Vyšetřování průběhu funkce - přehled teorie

Rostoucí a klesající funkce v bodě

- Funkce f je **rostoucí v bodě** x_0, jestliže v nějakém okolí bodu x_0 pro všechna $x < x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$ a pro všechna $x > x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$.
- Funkce f je **klesající v bodě** x_0, jestliže v nějakém okolí bodu x_0 pro všechna $x < x_0$ platí $f(x) > f(x_0)$ a pro všechna $x > x_0$ platí $f(x) < f(x_0)$.

Význam znaménka první derivace

- Pokud je $f'(x_0) > 0$, pak je funkce f **rostoucí v bodě** x_0.
- Pokud je $f'(x_0) < 0$, pak je funkce f **klesající v bodě** x_0.

l'Hospitalovo pravidlo

Jestliže platí $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ nebo $\lim |g(x)| = +\infty$ a existuje vlastní nebo nevlastní limita

$$\lim \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

pak existuje i limita

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{a platí} \qquad \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Symbol lim může znamenat: $\lim\limits_{x\to c}$, $\lim\limits_{x\to c^+}$, $\lim\limits_{x\to c^-}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$.

Příklad 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1.$$

Příklad 2:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Další neurčité výrazy lze také převést na využití l'Hospitalova pravidla:

- $0 \cdot \infty \to f(x)\, g(x)$ přepište jako $\dfrac{f(x)}{1/g(x)}$ nebo $\dfrac{g(x)}{1/f(x)}$.
- $\infty - \infty \to$ upravte převodem na společného jmenovatele nebo rozšiřte vhodným výrazem, např. $\sqrt{x^2+x} - x = \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \dfrac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$.
- 1^∞, 0^0, $\infty^0 \to$ použijte pro $f(x) > 0$ vztah: $\lim f(x)^{g(x)} = e^{\lim \ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim g(x) \ln f(x)}$ a dostanete limitu typu z první odrážky.

Konvexnost a konkávnost v intervalu

Máme přímku danou rovnicí: $y = y_0 + k(x - x_0)$. Říkáme, že bod $P = [x, y]$ leží **nad přímkou**, pokud platí

$$y > y_0 + k(x - x_0),$$

a že leží **pod přímkou**, pokud

$$y < y_0 + k(x - x_0).$$

Předpokládejme, že funkce f je definovaná v intervalu I a pro **každé tři body** $x_1 < x_2 < x_3$ z tohoto intervalu sestrojíme přímku procházející body $P_1 = [x_1, f(x_1)]$ a $P_3 = [x_3, f(x_3)]$.

- Pokud bod P_2 vždy leží **pod** přímkou spojující P_1 a P_3 nebo **na** ní, říkáme, že funkce je **konvexní** v intervalu I.
- Pokud bod P_2 vždy leží **nad** přímkou spojující P_1 a P_3 nebo **na** ní, říkáme, že funkce je **konkávní** v intervalu I.
- Pokud bod P_2 vždy leží **pod** přímkou spojující P_1 a P_3, říkáme, že funkce je **ryze konvexní** v intervalu I.
- Pokud bod P_2 vždy leží **nad** přímkou spojující P_1 a P_3, říkáme, že funkce je **ryze konkávní** v intervalu I.

Ryze konvexní a konkávní funkce v bodě

Máme funkci f, která má derivaci v bodě x_0. Sestrojíme tečnu v bodě x_0: $y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pokud existuje $\delta > 0$, tak že pro všechna x splňující $0 < |x - x_0| < \delta$ platí:

- $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pak říkáme, že funkce f je **ryze konvexní v bodě** x_0 - tedy v prstencovém okolí bodu x_0 leží všechny funkční hodnoty **nad tečnou** y_T.
- $f(x) < f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ pak říkáme, že funkce f je **ryze konkávní v bodě** x_0 - tedy v prstencovém okolí bodu x_0 leží všechny funkční hodnoty **pod tečnou** y_T.

Význam znaménka druhé derivace

- Je-li $f''(x_0) > 0$, pak je funkce v tomto bodě ryze konvexní.
- Je-li $f''(x_0) < 0$, pak je funkce v tomto bodě ryze konkávní.

Lokální a absolutní (globální) extrémy funkce

Absolutní (globální) extrémy

- Funkce f má v bodě c **absolutní maximum** na intervalu M, pokud:

$$\forall x \in M : \quad f(x) \leq f(c)$$

  Hodnota $f(c)$ je největší možná hodnota funkce na daném intervalu.

- Funkce f má v bodě c **absolutní minimum** na intervalu M, pokud:

$$\forall x \in M : \quad f(x) \geq f(c)$$

  Hodnota $f(c)$ je nejmenší možná hodnota funkce na daném intervalu.

