Druhý zápočtový test – vzorové řešení

1. Spočítejte
$$\int_0^1 8x \, \operatorname{arctg}(2x)\, \mathrm{d}x.$$

Řešení: Nejprve použijeme substituci
$$t = 2x, \qquad \mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad x \in \langle 0, 1\rangle \;\Rightarrow\; t \in \langle 0, 2\rangle.$$

Potom
$$8x\,\mathrm{d}x = 2 \cdot 2x \cdot 2\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$$
a integrál přejde na
$$\int_0^1 8x \, \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2t \, \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t.$$
Nyní použijeme integraci per partes
$$\int u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t.$$
Volíme
$$u(t) = \operatorname{arctg} t, \quad v'(t) = 2t \quad \Rightarrow \quad u'(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad v(t) = t^2.$$
Pak
$$\int 2t \, \operatorname{arctg} t\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t^2 \operatorname{arctg} t - \int \frac{(t^2+1)-1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$\overset{C}{=} t^2 \operatorname{arctg} t - \int 1 - \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \overset{C}{=} t^2 \operatorname{arctg} t - (t - \operatorname{arctg} t) = (t^2+1)\operatorname{arctg} t - t.$$
Dosadíme zpět do určitého integrálu:
$$\int_0^1 8x \, \operatorname{arctg}(2x)\,\mathrm{d}x = \left[(t^2+1)\operatorname{arctg} t - t\right]_0^2 = (4+1)\operatorname{arctg} 2 - 2 - (1 \cdot \operatorname{arctg} 0 - 0) =$$
$$= 5 \, \operatorname{arctg} 2 - 2.$$

2. Spočtěte
$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}} + \frac{1}{9 - 2\, \operatorname{arctg} x} - \frac{2}{5} \right) \frac{\mathrm{d}x}{-1-x^2} =$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}} \frac{\mathrm{d}x}{-1-x^2} + \int \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{9 - 2\, \operatorname{arctg} x} \right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

Řešení: U prvního integrálu je přirozená substituce :

$$t = \operatorname{arccotg} x, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{-1-x^2}.$$

A tedy

$$\int \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}} \frac{\mathrm{d}x}{-1-x^2} \stackrel{C}{=} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3}} \stackrel{C}{=} \int t^{-3/2}\mathrm{d}t \stackrel{C}{=} \frac{t^{-1/2}}{-1/2} \stackrel{C}{=} -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{arccotg} x}}$$

U druhého integrálu je přirozená substituce :

$$y = \operatorname{arctg} x, \qquad \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

A tedy

$$\int \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{9-2\operatorname{arctg} x}\right) \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} \stackrel{C}{=} \int \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{9-2y}\right) \mathrm{d}y \stackrel{C}{=} \frac{2y}{5} + \frac{1}{2}\ln|9-2y| \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} \frac{2\operatorname{arctg} x}{5} + \frac{1}{2}\ln|9-2\operatorname{arctg} x|.$$

Celkem tedy

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{arccotg}^3 x}} + \frac{1}{9-2\operatorname{arctg} x} - \frac{2}{5}\right) \frac{\mathrm{d}x}{-1-x^2} \stackrel{C}{=}$$

$$\stackrel{C}{=} -\frac{2}{\sqrt{\operatorname{arccotg} x}} + \frac{1}{2}\ln\left|9-2\operatorname{arctg} x\right| + \frac{2}{5}\operatorname{arctg} x.$$

Poznámka k definičnímu oboru: Protože platí $\operatorname{arccotg} x \in (0,\pi)$ pro všechna reálná x, je $\operatorname{arccotg} x > 0$ a první člen je dobře definován. Dále $2\operatorname{arctg} x \in (-\pi,\pi)$, takže platí $9-2\operatorname{arctg} x > 0$ pro všechna x. Takže odvozený vztah platí pro $x \in \mathbb{R}$ a navíc v argumentu logaritmu nemusíme psát absolutní hodnotu.

3. Spočtěte

$$\int_1^{e^4} \frac{-5-13\ln x - 2\ln^2 x}{\ln^2 x + 8\ln x + 15} \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Řešení: Přirozená substituce

$$t = \ln x, \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \qquad \ln 1 = 0, \qquad \ln e^4 = 4\ln e = 4$$

vede na

$$\int_1^{e^4} \frac{-5-13\ln x - 2\ln^2 x}{\ln^2 x + 8\ln x + 15} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^4 \frac{-5-13t-2t^2}{t^2+8t+15}\,\mathrm{d}t =$$

(alternativa je dělení polynomů).

