorbce negace: $\{\bar{b}d + \bar{b}\bar{c}\bar{d} = \bar{b}(d + \bar{c})\}$

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b}c + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$$

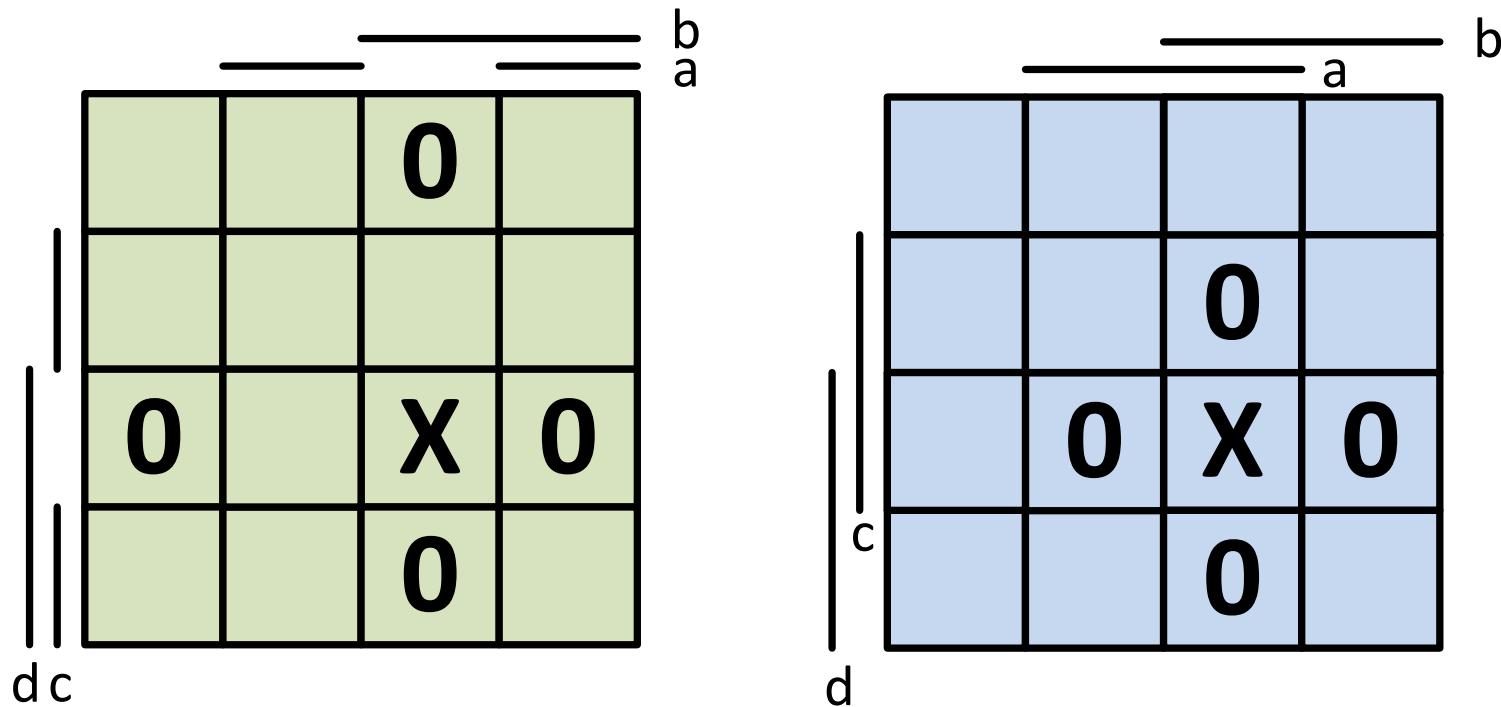
Absorbce negace: $\{a\bar{b}c + \bar{b}\bar{c} = \bar{b}(\bar{c} + a)\}$

$$f = \bar{a}d + \bar{b}cd + a\bar{b} + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$$

