Řešení prvního testu

1. Inverzní funkce

Zadaná funkce:

$$f(x) = \frac{3 - \log_4(2x)}{4}$$

Definiční obor funkce f

Aby měla funkce f inverzní funkci, musí být definovaná a prostá na zvoleném intervalu. Logaritmus je definován pouze pro kladné argumenty, proto musí platit

$$2x > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

Na intervalu $(0, \infty)$ je funkce $\log_4(2x)$ rostoucí, a tedy také funkce $f(x)$ je prostá.

$$D(f) = (0, \infty).$$

Obor hodnot funkce f

Pro $x > 0$ platí $\log_4(2x) \in (-\infty, \infty)$. Po dosazení do výrazu funkce dostáváme

$$f(x) = \frac{3-t}{4}, \qquad t = \log_4(2x), \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{3-t}{4} = -\infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{3-t}{4} = \infty.$$

Protože t může nabývat libovolné reálné hodnoty,

$$H(f) = (-\infty, \infty).$$

Odvození inverzní funkce

$$y = \frac{3 - \log_4(2x)}{4}$$

Vyjádříme logaritmus:

$$\log_4(2x) = 3 - 4y.$$

Na obě strany rovnice aplikuje inverzní funkci 4^x:

$$4^{\log_4(2x)} = 2x = 4^{3-4y}.$$

Vyjádříme x:

$$x = \frac{4^{3-4y}}{2}.$$

Po záměně $x \leftrightarrow y$ dostáváme:

$$f^{-1}(x) = \frac{4^{3-4x}}{2}$$

a

$$D(f^{-1}) = H(f) = (-\infty, \infty), \qquad H(f^{-1}) = D(f) = (0, \infty).$$

2. Limity

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n-4n^2}{1-3n}$ Z čitatele i jmenovatele vytkneme nejvyšší mocniny:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n}\frac{\frac{7}{n}-4}{\frac{1}{n}-3} = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{\frac{7}{n}-4}{\frac{1}{n}-3} = \infty\cdot\frac{0-4}{0-3} = \infty.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\cos^2 x-1)^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(-\sin^2 x)^2}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^4 x}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^4 = 1,$

$$\text{Protože:} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1.$$

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\ln^2 x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{2(\ln x)x^{-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\ln x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{x^{-1}} = \lim\limits_{x\to\infty} 2x^2 = \infty.$

3. Průběh funkce

$$f(x) = x^3 \ln(x^2)$$

Definiční obor a spojitost

Logaritmus je definován pro $x^2 > 0$, tedy

$$D(f) = \mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty,0)\cup(0,\infty).$$

Funkce je na svém definičním oboru spojitá.

Limity v krajních bodech

a) Limita pro $x\to 0^+$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^3\ln(x^2) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x^2)}{x^{-3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-2}2x}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{-3} = 0.$$

b) Limita pro $x\to 0^-$:

$$\lim_{x\to 0^-} x^3\ln(x^2) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(x^2)}{x^{-3}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x^{-2}2x}{-3x^{-4}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^3}{-3} = 0.$$

c) Limita pro $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^3\ln(x^2) = \infty\cdot\infty = \infty.$$

d) Limita pro $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 \ln(x^2) = -\infty \cdot \infty = -\infty.$$

A tedy funkce nemá absolutní extrémy.

První derivace

$$f'(x) = (x^3 \ln(x^2))' = 3x^2 \ln(x^2) + x^3 \cdot \frac{2x}{x^2} = x^2(3\ln(x^2) + 2).$$

Hledáme body, kde $f'(x) = 0$ nebo kde derivace neexistuje. S existencí derivace na definičním oboru problém není a $x^2 \neq 0$ na definičním oboru. Zbývá vyřešit podmínku:

$$3\ln(x^2) + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x^2) = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = e^{-2/3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm e^{-1/3}$$

Zkoumáme znaménko derivace. Pomocí nulových bodů čitatele a bodu, kde funkce není definována, rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

x	$(-\infty, -e^{-1/3})$	$(-e^{-1/3}, 0)$	$(0, e^{-1/3})$	$(e^{-1/3}, \infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	roste	klesá	klesá	roste

- V bodě $x = -e^{-1/3}$ derivace mění znaménko z $+$ na $-$ $\Rightarrow$ **lokální maximum**.
- V bodě $x = e^{-1/3}$ derivace mění znaménko z $-$ na $+$ $\Rightarrow$ **lokální minimum**.

