Адели на кривой и двойственность Серра–2

15 июля 2024 года

Факторпучки

ЗАМЕЧАНИЕ: Наивное определение факторпучка $\Gamma(\mathcal{F}'/\mathcal{F}, U) = \frac{\Gamma(\mathcal{F}', U)}{\Gamma(\mathcal{F}, U)}$, вообще говоря, является только предпучком.

Факторпучки

ЗАМЕЧАНИЕ: Наивное определение факторпучка $\Gamma(\mathcal{F}'/\mathcal{F}, U) = \frac{\Gamma(\mathcal{F}', U)}{\Gamma(\mathcal{F}, U)}$, вообще говоря, является только предпучком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок. Скажем, что два его локальных сечения в точке p эквивалентны, если они равны в ограничении на общую открытую окрестность. Класс эквивалентности сечений называется **ростком** предпучка в точке p, их множество называется **слоем** $\mathcal{F}_p$ предпучка в точке p.

Факторпучки

ЗАМЕЧАНИЕ: Наивное определение факторпучка $\Gamma(\mathcal{F}'/\mathcal{F}, U) = \frac{\Gamma(\mathcal{F}', U)}{\Gamma(\mathcal{F}, U)}$, вообще говоря, является только предпучком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок. Скажем, что два его локальных сечения в точке p эквивалентны, если они равны в ограничении на общую открытую окрестность. Класс эквивалентности сечений называется **ростком** предпучка в точке p, их множество называется **слоем** $\mathcal{F}_p$ предпучка в точке p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Множество всех сопоставлений $p \mapsto \mathcal{F}_p$ образует пучок, хотя и очень большой, в котором $\mathcal{F}$ содержится как предпучок. **Пучковизацией** $\tilde{\mathcal{F}}$ называется наименьший подпучок, содержащий образ $\mathcal{F}$.

Факторпучки

ЗАМЕЧАНИЕ: Наивное определение факторпучка $\Gamma(\mathcal{F}'/\mathcal{F}, U) = \frac{\Gamma(\mathcal{F}',U)}{\Gamma(\mathcal{F},U)}$, вообще говоря, является только предпучком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — предпучок. Скажем, что два его локальных сечения в точке p эквивалентны, если они равны в ограничении на общую открытую окрестность. Класс эквивалентности сечений называется **ростком** предпучка в точке p, их множество называется **слоем** $\mathcal{F}_p$ предпучка в точке p.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Множество всех сопоставлений $p \mapsto \mathcal{F}_p$ образует пучок, хотя и очень большой, в котором $\mathcal{F}$ содержится как предпучок. **Пучковизацией** $\tilde{\mathcal{F}}$ называется наименьший подпучок, содержащий образ $\mathcal{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Факторпучком** $\mathcal{F}'/\mathcal{F}$ называется пучковизация факторпучка, определенного наивно.

$H^1(\mathcal{O}(D))$ как сечения факторпучка

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы рассматривали точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \underline{k(C)} \to S \to 0,$$

получая $H^1(\mathcal{O}(D))$ как фактор $H^0(S)/k(C)$. Опишем явно структуру факторпучка S.

$H^1(\mathcal{O}(D))$ как сечения факторпучка

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы рассматривали точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \underline{k(C)} \to S \to 0,$$

получая $H^1(\mathcal{O}(D))$ как фактор $H^0(S)/k(C)$. Опишем явно структуру факторпучка S.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слои S_p — факторы $k(C)/\{f \in k(C) \colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$. Сечения $\Gamma(S, U) \subset \prod_{p \in U} S_p$ на самом деле лежат в $\bigoplus_{p \in U} S_p$.

$H^1(\mathcal{O}(D))$ как сечения факторпучка

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы рассматривали точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \underline{k(C)} \to S \to 0,$$

получая $H^1(\mathcal{O}(D))$ как фактор $H^0(S)/k(C)$. Опишем явно структуру факторпучка S.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слои S_p — факторы $k(C)/\{f \in k(C) \colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$. Сечения $\Gamma(S, U) \subset \prod_{p \in U} S_p$ на самом деле лежат в $\bigoplus_{p \in U} S_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: На каком-то открытом множестве сечение представляется как $f \in k(C)$ с точностью до сечений $\Gamma(\mathcal{O}(D), U)$. Если U' — дополнение U до D и полюсов f, то $f|_{U'} \in \Gamma(\mathcal{O}(D), U')$, а потому все ее ростки вне конечного множества нулевые. ■