Absorbce: $f = \bar{a}d + a\bar{b} + \bar{b}d + \bar{b}\bar{c}$

Consensus: $f = \bar{a}d + a\bar{b} + \bar{b}\bar{c}$

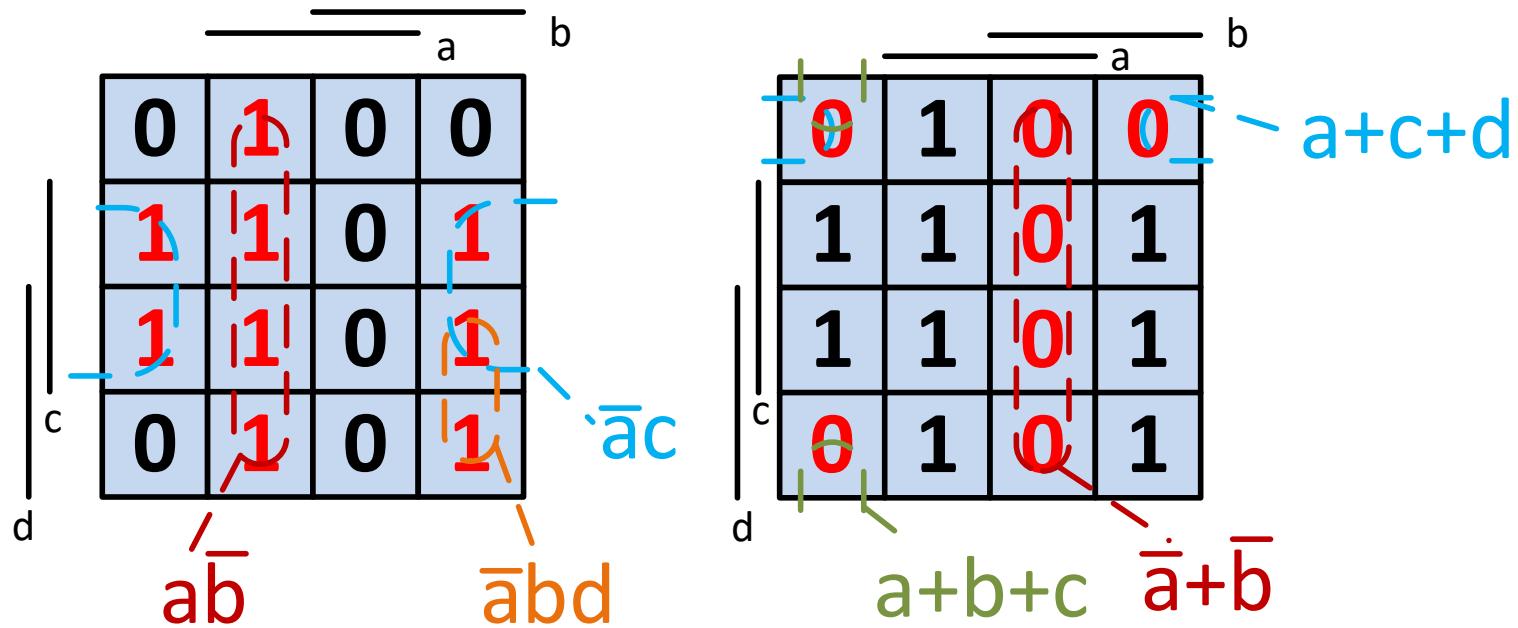
Minimalizace pomocí map



Sousední stavy stavu $\bar{a}b\bar{c}d$ ($s = 10$)

