Rozklad na parciální zlomky pro integraci

Budeme integrovat racionální funkce tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad P, Q \text{ polynomy}, \quad Q(x) \neq 0.$$

Cíl: převést integrál

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \qquad \text{na součet jednoduchých integrálů.}$$

Krok 1: dělení polynomů

Nejprve zkontrolujeme stupně polynomů (zkratka deg):

- Pokud $\deg P < \deg Q$, dělení není potřeba a můžeme pokračovat.
- Pokud $\deg P \geq \deg Q$, provedeme dělení mnohočlenů:

  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

  kde $S(x)$ je polynom a $R(x)$ má nižší stupeň než $Q(x)$. Integrujeme

  $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx = \int S(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx.$$

Dále předpokládáme, že pracujeme pouze se situací:

$$\frac{R(x)}{Q(x)}, \qquad \deg R < \deg Q = 2 \text{ (kvadratický jmenovatel).}$$

Krok 2: kvadratický jmenovatel a diskriminant (lineární čitatel)

Uvažujeme kvadratický jmenovatel ve tvaru (pokud před x^2 nebude jednička, můžeme tuto konstantu vytknout před integrál):

$$Q(x) = x^2 + px + q.$$

Diskriminant je

$$D = p^2 - 4q.$$

Podle D nastanou tři základní případy:

$$\begin{aligned} D > 0 &\quad \text{dva různé reálné kořeny } a, b, \\ D = 0 &\quad \text{jeden dvojnásobný reálný kořen } a, \\ D < 0 &\quad \text{komplexně sdružené kořeny.} \end{aligned}$$

1. Dva různé reálné kořeny

Předpokládejme

$$Q(x) = x^2 + px + q = (x-a)(x-b), \qquad a \neq b.$$

Pak platí, že existují konstanty A, B takové, že

$$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}.$$

Určení koeficientů A, B

Vynásobíme obě strany jmenovatelem:

$$R(x) = A(x-b) + B(x-a).$$

To je rovnost polynomů. Nejjednodušší je dosadit

$$x = a, \qquad x = b.$$

- Pro $x = a$ dostaneme $R(a) = A(a-b)$.
- Pro $x = b$ dostaneme $R(b) = B(b-a)$.

Z těchto dvou rovnic spočítáme A a B. **Připomínám, že to funguje jen po dělení polynomů - tedy $R(x)$ je lineární funkce.**

Příklad 1. Rozložte a integrujte

$$\int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\, dx.$$

Hledáme A, B tak, aby

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Po vynásobení jmenovatelem:

$$3 = A(x+2) + B(x-1).$$

Dosadíme

$$x = 1: \quad 3 = 3A \Rightarrow A = 1,$$
$$x = -2: \quad 3 = -3B \Rightarrow B = -1.$$

Tedy

$$\frac{3}{(x-1)(x+2)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2}.$$

Integrál:

$$\int \frac{3}{(x-1)(x+2)}\, dx = \int \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} dx \stackrel{c}{=} \ln|x-1| - \ln|x+2|$$

na intervalu, kde $x \in (-\infty, -2)$ nebo $x \in (-2, 1)$ případně $x \in (1, \infty)$.

2. Dvojnásobný reálný kořen

Předpokládejme

$$Q(x) = x^2 + px + q = (x-a)^2.$$

Pak existují konstanty A, B takové, že

$$\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$

Určení koeficientů A, B

Vynásobíme $(x-a)^2$:

$$R(x) = A(x-a) + B.$$

Porovnáním koeficientů u x a u konstanty najdeme A, B.

