Алгебраические свойства координатных колец аффинных кривых

20 ноября 2023 года

Что мы считаем известным

k-алгебра	аффинная схема над k
идеал	аффинная подсхема
максимальный идеал	точка аффинной схемы
локальная k-алгебра	росток аффинной схемы
локализация в идеале	формальная окрестность подсхемы
область целостности	неприводимое аффинное многообразие

Конечные расширения алгебр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — две алгебры. B называется **конечной над A,** если она имеет **конечный базис** $b_1, \dots b_k$ **как A-модуль**.

Конечные расширения алгебр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — две алгебры. B называется **конечной над A,** если она имеет **конечный базис** $b_1, \dots b_k$ **как A-модуль**.

ПРИМЕР: Если k — алгебраически замкнутое поле, то конечная k-алгебра есть **прямая сумма** $\bigoplus k[t]/(t^{n_i})$. В частности, если это алгебра **без нильпотентов**, то это **прямая сумма** $k^{\oplus n}$. Спектр такой алгебры — **конечное количество n точек**.

Конечные расширения и целые элементы

Пусть элемент $b \in B$ **мультипликативно** порождает B. Тогда элементы базиса b_i могут быть выражены как **многочлены от b с коэффициентами в A.**

Конечные расширения и целые элементы

Пусть элемент $b \in B$ **мультипликативно** порождает B. Тогда элементы базиса b_i могут быть выражены как **многочлены от b с коэффициентами в A:**

$$b_1 = a_{0,1} + a_{1,1}b + a_{2,1}b^2 + ... + a_{n,1}b^n,$$
$$b_2 = a_{0,2} + a_{1,2}b + a_{2,2}b^2 + ... + a_{n,2}b^n,$$
$$\cdots$$
$$b_k = a_{0,k} + a_{1,k}b + a_{2,k}b^2 + ... + a_{n,k}b^n. \quad (2)$$

Конечные расширения и целые элементы

Пусть элемент $b \in B$ **мультипликативно** порождает B. Тогда элементы базиса b_i могут быть выражены как **многочлены от b с коэффициентами в A:**

$$\begin{multline} b_1 = a_{0,1} + a_{1,1}b + a_{2,1}b^2 + ... + a_{n,1}b^n, \\ b_2 = a_{0,2} + a_{1,2}b + a_{2,2}b^2 + ... + a_{n,2}b^n, \\ \dots \\ b_k = a_{0,k} + a_{1,k}b + a_{2,k}b^2 + ... + a_{n,k}b^n. \quad (3) \end{multline}$$

Поскольку b^{n+1} разлагается по базису, **имеем право переписать:**

$$b^{n+1} = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n. \qquad (*)$$

Конечные расширения и целые элементы

Пусть элемент $b \in B$ **мультипликативно** порождает B. Тогда элементы базиса b_i могут быть выражены как **многочлены от b с коэффициентами в A:**

$$\begin{gathered}
b_1 = a_{0,1} + a_{1,1}b + a_{2,1}b^2 + ... + a_{n,1}b^n, \\
b_2 = a_{0,2} + a_{1,2}b + a_{2,2}b^2 + ... + a_{n,2}b^n, \\
\dots \\
b_k = a_{0,k} + a_{1,k}b + a_{2,k}b^2 + ... + a_{n,k}b^n. \quad (4)
\end{gathered}$$

Поскольку b^{n+1} разлагается по базису, **имеем право переписать:**

$$b^{n+1} = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n. \qquad (*)$$

Это мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — k-алгебры. Элемент b называется **целым над A**, если он является **корнем уравнения вида $(*)$.**