Minimalizace pomocí map - příklad

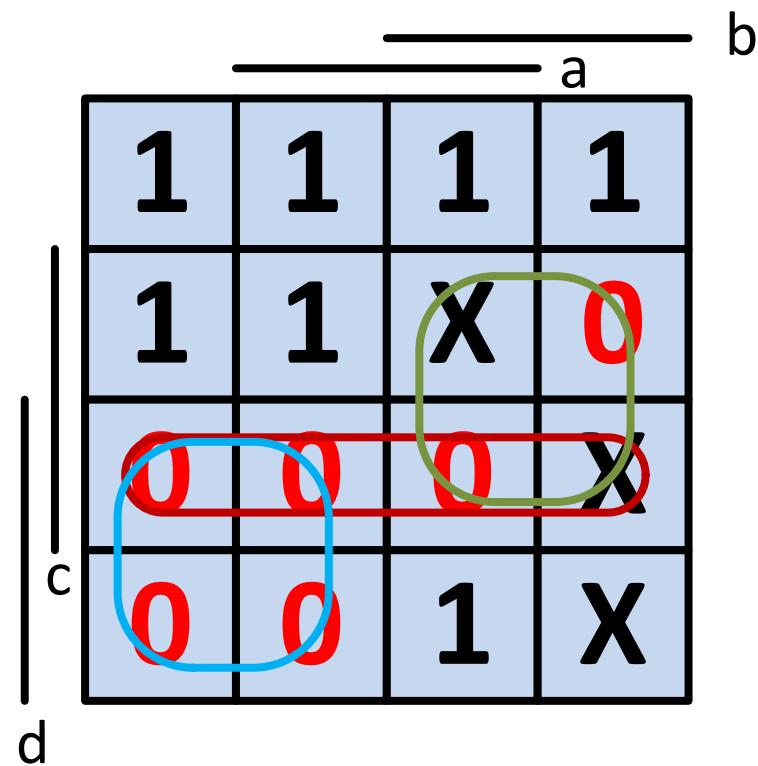
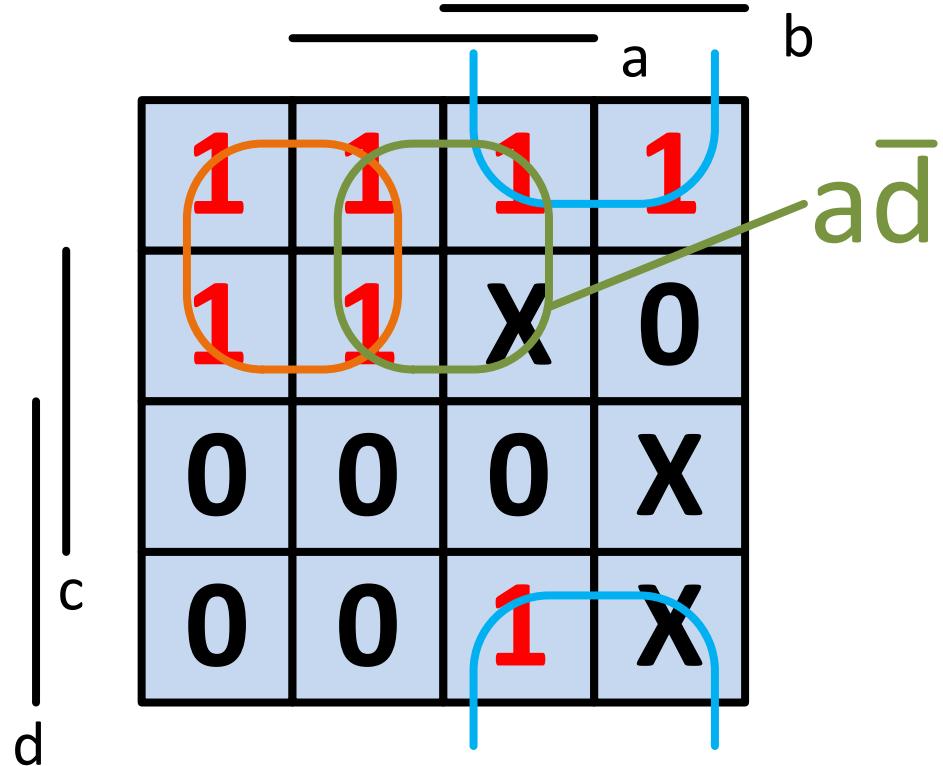
Nalezněte MNDF a MNKF logické funkce zadané výčtem jedničkových stavů: $f(d,c,b,a) = \Sigma(1,4,5,6,9,10,12,13,14)$



$$\text{MNDF: } f(d, c, b, a) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}c + \bar{a}bd$$

$$\text{MNKF: } f(d, c, b, a) = (\bar{a} + \bar{b})(a + b + c)(a + c + d)$$

Hledání MNDF a MNKF funkcí s neurčenými stavami



Metoda Quine-McCluskey

- vyvinuta pro minimalizaci logických funkcí s větším počtem proměnných, možnost zpracování na počítači

Postup řešení:

- 1) vyjádříme všechny jedničkové stavy binárně
(první sloupec tabulky)
- 2) druhý sloupec - stavové indexy příslušných řádků
- 3) třetí sloupec - skupiny stavů s jednou, dvěma, třemi a čtyřmi jedničkami (Skupiny odděleny prázdným řádkem, výběr podle druhého sloupce, již vybrané indexy označeny hvězdičkou)
- 4) 4. sloupec - stavové indexy
- 5) 5. sloupec - všechny sousední dvojice
(dvojice, lišící se o jednu jedničku)

