

První zápočtový test – vzorové řešení

1. Inverzní funkce

Zadaná funkce:

$$f(x) = \frac{3 - \sin(4 - x)}{2}$$

Definiční obor funkce f

Aby měla funkce f inverzní funkci, musí být na zvoleném definičním oboru prostá. Funkce $\sin t$ není prostá na celé množině reálných čísel, proto omezíme její argument

$$t = 4 - x$$

na interval, kde je sinus ryze monotónní. Standardně se volí interval

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

na kterém je sinus rostoucí a inverzní funkcí k němu je $\arcsin t$. Z podmínky

$$-\frac{\pi}{2} \leq 4 - x \leq \frac{\pi}{2}$$

určíme odpovídající interval pro x :

$$-\frac{\pi}{2} - 4 \leq -x \leq \frac{\pi}{2} - 4 \quad \Rightarrow \quad 4 + \frac{\pi}{2} \geq x \geq 4 - \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad D(f) = \left[4 - \frac{\pi}{2}, 4 + \frac{\pi}{2}\right].$$

Obor hodnot funkce f

Pro $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ platí $-1 \leq \sin t \leq 1$. Dosadíme do výrazu funkce:

$$\sin(4 - x) = 1 : \quad f_{\min} = \frac{3 - 1}{2} = 1,$$

$$\sin(4 - x) = -1 : \quad f_{\max} = \frac{3 - (-1)}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow \quad H(f) = [1, 2].$$

Odvození inverzní funkce

$$y = \frac{3 - \sin(4 - x)}{2}$$

Vyjádříme sinus:

$$\sin(4 - x) = 3 - 2y.$$

Aplikujeme arcsin:

$$4 - x = \arcsin(\sin(4 - x)) = \arcsin(3 - 2y).$$

Vyjádříme x :

$$x = 4 - \arcsin(3 - 2y).$$

Po záměně $x \leftrightarrow y$ dostáváme:

$$f^{-1}(x) = 4 - \arcsin(3 - 2x)$$

a

$$D(f^{-1}) = H(f) = [1, 2], \quad H(f^{-1}) = D(f) = \left[4 - \frac{\pi}{2}, 4 + \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Limity

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{10^{55}} + (-1)^{2n+11} + \frac{1}{2^n} + \frac{2n^2 - 2n + 50}{-n^2 - 5n + 10} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{10^{55}} = 1, \quad (-1)^{2n+11} = (-1)^{\text{liché}} = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 2n + 50}{-n^2 - 5n + 10} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{2}{n} + \frac{50}{n^2}}{-1 - \frac{5}{n} + \frac{10}{n^2}} = -2.$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{10^{55}} + (-1)^{2n+11} + \frac{1}{2^n} + \frac{2n^2 - 2n + 50}{-n^2 - 5n + 10} \right) = 1 - 1 + 0 - 2 = -2.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} \stackrel{\infty}{=} \quad \text{a použijeme dvakrát L'Hospitalovo pravidlo:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2 x}{x^{-1}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2(\ln x)x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x}{-x^{-1}} \stackrel{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^{-1}}{x^{-2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5 - 5x}{(x^2 - 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5(x - 1)}{(x - 1)^3(x + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{(x - 1)^2(x + 1)^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5}{(x + 1)^3} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x - 1)^2} \stackrel{\text{typ } \frac{-5}{8 \cdot 0}}{(1-x)^2 > 0}{=} -\infty.$$

3. Průběh funkce

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \frac{x^2 - x - x + 2}{x - 1} = x + \frac{-x + 1 + 1}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1}$$

Definiční obor a spojitost

Jmenovatel nesmí být nulový:

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty).$$

Limity v krajních bodech a asymptoty

a) Limita pro $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + \frac{1}{x-1} = \infty - 1 + \frac{1}{\infty - 1} = \infty$$

b) Limita pro $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + \frac{1}{x-1} = -\infty - 1 + \frac{1}{-\infty - 1} = -\infty$$

