

1. Zobrazení

Zadání z okruhů: Základní pojmy spojené se zobrazením: jednoznačnost, vzor, obraz, definiční obor, obor hodnot, vzor prvku, vzor podmnožiny oboru hodnot. Inverzní zobrazení, prosté zobrazení. Skládání zobrazení, identita

- **Zobrazení ($f: M \rightarrow N$):**
 - Předpis, kde ke **každému** x (vzor) existuje **PRÁVĚ JEDNO** y (obraz).
 - Nesmí nikdy vyjít více y
 - Např. $5 + 5 = 10$ (nemůže se to rovnat ještě třeba 11 nebo 12 atd)
- **Jednoznačnost:** Jeden vzor nesmí mít více obrazů.
- **Definiční obor (D_f):** Množina vstupů
- **Obor hodnot (H_f):** Množina výstupů
- **Vzor:** Vstup, který jsme do zobrazení dali
- **Obraz:** To, co z toho vzoru vzniklo (VÝSLEDEK)
- **Vzor prvku ($f^{-1}(y)$):**
 - Množina všech x , které se zobrazí na konkrétní y .

Představ si funkci $f(x) = x^2$ (umocňování na druhou):

1. **Vzor prvku 9:**

- Která čísla po umocnění dají 9? Jsou to 3 a -3 .
- **Zápis:** $f^{-1}(9) = \{-3, 3\}$.

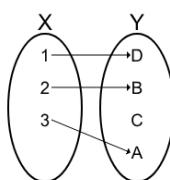
- **Vzor podmnožiny:**

- Všechny prvky z M , které se zobrazí do vybrané podmnožiny $B \subseteq N$

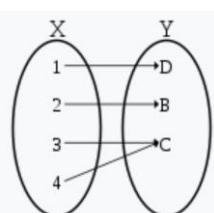
Mějme zobrazení $f(x) = x^2$.

- **Tvoje vybraná podmnožina výsledků:** $\{4, 9\}$ (To jsou ty výsledky, co tě zajímají).
 - **Vzor této podmnožiny:** Čísla $\{-2, 2, -3, 3\}$.
 - **Proč?** Protože všechna tato čísla po umocnění "vyrobí" buď 4, nebo 9.

- **Prosté (injektivní) zobrazení:** Různé vzory mají různé obrazy. Nemůže mít 1 obraz více vzorů



- **Na (surjektivní) zobrazení:** Obor hodnot je celá cílová množina ($H_f = N$).



- **Inverzní zobrazení** (f^{-1}): Cesta zpátky. Pokud f udělalo z $A \rightarrow B$, inverzní zobrazení udělá $B \rightarrow A$.
- **Skládání** ($f \circ g$):

Mějme funkce: $f(x) = 2x$ a $g(x) = x + 3$.

 - **Složení** $(g \circ f)(x)$: Nejdřív násobiš dvěma, pak přičteš tři $\rightarrow 2x + 3$.
 - **Složení** $(f \circ g)(x)$: Nejdřív přičteš tři, pak to celé násobiš dvěma $\rightarrow 2(x + 3) = 2x + 6$.
- **Identita**: Zobrazení, které nemění vstup $\rightarrow \text{Id}(5) = 5$

2. Těleso zbytkových tříd s prvočíselným modulem

Zadání z okruhů: Pojem zbytkové třídy, operace sčítání a násobení. Řešení lineárních rovnic a jejich soustav.

- Množina $Z_p = \{0, 1, \dots, p - 1\}$, kde p je prvočíslo.
 - **Proč prvočíslo?** Protože v tělese musí ke každému nenulovému prvku existovat **inverzní prvek** (dělení). Kdyby p nebylo prvočíslo (např. 4), tak existují 'dělitelé nuly' (např. $2 \cdot 2 = 4 \equiv 0$ a tím pádem k dvojce neexistuje inverze).

- **Zbytková třída:**

- Každý prvek v množině je zbytková třída
- Když máme mod 5, tak naše zbytkové třídy jsou $(0, 1, 2, 3, 4)$
- Např. třída $[2]_5$ reprezentuje čísla, která mají po dělení 5 zbytek 2 ($\dots, 7, 12, 17, \dots$)

- **Operace:**

Příklad pro \mathbb{Z}_5 :

- **Sčítání:** $3 + 4 = 7 \rightarrow (\text{zbytek po dělení } 5) \rightarrow 2$
- **Násobení:** $3 \cdot 4 = 12 \rightarrow (\text{zbytek po dělení } 5) \rightarrow 2$

- **Řešení lineárních rovnic:**

- **Příklad v \mathbb{Z}_5 :** Řeš rovnici $2x = 1$.
- Normálně bys řekl $x = 0, 5$. Ale v \mathbb{Z}_5 číslo 0, 5 neexistuje.
- Musíš najít číslo z $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, které když vynásobiš dvojkou, zbytek bude 1.
- Zkusíš: $2 \cdot 3 = 6 \rightarrow$ zbytek po dělení 5 je 1.
- **Výsledek:** $x = 3$.

- **Počítání:**

- **Malé rovnice:** Jde jednoduše vyřešit zkoušet dosazovat.
- **Soustava:** Řeší se Gaussovou el. stejně jako v \mathbb{R} , jen sčítáme/násobíme modulo p .

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \implies \mathbf{y} = \mathbf{2}, \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

3. Vektorový prostor

Zadání z okruhů: Definice, vlastnosti operací. Příklady vektorových prostorů a definice operací s vektory v jednotlivých případech.