- 6) dvojice rozděleny do skupin podle počtu jedniček, skupiny odděleny prázdným řádkem**
- 7) 7. sloupec - všechny čtveřice sousedních stavů, hvězdičkou označeny použité dvojice**
- 8) označíme velkými písmeny všechny skupiny stavů i jednotlivé stavy, u kterých se nevyskytuje hvězdička. Z nich vybereme minimální pokrytí jedničkových stavů. K tomu použijeme tabulku pokrytí**

Příklad: Najděte MNDF funkce $f(d,c,b,a) = \Sigma(1,4,7,8,9,10,11,12,14,15)$

1		2		3			4		5				6			7				8			
d	c	b	a	index		d	c	b	a	index		d	c	b	a	index		d	c	b	a	index	
0	0	0	1	1*		0	0	0	1	1*		-	0	0	1	1,9 F		1	0	-	-	8,9,10,11 C	
0	1	0	0	4*		0	1	0	0	4*		-	1	0	0	4,12 E		1	0	-	-	8,10,9,11	
0	1	1	1	7*		1	0	0	0	8*		1	0	0	-	8,9*		1	-	-	0	8,10,12,14 B	
1	0	0	0	8*						1		0	-	0	0	8,10*		1	-	-	0	8,12,10,14	
1	0	0	1	9*		1	0	0	1	9*		1	-	0	0	8,12*							
1	0	1	0	10*		1	0	1	0	10*								1	-	1	-	10,11,14,15 A	
1	0	1	1	11*		1	1	0	0	12*		1	0	-	1	9,11*		1	-	1	-	10,14,11,15	
1	1	0	0	12*						1		0	1	-	10,11*								
1	1	1	0	14*		0	1	1	1	7*		1	-	1	0	10,14*							
1	1	1	1	15*		1	0	1	1	11*		1	1	-	0	12,14*							
				1		1	1	0	0	14*													
										-		1	1	1	1	7,15 D							
				1		1	1	1	1	15*		1	-	1	1	11,15*							
										1		1	1	-	1	14,15*							

		1	4	7	8	9	10	11	12	14	15
A	bd						*	*		*	*
B	$\bar{a}d$				*		*		*	*	
C	$\bar{c}d$				*	*	*	*			
D	abc			*							*
E	$\bar{a}\bar{b}c$		*						*		
F	$a\bar{b}\bar{c}$	*				*					
Poznámky		↑	↑	↑		X		X		X	

Tabulka pokrytí

		8	10	11	14
A	bd		*	*	*
B	$\bar{a}d$	*	*		*
C	$\bar{c}d$	*	*	*	

Zmenšená tabulka pokrytí

Metoda Quine-McCluskey

- ve sloupcích jsou všechny jedničkové stavy (tedy stavy, které musíme pokrýt) a v řádcích jsou všechny přímé implikanty (tedy všechny skupiny sousedních stavů)
- nalezneme sloupce, které obsahují pouze jednu hvězdičku (stavy, pokryté pouze jedním implikantem). Odpovídající řádek bude nesporným přímým implikantem. Vyškrtneme sloupce pokryté nespornými implikanty.
- vytvoříme tabulku zmenšenou o použité řádky a vyškrtnuté sloupce.

Metoda Quine-McCluskey

- vyškrtnutí sloupce, který má hvězdičku ve stejných řádcích jako jiný sloupec nebo má nějaké hvězdičky navíc (dominance sloupce). /v příkladu 10. sloupec/
- vyškrtnutí řádku, který je podmnožinou jiného řádku (dominance řádku) /v př. se nevyskytuje/

		8	11	14
A	bd		*	*
B	$\bar{a}d$	*		*
C	$\bar{c}d$	*	*	

- výběr zbývajících termů podle kritérií minimality
- Výsledek:

$$f(d,c,b,a) = a \bar{b} \bar{c} + \bar{a} \bar{b} c + a b c + b d + \bar{c} d$$

Další algoritmy minimalizace

- tří-úrovňové sítě se členy **NAND** - Metoda TANT
(Three-level AND-NOT logic with True Inputs)
 - generování zobecněné normální formy
 - vytvoření dovolených implikantů
 - výběr implikantů, realizujících danou funkci minimálním počtem hradel NAND
- využití v automatizovaných návrhových systémech
- **ESPRESSO**
 - **1984**, komerční program pro minimalizaci

