Druhý zápočtový test – vzorové řešení

1. Spočtěte $\int_{(\ln 2)/2}^{0} xe^{2x}\,dx$.

Řešení: Použijeme integraci per partes

$$\int u(x)v'(x)dx \overset{C}{=} u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$$

Volíme

$$u(x) = x, \quad v'(x) = e^{2x} \quad \Rightarrow \quad u'(x) = 1, \quad v = \frac{e^{2x}}{2}.$$

Pak

$$\int xe^{2x}\,dx \overset{C}{=} x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx \overset{C}{=} \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \overset{C}{=} \frac{e^{2x}}{4}(2x-1).$$

Tedy

$$\int_{(\ln 2)/2}^{0} xe^{2x}\,dx = \left[\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)\right]_{(\ln 2)/2}^{0} = \frac{e^0}{4}(0-1) - \frac{e^{\ln 2}}{4}\left(2\cdot\frac{\ln 2}{2} - 1\right) =$$

$$= -\frac{1}{4} - \frac{2}{4}(\ln 2 - 1) = -\frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. Spočtěte

$$\int \left(\frac{1}{\operatorname{arctg}^3 x} + \frac{1}{15 - 2\operatorname{arctg} x} + \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}^2 x\right)\frac{dx}{1+x^2}.$$

Řešení: Přirozená substituce je

$$t = \operatorname{arctg} x, \quad dt = \frac{dx}{1+x^2}.$$

Integrál přejde na neurčitý integrál tvaru

$$\int \left(\frac{1}{t^3} + \frac{1}{15-2t} + \frac{1}{3} + t^2\right) dt.$$

Postupně integrujeme:

$$\int t^{-3}dt \overset{C}{=} \frac{t^{-2}}{-2} \overset{C}{=} -\frac{1}{2t^2}, \qquad \int \frac{1}{3}\,dt \overset{C}{=} \frac{t}{3}, \qquad \int t^2\,dt \overset{C}{=} \frac{t^3}{3},$$

$$\int \frac{1}{15-2t}\,dt \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln|15-2t| \qquad \text{(případně využijte substituci } y = 15-2t\text{)}.$$

Celkem tedy máme:

$$\int \left(\frac{1}{\operatorname{arctg}^3 x} + \frac{1}{15 - 2 \operatorname{arctg} x} + \frac{1}{3} + \operatorname{arctg}^2 x \right) \frac{dx}{1+x^2} \stackrel{C}{=} -\frac{1}{2t^2} - \frac{1}{2} \ln |15 - 2t| + \frac{t}{3} + \frac{t^3}{3} \stackrel{C}{=}$$

a po zpětné substituci $t = \operatorname{arctg} x$ dostaneme výsledek

$$\stackrel{C}{=} -\frac{1}{2 \operatorname{arctg}^2 x} - \frac{1}{2} \ln \bigl| 15 - 2 \operatorname{arctg} x \bigr| + \frac{\operatorname{arctg} x}{3} + \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}.$$

Výsledek musíme doplnit o podmínky na x: z prvního členu máme $x \neq 0$ a z druhého $15 - 2 \operatorname{arctg} x \neq 0$. Druhá podmínka je ale vždy splněna, protože $2 \operatorname{arctg} x \in (-\pi, \pi)$, tedy $15 - 2 \operatorname{arctg} x > 15 - \pi > 0$ pro všechna reálná x. Celkově je tedy integrand (a tím pádem i primitivní funkce) definován na dvou intervalech

$$(-\infty, 0) \qquad \text{nebo} \qquad (0, \infty).$$

3. Spočtěte

$$\int_1^{e^2} \frac{\left(5 \ln x - \ln^2 x\right)\, dx}{\left(\ln^2 x + 3 \ln x + 2\right) x}.$$

