Вложения линейными системами

26 февраля 2024 года

Трудность с прошлого занятия

Последним утверждением на прошлом занятии был такой

ПРИМЕР: Пусть $X \subset \mathsf{P}^n$ — кривая, и $L = \mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1)|_X$. Тогда всякий эффективный дивизор из класса (L) высекается на X гиперплоскостью.

Это утверждение **неверно** (в неочевидную сторону).

Трудность с прошлого занятия

Последним утверждением на прошлом занятии был такой

ПРИМЕР: Пусть $X \subset \mathbb{P}^n$ — кривая, и $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|_X$. Тогда всякий эффективный дивизор из класса (L) высекается на X гиперплоскостью.

Это утверждение **неверно** (в неочевидную сторону).

ПРИМЕР: Рассмотрим **неплоскую** кривую в $\mathbb{P}^3$. Ее центральная проекция — кривая C той же степени. Рассмотрим расслоение $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|_C$, пересечения C с прямыми являются дивизорами в классе L. На кривой в $\mathbb{P}^3$ они высекаются плоскостями, **проходящими через центр** проекции, а другие плоскости высекают другие дивизоры, также лежащие в классе (L), но не получаемые как пересечения C с прямыми в $\mathbb{P}^2$.

Трудность с прошлого занятия

Последним утверждением на прошлом занятии был такой

ПРИМЕР: Пусть $X \subset \mathrm{P}^n$ — кривая, и $L = \mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1)|_X$. Тогда всякий эффективный дивизор из класса (L) высекается на X гиперплоскостью.

Это утверждение **неверно** (в неочевидную сторону).

ПРИМЕР: Рассмотрим **неплоскую** кривую в P^3. Ее центральная проекция — кривая C той же степени. Рассмотрим расслоение $L = \mathcal{O}_{\mathrm{P}^2}(1)|_C$, пересечения C с прямыми являются дивизорами в классе L. На кривой в P^3 они высекаются плоскостями, **проходящими через центр** проекции, а другие плоскости высекают другие дивизоры, также лежащие в классе (L), но не получаемые как пересечения C с прямыми в P^2.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Линейной системой** на X называется линейное расслоение $L \to X$ и подпространство $V \subset \Gamma(L, X)$. **Вложением** линейной системой называется такое отображение $X \to \mathrm{P}^n$, что $L = \mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1)|_X$, а $V = \Gamma(\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1), \mathrm{P}^n)|_X$. Линейная система называется **полной,** если $V = \Gamma(L, X)$.

Вложения линейной системой

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V_x = \{s \in \Gamma(L,X)\colon s(x) = 0\}$. $V_x \subset \Gamma(L,X)$ имеет коразмерность 0 или 1. Там, где она равна 1, она определяет отображение $X \to \mathsf{P}(\Gamma(L,X)^*)$. Это **и есть** вложение полной линейной системой.

Вложения линейной системой

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V_x = \{s \in \Gamma(L, X) \colon s(x) = 0\}$. $V_x \subset \Gamma(L, X)$ имеет коразмерность 0 или 1. Там, где она равна 1, она определяет отображение $X \to \mathrm{P}(\Gamma(L, X)^*)$. Это **и есть** вложение полной линейной системой.

ПРИМЕР: Образ вложения P^1 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть гладкая коника.

Вложения линейной системой

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V_x = \{s \in \Gamma(L,X)\colon s(x) = 0\}$. $V_x \subset \Gamma(L,X)$ имеет коразмерность 0 или 1. Там, где она равна 1, она определяет отображение $X \to \mathsf{P}(\Gamma(L,X)^*)$. Это **и есть** вложение полной линейной системой.

ПРИМЕР: Образ вложения P^1 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть гладкая коника.