$$= \int_0^4 \frac{-2(t^2+8t+15)+(3t+25)}{t^2+8t+15}\,\mathrm{d}t = \int_0^4 -2 + \frac{(3t+25)}{t^2+8t+15}\,\mathrm{d}t$$

Zlomek v integrálu rozložíme na parciální zlomky: Jmenovatel můžeme rozložit:

$$t^2+8t+15=(t+3)(t+5).$$

Hledáme konstanty A, B tak, aby

$$\frac{3t+25}{(t+3)(t+5)} = \frac{A}{t+3}+\frac{B}{t+5}.$$

Po vynásobení společným jmenovatelem dostaneme

$$3t+25 = A(t+5)+B(t+3).$$

Dosazením za kořeny jmenovatele:

- pro $t=-3$:
$$3(-3)+25=-9+25=16=A\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad A=8,$$
- pro $t=-5$:
$$3(-5)+25=-15+25=10=B\cdot(-2) \quad \Rightarrow \quad B=-5.$$

Tedy

$$\frac{3t+25}{t^2+8t+15}=\frac{8}{t+3}-\frac{5}{t+5}$$

a integrál je

$$\int_0^4 \frac{-5-13t-2t^2}{t^2+8t+15}\,\mathrm{d}t = \int_0^4 \left(-2+\frac{8}{t+3}-\frac{5}{t+5}\right)\mathrm{d}t.$$

Celkem tedy máme:

$$\int_1^{e^4} \frac{-5-13\ln x-2\ln^2 x}{\ln^2 x+8\ln x+15}\,\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^4 \left(-2+\frac{8}{t+3}-\frac{5}{t+5}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \left[-2t+8\ln|t+3|-5\ln|t+5|\right]_0^4 = \big(-8+8\ln 7-5\ln 9\big)-\big(0+8\ln 3-5\ln 5\big) =$$

$$= -8+8\ln 7-5\ln 9-8\ln 3+5\ln 5 = -8+8\ln\frac{7}{3}-5\ln\frac{9}{5}.$$

4. Spočtěte obsah obrazce ohraničeného funkcí

$$f(x)=x^2-4$$

a jejími tečnami v bodech $[2,0]$ a $[-1,-3]$.

Řešení: Nejprve najdeme tečny. Derivace funkce je

$$f'(x) = 2x.$$

Tečnu v bodě 2 označme $t_1(x) = f'(2)(x-2) + f(2)$:

$$f(2) = 2^2 - 4 = 0, \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 = 4.$$

Tečna má rovnici

$$y = t_1(x) = f'(2)(x-2) + f(2) = 4(x-2) = 4x - 8.$$

Tečnu v bodě -1 označme $t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1)$:

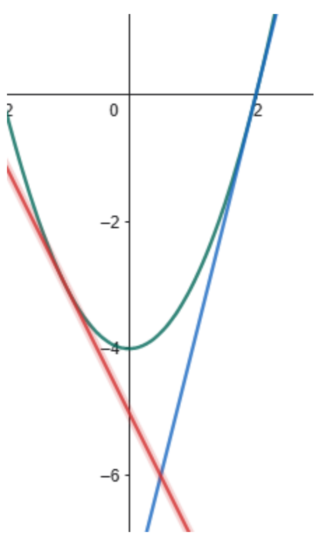
$$f(-1) = (-1)^2 - 4 = -3, \qquad f'(-1) = 2 \cdot (-1) = -2.$$

Tečna má rovnici

$$y = t_2(x) = f'(-1)(x+1) + f(-1) = -2(x+1) - 3 = -2x - 5.$$

Následně najdeme průsečík tečen:

$$4x - 8 = -2x - 5 \quad \Rightarrow \quad 6x = 3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 4 \cdot \frac{1}{2} - 8 = -6.$$



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = x^2 - 4$ a jejích tečen $t_1(x) = 4x - 8$ a $t_2(x) = -2x - 5$.

Obsah obrazce je

$$S = \int_{-1}^{1/2} \big(f(x) - t_2(x)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} \big(f(x) - t_1(x)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1/2} \big(x^2 - 4 - (-2x - 5)\big)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} \big(x^2 - 4 - (4x - 8)\big)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-1}^{1/2} (x^2 + 2x + 1)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} (x^2 - 4x + 4)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1/2} (x+1)^2\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^{2} (x-2)^2\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left[\frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-1}^{1/2} + \left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{1/2}^{2} = \frac{(1/2+1)^3}{3} - \frac{(-1+1)^3}{3} + \frac{(2-2)^3}{3} - \frac{(1/2-2)^3}{3} =$$

$$= \frac{27}{8}\frac{1}{3} + \frac{27}{8}\frac{1}{3} = \frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$