- Definice: Množina prvků (vektorů), na které máme definované 2 operace:
 - Sčítání (+)
 - Násobení (·).
 - Dělení a Odčítání není potřeba, protože je to schované v sčítání a násobení.
- **Vlastnosti operací (Axiomy):**
 - **Pravidla pro SČÍTÁNÍ:**
 - **Nezáleží na pořadí:** $1 + 2 = 2 + 1$
 - **Závorky jsou jedno:** $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3)$
 - **Nulový vektor:** $1 + 0 = 1$
 - **Opačný vektor:** $1 + (-1) = 0$
 - **Pravidla pro NÁSOBENÍ:**
 - **Roznásobovat závorky:** $2 * (1 + 3) = 8$
 - **Jednotka:** $2 * 1 = 2$

- **Příklady vektorů:**

Sčítání: První s prvním, druhý s druhým.

$$\bullet \quad (1, 2) + (3, 4) = (4, 6)$$

Násobení: Každou složku vynásobíme číslem.

$$\bullet \quad 2 \cdot (1, 5) = (2, 10)$$

- **Příklady maticí stejných rozměrů:**

1. Sčítání matic (po složkách) Sčítají se vždy čísla na stejných pozicích. Matice musí mít stejný rozměr.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2+0 \\ 0+1 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Násobení matice číslem (každý prvek) Každé číslo uvnitř matice se vynásobi daným koeficientem.

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Podprostor:** Podmnožina vektorového prostoru, která je sama o sobě vektorovým prostorem (tzn. operace sčítání a násobení nás nevyvedou ven). Obsahuje nulový vektor. Je uzavřená na sčítání a na násobení číslem. Příklad: Přímka procházející počátkem v R^2 .
- **Lidské vysvětlení:**
 - Definice: Je to „hřiště“, kde platí pravidla slušného chování. Když sečtete dva členy hřiště, výsledek musí být zase na hřišti. Když člena zvětšíte/zmenšíte, musí být zase na hřišti.

4. Lineární kombinace vektorů

Zadání z okruhů: Definice, lineární obal množiny vektorů a jeho vlastnosti. Změny v množině vektorů, které zachovávají lineární obal. Gaussova eliminační metoda.

- **Definice:** Vektor se rovná součtu jiných vektorů, které jsou jednotlivě násobeny koeficienty

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n$$
- **Lineární obal ($\langle M \rangle$):** množina všech možných lineárních kombinací, které dokážete z daných vektorů vytvořit.
 - **1 Vektor:** Lineární obal je cílá PŘÍMKA.
 - **2 Vektory:** Jejich lineární obal je celá PLOCHA (pokud nejsou na jedné přímce).
 - **3 Vektory:** Jejich lineární obal je celý 3D PROSTOR.
- **Vlastnosti:**
 - Musí procházet body $(0, 0, 0)$.
 - Co se stane v podprostoru, zůstane v podprostoru (neexistuje operace, které by nás vyhodila ven).
- **Změny zachovávající obal:**
 - Vynásobení vektoru **nenulovým** číslem.
 - Přičtení násobku jednoho vektoru k druhému. (výsledek se možná natočí jinam, ale bude furt v rovině).
 - Prohození vektoru.
- GEM: Gaussova eliminace není nic jiného než **opakování dělání lineárních kombinací**, dokud se vektory „nevycistí“.

5. Soustavy lineárních rovnic

Zadání z okruhů: Prostor lineárních rovnic o více neznámých, soustavy se stejnou množinou řešení, řešení soustav pomocí Gaussovy eliminace a zdůvodnění funkčnosti metody.

- **Prostor rovnic:** Všechny možné pravdivé důsledky původního zadání
 - Např. $x + y = 2$

Rovnice	Patří do prostoru?	Proč?
$2x + 2y = 4$	<input checked="" type="checkbox"/> ANO	Je to jen násobek (stejná informace).
$x + 2y = 2$	<input checked="" type="checkbox"/> NE	Je to nová, nezávislá informace (nedá se namíchat).

- **Soustavy se stejnou množinou řešení (Ekvivalentní soustavy):**

- Mají stejnou množinu řešení.
- Soustava rovnic o 2 neznámých.
- Stejná pravda, jen jinak napsaná.

$$\begin{aligned}x + y &= 5 \\2x - y &= 1\end{aligned}$$

- **Proč GEM funguje:** Protože EKVIVALENTNĚ upravuje rovnice.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right]$$

↓

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & z \end{array} \right]$$

- $0 = 5$ (Žádné řešení)
- $0 = 0$ (Nekonečně mnoho řešení, je potřeba nějaký PARAMETR)

$$y = t, \quad t \in \mathbb{R}$$

6. Lineární závislost vektorů

Zadání z okruhů: Různé definice lineární nezávislosti. Báze vektorového prostoru. Dimenze vektorového prostoru. Souřadnice vektoru v bázi, izomorfismus konečněrozměrného prostoru s T^n . Souřadnice vektoru v různých bázích.

