Когомологии расслоений на кривых

10 июня 2024 года

Линейные расслоения на $\mathbb{P}^1$

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^1$ имеет вид $\mathcal{O}(n)$, то есть склеено из тривиальных карт $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ отождествлением $(t, s) \sim (t^{-1}, t^n s)$.

Линейные расслоения на $\mathbb{P}^1$

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякое линейное расслоение на $\mathbb{P}^1$ имеет вид $\mathcal{O}(n)$, то есть склеено из тривиальных карт $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ и $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1$ отождествлением $(t,s) \sim (t^{-1}, t^n s)$.

ПРИМЕР: Вычислим когомологии линейных расслоений над $\mathbb{P}^n$. Группы H^0 нам известны, это группы сечений. Для вычисления группы H^1 напишем комплекс Чеха:

$$0 \to \check{C}_0 = \{(\varphi_0 \in \Gamma(U_0), \varphi_1 \in \Gamma(U_1))\} \to \check{C}_1 = \{\varphi_{0,1} \in \Gamma(U_0 \cap U_1)\} \to 0.$$

Линейные расслоения на P^1

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякое линейное расслоение на P^1 имеет вид $\mathcal{O}(n)$, то есть склеено из тривиальных карт $\mathsf{A}^1 \times \mathsf{A}^1$ и $\mathsf{A}^1 \times \mathsf{A}^1$ отождествлением $(t,s) \sim (t^{-1}, t^n s)$.

ПРИМЕР: Вычислим когомологии линейных расслоений над P^n. Группы H^0 нам известны, это группы сечений. Для вычисления группы H^1 напишем комплекс Чеха:

$$0 \to \check{C}_0 = \{(\varphi_0 \in \Gamma(U_0), \varphi_1 \in \Gamma(U_1))\} \to \check{C}_1 = \{\varphi_{0,1} \in \Gamma(U_0 \cap U_1)\} \to 0.$$

Можно переписать его как $0 \to k[t] \oplus k[t^{-1}] \to k[t, t^{-1}] \to 0$, где стрелка отправляет пару сечений над шапочками в их разность на пересечении: $(f_1, f_2) \mapsto f_1 - t^n f_2$.

Итак, $H^1 = k[t, t^{-1}] / \left(k[t] \oplus t^n k[t^{-1}]\right)$. Это нулевая группа, если $n \geqslant -1$, и группа размерности $-(n+1)$ иначе.

Линейные расслоения на P^1

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякое линейное расслоение на P^1 имеет вид $\mathcal{O}(n)$, то есть склеено из тривиальных карт $\mathsf{A}^1 \times \mathsf{A}^1$ и $\mathsf{A}^1 \times \mathsf{A}^1$ отождествлением $(t, s) \sim (t^{-1}, t^n s)$.

ПРИМЕР: Вычислим когомологии линейных расслоений над P^n. Группы H^0 нам известны, это группы сечений. Для вычисления группы H^1 напишем комплекс Чеха:

$$0 \to \check{C}_0 = \{(\varphi_0 \in \Gamma(U_0), \varphi_1 \in \Gamma(U_1))\} \to \check{C}_1 = \{\varphi_{0,1} \in \Gamma(U_0 \cap U_1)\} \to 0.$$

Можно переписать его как $0 \to k[t] \oplus k[t^{-1}] \to k[t, t^{-1}] \to 0$, где стрелка отправляет пару сечений над шапочками в их разность на пересечении: $(f_1, f_2) \mapsto f_1 - t^n f_2$.

Итак, $H^1 = k[t, t^{-1}] / \left(k[t] \oplus t^n k[t^{-1}]\right)$. Это нулевая группа, если $n \geqslant -1$, и группа размерности $-(n+1)$ иначе.

ЗАМЕЧАНИЕ: Заметим, что $h^0(\mathcal{O}(n)) = h^1(\mathcal{O}(-2-n))$. Это частный случай **двойственности Серра:** ведь $K_{\mathsf{P}^1} \cong \mathcal{O}(-2)$.

От общей кривой к $\mathbb{P}^1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда **прямым образом** $f_*\mathcal{F}$ называется пучок на Y, определенный как $\Gamma(f_*\mathcal{F}, U) = \Gamma(\mathcal{F}, f^{-1}(U))$.

