Нормирования и валюации

11 декабря 2023 года

Кольца валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — целостное кольцо. Оно называется **кольцом валюации,** если для всякого $x \neq 0 \in \mathrm{Frac}(A)$ один из элементов x, x^{-1} лежит в A.

Кольца валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — целостное кольцо. Оно называется **кольцом валюации,** если для всякого $x \neq 0 \in \mathrm{Frac}(A)$ один из элементов x, x^{-1} лежит в A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I, J \subset A$ — два идеала кольца валюации. Тогда либо $I \subseteq J$, либо $J \subseteq I$. В частности, A — **локальное кольцо.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in I$ и $b \in J$, то либо a/b либо $b/a \in A$. ■

Кольца валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — целостное кольцо. Оно называется **кольцом валюации,** если для всякого $x \neq 0 \in \mathrm{Frac}(A)$ один из элементов x, x^{-1} лежит в A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I, J \subset A$ — два идеала кольца валюации. Тогда либо $I \subseteq J$, либо $J \subseteq I$. В частности, A — **локальное кольцо.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in I$ и $b \in J$, то либо a/b либо $b/a \in A$. ∎

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо валюации, то на **группе значений** $\Gamma := \mathrm{Frac}(A)^\times / A^\times$ есть естественный **полный порядок:** элемент называется **неотрицательным,** если он приходит из элемента $A \subset \mathrm{Frac}(A)$. Максимальный идеал A — прообраз **положительного** конуса $\Gamma_{>0} \subset \Gamma$.

Кольца валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — целостное кольцо. Оно называется **кольцом валюации,** если для всякого $x \neq 0 \in \mathrm{Frac}(A)$ один из элементов x, x^{-1} лежит в A.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I, J \subset A$ — два идеала кольца валюации. Тогда либо $I \subseteq J$, либо $J \subseteq I$. В частности, A — **локальное кольцо.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Если $a \in I$ и $b \in J$, то либо a/b либо $b/a \in A$. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо валюации, то на **группе значений** $\Gamma := \mathrm{Frac}(A)^\times/A^\times$ есть естественный **полный порядок:** элемент называется **неотрицательным,** если он приходит из элемента $A \subset \mathrm{Frac}(A)$. Максимальный идеал A — прообраз **положительного** конуса $\Gamma_{>0} \subset \Gamma$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Отображение **валюации** $\nu\colon \mathrm{Frac}(A)^\times \to \Gamma$ удовлетворяет $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$ и $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$.

Вполне упорядоченные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — упорядоченное множество. Подмножество $C \subset X$ называется **конусом,** если $\forall c \in C \ \forall x \geqslant c : x \in C$.

Вполне упорядоченные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — упорядоченное множество. Подмножество $C \subset X$ называется **конусом,** если $\forall c \in C\ \forall x \geqslant c : x \in C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть Γ — счетная вполне упорядоченная группа, и всякий конус в ней имеет вид $\Gamma_{\geqslant c} = \{x \in \Gamma : x \geqslant c\}$. Тогда $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для элемента $g \in \Gamma$ обозначим $i(g)$ элемент такой, что $\Gamma_{>g} = \Gamma_{\geqslant i(g)}$. Вложим $\mathbb{Z}$ в Γ, отправив k в $i^k(0)$, тогда $i(x) = x + 1$. Рассмотрим конус $C = \{x : \forall k\ x > i^k(0)\}$, пусть он равен Γ_ω. Тогда $\omega - 1 \geqslant \omega$, противоречие. Значит, это вложение — изоморфизм. ■