Конечные расширения и целые элементы

Пусть элемент $b \in B$ **мультипликативно** порождает B. Тогда элементы базиса b_i могут быть выражены как **многочлены от b с коэффициентами в A:**

$$
\begin{gathered}
b_1 = a_{0,1} + a_{1,1}b + a_{2,1}b^2 + ... + a_{n,1}b^n, \\
b_2 = a_{0,2} + a_{1,2}b + a_{2,2}b^2 + ... + a_{n,2}b^n, \\
\cdots \\
b_k = a_{0,k} + a_{1,k}b + a_{2,k}b^2 + ... + a_{n,k}b^n. \quad (5)
\end{gathered}
$$

Поскольку b^{n+1} разлагается по базису, **имеем право переписать:**

$$b^{n+1} = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n. \qquad (*)$$

Это мотивирует следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — k-алгебры. Элемент b называется **целым над A**, если он является **корнем уравнения вида $(*)$.**

СЛЕДСТВИЕ: Пусть B — A-алгебра, **порожденная целым элементом.** Тогда отображение $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ **имеет конечные слои.**

Целое замыкание

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Сумма и произведение целых элементов — целые элементы.

Целое замыкание

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Сумма и произведение целых элементов — целые элементы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра без делителей нуля. Ее **целым замыканием** $\bar{A}$ называется **подкольцо во** $\mathrm{Frac}(A)$**,** состоящее из **элементов, целых над** A**.** Если $A = \bar{A}$, она называется **целозамкнутой**.

Целое замыкание

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Сумма и произведение целых элементов — целые элементы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра без делителей нуля. Ее **целым замыканием** $\bar{A}$ называется **подкольцо во** $\operatorname{Frac}(A)$**,** состоящее из **элементов, целых над A.** Если $A = \bar{A}$, она называется **целозамкнутой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, $\operatorname{Frac}(\bar{A}) = \operatorname{Frac}(A)$**.** Стало быть, отображение $\operatorname{Spec}\bar{A} \to \operatorname{Spec}A$ **бирационально.** Его слои состоят из **конечного числа точек.**

Целое замыкание

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Сумма и произведение целых элементов — целые элементы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть A — k-алгебра без делителей нуля. Ее **целым замыканием** $\bar{A}$ называется **подкольцо во** $\operatorname{Frac}(A)$**,** состоящее из **элементов, целых над** A**.** Если $A = \bar{A}$, она называется **целозамкнутой**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Очевидно, $\operatorname{Frac}(\bar{A}) = \operatorname{Frac}(A)$**.** Стало быть, отображение $\operatorname{Spec}\bar{A} \to \operatorname{Spec}A$ **бирационально.** Его слои состоят из **конечного числа точек.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Аффинное многообразие называется **нормальным,** если его **координатное кольцо целозамкнуто.** Эквивалентно, всякое **бирациональное** отображение на него **с конечными слоями** — **изоморфизм.**

Нецелозамкнутость и особые точки кривых

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x,y]/(y^2 = x^3 + x^2)$. Тогда элемент $t = y/x \in \operatorname{Frac}(A)$ **цел над** A**:** $t^2 = x + 1$. В A он не лежит, стало быть, A **не целозамкнута.** Расширение $A[t] \subset \operatorname{Frac}(A)$ целозамкнуто: $x = t^2 - 1$, $y = tx = t^3 - t$, так что $A[t] = k[t]$. Отображение $\operatorname{Spec} \bar{A} \to \operatorname{Spec} A$ — **рациональная параметризация** нодальной кубической кривой. **Ее слои конечны,** слой над нулем имеет вид $\operatorname{Spec} k[t]/(x,y) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2 - 1, t^3 - t) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2 - 1) = \operatorname{Spec}(k \oplus k)$.

Нецелозамкнутость и особые точки кривых

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x,y]/(y^2 = x^3 + x^2)$. Тогда элемент $t = y/x \in \operatorname{Frac}(A)$ **цел над A:** $t^2 = x + 1$. В A он не лежит, стало быть, A **не целозамкнута.** Расширение $A[t] \subset \operatorname{Frac}(A)$ целозамкнуто: $x = t^2 - 1$, $y = tx = t^3 - t$, так что $A[t] = k[t]$. Отображение $\operatorname{Spec} \bar{A} \to \operatorname{Spec} A$ — **рациональная параметризация** нодальной кубической кривой. **Ее слои конечны,** слой над нулем имеет вид $\operatorname{Spec} k[t]/(x,y) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2 - 1, t^3 - t) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2 - 1) = \operatorname{Spec}(k \oplus k)$.

