První zápočtový test – vzorové řešení

1. Inverzní funkce

Zadaná funkce:

$$f(x) = \frac{3 - \cos(4 - 5x)}{2}$$

Definiční obor funkce f

Kosinus je definován pro všechna reálná čísla, ale aby funkce f měla **inverzní funkci**, musí být na svém definičním oboru **prostá**. Funkce $\cos t$ ale není prostá na celém $\mathbb{R}$, protože se periodicky opakuje. Proto musíme omezit její argument

$$t = 4 - 5x$$

na takový interval, na kterém je $\cos t$ ryze monotónní (rostoucí, nebo klesající).

Standardně volíme interval $[0, \pi]$, na kterém je $\cos t$ *klesající* a tedy prostá a inverzní funkcí k ní je $\arccos t$. Z podmínky

$$0 \le 4 - 5x \le \pi$$

určíme odpovídající interval pro x:

$$0 \le 4 - 5x \le \pi \quad \Rightarrow \quad -4 \le -5x \le \pi - 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{4-\pi}{5} \le x \le \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow \qquad D(f) = \left[\frac{4-\pi}{5}, \frac{4}{5}\right].$$

Obor hodnot funkce f

Pro $t \in [0, \pi]$ je $-1 \le \cos t \le 1$. Dosadíme tyto krajní hodnoty (využíváme monotónnost funkce) do výrazu funkce $f(x) = \frac{3 - \cos(4 - 5x)}{2}$:

$$\text{pro } \cos(4 - 5x) = 1: \quad f_{\min} = \frac{3-1}{2} = 1,$$

$$\text{pro } \cos(4 - 5x) = -1: \quad f_{\max} = \frac{3-(-1)}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow \qquad H(f) = [1, 2].$$

Odvození inverzní funkce

$$\text{Z předpisu} \qquad y = \frac{3-\cos(4-5x)}{2}$$

vyjádříme kosinus:

$$\cos(4-5x) = 3-2y.$$

Nyní na obě strany rovnice aplikujeme inverzní funkci ke kosinu, tedy arccos:

$$\arccos(\cos(4-5x)) = 4-5x = \arccos(3-2y).$$

A vyjádříme x:

$$4-\arccos(3-2y) = 5x \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{4-\arccos(3-2y)}{5}.$$

Po záměně proměnných ($x \leftrightarrow y$) dostaneme výsledek:

$$f^{-1}(x) = \frac{4-\arccos(3-2x)}{5} \quad \text{a} \quad H(f^{-1}) = D(f) = \left[\frac{4-\pi}{5}, \frac{4}{5}\right], D(f^{-1}) = H(f) = [1,2].$$

2. Limity

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{10^9} + (-1)^{4n^2+2n+6} + 10^{-n} + \frac{7-2n-6n^2}{-2n^2-5n+10}\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{10^9} = 1, \quad (-1)^{4n^2+2n+6} = (-1)^{\text{sudé}} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \quad 10^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{7-2n-6n^2}{-2n^2-5n+10} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n}-6\right)}{n^2\left(-2-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{7}{n^2}-\frac{2}{n}-6}{-2-\frac{5}{n}+\frac{10}{n^2}} = \frac{0-0-6}{-2-0+0} = 3$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{10^9} + (-1)^{4n^2+2n+6} + 10^{-n} + \frac{7-2n-6n^2}{-2n^2-5n+10}\right) = 1+1+0+3 = 5$$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(2x+1)(3x+1)-1}{x} \overset{\frac{0}{0}}{=}$ (l'Hospitalovo pravidlo, v čitateli derivujeme součin)

$$\overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1(2x+1)(3x+1)+(x+1)2(3x+1)+(x+1)(2x+1)3}{1} = 1+2+3 = 6$$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-3-3x}{(1-x^2)^2} = \lim_{x\to -1}\frac{-3(1+x)}{(1-x)^2(1+x)^2} = \lim_{x\to -1}\frac{-3}{(1-x)^2(1+x)} \overset{\frac{-3}{0}}{=}$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{-3}{(1-x)^2(1+x)} \overset{\substack{\text{typ } \frac{-3}{0} \\ (1-x)^2(1+x)<0}}{=} +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{-3}{(1-x)^2(1+x)} \overset{\substack{\text{typ } \frac{-3}{0} \\ (1-x)^2(1+x)>0}}{=} -\infty$$