От общей кривой к P^1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда **прямым образом** $f_*\mathcal{F}$ называется пучок на Y, определенный как $\Gamma(f_*\mathcal{F}, U) = \Gamma(\mathcal{F}, f^{-1}(U))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f\colon C \to C'$ — сюръективное отображение проективных кривых. Тогда $H^i(\mathcal{F}, C) \cong H^i(f_*\mathcal{F}, C')$. ■

От общей кривой к $\mathbb{P}^1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда **прямым образом** $f_*\mathcal{F}$ называется пучок на Y, определенный как $\Gamma(f_*\mathcal{F}, U) = \Gamma(\mathcal{F}, f^{-1}(U))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f\colon C \to C'$ — сюръективное отображение проективных кривых. Тогда $H^i(\mathcal{F}, C) \cong H^i(f_*\mathcal{F}, C')$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f\colon C \to C'$ — сюръективное отображение проективных кривых, а $L \to C$ — линейное расслоение. Тогда f_*L есть векторное расслоение ранга $\deg L$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на локальных кольцах, а там это следует из свойств колец дискретного нормирования. ■

От общей кривой к $\mathbb{P}^1$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $\mathcal{F}$ — пучок на топологическом пространстве X, и $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда **прямым образом** $f_*\mathcal{F}$ называется пучок на Y, определенный как $\Gamma(f_*\mathcal{F}, U) = \Gamma(\mathcal{F}, f^{-1}(U))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f\colon C \to C'$ — сюръективное отображение проективных кривых. Тогда $H^i(\mathcal{F}, C) \cong H^i(f_*\mathcal{F}, C')$. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $f\colon C \to C'$ — сюръективное отображение проективных кривых, а $L \to C$ — линейное расслоение. Тогда f_*L есть векторное расслоение ранга $\deg L$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно проверить на локальных кольцах, а там это следует из свойств колец дискретного нормирования. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеется и обратная конструкция. Пусть $E \to C'$ — векторное расслоение над кривой, и имеется его общий эндоморфизм $\alpha\colon E \to E$. В общей точке α диагонализуем, и собственные значения дают $(\operatorname{rk} E)$-кратное сечение $C \subset \mathbb{P}(E) \to C'$. Там, где α не диагонализуем, оно разветвлено. Ограничение послойного $\mathcal{O}(1)$ дает линейное расслоение $L \to C$ такое, что $f_*L \cong E$. В этом случае $f\colon C \to C'$ называется **спектральным накрытием.**

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над P^1 есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над P^1 есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

ЛЕММА: Пусть E — векторное расслоение над P^1. Тогда существует d такое, что $h^0(E \otimes \mathcal{O}(d)) > 0$, а $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-d)) = 0$. ■

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над P^1 есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

ЛЕММА: Пусть E — векторное расслоение над P^1. Тогда существует d такое, что $h^0(E \otimes \mathcal{O}(d)) > 0$, а $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-d)) = 0$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажем индукцией по рангу. База известна.

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над P^1 есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

ЛЕММА: Пусть E — векторное расслоение над P^1. Тогда существует d такое, что $h^0(E \otimes \mathcal{O}(d)) > 0$, а $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-d)) = 0$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажем индукцией по рангу. База известна. Для шага можно считать, что $h^0(E) > 1$, $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Тогда имеется $s \in \Gamma(E)$, причем s нигде не зануляется, а значит и точная тройка $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to F \to 0$.

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над $\mathbb{P}^1$ есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

ЛЕММА: Пусть E — векторное расслоение над $\mathbb{P}^1$. Тогда существует d такое, что $h^0(E \otimes \mathcal{O}(d)) > 0$, а $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-d)) = 0$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажем индукцией по рангу. База известна. Для шага можно считать, что $h^0(E) > 1$, $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Тогда имеется $s \in \Gamma(E)$, причем s нигде не зануляется, а значит и точная тройка $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to F \to 0$. Имеем длинную точную последовательность:

$$\cdots \to H^0(E \otimes \mathcal{O}(-1)) \to H^0(F \otimes \mathcal{O}(-1)) \to H^1(\mathcal{O}(-1)) \to \dots,$$

откуда $h^0(F \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Значит, F — линейное расслоение, и по предположению индукции $F = \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$, причем $n_i \leqslant 0$.