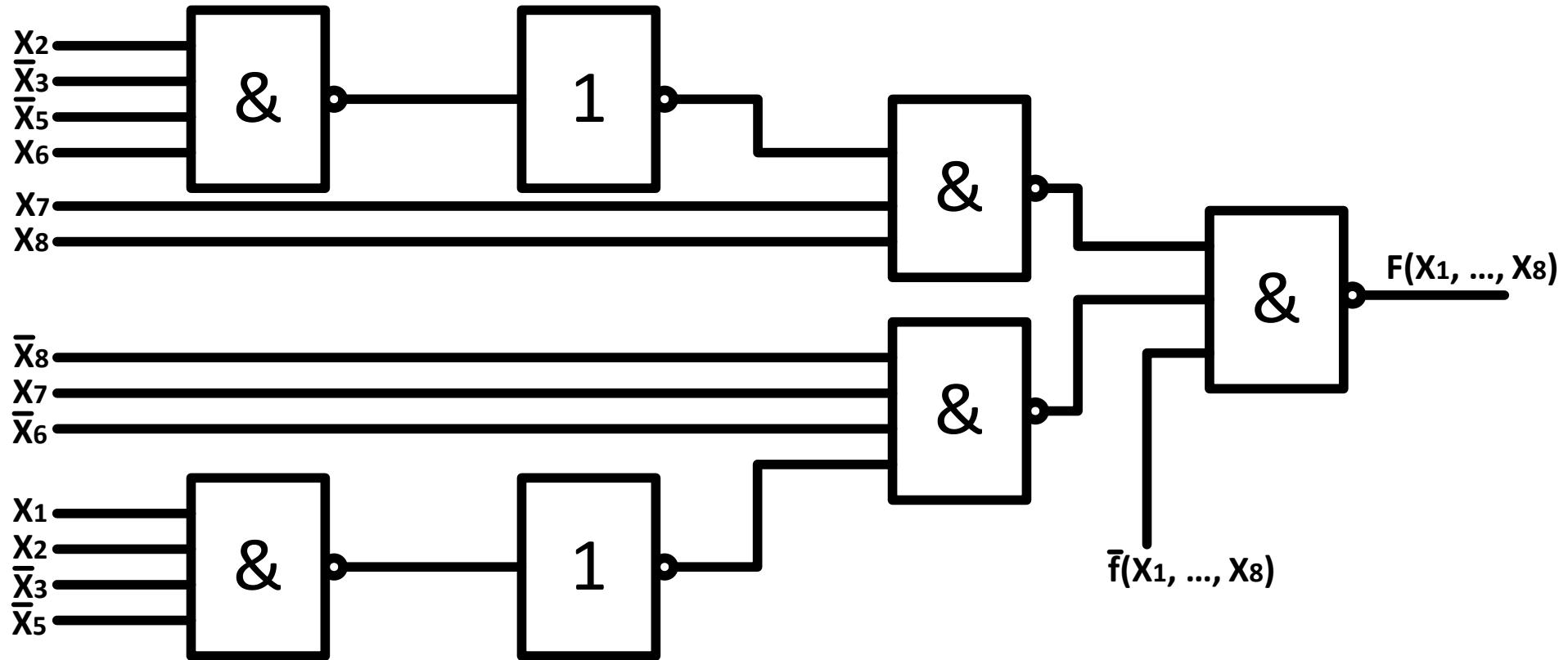
Struktury s omezeným počtem vstupů

- TTL max. osmivstupová hradla
- CMOS max. dvouvstupová hradla
- náhrada vícevstupových hradel kaskádou technologicky realizovatelných hradel