ПРИМЕР: Пусть $A' = k[x,y]/(y^2 = x^3)$. Тогда элемент $t = y/x \in \operatorname{Frac}(A')$ **цел над A':** $t^2 = x$. Расширение $A'[t] \subset \operatorname{Frac}(A')$ **целозамкнуто:** $x = t^2$, $y = t^3$, $A'[t] = k[t]$. Отображение $\operatorname{Spec} \bar{A} \to \operatorname{Spec} A$ имеет конечные слои. Во всех них **одна точка**, однако слой над нулем — **не точка, а подсхема** $\operatorname{Spec} k[t]/(x,y) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2, t^3) = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$.

Стягивание подсхем на аффинных кривых

Переход к целому замыканию для координатного кольца кривой — это разведение ветвей в ее особых точках. Любопытно, что можно сделать и **обратную** конструкцию: **стянуть** подсхему аффинной кривой.

Стягивание подсхем на аффинных кривых

Переход к целому замыканию для координатного кольца кривой — это разведение ветвей в ее особых точках. Любопытно, что можно сделать и **обратную** конструкцию: **стянуть** подсхему аффинной кривой.

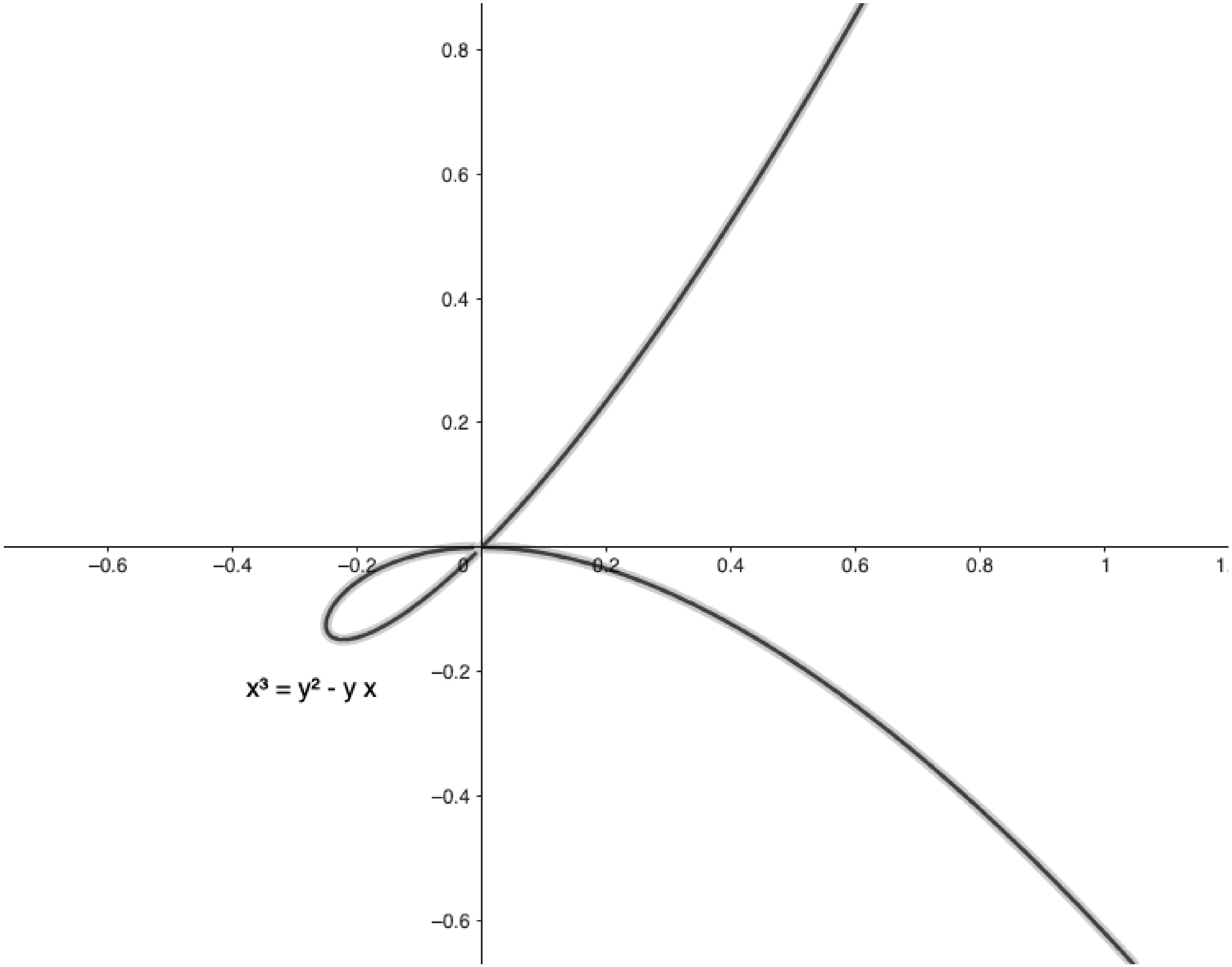
ПРИМЕР: Пусть $A = \{a \in k[t] \colon a(0) = a(1)\}$. В малых степенях это подкольцо имеет базис: 1, $x = t^2 - t$, $y = t^3 - t^2 \ldots$ Имеем: $x^3 = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - t^3$, $y^2 = t^6 - 2t^5 + t^4$, $xy = t^5 - 2t^4 + t^3$, откуда $x^3 = y^2 - xy$. Это уравнение **нодальной кубики** с координатным кольцом A, то есть аффинной прямой со **склеенными точками 0 и 1.** Любопытно, что **все соотношения** в кольце A, таким образом, следуют из одного соотношения $x^3 = y^2 - xy$.

