

Cvičení 4

Příklad 1. U následující funkce najděte inverzní funkci a určete definiční obor a obor hodnot tak, aby na nich byly funkce navzájem inverzní:

$$f(x) = 1 + \cos\left(\frac{\pi x}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left(\begin{array}{l} f^{-1}(x) = \frac{3}{\pi} \left(\arccos(x - 1) + \frac{\pi}{2} \right), \\ D(f) = H(f^{-1}) = \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2} \right], \\ H(f) = D(f^{-1}) = [0, 2] \end{array} \right)$$

Příklad 2. Vypočtete:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 1}{n^2 + 2n + 5} \quad (\infty),$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2n + 5}{n^3 + 1} + \left(\frac{9}{10} \right)^n \right) \quad (0),$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 3n + 1} + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n + \sqrt[n]{10^6} \right) \quad (3 + e),$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n + \frac{1}{n} \right) \quad (\text{limita neexistuje}).$

Příklad 3. Spočtete

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^5 - (1+5x)}{x^2 + x^5} \quad (10),$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x} \quad \left(\frac{1}{3} \right),$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x} - 1} \quad (2),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 2}{7x^3 + 5x^2 - 3} \quad \left(\frac{3}{7} \right),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3x}}{\sqrt[3]{2x^3 - 2x}} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \right),$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{1+x^2} - x \right) = \left(\frac{1}{2} \right),$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = (1),$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = (\infty),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \left(\frac{\pi}{2} \right),$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1 + e^{1/x}} = (1).$

Složitější příklady

Příklad 4. Spočtete $\lim_{x \rightarrow 1^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{1-x} = \left(\frac{\pi}{2} \right), \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1} \right)^{x+1} = (e).$

Příklad 5. Na základě definice rozhodněte o spojitosti v bodě 0 u následujících funkcí:

- x (spojitá),
- x^2 (spojitá),
- $|x|$ (spojitá),
- $[x]$ (nespojité).

Příklad 6. Podle definice limity dokažte, že

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty,$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$