Вполне упорядоченные группы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — упорядоченное множество. Подмножество $C \subset X$ называется **конусом,** если $\forall c \in C\ \forall x \geqslant c : x \in C$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть Γ — счетная вполне упорядоченная группа, и всякий конус в ней имеет вид $\Gamma_{\geqslant c} = \{x \in \Gamma : x \geqslant c\}$. Тогда $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для элемента $g \in \Gamma$ обозначим $i(g)$ элемент такой, что $\Gamma_{>g} = \Gamma_{\geqslant i(g)}$. Вложим $\mathbb{Z}$ в Γ, отправив k в $i^k(0)$, тогда $i(x) = x+1$. Рассмотрим конус $C = \{x : \forall k\ x > i^k(0)\}$, пусть он равен Γ_ω. Тогда $\omega - 1 \geqslant \omega$, противоречие. Значит, это вложение — изоморфизм. ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть Γ — счетная вполне упорядоченная группа, в которой всякая возрастающая последовательность подконусов в $\Gamma_{\geqslant 0}$ стабилизируется. Тогда $\Gamma \simeq \mathbb{Z}$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Для всякой положительной убывающей последовательности $\{c_k\}$ стабилизируется последовательность конусов $\left\{\Gamma_{\geqslant c_k}\right\}$, значит стабилизируется и $\{c_k\}$. Рассмотрим произвольный подконус $C \subset \Gamma_{\geqslant 0}$, не имеющий вида $\Gamma_{\geqslant c}$. Для всякого элемента $c_k \in C$ можно найти элемент $c_{k+1} \in C$ такой, что $c_{k+1} < c_k$. Раз таких последовательностей нет, то и конусов таких нет; а тогда см. выше. ■

Кольца дискретной валюации

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ν — валюация на поле, то $\mathcal{O}_\nu = \{k \in K : \nu(k) \geqslant 0\}$ есть подкольцо. Это кольцо валюации, и его валюация как кольца валюации совпадает с исходной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Идеалы кольца валюации взаимно-однозначно соответствуют конусам в $\Gamma_{\geqslant 0}$.

Кольца дискретной валюации

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ν — валюация на поле, то $\mathcal{O}_\nu = \{k \in K : \nu(k) \geqslant 0\}$ есть подкольцо. Это кольцо валюации, и его валюация как кольца валюации совпадает с исходной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Идеалы кольца валюации взаимно-однозначно соответствуют конусам в $\Gamma_{\geqslant 0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Валюация называется **дискретной**, если ее группа значений изоморфна $\mathbb{Z}$.

Кольца дискретной валюации

ЗАМЕЧАНИЕ: Если ν — валюация на поле, то $\mathcal{O}_\nu = \{k \in K : \nu(k) \geqslant 0\}$ есть подкольцо. Это кольцо валюации, и его валюация как кольца валюации совпадает с исходной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Идеалы кольца валюации взаимно-однозначно соответствуют конусам в $\Gamma_{\geqslant 0}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Валюация называется **дискретной**, если ее группа значений изоморфна $\mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА: Кольца **дискретной** валюации, **нетеровы** кольца валюации, и локальные кольца **главных идеалов** — **одно и то же.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Построим валюацию на локальном кольце главных идеалов. Максимальные идеалы порождены неразложимыми элементами, значит в A такой один с точностью до обратимых. Значит, произвольный элемент A имеет вид ua^n, где u обратим. Положим $\nu(ua^n) = n$. Теперь утверждение является буквальным переводом лемм с прошлого слайда. ■

Геометрический смысл колец валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — произвольное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал с полем вычетов k. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — **k-векторное пространство,** и называется оно **кокасательным пространством** к $\operatorname{Spec} A$ в $\mathfrak{m}$ и обозначается $T^*_{\mathfrak{m}}$.