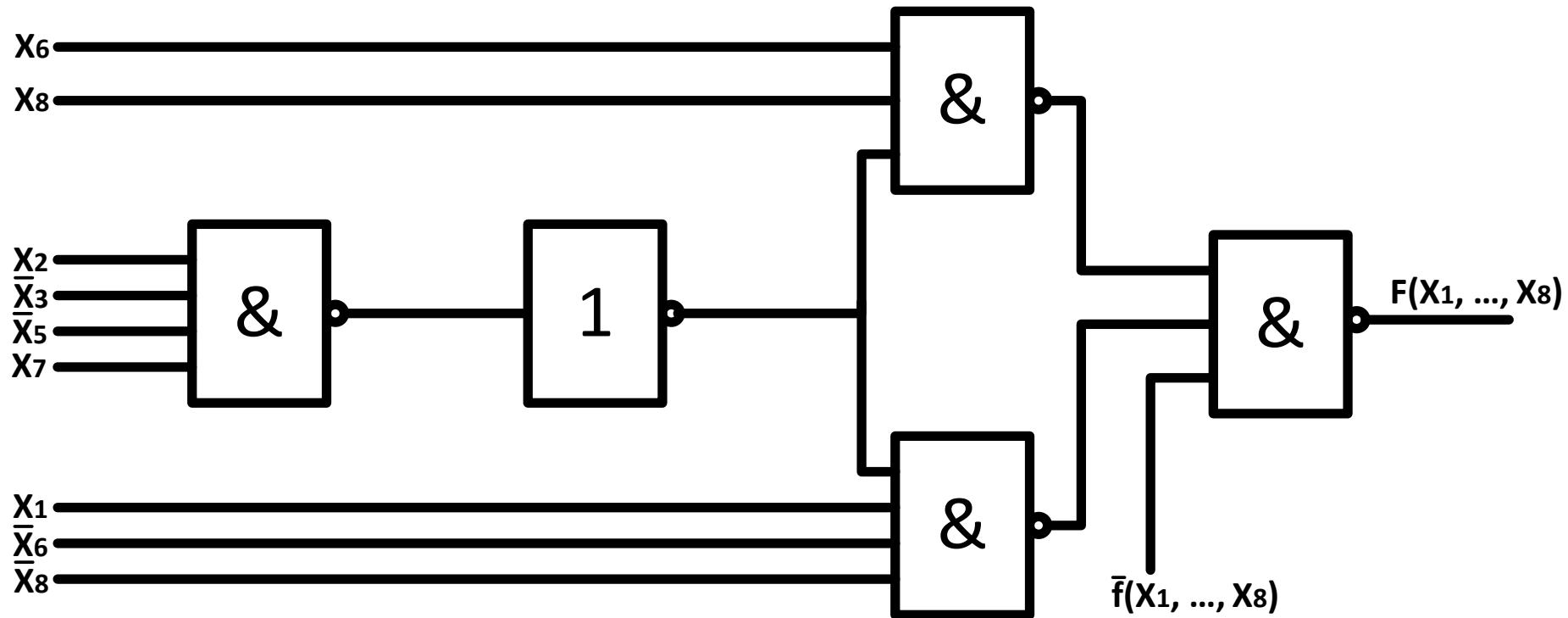
Faktorizace obvodu

- Někdy není výhodné vycházet v realizaci obvodu z MNDF nebo MNKF, ale z formy smíšené.
- Příklad: $f = x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 x_6 x_7 x_8 + x_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_5 \bar{x}_6 x_7 \bar{x}_8 + f_1(x_1, \dots, x_8)$
- Definice:
 - Konjunkce obsahující společnou část s délkou D (počtem společných proměnných = D) s jinou konjunkcí se nazývá **originál**
 - Nechť je N počet originálů pro něž platí že mají společnou část o délce D (**faktor o délce D**) , pak ND je **míra přednosti daného faktoru**
- Algoritmus faktorizace:
 - Formální přepis funkce
 - Seřazení faktorů podle míry přednosti
 - Výběr faktorů podle kritérií minimálnosti realizace obvodu

Realizace podle De Morgana



Realizace s vytknutím společné části



Postup sestavení log. obvodů

- zjištění možností předpokládaných součástek (typ technologie, možnosti kombinování různých technologií, typ hradel, parametry hradel,...)
- sestavení pravdivostní tabulky (někdy možno vynechat nebo redukovat)
- sestavení UNDF, UNKF nebo smíšené formy

Postup sestavení log. obvodů

- **minimalizace** (možno vynechat)
- kontrola počtu vstupů jednotlivých hradel, popřípadě nahraď kaskádou méně vstupových hradel
- konverze výsledného logického výrazu do tvaru vhodného pro realizaci (De Morganova pravidla)
- **schéma zapojení**
- **propojení konstrukčních prvků vodiči**



evropský
sociální
fond v ČR



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání
pro konkurenčních schopností

Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů



Děkuji za pozornost

Tento materiál vznikl v rámci projektu ESF CZ.1.07/2.2.00/28.0050
Modernizace didaktických metod a inovace výuky technických předmětů,
který je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.