Lokální extrémy

- Funkce f má v bodě c **lokální maximum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

$$\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : \quad f(x) \leq f(c).$$

- Funkce f má v bodě c **ostré lokální maximum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

$$\forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) : \quad f(x) < f(c).$$

- Funkce f má v bodě c **lokální minimum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

$$\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : \quad f(x) \geq f(c)$$

- Funkce f má v bodě c **ostré lokální minimum**, pokud existuje $\delta > 0$, tak že:

$$\forall x \in (c - \delta, c) \cup (c, c + \delta) : \quad f(x) > f(c).$$

Hledání absolutních extrémů

- Pokud má funkce f na intervalu I **absolutní maximum** v bodě $c \in I$, pak tento bod musí být buď krajním bodem intervalu I, nebo bodem, kde má funkce f **lokální maximum**.

- Stejně tak, pokud má funkce f na intervalu I **absolutní minimum** v bodě $d \in I$, pak tento bod je buď krajním bodem intervalu I, nebo bodem, kde má funkce f **lokální minimum**.

Chceme-li najít absolutní extrémy funkce na uzavřeném intervalu, stačí:

1. najít krajní body intervalu,

2. najít body, ve kterých je první derivace rovna nule nebo neexistuje,
3. porovnat funkční hodnoty ve všech nalezených bodech a najít největší a nejmenší hodnoty.

Chceme-li najít absolutní extrémy funkce na otevřeném intervalu (a, b), stačí:

1. v krajních bodech intervalu spočítat jednostranné limity $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to b^-} f(x)$,
2. tyto limity porovnat s funkčními hodnotami v bodech, ve kterých je první derivace rovna nule nebo neexistuje, a najít největší a nejmenší hodnoty,
3. pokud je některá z limit větší (nebo menší) než všechny vnitřní hodnoty, pak funkce nenabývá absolutního maxima (nebo minima). Tedy absolutní extrém nemusí na otevřeném intervalu existovat.

Nutná podmínka existence lokálního extrému

Pokud $f'(x_0) \neq 0$, potom v bodě x_0 **není** lokální extrém. Rovnost $f'(x_0) = 0$ nebo neexistence derivace jsou **nutné**, ale **nestačí** k tomu, aby v bodě byl extrém (viz $f(x) = x^3$).

Postačující podmínka existence lokálního extrému

Předpokládejme, že funkce f je spojitá v intervalu (a, b) a má derivaci ve všech bodech tohoto intervalu kromě bodu $x_0 \in (a, b)$. Dále předpokládejme existenci $\delta > 0$, tak že:

- Buď $\quad f'(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f'(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce f v bodě x_0 **ostré lokální maximum**.
- Nebo $\quad f'(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f'(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce f v bodě x_0 **ostré lokální minimum**.
- Nebo $\quad f'(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce f v bodě x_0 **rostoucí**.
- Nebo $\quad f'(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce f v bodě x_0 **klesající**.

Inflexní bod

Jestliže má funkce f v bodě x_0 derivaci, sestrojíme k ní v tomto bodě **tečnu**: $y_T = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Pokud existuje číslo $\delta > 0$, pro které nastává jeden z následujících dvou případů:

- Buď bod $[x, f(x)]$ leží pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **pod tečnou** y_T a pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **nad tečnou** y_T,
- nebo bod $[x, f(x)]$ leží pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ **nad tečnou** y_T a pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ **pod tečnou** y_T.

Pak říkáme, že funkce f má v bodě x_0 **inflexi** nebo také, že funkce má v bodě x_0 **inflexní bod**. V takovém bodě funkce přechází z jedné strany tečny na druhou: funkce se mění z konvexní na konkávní nebo naopak.

Nutná podmínka existence inflexního bodu

Pokud $f''(x_0) \neq 0$, pak funkce v bodě x_0 nemá inflexi. Tato podmínka je **nutná**, nikoliv postačující. Tedy i když $f''(x_0) = 0$ nebo neexistuje, nemusí tam inflexe být.

Postačující podmínka existence inflexního bodu

Jestliže funkce f má spojitou první derivaci v intervalu (a, b), má druhou derivaci v každém bodě (a, b) kromě bodu $x_0 \in (a, b)$ a jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že:

- Buď $\quad f''(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f''(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.
- Nebo $\quad f''(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \quad$ a $\quad f''(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom má funkce f v bodě x_0 inflexní bod.
- Nebo $f''(x) > 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce v bodě x_0 ryze konvexní.
- Nebo $f''(x) < 0 \quad$ pro $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$,
  potom je funkce v bodě x_0 ryze konkávní.

Asymptoty

Asymptota je přímka, ke které se funkce blíží, když $x \to \pm\infty$ nebo když $f(x) \to \pm\infty$.

- **Svislá asymptota:** Funkce má v bodě $x = c$ svislou asymptotu, pokud platí:
  $$\lim_{x \to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \pm\infty.$$
- **Šikmá nebo vodorovná asymptota:** Pokud existují konečné limity:
  $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx),$$
  potom má funkce asymptotu $y = kx + q$. Pro $k = 0$ máme vodorovnou asymptotu.
- To stejné platí i pro $x \to -\infty$, takže šikmé asymptoty mohou být maximálně dvě.