Геометрический смысл колец валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — произвольное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал с полем вычетов k. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — **k-векторное пространство,** и называется оно **кокасательным пространством** к $\operatorname{Spec} A$ в $\mathfrak{m}$ и обозначается $T^*_{\mathfrak{m}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Кокасательное пространство кольца валюации **не более чем одномерно.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y \neq 0 \in T^*_{\mathfrak{m}}$. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — их прообразы в $\mathfrak{m}$, и $\tilde{x} = a\tilde{y}$ для $a \in A$. Тогда $a \notin \mathfrak{m}$, и $x = \bar{a}y$, где $\bar{a} \in k = a \mod \mathfrak{m}$. ■

Геометрический смысл колец валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — произвольное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал с полем вычетов k. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — **k-векторное пространство,** и называется оно **кокасательным пространством** к $\operatorname{Spec} A$ в $\mathfrak{m}$ и обозначается $T^*_{\mathfrak{m}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Кокасательное пространство кольца валюации **не более чем одномерно.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y \neq 0 \in T^*_{\mathfrak{m}}$. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — их прообразы в $\mathfrak{m}$, и $\tilde{x} = a\tilde{y}$ для $a \in A$. Тогда $a \notin \mathfrak{m}$, и $x = \bar{a}y$, где $\bar{a} \in k = a \mod \mathfrak{m}$. ■

ПРИМЕР: Локальное кольцо **гладкой** точки кривой — кольцо валюации. Кокасательное пространство **двойственно** касательной к кривой в этой точке.

Геометрический смысл колец валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — произвольное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал с полем вычетов k. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — **k-векторное пространство,** и называется оно **кокасательным пространством** к $\operatorname{Spec} A$ в $\mathfrak{m}$ и обозначается $T^*_{\mathfrak{m}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Кокасательное пространство кольца валюации **не более чем одномерно.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y \neq 0 \in T^*_{\mathfrak{m}}$. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — их прообразы в $\mathfrak{m}$, и $\tilde{x} = a\tilde{y}$ для $a \in A$. Тогда $a \notin \mathfrak{m}$, и $x = \bar{a}y$, где $\bar{a} \in k = a \mod \mathfrak{m}$. ■

ПРИМЕР: Локальное кольцо **гладкой** точки кривой — кольцо валюации. Кокасательное пространство **двойственно** касательной к кривой в этой точке.

ПРИМЕР: Пусть A — локальное кольцо точки $(0;0)$ **на плоскости**, или на **особой** кривой $y^2 = x^2 + x^3$. Тогда $x/y \in \operatorname{Frac}(A)$, но ни x/y, ни $y/x \notin A$.

Геометрический смысл колец валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — произвольное кольцо, $\mathfrak{m} \subset A$ максимальный идеал с полем вычетов k. Тогда $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ — **k-векторное пространство,** и называется оно **кокасательным пространством** к $\operatorname{Spec} A$ в $\mathfrak{m}$ и обозначается $T^*_{\mathfrak{m}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Кокасательное пространство кольца валюации **не более чем одномерно.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $x, y \neq 0 \in T^*_{\mathfrak{m}}$. Пусть $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — их прообразы в $\mathfrak{m}$, и $\tilde{x} = a\tilde{y}$ для $a \in A$. Тогда $a \notin \mathfrak{m}$, и $x = \bar{a}y$, где $\bar{a} \in k = a \mod \mathfrak{m}$. ■

ПРИМЕР: Локальное кольцо **гладкой** точки кривой — кольцо валюации. Кокасательное пространство **двойственно** касательной к кривой в этой точке.

ПРИМЕР: Пусть A — локальное кольцо точки $(0;0)$ **на плоскости**, или на **особой** кривой $y^2 = x^2 + x^3$. Тогда $x/y \in \operatorname{Frac}(A)$, но ни x/y, ни $y/x \notin A$.

ПРИМЕР: Рассмотрим бесконечную цепочку колец: $k \subset k[x] \subset k[\sqrt{x}] \subset \dots \subset k\left[x^{1/2^m}\right] \subset \dots$. Ее объединение обозначается $k\left[x^{1/2^\infty}\right]$. Это **нетерово** кольцо валюации, его кокасательное пространство **нульмерно,** а группа значений изоморфна $\{n/2^m : n, m \in \mathbb{Z}, m \geqslant 0\}$.

