

Cvičení 7

Příklad 1. Ověřte, že funkce $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) splňuje rovnici $y'' + y = 0$.

Příklad 2. Spočtěte limitu $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-1/x})^x = (e^{-1})$.

Příklad 3. Spočtěte pomocí L'Hospitalova pravidla:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = (0),$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = (0),$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = (0),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x, a \neq 0 = (e^a).$

Příklad 4. Najděte absolutní extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x \in [-2, 2]$.

(Absolutní maximum: $f(-1) = f(2) = 3$, absolutní minimum: $f(-2) = f(1) = -1$)

Složitější příklady

Příklad 5. Spočtěte pomocí l'Hospitalova pravidla

- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = (0),$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x \ln(1-x) = (0),$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \left(\frac{2}{\pi}\right),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^2}, a \neq 0 = \left(e^{-a^2/2}\right),$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x} = (1),$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{cotg} x - \frac{1}{x} = (0).$

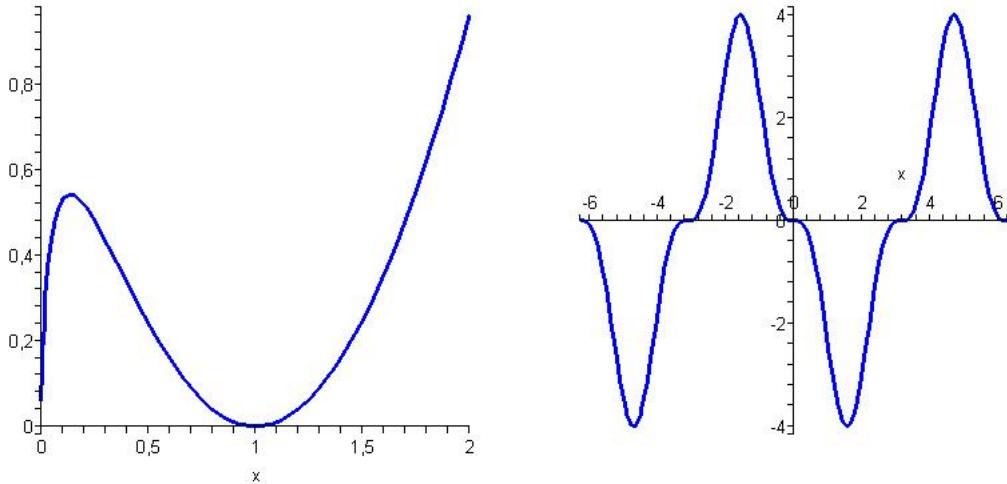
Příklad 6. Najděte absolutní extrémy funkcí

- $f(x) = x \ln^2 x$ (abs. minimum v bodě $x = 1$, abs. maximum neexistuje),

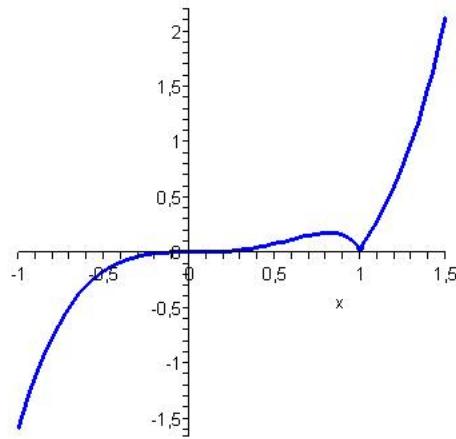
- $f(x) = \sin(3x) - 3 \sin(x)$
 (abs. min. v bodech $x = (4l+1)k\pi/2$, abs. max. v bodech $x = (4l+3)k\pi/2$, $l \in \mathbb{Z}$),
 Nápořeďa: $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$.
- $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ v intervalu $[-2, 2]$
 (abs. minimum v bodech $x = -2$, abs. maximum v bodech $x = 2$),
- $f(x) = x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$ v intervalu $(-2, 2)$ (neexistují).

Obrázek 1:

$$x \ln^2 x, \quad \sin(3x) - 3 \sin(x).$$



Obrázek 2: $x^3 \sqrt[3]{(x-1)^2}$.



Příklad 7. Zderivujte podle x funkci zadанou parametricky rovnicemi: $x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
 a $y = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ pro $t \in (-\infty, \infty)$. $\left(\frac{dy}{dx} = \operatorname{sgn} t, t \neq 0 \right)$

Příklad 8. Spočtěte druhou derivaci (podle x) funkce zadáné parametricky rovnicemi:
 $x = a \cos t$ a $y = b \sin t$ pro $t \in (0, \pi)$. $\left(\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-b}{a^2 \sin^3 t} \right)$

Příklad 9. Najděte bod, v němž je tečna k parabole $y = x^2$ rovnoběžná s tětivou vedenou zadanými body a napište rovnici této tečny.

- $[-1, 1]$ a $[3, 9]$ $([1, 1], y = 2x - 1)$,
- $[-3, 9]$ a $[3, 9]$ $([0, 0], y = 0)$,
- $[-3, 9]$ a $[1, 1]$ $([-1, 1], y = -2x - 1)$.