Jednostranné limity jsou různé, takže $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{-3-3x}{(1-x^2)^2}$ neexistuje

Průběh funkce

$$f(x) = x^2 e^{-x^2}$$

Definiční obor a spojitost

Exponenciální funkce je definována a spojitá pro všechna reálná čísla:

$$D(f) = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$$

Limity v krajních bodech a asymptoty

a) Limita pro $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

b) Limita pro $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^{x^2}} \overset{\frac{1}{\infty}}{=} 0$$

$\Longrightarrow$ Funkce $f(x)$ má vodorovnou asymptotu $y = 0$ pro $x \to \pm\infty$.

První derivace

$f'(x) = (x^2)'e^{-x^2} + x^2(e^{-x^2})' = 2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2} = 2x(1-x^2)e^{-x^2} = 2x(1-x)(1+x)e^{-x^2}$

Nulové body: $x = 0, \pm 1$ ($e^{-x^2} \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$).

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	roste	klesá	roste	klesá

$\Rightarrow$ Lokální maxima v $x = \pm 1$, lokální minimum v $x = 0$.

$$f(\pm 1) = e^{-1} > 0, \quad f(0) = 0, \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0.$$

$\Rightarrow$ Absolutní maximum $f_{\max} = e^{-1}$ v $x = \pm 1$, absolutní minimum $f_{\min} = 0$ v $x = 0$.

Druhá derivace

$$f''(x) = \left(2xe^{-x^2} - 2x^3e^{-x^2}\right)' = 2e^{-x^2} - 4x^2e^{-x^2} - 6x^2e^{-x^2} + 4x^4e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2}(2 - 10x^2 + 4x^4) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

Řešíme přes kvadratickou rovnici pro x^2 (případně substitucí $y = x^2$):

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}},\ \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}.$$

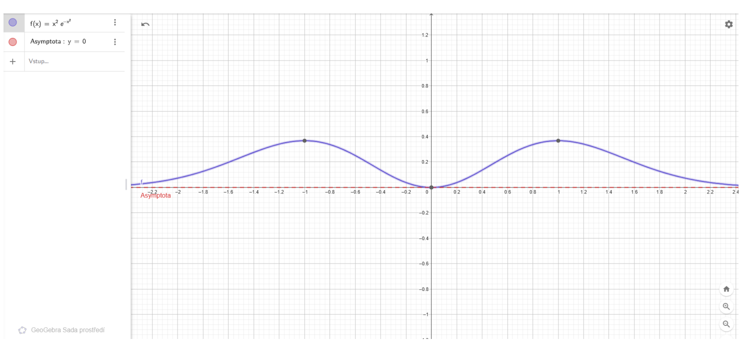
$$\Rightarrow \quad f''(x) = 4e^{-x^2}\left(x - \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}\right)\left(x - \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}\right) \quad \Rightarrow$$

x	$f''(x)$	Tvar funkce
$\left(-\infty, -\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}\right)$	$+$	konvexní
$\left(-\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}, -\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}\right)$	$-$	konkávní
$\left(-\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}, \sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}\right)$	$+$	konvexní
$\left(\sqrt{\tfrac{5-\sqrt{17}}{4}}, \sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}\right)$	$-$	konkávní
$\left(\sqrt{\tfrac{5+\sqrt{17}}{4}}, \infty\right)$	$+$	konvexní

Funkce má inflexní body v

$$x = \pm\sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{4}}, \quad x = \pm\sqrt{\frac{5-\sqrt{17}}{4}}.$$

Graf funkce



Obrázek 1: Graf funkce $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ a její asymptota