- **Lineární Závislost (Závislé):** Alespoň jeden vektor je možný vytvořit pomocí ostatních, takže tam je zbytečný
 - $(1, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 1)$ – Ten třetí vektor je zbytečný, protože jde vyrobít po sečtení prvních dvou.
- **Lineární Nezávislost (Nezávislé):** Vektory, které míří každý jiným směrem. Nelze z prvního vyrobit druhý.
- **Báze:** Nejmenší počet vektorů, se kterým lze popsat všechno v daném prostoru.
 - Jsou to vektory, které jsou lineárně nezávislé (není tam nic navíc).
 - Generují celý prostor.
 - Bází je nekonečně mnoho.
 - **STANDARDNÍ BÁZE:**
- **Dimenze:** Počet VEKTORŮ v bázi.
 - **V rovině** \mathbb{R}^2 je dimenze 2
 - **V rovině** \mathbb{R}^3 je dimenze 3
- **Souřadnice:** Jednoznačná n-tice koeficientů vyjadřující vektor v dané bázi.

$$B = (b_1, b_2)$$

$$b_1 = (1, 1)$$

$$b_2 = (0, 2)$$

$$u = (3, 7)$$

$$a \cdot (1, 1) + b \cdot (0, 2) = (3, 7)$$

$$[u]_B = (3, 2)$$

- **Izomorfismus:**

- Pokud jádro je 0 (nic se neztratilo) a obrazem je celý cílový prostor
- „Dokonalé zrcadlo“
- Splňuje INJEKTIVNOST (Prosté) a SURJEKTIVNOST (Na) = Bijekce

7. Číselné matice a operace

Zadání z okruhů: Násobení matice vektorem, násobení matic. Matice přechodu. Matice reprezentující operace v Gaussově eliminační metodě. Jednotková matice, inverzní matice a její výpočet Gaussovou-Jordanovou eliminační metodou. Lineární kombinace matic.

Transpozice matice. Vztahy mezi různými maticovými operacemi. Blokové matice a výpočty s nimi.

- **Násobení:** Lze, pokud počet sloupců matice A je roven počet řádků matice B

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 & 11 \\ 20 & 21 \\ 30 & 31 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1x10 + 2x20 + 3x30 & 1x11 + 2x21 + 3x31 \\ 4x10 + 5x20 + 6x30 & 4x11 + 5x21 + 6x31 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 10+40+90 & 11+42+93 \\ 40+100+180 & 44+105+186 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 140 & 146 \\ 320 & 335 \end{bmatrix} \end{array} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

- **Matice přechodu:**
 - Slouží k PŘEPOČTU SOUŘADNIC z báze do druhé báze
 - Obsahuje ve sloupcích souřadnice vektorů jedné báze vzhledem k druhé bázi.

Zadání: Stará báze $B = \{(1, 0), (0, 1)\}$ Nová báze $C = \{(1, 1), (0, 1)\}$

Výpočet koeficientů (sloupců):

$$(1, 0) = \mathbf{1} \cdot (1, 1) + (-\mathbf{1}) \cdot (0, 1)$$

$$(0, 1) = \mathbf{0} \cdot (1, 1) + \mathbf{1} \cdot (0, 1)$$

Výsledná matice přechodu:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Jednotková matic (I):** Na diagonále 1, jinde 0.
- **Inverzní matic:** $AA^{-1} = I$. Výpočet $(A|I) \sim \dots \sim (I|A^{-1})$.
- **Transpozice (A^T):** Záměna řádků a sloupců.
- **Lineární kombinace matic:** Kombinace matematických operací (např. $2^*A - 3^*B$)
- **Blokové matice:** Matice rozdělená na podmatice. Operace se provádí jako s prvky (pokud sedí rozměry).

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$$

- **VZTAHY:**

Transpozice součinu	$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
Inverze součinu	$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
Transpozice inverze	$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
Dvojitá transpozice	$(A^T)^T = A$
Dvojitá inverze	$(A^{-1})^{-1} = A$

8. Lineární zobrazení

Zadání z okruhů: Definice lineárního zobrazení, aditivní a homogenní zobrazení. Přípustné operace s lineárními zobrazeními. Jádro lineárního zobrazení, vlastnosti definičního oboru a oboru hodnot.

- **Definice:**
 - Lineární zobrazení L je funkce mezi 2 vektory, např. U a V .
- Zachovává $L(u + v) = L(u) + L(v)$ a $L(\alpha u) = \alpha L(u)$.
- **Aby bylo zobrazení $L : U \rightarrow V$ lineární, musí splňovat:**
 - Sčítání (Aditivita): $L(u + v) = L(u) + L(v)$
 - Násobení (Homogenita): $L(\alpha u) = \alpha L(u)$.
- **Přípustné operace s lineárními zobrazeními:**
 - SOUČET: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$: Neboli $2x + 5x = 7x$
 - NÁSOBENÍ: $(af)(x) = a * f(x)$
 - SKLÁDÁNÍ: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$:
 - Čte se to – “f po g”
 - Záleží na pořadí
 - Vstup se hodí do g a výstup z toho se hodí do f
- **Jádro (Ker):**

- $\text{Ker}(L) = \{x \in U \mid L(x) = 0\}$.
- “Ker říká, co se vše ztratilo”
- Je to podprostor definičního oboru (U).
- Vždy obsahuje aspoň nulový vektor $\{0\}$
- Zobrazení je INJEKTIVNÍ právě tehdy, když v jádru leží nula

- **Obor hodnot (Im):**

- Je to podprostor cílového prostoru (V).
- “ Im říká, co zůstalo”
- Zobrazení je SURJEKTIVNÍ, pokud obor hodnot splýva s celým cílovým prostorem

- **Platí:**

- $\dim \text{Ker} + \dim \text{Im} = \dim V$. ($\dim V$ je Dimenze definičního oboru)
- Příklad:
 - $\dim(V) = 3D$ svět (x, y, z)
 - $\dim(\text{Im}) = 2D$ (x, y – fotka na papíře)
 - $\dim(\text{Ker}) = 1D$ (z – ztratila se hloubka)

9. Frobeniova věta

Zadání z okruhů: (pro obecná lineární zobrazení): Množina vzorů daného vektoru při lineárním zobrazení. Postup hledání neznámého vzoru při známém obrazu. Souvislost s řešením soustav lineárních rovnic.

