Нормальные расслоения и сдутие кривых

18 марта 2024 года

Определение производной по Лагранжу

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра, и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда $X \times X = \operatorname{Spec} A \otimes_k A$. **Диагональное вложение** $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ определяется гомоморфизмом $\mu \colon A \otimes_k A \to A$: $\mu(f \otimes g) = fg$.

Определение производной по Лагранжу

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра, и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда $X \times X = \operatorname{Spec} A \otimes_k A$. **Диагональное вложение** $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ определяется гомоморфизмом $\mu\colon A \otimes_k A \to A$: $\mu(f \otimes g) = fg$.

ЗАМЕЧАНИЕ: (Лагранж) Пусть $f \in k[t]$ — функция на $\mathbb{A}^1$. Определим на $\mathbb{A}^2$ функцию $\tilde{f}$ как $\tilde{f}(x, y) = f(x) - f(y)$. Она зануляется на диагонали, и **по теореме Гильберта о нулях** делится на $x - y$: $\tilde{f}(x, y) = (x - y)g(x, y)$. **Тогда** $g(x, x) = f'(x)$**.**

Определение производной по Лагранжу

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра, и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда $X \times X = \operatorname{Spec} A \otimes_k A$. **Диагональное вложение** $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ определяется гомоморфизмом $\mu\colon A \otimes_k A \to A$: $\mu(f \otimes g) = fg$.

ЗАМЕЧАНИЕ: (Лагранж) Пусть $f \in k[t]$ — функция на $\mathbb{A}^1$. Определим на $\mathbb{A}^2$ функцию $\tilde{f}$ как $\tilde{f}(x, y) = f(x) - f(y)$. Она зануляется на диагонали, и **по теореме Гильберта о нулях** делится на $x - y$: $\tilde{f}(x, y) = (x - y)g(x, y)$. **Тогда** $g(x, x) = f'(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I = \ker \mu \subset A \otimes A$. Модулем **кэлеровых дифференциалов** Ω^1_A называется фактор I/I^2. Пишут: $dg = 1 \otimes g - g \otimes 1$.

Определение производной по Лагранжу

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра, и $X = \operatorname{Spec} A$. Тогда $X \times X = \operatorname{Spec} A \otimes_k A$. **Диагональное вложение** $X \to X \times X$, $x \mapsto (x, x)$ определяется гомоморфизмом $\mu\colon A \otimes_k A \to A$: $\mu(f \otimes g) = fg$.

ЗАМЕЧАНИЕ: (Лагранж) Пусть $f \in k[t]$ — функция на $\mathbb{A}^1$. Определим на $\mathbb{A}^2$ функцию $\tilde{f}$ как $\tilde{f}(x, y) = f(x) - f(y)$. Она зануляется на диагонали, и **по теореме Гильберта о нулях** делится на $x - y$: $\tilde{f}(x, y) = (x - y)g(x, y)$. **Тогда** $g(x, x) = f'(x)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I = \ker \mu \subset A \otimes A$. Модулем **кэлеровых дифференциалов** Ω^1_A называется фактор I/I^2. Пишут: $dg = 1 \otimes g - g \otimes 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: $d(fg) = fdg + df \cdot g$ и $fdg = dg \cdot f$.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: $d(fg) = 1 \otimes fg - fg \otimes 1 = 1 \otimes fg - f \otimes g + f \otimes g - fg \otimes 1 = (1 \otimes f - f \otimes 1)g + f(1 \otimes g - g \otimes 1) = df \cdot g + fdg$.

$dg \cdot f - fdg = 1 \otimes gf - g \otimes f - f \otimes g + fg \otimes 1 = (1 \otimes f - f \otimes 1)(1 \otimes g - g \otimes 1) \in I^2$. ■

Дифференцирования кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо, и M — A-модуль. **Дифференцированием** A в M называется отображение $\partial\colon A \to M$ такое, что $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

Дифференцирования кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо, и M — A-модуль. **Дифференцированием** A в M называется отображение $\partial\colon A \to M$ такое, что $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

ПРИМЕР: Отображение $d\colon A \to \Omega^1_A$ есть дифференцирование.

Дифференцирования кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо, и M — A-модуль. **Дифференцированием** A в M называется отображение $\partial\colon A \to M$ такое, что $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

ПРИМЕР: Отображение $d\colon A \to \Omega^1_A$ есть дифференцирование.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Всякое дифференцирование в M есть как композиция дифференцирования $d\colon A \to \Omega^1_A$ и гомоморфизма $\Omega^1_A \to M$. ■

Дифференцирования кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо, и M — A-модуль. **Дифференцированием** A в M называется отображение $\partial\colon A \to M$ такое, что $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

ПРИМЕР: Отображение $d\colon A \to \Omega^1_A$ есть дифференцирование.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Всякое дифференцирование в M есть как композиция дифференцирования $d\colon A \to \Omega^1_A$ и гомоморфизма $\Omega^1_A \to M$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Модуль $\operatorname{Der}(A) = \operatorname{Hom}(\Omega^1_A, A)$ дифференцирований из A в себя двойствен модулю Ω^1_A.

Дифференцирования кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо, и M — A-модуль. **Дифференцированием** A в M называется отображение $\partial\colon A \to M$ такое, что $\partial(ab) = \partial(a)b + a\partial(b)$.

ПРИМЕР: Отображение $d\colon A \to \Omega^1_A$ есть дифференцирование.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Всякое дифференцирование в M есть как композиция дифференцирования $d\colon A \to \Omega^1_A$ и гомоморфизма $\Omega^1_A \to M$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Модуль $\mathrm{Der}(A) = \mathrm{Hom}(\Omega^1_A, A)$ дифференцирований из A в себя двойствен модулю Ω^1_A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — кольцо функций гладкого аффинного многообразия X. Его **касательным расслоением** TX называется расслоение, связанное с модулем $\mathrm{Der}(A)$. Его **кокасательным расслоением** T^*X называется расслоение, связанное с модулем Ω^1_A.