$H^1(\mathcal{O}(D))$ как сечения факторпучка

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы рассматривали точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \underline{k(C)} \to S \to 0,$$

получая $H^1(\mathcal{O}(D))$ как фактор $H^0(S)/k(C)$. Опишем явно структуру факторпучка S.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слои S_p — факторы $k(C)/\{f \in k(C) \colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$. Сечения $\Gamma(S, U) \subset \prod_{p \in U} S_p$ на самом деле лежат в $\bigoplus_{p \in U} S_p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: На каком-то открытом множестве сечение представляется как $f \in k(C)$ с точностью до сечений $\Gamma(\mathcal{O}(D), U)$. Если U' — дополнение U до D и полюсов f, то $f|_{U'} \in \Gamma(\mathcal{O}(D), U')$, а потому все ее ростки вне конечного множества нулевые. ■

СЛЕДСТВИЕ: $H^0(S, C) = \mathbb{A}/\mathbb{A}(D)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mathbb{A}/\mathbb{A}(D) = \bigoplus_{p \in D} k(C)/\{f \in k(C) \colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$.■

$H^1(\mathcal{O}(D))$ как сечения факторпучка

ЗАМЕЧАНИЕ: Мы рассматривали точную тройку пучков

$$0 \to \mathcal{O}(D) \to \underline{k(C)} \to S \to 0,$$

получая $H^1(\mathcal{O}(D))$ как фактор $H^0(S)/k(C)$. Опишем явно структуру факторпучка S.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слои S_p — факторы $k(C)/\{f \in k(C)\colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$. Сечения $\Gamma(S,U) \subset \prod_{p\in U} S_p$ на самом деле лежат в $\bigoplus_{p\in U} S_p$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: На каком-то открытом множестве сечение представляется как $f \in k(C)$ с точностью до сечений $\Gamma(\mathcal{O}(D),U)$. Если U' — дополнение U до D и полюсов f, то $f|_{U'} \in \Gamma(\mathcal{O}(D),U')$, а потому все ее ростки вне конечного множества нулевые. ■

СЛЕДСТВИЕ: $H^0(S,C) = \mathbb{A}/\mathbb{A}(D)$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $\mathbb{A}/\mathbb{A}(D) = \bigoplus_{p\in D} k(C)/\{f \in k(C)\colon \nu_p(f) \geqslant -n_p(D)\}$.■

СЛЕДСТВИЕ: $H^1(\mathcal{O}(D)) = \mathbb{A}/\left(k(C) \oplus \mathbb{A}(D)\right)$. ■

Первые когомологии всех дивизоров

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $D < D'$, то имеется сюръекция $H^1(\mathcal{O}(D)) \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{O}(D)')$, и инъекция $H^1(\mathcal{O}(D))^* \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}(D'))^*$. Имеем право рассмотреть объединение их всех. Это пространство k-значных функций на A, зануляющихся на $k(C)$ и каком-либо $\mathbb{A}(D)$. Обозначим его за J.

Первые когомологии всех дивизоров

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $D < D'$, то имеется сюръекция $H^1(\mathcal{O}(D)) \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{O}(D)')$, и инъекция $H^1(\mathcal{O}(D))^* \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}(D'))^*$. Имеем право рассмотреть объединение их всех. Это пространство k-значных функций на A, зануляющихся на $k(C)$ и каком-либо $\mathbb{A}(D)$. Обозначим его за J.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: J имеет структуру $k(C)$-векторного пространства.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in J$, определим fa как $(fa)(\alpha) = a(f\alpha)$. По определению, fa зануляется на $k(C)$, и если a занулялся на $\mathbb{A}(D)$, то fa зануляется на $\mathbb{A}(D - (f))$. ■

Первые когомологии всех дивизоров

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $D < D'$, то имеется сюръекция $H^1(\mathcal{O}(D)) \twoheadrightarrow H^1(\mathcal{O}(D)')$, и инъекция $H^1(\mathcal{O}(D))^* \hookrightarrow H^1(\mathcal{O}(D'))^*$. Имеем право рассмотреть объединение их всех. Это пространство k-значных функций на A, зануляющихся на $k(C)$ и каком-либо $\mathbb{A}(D)$. Обозначим его за J.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: J имеет структуру $k(C)$-векторного пространства.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in J$, определим fa как $(fa)(\alpha) = a(f\alpha)$. По определению, fa зануляется на $k(C)$, и если a занулялся на $\mathbb{A}(D)$, то fa зануляется на $\mathbb{A}(D - (f))$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: $\dim_{k(C)} J \leqslant 1$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Оценка размерностей по Риману — Роху. ■

Двойственность Серра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть M — пространство всех рациональных дифференциальных форм. Спаривание $M \times \mathbb{A} \to k, \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{p \in C} \operatorname{res}(\alpha_p \omega)$ задает $k(C)$-линейный гомоморфизм $M \xrightarrow{\theta} J$.