ЛЕММА: **Ядро** отображения $\operatorname{Sym}^k \Gamma(L,X) \to \Gamma(L^{\otimes k}, X)$ есть пространство функций степени k на P^n, тождественно **обнуляющихся на образе** вложения при помощи L. ■

Вложения линейной системой

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V_x = \{s \in \Gamma(L, X) \colon s(x) = 0\}$. $V_x \subset \Gamma(L, X)$ имеет коразмерность 0 или 1. Там, где она равна 1, она определяет отображение $X \to \mathsf{P}(\Gamma(L, X)^*)$. Это **и есть** вложение полной линейной системой.

ПРИМЕР: Образ вложения P^1 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть гладкая коника.

ЛЕММА: **Ядро** отображения $\operatorname{Sym}^k \Gamma(L, X) \to \Gamma(L^{\otimes k}, X)$ есть пространство функций степени k на P^n, тождественно **обнуляющихся на образе** вложения при помощи L. ■

ПРИМЕР: $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(4))$ имеет размерность пять, $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2))$ — три, а потому $\dim \operatorname{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2)) = 6$. Ядро отображения $\operatorname{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2)) \to \Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(4))$ одномерно, и порождающая его функция и дает уравнение коники.

Вложения линейной системой

ЗАМЕЧАНИЕ: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V_x = \{s \in \Gamma(L,X)\colon s(x) = 0\}$. $V_x \subset \Gamma(L,X)$ имеет коразмерность 0 или 1. Там, где она равна 1, она определяет отображение $X \to \mathsf{P}(\Gamma(L,X)^*)$. Это **и есть** вложение полной линейной системой.

ПРИМЕР: Образ вложения P^1 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть гладкая коника.

ЛЕММА: **Ядро** отображения $\operatorname{Sym}^k\Gamma(L,X) \to \Gamma(L^{\otimes k},X)$ есть пространство функций степени k на P^n, тождественно **обнуляющихся на образе** вложения при помощи L. ■

ПРИМЕР: $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(4))$ имеет размерность пять, $\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2))$ — три, а потому $\dim\operatorname{Sym}^2\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2)) = 6$. Ядро отображения $\operatorname{Sym}^2\Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(2)) \to \Gamma(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(4))$ одномерно, и порождающая его функция и дает уравнение коники.

ПРИМЕР: Образ вложения P^1 при помощи $\mathcal{O}(n)$ есть **нормальная рациональная кривая,** в аффинной карте имеющая вид $t \mapsto (t, t^2, t^3, \dots, t^n)$. $\dim\operatorname{Sym}^2\Gamma(\mathcal{O}(3)) = 10$, $\dim\Gamma(\mathcal{O}(6)) = 7$, и через нее проходит 3 квадрики.

ПРИМЕР: Образ вложения **эллиптической кривой** при помощи дивизора $\mathcal{O}(p_1+p_2+p_3)$ есть **плоская кубика,** а при помощи $\mathcal{O}(p_1+p_2+p_3+p_4)$ — пересечение **двух квадрик** в P^3.

Вложение Сегре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $L \to X$, $L' \to X'$ — два линейных расслоения. Тогда на $X \times X'$ имеется линейное расслоение $L \boxtimes L'$, слой которого над точкой (x, x') есть $L_x \otimes L'_{x'}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вложение $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ при помощи $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)$ называется **вложением Сегре**.

СЛЕДСТВИЕ: Произведения проективных многообразий проективны.

Вложение Сегре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $L \to X$, $L' \to X'$ — два линейных расслоения. Тогда на $X \times X'$ имеется линейное расслоение $L \boxtimes L'$, слой которого над точкой (x, x') есть $L_x \otimes L'_{x'}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вложение $\mathsf{P}^n \times \mathsf{P}^m$ при помощи $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathsf{P}^m}(1)$ называется **вложением Сегре**.