- **Definice věty:**

- Říká nám, jestli má rovnice vůbec smysl
- Řešení existuje $\Leftrightarrow h(A) = h(A|b)$
- **Hodnost matice = Hodnost rozšířené matice.** Hodnost matice je maximální počet lineárně nezávislých řádků (nebo sloupců) té matice. Značíme $h(A)$.
- $0 = 5$ (nemá řešení)
- $0 = 0$ (nekonečně mnoho řešení)

Pokud $h(A) \neq h(A|b)$: Soustava **nemá řešení** (rovnice si odporují).

Pokud $h(A) = h(A|b) = n$ (**počet neznámých**): Soustava má právě **jedno řešení**.

Pokud $h(A) = h(A|b) < n$: Soustava má **nekonečně mnoho řešení** (máme volné parametry).

- **Množina vzorů daného vektoru:**

- $$M = x_p + \text{Ker}(A)$$
- $$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
- x_p = Partikulární řešení, neboli jeden konkrétní vzor, který FUNGUJE

- **Ker(A)** = Jádro. To je množina všech vektorů, které se zobrazí na nulu
- $M = (\text{Jeden funkční input}) + (\text{Cokoliv, co funkce ignoruje/vynuluje})$
- **Postup hledání:**
 - 1. **Rovnice:** $2x = 6$ a $2y = 12$.
 - 2. **Matice:** $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 6 \\ 0 & 2 & 12 \end{array} \right)$.
 - 3. **Výsledek:** $x = 3, y = 6$.
 - 4. **Vzor:** Vektor $(3, 6)$.

10. Maticová reprezentace

Zadání z okruhů: Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru. Konstrukce maticové reprezentace. Maticové reprezentace operací na lineárních zobrazeních. Změna matice při změně bazí ve výchozím a cílovém prostoru.

- **Definice:** Je to předpis zapsaný do tabulky, který umožnuje vypočítat lineární zobrazení pomocí násobení souřadnic.
- **Výpočet souřadnic obrazu ze souřadnic vzoru:**

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}: \text{Maticová reprezentace zobrazení } f. \\ [x]_{\mathcal{B}} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}: \text{Souřadnice } \mathbf{vzoru} \text{ v bázi } \mathcal{B} \text{ (vstupní data).} \\ [f(x)]_{\mathcal{E}} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}: \text{Souřadnice } \mathbf{obrazu} \text{ v bázi } \mathcal{E} \text{ (výsledek po zobrazení).} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

- **Zobrazení je jednoznačně určeno obrazy bázových vektorů:**

- Vzor (x): Vstupní vektor
- Obraz (y): Výstup
- Matice (A)

$$\boxed{\mathbf{y} = A \cdot \mathbf{x}}$$

- **Konstrukce matice:** Popisuje výrobu té matice z vektorů

- **Maticová reprezentace na lin. zobrazeních:**

- $(f + g) = A + B$
- $(a * f) = a * A$
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)):$
 - Čte se to – “f po g”
 - Záleží na pořadí
 - Vstup se hodí do g a výstup z toho se hodí do f

- **Změna báze:**

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

- A = Stará matice
- T = Matice přechodu
- T^{-1} = Inverzní matice přechodu
- Proč se to dělá: Matice může být jednodušší v jiné bázi

11. Lineární zobrazení do sebe (Endomorfismus)

Zadání z okruhů: Vlastní čísla a vektory lineárního zobrazení, vlastnosti vlastních vektorů.
Hlavní vektory. Elementární metody hledání vlastních čísel a vektorů na konečnědimenzionálních prostorzech.

- **Definice:** Lineární zobrazení, které jde do stejného prostoru
- **Vlastní číslo (λ):**
 - $\det(A - \lambda I) = 0$.
 - Faktor, kterým se ten směr natáhne.
- **Vlastní vektor:**
 - Je to nenulový vektor v , pro který platí, že má furt STEJNÝ SMĚR, ale může měnit velikost kvůli násobení číslem λ

$$\begin{aligned} A \cdot v &= \lambda \cdot v \\ (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

- **Hlavní vektory:** Pokud mám málo vlastních vektorů, doplňujeme bázi hlavními vektory
- **Výpočet:**

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \\ \begin{vmatrix} -6 - \lambda & 1 \\ 1 & 7 - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \quad (\text{Pak se počítá determinant}) \\ \lambda^2 - \lambda - 43 &= 0 \\ \lambda_{1,2} &= \frac{1 \pm \sqrt{173}}{2} \quad (\text{Vlastní čísla}) \end{aligned}$$

- Jordanův řetězec:

$$(A - \lambda I)v_{hlavní} = v_{vlastní}$$

12. Skládání endomorfismu se sebou

Zadání z okruhů: Mocniny a mnohočleny z lineárních endomorfismů. Jádro z mnohočlenu lineárního endomorfismu a jeho vztah ke kořenům mnohočlenu a vlastním vektorům základního endomorfismu.

- **Mocniny zobrazení f^n :**
 - $f(f(f(f(\dots f(x))))$). Prostě tu operaci zopakuješ n-krát.
 - **Odpovídající matice A^n :** V maticovém světě to odpovídá $A * A * A * \dots * A$.
 - **Příklad:** Pokud matice A^1 otočí vektor o 90° , pak A^2 ho otočí o 180° , ...
- **Mnohočlen zobrazení:**
 - Matice můžeme dosazovat do rovnic jako čísla
 - **POZOR:** u konstant je potřeba přidat **JEDNOTKOVOU MATICI**
$$x^2 - 1 \xrightarrow{\text{dosadíme } A} A^2 - 1 \cdot \mathbf{I}$$
 - Základní vzorec:
$$P(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I$$
- **Jádro mnohočlenu:** Jsou to VEKTORY, které výsledná matice VYNULUJE (odpadkovej koš)
- **Vztah kořenů k jádru:** Pokud VLASTNÍ ČÍSLO λ vynuluje **rovnici**, potom i jeho VLASTNÍ VEKTOR vynuluje **matici**.

