Дедекиндовы кольца и группа классов

5 февраля 2024 года

Четыре определения дедекиндовости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целозамкнутое нетерово кольцо размерности Крулля один.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное нетерово кольцо, у которого все локализации в максимальных идеалах суть кольца дискретного нормирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий ненулевой дробный идеал обратим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий собственный идеал однозначно разлагается в произведение простых.

Четыре определения дедекиндовости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целозамкнутое нетерово кольцо размерности Крулля один.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное нетерово кольцо, у которого все локализации в максимальных идеалах суть кольца дискретного нормирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий ненулевой дробный идеал обратим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий собственный идеал однозначно разлагается в произведение простых.

ПРИМЕР: координатное кольцо **гладкой** алгебраической кривой.

ПРИМЕР: **кольцо целых** числового поля.

Четыре определения дедекиндовости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целозамкнутое нетерово кольцо размерности Крулля один.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное нетерово кольцо, у которого все локализации в максимальных идеалах суть кольца дискретного нормирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий ненулевой дробный идеал обратим.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — целостное кольцо, в котором всякий собственный идеал однозначно разлагается в произведение простых.

ПРИМЕР: координатное кольцо **гладкой** алгебраической кривой.

ПРИМЕР: **кольцо целых** числового поля.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — целостное дедекиндово кольцо, и K — конечное расширение $\operatorname{Frac} A$. Тогда целое замыкание $A \subset K$ — также дедекиндово кольцо.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный** A-подмодуль поля $\operatorname{Frac} A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный** A-подмодуль поля $\operatorname{Frac} A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, будет **иметь вид** $(J)-(a)$**.** $x \in \operatorname{Frac} A$ принадлежит $I = \frac{1}{a}J$ тогда и только тогда, когда $(x) > (J)-(a)$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный** A-подмодуль поля $\operatorname{Frac} A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, будет **иметь вид** $(J) - (a)$**.** $x \in \operatorname{Frac} A$ принадлежит $I = \frac{1}{a}J$ тогда и только тогда, когда $(x) > (J) - (a)$. **Обратно,** со всяким дивизором D можно связать дробный идеал: через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный** A-подмодуль поля $\operatorname{Frac} A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, будет **иметь вид $(J)-(a)$.** $x \in \operatorname{Frac} A$ принадлежит $I = \frac{1}{a}J$ тогда и только тогда, когда $(x) > (J)-(a)$. **Обратно,** со всяким дивизором D можно связать дробный идеал: через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для особой кривой это **неверно:** так, на кривой $y^2 = x^3$ дивизор $-(0;0)$ не приходит ни из какого дробного идеала.

Операции с дробными идеалами

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. Главные дробные идеалы обратимы.

Для дробных идеалов имеется понятие **идеала-частного** $(I : J) = \{x \in \operatorname{Frac} A \colon xJ \subset I\}$. Если идеал обратим, то $I^{-1} = (A : I)$.

Операции с дробными идеалами

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. Главные дробные идеалы обратимы.

Для дробных идеалов имеется понятие **идеала-частного** $(I : J) = \{x \in \operatorname{Frac} A \colon xJ \subset I\}$. Если идеал обратим, то $I^{-1} = (A : I)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Ненулевые дробные идеалы кольца **дискретного нормирования** обратимы.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Они все суть степени максимального идеала, возможно отрицательные. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если $\mathfrak{p} \subset A$ — простой, а I, J — дробные идеалы A, то $I_\mathfrak{p}, J_\mathfrak{p}$ — дробные идеалы $A_\mathfrak{p}$, и $(IJ)_\mathfrak{p} = I_\mathfrak{p} J_\mathfrak{p}$, а $(I : J)_\mathfrak{p} = (I_\mathfrak{p} : J_\mathfrak{p})$. ■

Дробные идеалы дедекиндова кольца

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — целостное кольцо, то пересечение $\bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Frac} A$ **есть само A.** Аналогично, для всякого подмодуля $M \subset \operatorname{Frac} A$ имеем $\bigcap_{\mathfrak{m}} M_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Frac} A$ есть M.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Дробный идеал нетерова кольца обратим тогда и только тогда, когда обратимы **все его локализации** во всех **максимальных** идеалах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеем $A = \bigcap_{\mathfrak{m}} A_{\mathfrak{m}} = \bigcap_{\mathfrak{m}} I_{\mathfrak{m}}(A_{\mathfrak{m}} : I_{\mathfrak{m}}) = \bigcap_{\mathfrak{m}}(I(A : I))_{\mathfrak{m}} = I(A : I)$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Все дробные идеалы дедекиндова кольца **обратимы.**

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы **всех (обратимых) дробных идеалов** кольца A по **главным** называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Cl}(A)$ — тривиальная группа, и наоборот. Таким образом, группа классов **контролирует неоднозначность разложения на множители.**

ЗАМЕЧАНИЕ: На кривых главным дробным идеалам соответствуют главные дивизоры, и группа классов идеалов координатного кольца изоморфна **группе классов дивизоров** соответствующей кривой.