Řešení – druhý zápočtový test

1. Integrál $\displaystyle\int_0^\pi 8x\cos(2x)\,dx$
Použijeme metodu per partes pro určitý integrál:

- $u = 8x \Rightarrow u' = 8$
- $v' = \cos(2x) \Rightarrow v = \frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\begin{aligned}\int_0^\pi 8x\cos(2x)\,dx &= [4x\sin(2x)]_0^\pi - \int_0^\pi 4\sin(2x)\,dx \\ &= [4x\sin(2x)]_0^\pi - 4\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^\pi \\ &= [4x\sin(2x) + 2\cos(2x)]_0^\pi\end{aligned}$$

Dosadíme meze:

$$\text{Horní mez } (\pi): 4\pi\sin(2\pi) + 2\cos(2\pi) = 4\pi\cdot 0 + 2\cdot 1 = 2.$$

$$\text{Dolní mez } (0): 4\cdot 0\cdot\sin(0) + 2\cos(0) = 0 + 2\cdot 1 = 2.$$

Celkem: $2 - 2 = 0$.
Výsledek:

$$\int_0^\pi 8x\cos(2x)\,dx = 0.$$

2. Integrál $\displaystyle\int\left(\frac{1}{\operatorname{arctg}^7 x} + \frac{1}{27 - 2\operatorname{arctg} x} - \frac{3}{7} + \operatorname{arctg}^3 x\right)\frac{dx}{1+x^2}$
Použijeme substituci: $t = \operatorname{arctg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{1+x^2}dx$. Integrál přepíšeme do proměnné t:

$$\int\left(t^{-7} + \frac{1}{27-2t} - \frac{3}{7} + t^3\right)dt.$$

Integrujeme člen po členu:

1. $\displaystyle\int t^{-7}dt \overset{C}{=} \frac{t^{-6}}{-6} \overset{C}{=} -\frac{1}{6\operatorname{arctg}^6 x}$.
2. $\displaystyle\int \frac{1}{27-2t}dt \overset{C}{=} -\frac{1}{2}\ln|27-2t|$ (substituce $y = 27 - 2t$ ve jmenovateli).

3. $\displaystyle\int -\frac{3}{7}dt \overset{C}{=} -\frac{3t}{7} \overset{C}{=} -\frac{3}{7}\operatorname{arctg} x.$

4. $\displaystyle\int t^3 dt \overset{C}{=} \frac{t^4}{4} \overset{C}{=} \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x.$

Výsledek:

$$\overset{C}{=} -\frac{1}{6\operatorname{arctg}^6 x} - \frac{1}{2}\ln|27 - 2\operatorname{arctg} x| - \frac{3}{7}\operatorname{arctg} x + \frac{1}{4}\operatorname{arctg}^4 x.$$

Podmínky řešitelnosti: Integrand je definován průnikem podmínek:

1. Jmenovatel prvního zlomku: $\operatorname{arctg} x \neq 0 \iff x \neq 0.$
2. Jmenovatel druhého zlomku: $27 - 2\operatorname{arctg} x \neq 0 \iff \operatorname{arctg} x \neq 13,5.$ Protože obor hodnot funkce $\operatorname{arctg} x$ je $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$, tato podmínka je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$ (jmenovatel je vždy nenulový).
3. Výrazy $\dfrac{1}{1+x^2}$ a $\operatorname{arctg} x$ jsou definovány pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Závěr: Integrál existuje na intervalech $\boldsymbol{x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)}$.

3. Integrál $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{-38 + 20\ln x - 2\ln^2 x}{(\ln^2 x - 10\ln x + 21)x}\,dx$

Po substituci:

$$t = \ln x \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{dx}{x} \qquad \text{a přepočtu mezí:} \quad x = 1 \to t = 0, \quad x = e^2 \to t = 2$$

dostaneme

$$\int_0^2 \frac{-2t^2 + 20t - 38}{t^2 - 10t + 21}\,dt.$$

Dělení polynomů (stejný stupeň čitatele a jmenovatele):

$$(-2t^2 + 20t - 38) : (t^2 - 10t + 21) = -2 + \frac{4}{t^2 - 10t + 21}.$$

Zbytek rozložíme na parciální zlomky. Jmenovatel má kořeny: $D = 100 - 84 = 16 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2} \Rightarrow t_1 = 7, t_2 = 3.$

$$\frac{4}{(t-3)(t-7)} = \frac{A}{t-3} + \frac{B}{t-7} \qquad \Rightarrow \qquad 4 = A(t-7) + B(t-3).$$

- $t = 3 : 4 = A(-4) \Rightarrow A = -1.$
- $t = 7 : 4 = B(4) \Rightarrow B = 1.$

$$\int_0^2 \left(-2 - \frac{1}{t-3} + \frac{1}{t-7}\right) dt = [-2t - \ln|t-3| + \ln|t-7|]_0^2$$
$$= (-4 - \ln|-1| + \ln|-5|) - (0 - \ln|-3| + \ln|-7|)$$
$$= -4 - 0 + \ln 5 + \ln 3 - \ln 7 = -4 + \ln\frac{15}{7}.$$

Výsledek: $-4 + \ln\frac{15}{7}$.

4. Obsah obrazce ohraničeného $f(x) = 2x^2 - 4$ **a** $g(x) = x^2 + 2x - 1$
Průsečíky křivek:

$$2x^2 - 4 = x^2 + 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0.$$

Průsečíky jsou $x_1 = -1$ a $x_2 = 3$. Určení horní funkce: Zvolíme testovací bod $x = 0 \in (-1, 3)$.

$$f(0) = -4, \quad g(0) = -1.$$

Protože $g(0) > f(0)$, je funkce $g(x)$ horní hranicí.

$$S = \int_{-1}^{3} (g(x) - f(x))\, dx = \int_{-1}^{3} ((x^2 + 2x - 1) - (2x^2 - 4))\, dx$$

$$S = \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

Dosazení horní meze (x=3):

$$-\frac{27}{3} + 9 + 9 = -9 + 9 + 9 = 9.$$

Dosazení dolní meze (x=-1):

$$-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3(-1) = \frac{1}{3} + 1 - 3 = \frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}.$$

Celkový obsah:

$$S = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{27 + 5}{3} = \frac{32}{3}.$$

Výsledek: Obsah plochy je $\frac{32}{3}$.