СЛЕДСТВИЕ: Произведения проективных многообразий проективны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}(V)$ и $\mathsf{P}^m = \mathsf{P}(W)$, вложение Сегре можно представить как $\langle v \rangle \times \langle w \rangle \mapsto \langle v \otimes w \rangle \subset \mathsf{P}(V \otimes W)$. Иначе говоря, образ вложения Сегре есть **локус разложимых тензоров.**

Вложение Сегре

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $L \to X$, $L' \to X'$ — два линейных расслоения. Тогда на $X \times X'$ имеется линейное расслоение $L \boxtimes L'$, слой которого над точкой (x, x') есть $L_x \otimes L'_{x'}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вложение $\mathsf{P}^n \times \mathsf{P}^m$ при помощи $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1) \boxtimes \mathcal{O}_{\mathsf{P}^m}(1)$ называется **вложением Сегре**.

СЛЕДСТВИЕ: Произведения проективных многообразий проективны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}(V)$ и $\mathsf{P}^m = \mathsf{P}(W)$, вложение Сегре можно представить как $\langle v\rangle \times \langle w\rangle \mapsto \langle v \otimes w\rangle \subset \mathsf{P}(V \otimes W)$. Иначе говоря, образ вложения Сегре есть **локус разложимых тензоров.**

ПРИМЕР: Если $n = m = 1$, образ вложения Сегре есть **квадрика в P^3.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Для двух двумерных пространств V, W рассмотрим отображение $(V \otimes W) \times (V \otimes W) \to \Lambda^4(V \otimes W)$, $(a \otimes b, c \otimes d) = a \wedge b \wedge c \wedge d$. Это симметричная форма с коэффициентами в одномерном пространстве, ее нули и есть образ вложения Сегре $\mathsf{P}^1 \times \mathsf{P}^1 \to \mathsf{P}^3$.

Вложение Плюккера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грассмановым многообразием** $\mathrm{Gr}(k,n)$ называется многообразие k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ: Проективное пространство есть грассманиан $\mathrm{Gr}(1,n+1)$.

Вложение Плюккера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грассмановым многообразием** $\mathrm{Gr}(k, n)$ называется многообразие k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ: Проективное пространство есть грассманиан $\mathrm{Gr}(1, n+1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Над грассмановым многообразием имеется **тавтологическое расслоение** Taut ранга k, аналогичное линейному тавтологическому расслоению над P^n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вложение грассманова многообразия при помощи линейного расслоения $\Lambda^k \mathrm{Taut}^*$ называется **вложением Плюккера.**

Вложение Плюккера

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Грассмановым многообразием** $\mathrm{Gr}(k,n)$ называется многообразие k-мерных плоскостей в n-мерном пространстве.

ЗАМЕЧАНИЕ: Проективное пространство есть грассманиан $\mathrm{Gr}(1,n+1)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Над грассмановым многообразием имеется **тавтологическое расслоение** Taut ранга k, аналогичное линейному тавтологическому расслоению над P^n.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Вложение грассманова многообразия при помощи линейного расслоения $\Lambda^k\mathrm{Taut}^*$ называется **вложением Плюккера.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Вложение Плюккера можно представить как $\mathrm{Gr}(k,V)\mapsto \mathrm{P}\Lambda^k(V)$, $\langle v_1,v_2,\dots v_k\rangle\mapsto v_1\wedge v_2\wedge\dots\wedge v_k$. Его образ — локус **полностью разложимых** мультивекторов.

ПРИМЕР: Пусть $\dim V=4$, $k=2$. На $\Lambda^2 V$ имеется квадратичная форма: $(\alpha,\beta)=\alpha\wedge\beta\in\Lambda^4 V$. Ее нули есть образ вложения Плюккера $\mathrm{Gr}(2,4)\to \mathrm{P}^5$. Итак, прямые в P^3 параметризуются квадрикой в P^5. Она называется **квадрикой Плюккера** либо **квадрикой Клейна.**

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathsf{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \operatorname{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathsf{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathsf{P}^2) = \frac{6\cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathsf{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \operatorname{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathsf{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathsf{P}^2) = \frac{6\cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

Если $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}(V^*)$, то $\mathsf{P}^5 = \mathsf{P}\left(\operatorname{Sym}^2 V^*\right)$, и отображение Веронезе есть $f(ax+by+cz) = (ax+by+cz)^2$. Линейная комбинация **двух квадратов есть произведение** линейных форм, так что точки хорд поверхности Веронезе представляют вырожденные квадратичные формы.