Řešení: Přirozená substituce

$$t = \ln x, \qquad dt = \frac{dx}{x}, \qquad \ln 1 = 0, \qquad \ln e^2 = 2 \ln e = 2.$$

vede na

$$\int_1^{e^2} \frac{\left(5 \ln x - \ln^2 x\right)\, dx}{\left(\ln^2 x + 3 \ln x + 2\right) x} = \int_0^2 \frac{5t - t^2}{t^2 + 3t + 2}\, dt = \int_0^2 \frac{-(t^2 + 3t + 2) + 8t + 2}{t^2 + 3t + 2}\, dt =$$

(alternativa je dělení polynomů)

$$= \int_0^2 -1 + \frac{8t + 2}{(t+1)(t+2)}\, dt.$$

Rozklad na parciální zlomky: Hledáme konstanty A, B tak, aby

$$\frac{8t + 2}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}.$$

Vynásobíme společným jmenovatelem $(t+1)(t+2)$:

$$8t + 2 = A(t+2) + B(t+1).$$

Dosadíme za kořeny jmenovatele:

- pro $t = -1$ dostaneme

$$8 \cdot (-1) + 2 = -6 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad A = -6,$$

- pro $t = -2$ dostaneme

$$8 \cdot (-2) + 2 = -16 + 2 = -14 = A \cdot 0 + B \cdot (-1) \quad \Rightarrow \quad B = 14.$$

Tedy

$$\int_0^2 \frac{5t - t^2}{(t+1)(t+2)}\, dt = \int_0^2 \left(-1 - \frac{6}{t+1} + \frac{14}{t+2}\right) dt = \left[-t - 6\ln|t+1| + 14\ln|t+2|\right]_0^2 =$$

$$= -2 - 6\ln 3 + 14\ln 4 - 14\ln 2 = -2 - 6\ln 3 + 14\ln 2.$$

4. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí

$$f(x) = -1 + 2x - x^2$$

a jejími tečnami v bodech $[-1, -4]$ a $[2, -1]$.

Řešení: Nejprve najdeme tečny. Derivace je

$$f'(x) = 2 - 2x.$$

Tečnu v bodě -1 označme $t_1 = f'(-1)(x+1) + f(-1)$:

$$f(-1) = -1 + 2(-1) - (-1)^2 = -4, \qquad f'(-1) = 2 - 2(-1) = 4.$$

Tečna má rovnici

$$y = t_1(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1) = 4(x+1) - 4 = 4x.$$

Tečnu v bodě 2 označme $t_2 = f'(2)(x-2) + f(2)$:

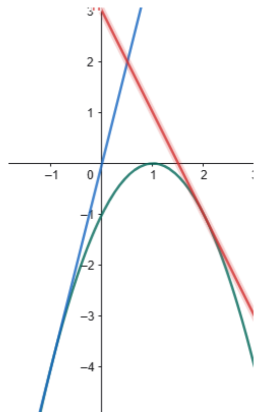
$$f(2) = -1 + 4 - 4 = -1, \qquad f'(2) = 2 - 2 \cdot 2 = -2.$$

Tečna má rovnici

$$y = t_2(x) = f'(2)(x-2) + f(2) = -2(x-2) - 1 = 3 - 2x.$$

Následně najdeme průsečík tečen:

$$4x = 3 - 2x \quad \Rightarrow \quad 6x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2.$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = -1 + 2x - x^2$ a jejích tečen $t_1(x) = 4x$ a $t_2(x) = 3 - 2x$.

Obsah obrazce je tedy

$$S = \int_{-1}^{1/2} \big(t_1(x) - f(x)\big)\,dx + \int_{1/2}^{2} \big(t_2(x) - f(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1/2} 4x - (-1 + 2x - x^2)\,dx + \int_{1/2}^{2} (3 - 2x) - (-1 + 2x - x^2)\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{1/2} x^2 + 2x + 1\,dx + \int_{1/2}^{2} x^2 - 4x + 4\,dx = \int_{-1}^{1/2} (x+1)^2\,dx + \int_{1/2}^{2} (x-2)^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1/2} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{1/2}^{2} = \frac{(1/2+1)^3}{3} - \frac{(-1+1)^3}{3} + \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(1/2-2)^3}{3} =$$

$$= \frac{27}{8}\frac{1}{3} + \frac{27}{8}\frac{1}{3} = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$