Нормальный конус

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Тогда I^k/I^{k+1} — A/I-модули. Из них можно составить две A/I-алгебры: $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ и $\operatorname{Sym}_{A/I} I/I^2$.

Нормальный конус

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Тогда I^k/I^{k+1} — A/I-модули. Из них можно составить две A/I-алгебры: $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ и $\operatorname{Sym}_{A/I} I/I^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал точки на плоскости. Тогда обе этих алгебры суть $k[x, y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал особенности кривой $y^2 = x^3+x^2$. Тогда $I^k/I^{k+1} = \langle x^k, x^{k-1}y\rangle$, и их сумма изоморфна $k[x+y]\oplus k[x-y]$.

Нормальный конус

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Тогда I^k/I^{k+1} — A/I-модули. Из них можно составить две A/I-алгебры: $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ и $\operatorname{Sym}_{A/I} I/I^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал точки на плоскости. Тогда обе этих алгебры суть $k[x, y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал особенности кривой $y^2 = x^3 + x^2$. Тогда $I^k/I^{k+1} = \langle x^k, x^{k-1}y \rangle$, и их сумма изоморфна $k[x+y] \oplus k[x-y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Спектр алгебры $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ называется **нормальным конусом.** Спектр $\operatorname{Sym}_{A/I}(I/I^2)$ называется **нормальным расслоением.** Вложение называется **регулярным,** если они совпадают.

ПРИМЕР: Нормальное расслоение точки — касательное пространство. Касательное расслоение — нормальное расслоение к диагонали.

Нормальный конус

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Тогда I^k/I^{k+1} — A/I-модули. Из них можно составить две A/I-алгебры: $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ и $\mathrm{Sym}_{A/I} I/I^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал точки на плоскости. Тогда обе этих алгебры суть $k[x, y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал особенности кривой $y^2 = x^3+x^2$. Тогда $I^k/I^{k+1} = \langle x^k, x^{k-1}y\rangle$, и их сумма изоморфна $k[x+y]\oplus k[x-y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Спектр алгебры $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ называется **нормальным конусом.** Спектр $\mathrm{Sym}_{A/I}(I/I^2)$ называется **нормальным расслоением.** Вложение называется **регулярным,** если они совпадают.

ПРИМЕР: Нормальное расслоение точки — касательное пространство. Касательное расслоение — нормальное расслоение к диагонали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $s \in \Gamma(L, X)$ — сечение. Тогда $N_{(s)/X} \cong L|_{(s)}$.

Нормальный конус

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Тогда I^k/I^{k+1} — A/I-модули. Из них можно составить две A/I-алгебры: $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ и $\operatorname{Sym}_{A/I} I/I^2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал точки на плоскости. Тогда обе этих алгебры суть $k[x, y]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $I = (x, y)$ — идеал особенности кривой $y^2 = x^3+x^2$. Тогда $I^k/I^{k+1} = \langle x^k, x^{k-1}y\rangle$, и их сумма изоморфна $k[x+y]\oplus k[x-y]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Спектр алгебры $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i/I^{i+1}$ называется **нормальным конусом.** Спектр $\operatorname{Sym}_{A/I}(I/I^2)$ называется **нормальным расслоением.** Вложение называется **регулярным,** если они совпадают.

ПРИМЕР: Нормальное расслоение точки — касательное пространство. Касательное расслоение — нормальное расслоение к диагонали.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $s \in \Gamma(L, X)$ — сечение. Тогда $N_{(s)/X} \cong L|_{(s)}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $C \subset S$ — кривая на поверхности, $x \in C$, а $\tilde{C} \subset \operatorname{Bl}_x S$ — строгий прообраз. Тогда $N_{\tilde{C}/\operatorname{Bl}_x S} \cong N_{C/S} \otimes \mathcal{O}_C(-x)$.

Самопересечение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $C \subset S$ — кривая. Ее **самопересечением** называется степень ее нормального расслоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если кривая движется в семействе, то ее самопересечение — это действительно индекс пересечения ее с другим членом. Однако это определение имеет смысл для кривых, которые не деформируются.

Самопересечение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $C \subset S$ — кривая. Ее **самопересечением** называется степень ее нормального расслоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если кривая движется в семействе, то ее самопересечение — это действительно индекс пересечения ее с другим членом. Однако это определение имеет смысл для кривых, которые не деформируются.

ПРИМЕР: Пусть $E_x \subset \mathrm{Bl}_x S$ — кривая, добавленная при раздутии гладкой точки. Ее самопересечение равняется -1.

ПРИМЕР: Самопересечение $\tilde{C} \subset \mathrm{Bl}_x S$ на единицу меньше, чем у $C \subset S$.

Самопересечение

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $C \subset S$ — кривая. Ее **самопересечением** называется степень ее нормального расслоения.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если кривая движется в семействе, то ее самопересечение — это действительно индекс пересечения ее с другим членом. Однако это определение имеет смысл для кривых, которые не деформируются.

ПРИМЕР: Пусть $E_x \subset \mathrm{Bl}_x S$ — кривая, добавленная при раздутии гладкой точки. Ее самопересечение равняется -1.

ПРИМЕР: Самопересечение $\tilde{C} \subset \mathrm{Bl}_x S$ на единицу меньше, чем у $C \subset S$.

ТЕОРЕМА: **(критерий Кастельнуово)** Рациональная кривая на поверхности может быть стянута в **гладкую** точку тогда и только тогда, когда ее самопересечение равняется -1.