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathrm{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \mathrm{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathrm{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathrm{P}^2) = \frac{6 \cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

Если $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}(V^*)$, то $\mathrm{P}^5 = \mathrm{P}\left(\mathrm{Sym}^2 V^*\right)$, и отображение Веронезе есть $f(ax + by + cz) = (ax + by + cz)^2$. Линейная комбинация **двух квадратов есть произведение** линейных форм, так что точки хорд поверхности Веронезе представляют вырожденные квадратичные формы. Иначе говоря,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: **Многообразие секущих** поверхности Веронезе есть **детерминантальная гиперповерхность** $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0$.

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathrm{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \operatorname{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathrm{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathrm{P}^2) = \frac{6\cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

Если $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}(V^*)$, то $\mathrm{P}^5 = \mathrm{P}\left(\operatorname{Sym}^2 V^*\right)$, и отображение Веронезе есть $f(ax+by+cz) = (ax+by+cz)^2$. Линейная комбинация **двух квадратов есть произведение** линейных форм, так что точки хорд поверхности Веронезе представляют вырожденные квадратичные формы. Иначе говоря,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: **Многообразие секущих** поверхности Веронезе есть **детерминантальная гиперповерхность** $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Любые две касательные плоскости к поверхности Веронезе пересекаются.

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathrm{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \mathrm{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathrm{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathrm{P}^2) = \frac{6\cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

Если $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}(V^*)$, то $\mathrm{P}^5 = \mathrm{P}\left(\mathrm{Sym}^2 V^*\right)$, и отображение Веронезе есть $f(ax+by+cz) = (ax+by+cz)^2$. Линейная комбинация **двух квадратов есть произведение** линейных форм, так что точки хорд поверхности Веронезе представляют вырожденные квадратичные формы. Иначе говоря,

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: **Многообразие секущих** поверхности Веронезе есть **детерминантальная гиперповерхность** $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Любые две касательные плоскости к поверхности Веронезе пересекаются.

ТЕОРЕМА: **(Ф. Севери, 1901)** Поверхность Веронезе — единственная поверхность в P^5, чьи секущие не наполняют собой все пространство. ∎

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на $\mathbb{P}^2$ линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на P^2 линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{P^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $P^2 \dashrightarrow P^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

ТЕОРЕМА: (А. Клебш, 1866) Всякая кубическая поверхность получается таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Способов выбрать шесть точек на P^2 имеется $6{\cdot}2-8=4$-хмерное семейство, и выбрать кубику в P^3 — $\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}-16=4$-хмерное. Отсюда видно, что теорема Клебша верна для **общей кубики.**

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на P^2 линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $\mathsf{P}^2 \dashrightarrow \mathsf{P}^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

ТЕОРЕМА: **(А. Клебш, 1866)** Всякая кубическая поверхность получается таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Способов выбрать шесть точек на P^2 имеется $6{\cdot}2-8=4$-хмерное семейство, и выбрать кубику в P^3 — $\frac{4\cdot5\cdot6}{6}-16=4$-хмерное. Отсюда видно, что теорема Клебша верна для **общей кубики.**

ТЕОРЕМА: **(Кэли — Сальмон, 1849)** На гладкой кубической поверхности над $\mathbb{C}$ лежит ровно **двадцать семь прямых.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Они получаются из раздутия следующим образом: 6 прямых добавляется при раздутии, $15=\binom{6}{2}$ прямых соединяют раздутые точки, и еще 6 прямых возникают из коник, проходящих через пять раздутых точек.