Spojitost funkcí

Spojitost znamená, že graf funkce nemá skoky ani díry. Intuitivně lze říci, že graf spojité funkce lze nakreslit jedním tahem. Funkce může být spojitá také pouze **zleva** nebo **zprava**.

Spojitost na intervalu

Říkáme, že funkce f je **spojitá na intervalu**, pokud je spojitá ve všech vnitřních bodech intervalu a dále případně jednostranně spojitá v krajních bodech uzavřeného intervalu (zprava na levém kraji a zleva na pravém). Ukážeme si to na příkladech. Nejprve platí:

Každá elementární funkce je spojitá na svém definičním oboru.

Funkce	Spojitost
Konstantní $f(x) = a$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Lineární $f(x) = ax + b$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Kvadratická $f(x) = ax^2 + bx + c$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Mocninná $f(x) = x^n,\ n \in \mathbb{N}$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Mocninná $f(x) = x^{-n},\ n \in \mathbb{N}$	Spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
Exponenciální $f(x) = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Logaritmická $f(x) = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$	Spojitá na $(0, \infty)$
Sinus $f(x) = \sin x$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Kosinus $f(x) = \cos x$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Tangens $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	Spojitá na $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$
Kotangens $f(x) = \operatorname{cotg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$	Spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Arkus sinus $f(x) = \arcsin x$	Spojitá na $[-1, 1]$
Arkus kosinus $f(x) = \arccos x$	Spojitá na $[-1, 1]$
Arkus tangens $f(x) = \operatorname{arctg} x$	Spojitá na $\mathbb{R}$
Arkus kotangens $f(x) = \operatorname{arccotg} x$	Spojitá na $\mathbb{R}$

Příklad:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{spojitost pro } x \in (-\infty, 0] \\ 3, & x > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{spojitost pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

Funkce je tedy v bodě $x = 0$ spojitá zleva, ale není spojitá zprava ani spojitá.

Příklad:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{spojitost pro } x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{spojitost pro } x \in (0, \infty) \end{cases}$$

V bodě $x = 0$ funkce není spojitá, protože zleva je tam skok z -1 do 0, zatímco zprava naopak z 1 do 0. A není tam spojitá zleva ani zprava.

Příklad: Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není spojitá v bodě $x = 0$ ani jednostranně, protože v tom bodě ani není definována.

Příklad: Funkce $\ln x$ je spojitá na intervalu $(0, \infty)$. Funkce $\sqrt{x}$ je spojitá na intervalu $[0, \infty)$ - tedy v bodě $x = 0$ zprava.

Vlastnosti spojitých funkcí

- Funkce $|f(x)|$ je spojitá v každém bodě, kde je spojitá $f(x)$.
- Pokud jsou $f(x)$ a $g(x)$ spojité v bodě x_0, pak i:
  - $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ jsou spojité v bodě x_0,
  - a pokud $g(x_0) \neq 0$, pak i $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ je spojitá v bodě x_0.
- Pokud je f spojitá v bodě x_0 a g spojitá v bodě $f(x_0)$, pak složená funkce $g(f(x))$ je spojitá v bodě x_0.

Příklad: Funkce $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ je spojitá na $\mathbb{R}$, protože složením spojitých funkcí $\sin x$, posunutí $+1$ a druhé odmocniny $\sqrt{x}$ vzniká funkce spojitá.

Příklad: Funkce

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right| = \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \right|$$

je spojitá na svém definičním oboru $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Po zkrácení může být spojitě dodefinována i v bodě $x = 2$, protože $f(x) = |x + 2|$ pro $x \neq 2$ a tedy v bodě $x = 2$ ji můžeme dodefinovat upravenou funkční hodnotou $f(2) = |2 + 2| = 4$.

Limita funkce

Limita funkce popisuje, k jaké hodnotě se funkční hodnoty $f(x)$ blíží, když se x blíží k danému limitnímu bodu (například k $x = 0$). Přitom nás nezajímá funkční hodnota v limitním bodě, ale chování funkce v jeho okolí.

Jednostranné limity:

- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ — k limitnímu bodu se blížíme zleva (pro $x < a$),
- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ — k limitnímu bodu se blížíme zprava (pro $x > a$).

Limita $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a jsou si rovny.

Příklad:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 \\ 3, & x > 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Příklad:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0, \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x) \text{ neexistuje.}$$

Příklad:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{x}$$

Funkce není definována v bodě $x = 0$, ale můžeme spočítat jednostranné limity:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} \overset{\substack{\text{typ } \frac{1}{0} \\ \frac{1}{x}>0}}{=} +\infty \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} \overset{\substack{\text{typ } \frac{1}{0} \\ \frac{1}{x}<0}}{=} -\infty$$

Limita v bodě $x = 0$ neexistuje, protože jednostranné limity jsou různé.

Limitu v plus a mínus nekonečnu můžeme počítat také pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$:

$$\lim_{x\to\boldsymbol{\infty}} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to\mathbf{0}^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A \quad \text{a} \quad \lim_{x\to-\boldsymbol{\infty}} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{y\to\mathbf{0}^-} f\left(\frac{1}{y}\right) = A.$$

Příklad: Uvažuj funkci $f(x) = \frac{1}{x}$. Pomocí substituce $x = \frac{1}{y}$ nebo-li $y = \frac{1}{x}$ dostaneme:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^+} y = 0 \qquad \text{a} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^-} y = 0.$$

Limita spojité funkce

Pokud je funkce $f(x)$ spojitá v bodě $x = a$, pak: $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. **Toto pravidlo nám umožňuje v mnoha případech spočítat limitu jednoduše dosazením.**

Příklad: Funkce $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$ je spojitá na $\mathbb{R}$ a například:

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 + \sin x} = \sqrt{1 + \sin 0} = \sqrt{1} = 1$$

Příklad:

$$f(x) = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} \right|$$

V bodě $x = 2$ není funkce definována. Pro výpočet limity ale rozhoduje chování funkce v okolí tohoto bodu. Pokud lze výraz upravit, často to pomůže:

$$f(x) = \left| \frac{(x-2)(x+2)}{x - 2} \right| = |x + 2| \quad \text{pro } x \neq 2$$

Tedy:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} |x + 2| = |2 + 2| = 4$$

Funkce tedy má limitu v bodě $x = 2$, i když tam není definovaná. Pokud ji v tomto bodě definujeme jako 4, získáme funkci spojitou na celém $\mathbb{R}$.

Příklad: Výraz $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ není možné v bodě $x = 0$ jednoduše vyčíslit, protože vzniká nedefinovaný výraz $\dfrac{0}{0}$. **Rozšíříme** zlomek, abychom se zbavili odmocniny:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - 1}{x\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2}$$

Aritmetika limit funkcí

Pokud $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $\lim_{x \to a} g(x) = B$, kde $A, B \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Pokud mají výrazy na pravých stranách smysl, pak platí:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) &= A + B, \\
\lim_{x \to a} (f(x) - g(x)) &= A - B, \\
\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) &= A \cdot B, \\
\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) &= \frac{A}{B}, \quad \text{pokud } B \neq 0.
\end{aligned}$$

Pozor na nedefinované výrazy jako $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ a podobné, které je třeba řešit jinými metodami (např. úpravou výrazu).