Příklad vyšetření průběhu funkce

Zadaná funkce:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

1. Definiční obor a spojitost

Funkce není definována a spojitá v bodě, kde je jmenovatel roven nule, tj. v bodě $x = 2$.

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

2. Limity v bodě $x = 2$

a) Limita pro $x \to 2^-$:

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^-} \frac{3}{x - 2} \overset{\substack{\text{typ } \frac{3}{0} \\ x-2<0}}{=} -\infty$$

b) Limita pro $x \to 2^+$:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{3}{x - 2} \overset{\substack{\text{typ } \frac{3}{0} \\ x-2>0}}{=} +\infty$$

$\Longrightarrow$ **Funkce má svislou asymptotu:** $x = 2$ a **nemá absolutní extrémy** na $D(f)$.

3. Chování v nekonečnu a šikmá asymptota

Zjednodušíme dělením: $\dfrac{x^2 - 1}{x - 2} = \dfrac{(x^2 - 2x) + 2x - 1}{x - 2} = x + \dfrac{(2x - 4) + 4 - 1}{x - 2} = x + 2 + \dfrac{3}{x - 2}$

c) Limita pro $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + 2 + \frac{3}{x - 2} \right) = \infty + 2 + \frac{3}{\infty} = \infty$$

d) Limita pro $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x + 2 + \frac{3}{x - 2} \right) = -\infty + 2 + \frac{3}{-\infty} = -\infty$$

$\Longrightarrow$ **Funkce má šikmou asymptotu:** $y = x + 2$, protože $f(x) - x - 2$ jde k nule, když $x \to \pm\infty$.

4. Vyšetření první derivace

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \left(x + 2 + \frac{3}{x-2}\right)' = 1 + 0 - \frac{3}{(x-2)^2}$$

Hledáme body, kde $f'(x) = 0$ nebo kde derivace neexistuje.

$$1 - \frac{3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2)^2 - 3}{(x-2)^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad x - 2 = \pm\sqrt{3}$$

Dělení nulou v bodě $x = 2$ není problém, protože tento bod zároveň není ani v definičním oboru funkce f.

Zkoumáme znaménko derivace $f'(x) = \frac{(x-2)^2 - 3}{(x-2)^2} = \frac{(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x-2)^2}$. Pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

x	$(-\infty,\ 2-\sqrt{3})$	$(2-\sqrt{3},\ 2)$	$(2,\ 2+\sqrt{3})$	$(2+\sqrt{3},\ +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
f je	rostoucí	klesající	klesající	rostoucí

- V bodě $x = 2 - \sqrt{3}$ derivace mění znaménko z $+$ na $-$ $\Rightarrow$ **lokální maximum**
- V bodě $x = 2$ funkce není definovaná
- V bodě $x = 2 + \sqrt{3}$ derivace mění znaménko z $-$ na $+$ $\Rightarrow$ **lokální minimum**

5. Vyšetření druhé derivace

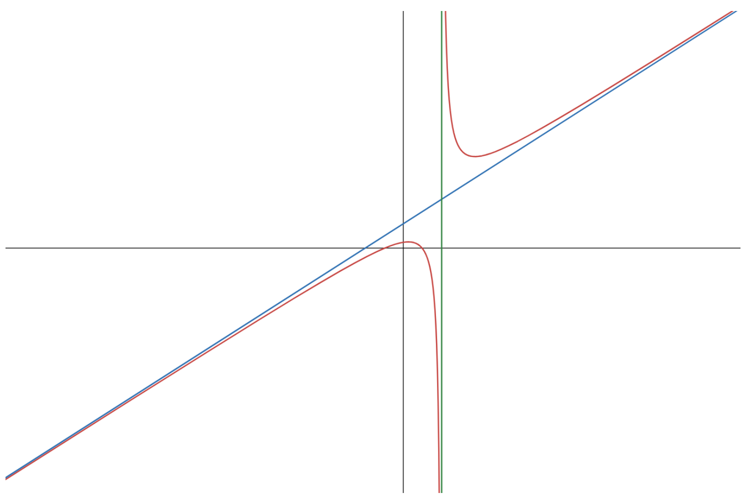
Zkoumáme znaménko druhé derivace

$$f''(x) = \left(1 - \frac{3}{(x-2)^2}\right)' = 0 - \left(3(x-2)^{-2}\right)' = 6(x-2)^{-3} = \frac{6}{(x-2)^3}$$

pomocí nulových bodů čitatele i jmenovatele rozdělíme definiční obor na jednotlivé intervaly a určíme znaménko na každém intervalu:

x	$(-\infty, 2)$	2	$(2, \infty)$
$f''(x)$	$-$	nedefinována	$+$
f	je konkávní	nemá inflexní bod	je konvexní

6. Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ a její asymptoty