Нормирования и валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть K — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если верна более сильная аксиома (3') $|x+y| \leqslant \max(|x|, |y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

Нормирования и валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть K — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если верна более сильная аксиома (3') $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ — упорядоченная абелева группа. Отображение $\nu\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ называется **валюацией,** если (1) $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$; (2) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$; (3) $\nu(x + y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\Gamma \subset \mathbb{R}$, а ν — валюация, то $|x|_\nu = e^{-\nu(x)}$ — неархимедово нормирование.

Нормирования и валюации

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть K — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K\to\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x|=0\Leftrightarrow x=0$; (2) $|xy|=|x||y|$; (3) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если верна более сильная аксиома (3') $|x+y|\leqslant\max(|x|,|y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть Γ — упорядоченная абелева группа. Отображение $\nu\colon K\to\Gamma\cup\{\infty\}$ называется **валюацией,** если (1) $\nu(x)=\infty\Leftrightarrow x=0$; (2) $\nu(xy)=\nu(x)+\nu(y)$; (3) $\nu(x+y)\geqslant\min(\nu(x),\nu(y))$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\Gamma\subset\mathbb{R}$, а ν — валюация, то $|x|_\nu=e^{-\nu(x)}$ — неархимедово нормирование.

ПРИМЕР: Если X — аффинная кривая, всякая точка $x\in X$ определяет валюацию на поле функций $k(X)$: $\nu_x(f)$ есть порядок полюса f в x.

ПРИМЕР: Если p — простое число, **p-адическая валюация** на $\mathbb{Q}$ определяется как $\nu(n/p^k m)=k$, где m,n не делятся на p.

Места

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Нормирование определяет метрику $d(x, y) = |x - y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

Места

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Нормирование определяет метрику $d(x,y) = |x - y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916) Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и p-адические нормирования. ■

Места

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Нормирование определяет метрику $d(x,y) = |x-y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916) Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и p-адические нормирования. ∎

ТЕОРЕМА: Нетривиальные места поля $\mathbb{F}_p(t)$ это deg и π-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in \mathbb{F}_p[t]$.

ТЕОРЕМА: Нетривиальные места поля $k(t)$, **тривиальные на k**, это deg и π-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in k[t]$.

Места

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Нормирование определяет метрику $d(x, y) = |x - y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916) Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и p-адические нормирования. ■

ТЕОРЕМА: Нетривиальные места поля $\mathbb{F}_p(t)$ это deg и π-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in \mathbb{F}_p[t]$.

ТЕОРЕМА: Нетривиальные места поля $k(t)$, **тривиальные на k**, это deg и π-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in k[t]$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, множество мест данного поля весьма похоже на спектр его кольца целых.

Пространства Римана–Зариского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** K над k называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюации в K, содержащих k. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

Пространства Римана–Зариского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** K над k называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюации в K, содержащих k. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

ПРИМЕР: Пусть C — алгебраическая кривая над k, и $k(C)$ — ее поле функций. Пространство Римана–Зариского K/k состоит из тривиального нормирования, и из p-адических нормирований для точек $p \in C$. Оно изоморфно **гладкой проективной модели** кривой C с топологией Зариского, **тривиальное** нормирование при этом соответствует **общей точке.**

Пространства Римана–Зариского

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** K над k называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюации в K, содержащих k. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

ПРИМЕР: Пусть C — алгебраическая кривая над k, и $k(C)$ — ее поле функций. Пространство Римана–Зариского K/k состоит из тривиального нормирования, и из p-адических нормирований для точек $p \in C$. Оно изоморфно **гладкой проективной модели** кривой C с топологией Зариского, **тривиальное** нормирование при этом соответствует **общей точке.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Уже для полей функций поверхностей пространство Римана–Зариского не изоморфно никакой схеме. Однако в некотором смысле оно неособо, и может служить более **слабой версией разрешения особенностей.**