13. Determinant

Zadání z okruhů: Možné definice a metody jeho výpočtu, geometrická interpretace.

- **Definice:** Číslo, co určuje, zda se matice zvětšila/zmenšila atd.

det(A) > 1	Zvětší se (Nafoukne)
det(A) je 0 až 1	Zmenší se (Scvrkne)
det(A) = 0	Zničí se (Rozplácne na placku)
det(A) je minus	Otočí se (Jako v zrcadle)

- $\det(A * B) = \det(A) * \det(B)$
- Vzorec pro INVERZNÍ MATICI.

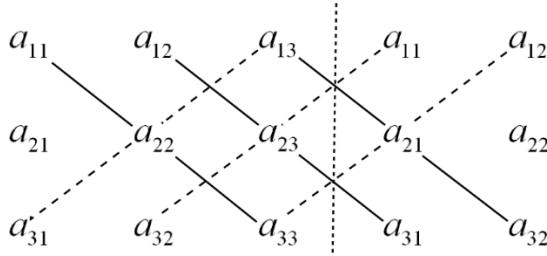
$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A)$$

- **adj(A) – Adjungovaná matice:** Matice složená z determinantů všech podmatic původní matice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjungovaná}} \text{adj}(A) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

- **Metody:**

- Sarrusovo pravidlo (pouze $n = 3$)



- Gaussova eliminace na trojúhelníkový tvar (součin diagonály).
- Laplaceův rozvoj

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= 0 + (-1)^{2+2} \cdot (-1) \cdot 2 + (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot 7 \\ &= -9. \end{aligned}$$

- **Geometrie:**

- **Matrice 2x2** -> Vytvoříme **2 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBSAH plochy** je roven determinantu
- **Matrice 3x3** -> Vytvoříme **3 vektory** ze sloupců a nakreslíme -> **OBJEM tělesa** je roven determinantu
- Kdyby determinant byl např. **-5**, tak to nevadí, protože bereme **ABSOLUTNÍ hodnotu**

14. Skalární součin

Zadání z okruhů: Definice, vlastnosti. Norma vektoru a její vlastnosti. Skalární součiny na různých vektorových prostorech. Speciálně: prostor l_2 a výpočet skalárního součinu geometrických posloupností. Metrická matice a výpočet skalárního součinu vektorů pomocí souřadnic v dané bázi. Výpočet souřadnic vektoru v dané bázi pomocí skalárního součinu.

- **Definice:**

- Operace, která ze 2 vektorů udělá jedno číslo (skalár)
 - Pomocí toho zjistím, jestli vektory jsou na sebe kolmé ($=0$)
- $$(1, 0) \cdot (0, 1) = 0$$

- **Vlastnosti:**

- Symetrie: $u^*v = v^*u$
- Funguje roznásobování závorek: $a^*(u + v) = au + av$
- Skalární součin vektoru se sebou samým je vždy **KLADNÝ** nebo **NULA**

$$\boxed{u \cdot u \geq 0.}$$

- **Norma:** $\| u \| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$.
 - Vždy je kladný nebo roven 0
- **Prostor l_2 :**
 - l_2 = Nekonečněrozměrný prostor, který se využívá v pokročilé matematice
 - Pokud máme vektor, který má nekonečně mnoho složek
$$\boxed{u = (u_1, u_2, u_3, \dots)}$$
 - Musí platit podmínka, aby "nevybouchnul" do nekonečna:
$$\sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2 < \infty$$
- **Metrická matice (G):**
 - Nástroj, který nám umožní vypočítat skalární součin 2 vektorů v LIBOVOLNÉ BÁZI
 - $a^T \cdot G \cdot b = 0$

15. Úhel a ortogonalita

Zadání z okruhů: Schwartzova nerovnost, úhel mezi vektory, speciálně kolmost dvou vektorů. Ortogonální množiny a jejich vlastnosti. Gramův-Schmidtův algoritmus. Tříčlenné rekurence pro ortogonalizaci speciálně konstruovaných množin.

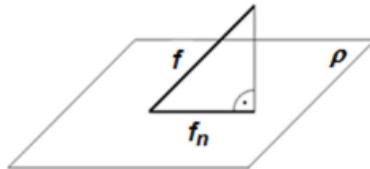
- **Schwartzova nerovnost:**
 - Velikost skalárního součinu nemůže být větší než součin jejich délek.
 - $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$
- **Úhel:**
 - Díky této nerovnosti víme, že výpočet výde vždy mezi -1 a 1.
$$\boxed{\cos(\phi) = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}}$$
- **Kolmost:**
 - **Kolmost = ORTOGONÁLNÍ**
 - $\langle u, v \rangle = 0$.
- **Ortogonalní množiny:**
 - Množina vektorů, kde každý vektor je s každým kolmý
 - Každý vektor míří jiným směrem
- **Gram-Schmidt:**
 - Algoritmus, který transformuje BÁZI na BÁZI ORTOGONÁLNÍ

- Výsledné vektory jsou tak kolmé
- Pokud i délky jsou jedna, jedná se o **ORTONORMÁLNÍ BÁZI**

16. Optimální approximace

Zadání z okruhů: Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru, podstata pojmu „nejbližší“. Konstrukce approximace: vlastnosti odchylky, výpočet souřadnic approximace v dané bázi, výpočet velikosti odchylky.

- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitého za něco jednoduššího)
- **Vektor v podprostoru nejbližší k danému vektoru:**
 - Říká se tomu ORTOGONÁLNÍ projekce

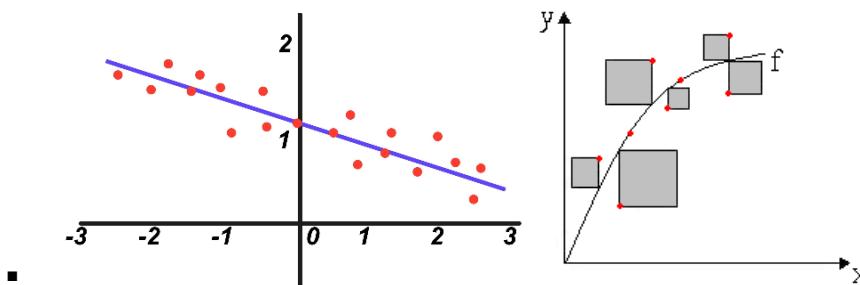


- **Konstrukce approximace:**
 - **Vlastnosti odchylky:**
 - Odchylka je definována jako rozdíl mezi původním vektorem a jeho projekcí
 - $\mathbf{e} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$.
 - **Výpočet souřadnic v OBECNÉ bázi:**
 - Přes Gramovu matici
$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_1 & \dots & \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \end{pmatrix}$$
 - **Výpočet souřadnic v ORTOGONÁLNÍ bázi:**
 - $c_i = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i}{\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i}$
 - **Výpočet velikosti odchylky:**
 - Pomocí Pythagorovy věty
 - $\|\mathbf{v}\|^2$ = Čtverec délky původního vektoru
 - $\|\hat{\mathbf{v}}\|^2$ = Čtverec délky jeho ortogonální projekce
 - $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{\|\mathbf{v}\|^2 - \|\hat{\mathbf{v}}\|^2}$

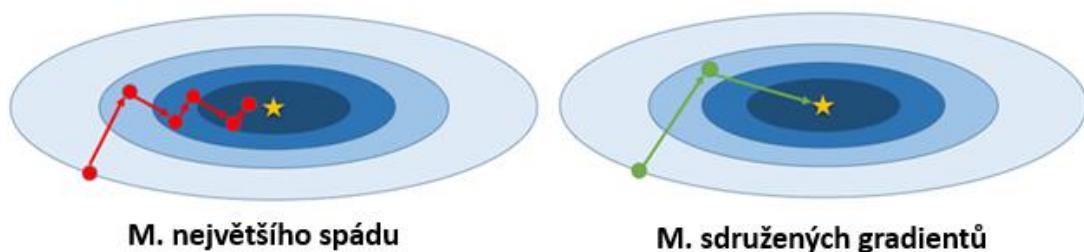
17. Použití approximací

Zadání z okruhů: Metoda nejmenších čtverců, metoda sdružených gradientů, JPEG komprese. Úplná ortogonální množina v prostoru a Fourierovy řady.

- **Aproximace = Přiblížení** (nahrazení něčeho složitého za něco jednoduššího)
- **Metoda nejmenších čtverců:**
 - Řešení přeurovené soustavy $Ax = b$. Obvykle nemá řešení, protože čára nemůže projít přes všechny body.
 - Minimalizujeme přes $\|Ax - b\|^2$ a hledáme nejmenší možnou chybu.
 - Příklad: Máme několik teček v grafu, které měli ležet v jedné přímce, ale kvůli chybám měření, tam jsou odchylky.
 - Princip: Hledáme takovou přímku, aby součet chyb "vzdálenosti bodů od přímky" byl co nejmenší



- **Metoda sdružených gradientů:**
 - Conjugate Gradient - Sdružené gradienty
 - Udělá první krok a druhý krok volí chytře, že zamíří přímo do středu terče (do řešení)
 - Steepest Descent - Metoda největšího spádu
 - Udělá první krok a pak každý následující je kolmý. Dlouho to trvá, než dojde k cíli.



- **Fourierovy řady:** Rozklad složité funkce na součet jednoduchých goniometrických funkcí (sinus a kosinus – jsou na sebe kolmé a nezávislé) = Lze z nich složit libovolný signál.
- **JPEG komprese:** Využívá approximaci k redukci dat (lidské oko nepozná rozdíl, ale počítač ušetří data)
- **Úplná ortogonální množina:** Je to taková množina vzájemně kolmých (ortogonálních) vektorů, ke které už nelze přidat žádný další nenulový vektor, aby byl kolmý na všechny ostatní.

18. Výpočetní náročnost

Zadání z okruhů: Počty operací nutné k násobení matici vektorem, násobení matic, použití Gaussovy eliminační metody a Gaussovy-Jordanovy eliminace. Strassenův algoritmus.

- **Matice × Vektor:**
 - $A * v = b$
 - $O(n^2)$.
- **Matice × Matice:**
 - $A * B = C$
 - $O(n^3)$.
- **GEM:** $O(n^3)$.
- **Determinant:** $O(n^3)$.
- **GJE:**
 - Je to o trochu pomalejší než GEM, ale řádově je to stejné
 - $O(n^3)$.
- **Strassenův algoritmus:**
 - Algoritmus pro násobení matic s náročností cca $O(n^{2.807})$.
 - Máme matici 2×2
 - Klasický postup potřebuju 8 násobení
 - Strassenův postup jich potřebuje 7, ale je potřeba více sčítání (které je levné)
 - Vyplatí se jen opravdu pro obrovské maticy.