Druhá derivace

$$f''(x) = (x^2(3\ln(x^2) + 2))' = 2x\left(3\ln(x^2) + 2\right) + \frac{3x^2 \cdot 2x}{x^2} = 2x\left(3\ln(x^2) + 5\right)$$

Hledáme body, kde $f''(x) = 0$ nebo kde derivace neexistuje. S existencí derivace na definičním oboru problém není a $x \neq 0$ na definičním oboru. Zbývá vyřešit podmínku:

$$3\ln(x^2) + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln(x^2) = -\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = e^{-5/3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm e^{-5/6}$$

Zkoumáme znaménko derivace. Pomocí nulových bodů čitatele a bodu, kde funkce není definována, rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

x	$(-\infty, -e^{-5/6})$	$(-e^{-5/6}, 0)$	$(0, e^{-5/6})$	$(e^{-5/6}, \infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	konkávní	konvexní	konkávní	konvexní

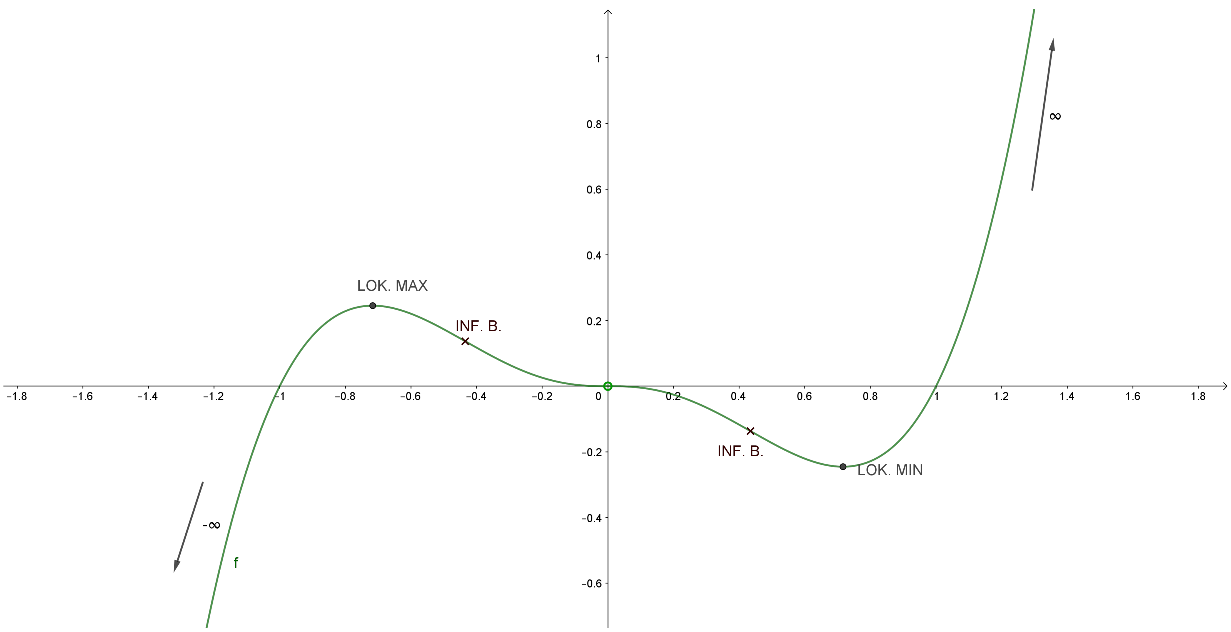
- V bodě $x = -e^{-5/6}$ druhá derivace mění znaménko z $-$ na $+$ $\Rightarrow$ **inflexní bod**.
- V bodě $x = 0$ není funkce definována, takže tam **nemá inflexní bod**.
- V bodě $x = e^{-5/6}$ druhá derivace mění znaménko z $-$ na $+$ $\Rightarrow$ **inflexní bod**.

Asymtoty

$$k_{1,2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 \ln(x^2)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 \ln(x^2) = \infty \cdot \infty = \infty.$$

A tedy funkce nemá šikmé asymptoty.

Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = x^3 \ln(x^2)$