Příklad 2. Rozložte a integrujte

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx.$$

Hledáme A, B tak, aby

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}.$$

Po vynásobení $(x-1)^2$:

$$x = A(x-1) + B \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x(A-1) + (B-A).$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin:

$$\text{u } x: \quad 1 = A, \qquad \text{u konstanty:} \quad 0 = -A + B.$$

Odtud

$$A = 1, \qquad B = 1.$$

Takže

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Integrál vyřešíme substitucí $t = x-1$, $dt = dx$:

$$\int \frac{x}{(x-1)^2}\, dx = \int \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}\, dx \overset{c}{=} \int \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\, dt \overset{c}{=} \ln|t| - \frac{1}{t} \overset{c}{=} \ln|x-1| - \frac{1}{x-1}$$

na intervalu, kde $x \in (-\infty, 1)$ nebo $x \in (1, \infty)$. **Stejný integrál lze řešit i substitucí $t = x-1$ bez rozkladu na parciální zlomky. Pak se zlomek automaticky rozpadne na součet zlomků $\frac{1}{t}$ a $\frac{1}{t^2}$.**

3. Komplexně sdružené kořeny

Čitatel (připomeňme, že $R(x)$ a $Q'(x)$ jsou lineární funkce) napíšeme ve tvaru:

$$R(x) = A \cdot Q'(x) + B$$

pro vhodné konstanty A, B. Pak dostaneme rozklad

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = A\frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)}.$$

- První část vede na logaritmus (substituce $t = Q(x)$, $dt = Q'(x)dx$).
- Druhá část vede po nalezení substituce doplněním na čtverec k typu $\int \frac{1}{t^2+1}\, dt$ a tedy k funkci arctg.

Příklad 3. Spočtěme

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\, dx.$$

1. Rozklad čitatele. Hledáme A, B tak, aby

$$x + 2 = A(x^2 + 2x + 5)' + B = A(2x + 2) + B \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x(2A - 1) + (2A - 2 + B).$$

Porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin a dostaneme:

$$\text{u } x: \quad 1 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}, \qquad \text{u konstanty:} \quad 2 = 2A + B = 1 + B \quad \Rightarrow \quad B = 1.$$

2. Rozklad zlomku.

$$\frac{x+2}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+1}{x^2+2x+5} = \frac{1}{2}\frac{2x+2}{x^2+2x+5} + \frac{1}{x^2+2x+5}.$$

3. První integrál (logaritmus). Řešíme substitucí $t = x^2 + 2x + 5$, $dt = (2x + 2)\, dx$:

$$\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\, dt \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\ln t \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5).$$

4. Druhý integrál (doplnění jmenovatele na čtverec, arctg**).**

$$x^2 + 2x + 5 = (x + 1)^2 + 4 = \frac{4}{4}(x + 1)^2 + 4 = 4\left(\frac{(x+1)^2}{4} + 1\right) = 4\left(\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + 1\right).$$

Tímto postupem jsme odvodili optimální substituce $t = \frac{x+1}{2}$, $dt = \frac{dx}{2}$:

$$\int \frac{1}{x^2+2x+5}\, dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}\right)^2+1}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{4}\int \frac{2}{t^2+1}\, dt \stackrel{c}{=} \frac{\operatorname{arctg} t}{2} \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

5. Celkem máme:

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+5}\, dx \stackrel{c}{=} \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 5) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Stručné shrnutí

- Vždy nejdříve zkontrolovat, zda je možné dělit. Pokud ano, vydělit polynomy.
- Pro kvadratický jmenovatel $x^2 + px + q$ spočítat diskriminant $D = p^2 - 4q$.
- Podle D použít:
  - $D > 0$: rozklad
    $$\frac{R(x)}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b},$$
    dopočítat A, B dosazováním $x = a$, $x = b$.
  - $D = 0$: rozklad
    $$\frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}.$$
  - $D < 0$: rozložit čitatel do tvaru
    $$R(x) = AQ'(x) + B,$$
    tj.
    $$\frac{R(x)}{Q(x)} = A\frac{Q'(x)}{Q(x)} + \frac{B}{Q(x)}.$$
    První část vede na logaritmus, druhá po doplnění na čtverec na arctg.
- Základní vzorce pro integraci:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx \stackrel{c}{=} \ln|x-a|, \qquad \int \frac{1}{(x-a)^2}\,dx \stackrel{c}{=} -\frac{1}{x-a}, \qquad \text{pro } x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty),$$

$$\int \frac{1}{t^2+1}\,dt \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg} t, \qquad \int \frac{Q'(x)}{Q(x)}\,dx \stackrel{c}{=} \ln|Q(x)| \qquad \text{pro } Q(x) > 0.$$