Двойственность Серра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть M — пространство всех рациональных дифференциальных форм. Спаривание $M \times \mathbb{A} \to k, \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{p \in C} \operatorname{res}(\alpha_p \omega)$ задает $k(C)$-линейный гомоморфизм $M \xrightarrow{\theta} J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $k(C)$-линейность очевидна. Нужно, чтобы функционал $\langle \omega, - \rangle$ на аделях занулялся на $k(C) \subset \mathbb{A}$ и каком-то $\mathbb{A}(D)$. Первое — теорема о вычетах, второе очевидно для D — дивизора полюсов ω. ■

Двойственность Серра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть M — пространство всех рациональных дифференциальных форм. Спаривание $M \times \mathbb{A} \to k, \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{p \in C} \operatorname{res}(\alpha_p \omega)$ задает $k(C)$-линейный гомоморфизм $M \xrightarrow{\theta} J$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $k(C)$-линейность очевидна. Нужно, чтобы функционал $\langle \omega, - \rangle$ на аделях занулялся на $k(C) \subset \mathbb{A}$ и каком-то $\mathbb{A}(D)$. Первое — теорема о вычетах, второе очевидно для D — дивизора полюсов ω. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и пространство J, M имеет структуру предела по всем эффективным дивизорам как $\lim \Omega(-D)$.

Двойственность Серра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть M — пространство всех рациональных дифференциальных форм. Спаривание $M \times \mathbb{A} \to k, \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{p \in C} \operatorname{res}(\alpha_p \omega)$ задает $k(C)$-линейный гомоморфизм $M \xrightarrow{\theta} J$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $k(C)$-линейность очевидна. Нужно, чтобы функционал $\langle \omega, - \rangle$ на аделях занулялся на $k(C) \subset \mathbb{A}$ и каком-то $\mathbb{A}(D)$. Первое — теорема о вычетах, второе очевидно для D — дивизора полюсов ω. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и пространство J, M имеет структуру предела по всем эффективным дивизорам как $\lim \Omega(-D)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Отображение $\theta\colon M \to J$ сохраняет эту структуру.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\theta(\omega)$ зануляется на $\mathbb{A}(D)$. Для всякой точки $p \in C$ имеем адель $\alpha \in \mathbb{A}(D)$ с $\alpha_p = t^{-n_p(D)}$, где t — локальный параметр в p, и $\alpha_q = 0$ при $q \neq p$. Тогда для всякой p имеем $\langle \omega, \alpha_p \rangle = 0$, и потому $\omega \in \Omega(-D)$. ■

Двойственность Серра

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть M — пространство всех рациональных дифференциальных форм. Спаривание $M \times \mathbb{A} \to k, \langle \omega, \alpha \rangle = \sum_{p \in C} \operatorname{res}(\alpha_p \omega)$ задает $k(C)$-линейный гомоморфизм $M \xrightarrow{\theta} J$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $k(C)$-линейность очевидна. Нужно, чтобы функционал $\langle \omega, - \rangle$ на аделях занулялся на $k(C) \subset \mathbb{A}$ и каком-то $\mathbb{A}(D)$. Первое — теорема о вычетах, второе очевидно для D — дивизора полюсов ω. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Как и пространство J, M имеет структуру предела по всем эффективным дивизорам как $\lim \Omega(-D)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Отображение $\theta\colon M \to J$ сохраняет эту структуру.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\theta(\omega)$ зануляется на $\mathbb{A}(D)$. Для всякой точки $p \in C$ имеем адель $\alpha \in \mathbb{A}(D)$ с $\alpha_p = t^{-n_p(D)}$, где t — локальный параметр в p, и $\alpha_q = 0$ при $q \neq p$. Тогда для всякой p имеем $\langle \omega, \alpha_p \rangle = 0$, и потому $\omega \in \Omega(-D)$. ■

ТЕОРЕМА: (двойственность Серра) $\Omega(-D) \cong J(D)$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $\theta(\omega) = 0$, то она лежит в $\Omega(-D)$ для сколь угодно большого D и потому сама равняется нулю. Ненулевое линейное отображение одномерных векторных пространств над полем есть изоморфизм. ■