19. Matematická indukce

Zadání z okruhů: Princip, použití.

- Definice: Je to metoda, která dokazuje, že něco platí pro všechna \mathbb{N}
- **1. Základní krok:** $n = 1$ (Musíme ověřit, že pravidlo platí pro nejmenší číslo. Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **2. Indukční krok:** $n = n + 1$ (Poté ověřujeme, zda to platí i pro ostatní)
- **REKURZE:** Např. v programování můžeme naprogramovat funkci FAKTORIAL, kde používáme rekurzi (Funkce volá sama na sebe, dokud nenarazí na nejmenší číslo)
- **Použití:**

- Gaussovský součet = $\frac{n(n+1)}{2}$
- V programování se to používá např. u REKURZÍ

$$\begin{aligned}n = k : \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k &= \frac{k(k+1)}{2} \\n = k + 1 : \quad 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\&\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\&0 = 0\end{aligned}$$

20. Pravidla kombinatoriky

Zadání z okruhů: Pravidlo součtu, součinu, princip inkluze a exkluze. Dirichletův princip.

- **Pravidlo součinu:**

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

- Příklad: Máme 3 trička a 5 kalhot. Mohu z toho vytvořit $3 \times 5 = 15$ outfitů.

- **Pravidlo součtu:**

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Příklad: Máme peníze na jedno jídlo a mohu si vybrat ze 3 polívek nebo 5 hlavních jídel: $3 + 5 = 8$ možností.

- **Princip inkluze a exkluze:**

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Příklad: Ve třídě je 20 programátorů, 15 z nich umí Python a 10 z nich umí Java. Kolik lidí umí OBA jazyky?
- $15 + 10 = 25$ (to je větší než 20, musíme z výsledku odečíst počet lidí)
- $25 - 20 = 5$

- **Dirichletův princip:**

- $n + 1$ předmětů do n příhrádek \Rightarrow aspoň jedna příhrádka má 2 předměty.
- Příklad: Máme 13 studentů, takže je 100% šance, že se něktěří narodili ve stejný měsíc ($n + 1 = 13$ studentů, $n = 12$ měsíců)

21. Kombinatorické výpočty

Zadání z okruhů: Variace, permutace a kombinace bez opakování a s opakováním.

Kombinatorické identity, Pascalův trojúhelník, Pascalova Identita. Binomická věta.

Zobecněná kombinační čísla, Newtonův vzorec.

- **Variace:**

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

- n = počet prvků
- k = kolik
- Příklad: Běží 10 lidí, a 3 dostanou medaili ($10! / 7!$)
- ZÁLEŽÍ NA POŘADÍ

- **Permutace:**

- $P(n) = n!$ - pořadí.
- Např. mám 5 lidí vedle sebe, kolika způsoby je můžu seřadit? = $5!$

- **Kombinace (bez opakování):**

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}$$

- NEzáleží NA POŘADÍ, výsledek je stejný
 - Příklad: Sportka
 - **Kombinace (s opakováním):**
- $$\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$
- Příklad: 3 druhy zmrzliny, chceme 2 kopečky. Zmrzliny můžeme opakovat.

- **Pascalův trojúhelník:**

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 1 & 2 & 1 & & \\
 1 & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\
 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
 & & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
 & 1 & 5 & & & & \\
 \end{array}$$

$$(a+b)^4 \longrightarrow 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$$

- **Pascalova IDENTITA:**
- Matematický zápis, jak funguje sčítání v P. trojúhelníku

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

- **Binomická věta:**
- Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat pomocí P. trojúhelníku např.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

- **Zobecněná kombinační čísla:**
- n = může být klidně REÁLNÉ číslo

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Newtonův vzorec:**
- Platí jen, když $|x| < 1$. Kdyby to bylo velké, řada by šla do NEKONEČNA
- Vzorec, který ukazuje, jak efektivně vypočítat např. $(1+x)^{0,5}$ i když mocnina není celé číslo (může být i záporné)

$$(1+x)^r = \binom{r}{0} + \binom{r}{1}x + \binom{r}{2}x^2 + \binom{r}{3}x^3 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$$

22. Číselné posloupnosti

Zadání z okruhů: Prostor číselných posloupností. Lineární zobrazení na prostoru číselných posloupností. Rekurentně definované posloupnosti. Rekurence konečného řádu, diferenční rovnice. Počáteční podmínky. Lineární rekurentní vztahy konečného řádu.

- Definice:
 - Zobrazení $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$.
 - Nekonečný seznam čísel
 - Pokud je to lineární zobrazení, platí pro ně:
 - Aditivita:** $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$
 - Homogenita:** $\Delta(5 \cdot a) = 5 \cdot \Delta a$

- Lineární zobrazení:
 - **Posun (Shift):** $S(a_n) = a_{n+1}$ (Zahod' první prvek a posuň se dál)
 - **Diference:** $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$ (Počítá změnu mezi sousedy)
- **Rekurence:** Rovnice $L(a_n) = 0$.
 - Je to něco jako Fibonacci
 - Pravidlo, jak vypočítat další člen, když neznáš ten předchozí
 - $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ (Fibonacci).