Теорема Биркгофа — Гротендика

ТЕОРЕМА: (Дж. Д. Биркгоф, 1909, А. Гротендик, 1957) Всякое векторное расслоение над $\mathbb{P}^1$ есть сумма линейных $\mathcal{O}(n_i)$.

ЛЕММА: Пусть E — векторное расслоение над $\mathbb{P}^1$. Тогда существует d такое, что $h^0(E \otimes \mathcal{O}(d)) > 0$, а $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-d)) = 0$. ■

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Докажем индукцией по рангу. База известна. Для шага можно считать, что $h^0(E) > 1$, $h^0(E \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Тогда имеется $s \in \Gamma(E)$, причем s нигде не зануляется, а значит и точная тройка $0 \to \mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to F \to 0$. Имеем длинную точную последовательность:

$$\dots \to H^0(E \otimes \mathcal{O}(-1)) \to H^0(F \otimes \mathcal{O}(-1)) \to H^1(\mathcal{O}(-1)) \to \dots,$$

откуда $h^0(F \otimes \mathcal{O}(-1)) = 0$. Значит, F — линейное расслоение, и по предположению индукции $F = \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$, причем $n_i \leqslant 0$.

Имея такое представление, мы выведем теорему из леммы со следующего слайда. ■

Расширения векторных расслоений на $\mathbb{P}^1$

ЛЕММА: Пусть $\mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$ — расширение расслоений, и $n_i \leqslant 0$. Тогда $E \cong \mathcal{O} \oplus \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$.

Расширения векторных расслоений на $\mathbb{P}^1$

ЛЕММА: Пусть $\mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$ — расширение расслоений, и $n_i \leqslant 0$. Тогда $E \cong \mathcal{O} \oplus \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ограничим E на шапочки $U_{0,1}$. Выберем тривиализации расслоений $E_i \cong \mathcal{O} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \to U_i$ такие, что $s(\mathcal{O})$ ограничивается как первое слагаемое. Тогда имеются и вложения $F_i = F|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}^{\oplus n}$ как дополнительных подрасслоений.

Расширения векторных расслоений на P^1

ЛЕММА: Пусть $\mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$ — расширение расслоений, и $n_i \leqslant 0$. Тогда $E \cong \mathcal{O} \oplus \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ограничим E на шапочки $U_{0,1}$. Выберем тривиализации расслоений $E_i \cong \mathcal{O} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \to U_i$ такие, что $s(\mathcal{O})$ ограничивается как первое слагаемое. Тогда имеются и вложения $F_i = F|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}^{\oplus n}$ как дополнительных подрасслоений. Эти вложения не однозначны: каждое из них можно поправить на отображение $F_i \colon \mathcal{O}$, то есть элемент $\Gamma(F^*, U_i)$. Наша цель — поправить их так, чтобы они сошлись на пересечении карт.

Расширения векторных расслоений на P^1

ЛЕММА: Пусть $\mathcal{O} \xrightarrow{s} E \to \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$ — расширение расслоений, и $n_i \leqslant 0$. Тогда $E \cong \mathcal{O} \oplus \bigoplus \mathcal{O}(n_i)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Ограничим E на шапочки $U_{0,1}$. Выберем тривиализации расслоений $E_i \cong \mathcal{O} \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \to U_i$ такие, что $s(\mathcal{O})$ ограничивается как первое слагаемое. Тогда имеются и вложения $F_i = F|_{U_i} \xrightarrow{\varphi_i} \mathcal{O}^{\oplus n}$ как дополнительных подрасслоений. Эти вложения не однозначны: каждое из них можно поправить на отображение $F_i \colon \mathcal{O}$, то есть элемент $\Gamma(F^*, U_i)$. Наша цель — поправить их так, чтобы они сошлись на пересечении карт.

Для всякого $f \in F_x$ имеем $\varphi_0(f) - \varphi_1(f) \in s(\mathcal{O})$. Это отображение расслоений $F|_{U_0 \cap U_1} \to \mathcal{O}$, а значит элемент $\check{C}_1(F^*)$. Он представляет нулевой класс тогда и только тогда, когда после поправки он может быть сделан нулевым, то есть $\varphi_0 = \varphi_1$ и подрасслоения согласованы. Но $H^1(F^*) = \bigoplus H^1(\mathcal{O}(-n_i), \mathsf{P}^1) = 0$, так как $n_i \leqslant 0$. ■