\Rightarrow Funkce má šikmou asymptotu: $y = x - 1$, protože $f(x) - x + 1$ jde k nule, když $x \rightarrow \pm\infty$.

c) Limita pro $x \rightarrow 1^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2x + 2) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} \stackrel{\text{typ } \frac{1}{0}}{=} \infty$$

d) Limita pro $x \rightarrow 1^-$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 2x + 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x - 1} \stackrel{\text{typ } \frac{1}{0}}{=} -\infty$$

\Rightarrow Funkce má svislou asymptotu: $x = 1$ a nemá absolutní extrém na $D(f)$.

První derivace

$$f'(x) = \left(x - 1 + \frac{1}{x-1} \right)' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Hledáme body, kde $f'(x) = 0$ nebo kde derivace neexistuje. Dělení nulou v bodě $x = 1$ není problém, protože tento bod zároveň není ani v definičním oboru funkce f .

$$1 - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x + 1 - 1}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0, x = 2.$$

Zkoumáme znaménko derivace. Pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

x	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 2)$	$(2, \infty)$
$f'(x)$	+	-	-	+
$f(x)$	roste	klesá	klesá	roste

- V bodě $x = 0$ derivace mění znaménko z $+$ na $- \Rightarrow$ **lokální maximum**
- V bodě $x = 1$ funkce není definovaná
- V bodě $x = 2$ derivace mění znaménko z $-$ na $+$ \Rightarrow **lokální minimum**

Druhá derivace

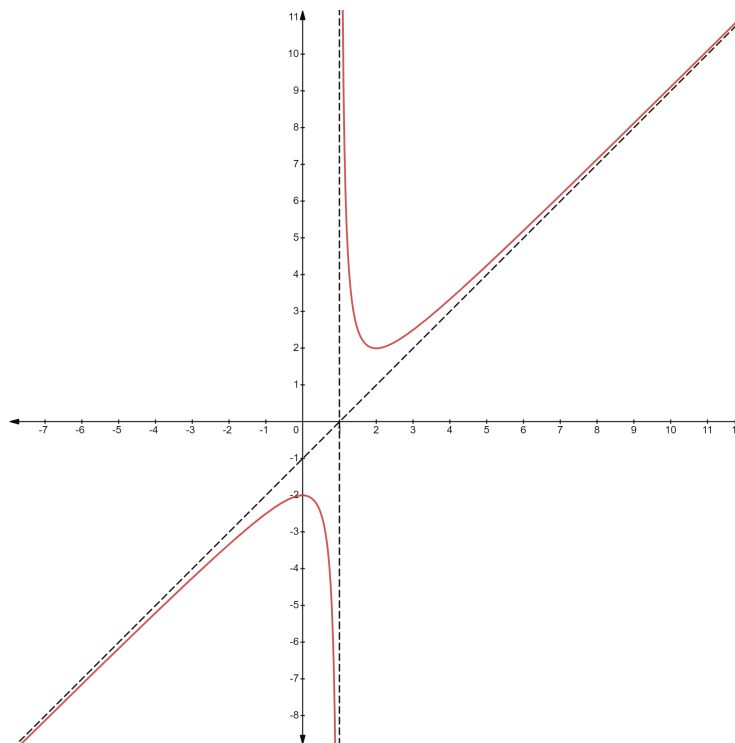
$$f''(x) = \left(1 - \frac{1}{(x-1)^2}\right)' = \frac{2}{(x-1)^3} \neq 0.$$

Opět pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

$$x < 1 \Rightarrow f''(x) < 0 \quad (\text{konkávní}), \quad x > 1 \Rightarrow f''(x) > 0 \quad (\text{konvexní}).$$

Dělení nulou v bodě $x = 1$ není problém, protože tento bod zároveň není ani v definičním oboru funkce f . Funkce tedy nemá inflexní body.

Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ a jejích asymptot