- **Rekurentně definovaná posloupnost:** Neříká nám rovnou, jaký je výsledek, ale říká, jak se k němu dostat z předchozího kroku

$$a_{n+1} = a_n + 3 \text{ (Vztah)}$$

$$a_1 = 2 \text{ (Počáteční podmínka - stojíme na čísle 2)}$$

-
- **Počáteční podmínky:** Číslo zadané na začátku. Nutné pro jednoznačnost řešení
- **Lineární rekurentní vztahy konečného řádu:**

- Pokud vyšli 2 kořeny JINAK:

$$a_n = C_1 \cdot (\lambda_1)^n + C_2 \cdot (\lambda_2)^n$$

- Pokud vyšlí 2 kořeny STEJNĚ:

$$a_n = C_1 \cdot \lambda^n + C_2 \cdot \mathbf{n} \cdot \lambda^n$$

23. Řešení lineárních rekurentních vztahů

Zadání z okruhů: Lineární rekurentní vztahy s konstantními koeficienty. Charakteristický mnohočlen rekurentního vztahu. Vlastní čísla a vlastní hlavní vektory posunutí posloupnosti,

reálné posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel. Řešení nehomogenních rekurencí se speciálními pravými stranami.

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2} - 12$$

- Koeficienty: to jsou ty čísla před „a“, takže (2, 3)

- Charakteristický mnohočlen:

- $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$

- Vlastní čísla:

- $(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$ Vyjde ti $\lambda_1 = 3$ a $\lambda_2 = -1.$

- Vlastní hlavní vektory:

- To se dělá, pokud nám vyjdou 2 stejné kořeny
- Pokud máš násobný kořen, jeden vektor je 3^n , ale druhý ti chybí. Musíš ho vyrobit uměle jako $(3^n * n)$

- Posloupnosti generované dvojicemi komplexně sdružených vlastních čísel:

- Kdyby DISKRIMINANT byl 0 nebo záporný
- Místo 3^n by se tam dali SINUS a KOSINUS

- Řešení nehomogenní části (Co s číslem na konci?):

- To je ta -12 na konci
- Homogenní: Kdyby tam byla 0
- Nehomogenní/Partikulární: To je ta -12 na konci

Dosadíme c místo všech a_n :

$$c = 2c + 3c - 12$$

Vyřešíme rovnici pro c :

$$c = 5c - 12$$

$$-4c = -12$$

$$c = 3$$

Naše partikulární řešení je 3.

24. Rovinné grafy

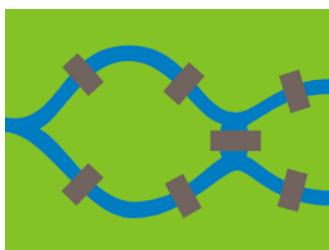
Zadání z okruhů: Základní pojmy, incidence, matice sousednosti. Skóre grafu, Havlův algoritmus. Souvislost grafů – sled, tah, cesta. Speciální typy grafů. Eulerovské a hamiltonovské grafy.

- **Rovinné grafy:** To je graf, který lze nakreslit na papíř, aniž by se křížily hrany
- **Základní pojmy:** Vrcholy V , hrany E .
- **Incidence:** Vztah, který nám říká, jestli hrana je napojená na vrchol. Často se z toho tvoří MATICE INCIDENCE.

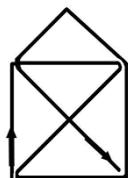
- **Matrice sousednosti:** Ta nám ukazuje, zda např. vrchol A a B spolu sousedí.
- **Skóre grafu:** Počet hran, kolik je napojených na vrchol.
- **Havlův algoritmus:** Zjistí, zda jde z posloupnosti vytvořit graf.
 - Maže se vždy největší prvek a poté se od každého čísla odebere 1. Tohle se opakuje několikrát.
 - Pokud v posloupnosti zbydou jen 0, graf lze vytvořit.
- **Souvislost:**
 - **Sled:** Posloupnost vrcholů a hran (mohou se opakovat).
 - **Tah:** Neopakují se hrany (kreslení domečku jedním tahem).
 - **Cesta:** Neopakují se vrcholy.

Název	Opakování hran?	Opakování vrcholů?	Přísnost
Sled	✓ ANO	✓ ANO	Žádná
Tah	✗ NE	✓ ANO	Střední
Cesta	✗ NE	✗ NE	Nejvyšší

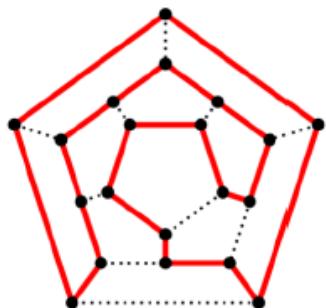
- **Eulerovský graf:** Tah, který projde každou **HRANOU** právě jednou a vrátíš se zpět. Existuje, pokud mají vrcholy sudý stupeň (Sudý počet hran).



- **Eulerovský tah:** Například kreslení domečku jedním tahem



- **Hamiltonovský graf:** Obsahuje kružnice procházející všemi **VRCHOLY**.



25. Ohodnocené grafy

Zadání z okruhů: Optimalizační algoritmy – minimální kostra, nejkratší cesta.

- Hrany mají ohodnocení $w: E \rightarrow \mathbb{R}$. (každé hraně je PŘIŘAZENO reálné číslo)
- **Minimální kostra:** Podgraf, který je stromem, obsahuje všechny vrcholy a má minimální součet vah. Strom je souvislý graf, který neobsahuje žádnou kružnici.
- **Borůvkův/Kruskalův algoritmus:** Spojování VŠECH vrcholů nejlevnější hranou.
- **Nejkratší cesta:** Cesta z u do v s minimálním součtem vah.
- **Dijkstrův algoritmus:** Hledá nejkratší cestu ze startu do cíle