Стягивание подсхем на аффинных кривых

Переход к целому замыканию для координатного кольца кривой — это разведение ветвей в ее особых точках. Любопытно, что можно сделать и **обратную** конструкцию: **стянуть** подсхему аффинной кривой.

ПРИМЕР: Пусть $A = \{a \in k[t] \colon a(0) = a(1)\}$. В малых степенях это подкольцо имеет базис: 1, $x = t^2 - t$, $y = t^3 - t^2$... Имеем: $x^3 = t^6 - 3t^5 + 3t^4 - t^3$, $y^2 = t^6 - 2t^5 + t^4$, $xy = t^5 - 2t^4 + t^3$, откуда $x^3 = y^2 - xy$. Это уравнение **нодальной кубики** с координатным кольцом A, то есть аффинной прямой со **склеенными точками 0 и 1.** Любопытно, что **все соотношения** в кольце A, таким образом, следуют из одного соотношения $x^3 = y^2 - xy$.

ПРИМЕР: Пусть $A' = \{a \in k[t] \colon a'(0) = 0\}$. Из **правила Лейбница** следует, что A' **– подкольцо.** Его базис: 1, $x = t^2$, $y = t^3$... Имеем соотношение $y^2 = x^3$. Итак, **каспидальная кубика** получается из аффинной прямой **стягиванием подсхемы** $\operatorname{Spec} k[t]/(t^2)$**.**


0.8
0.6
0.4
0.2
−0.6
−0.4
−0.2
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
−0.2
−0.4
−0.6
x³ = y² - y x

Геометрический смысл введения новой переменной

Замена $t = y/x$ может быть представлена как отображение

$$A^2 = \operatorname{Spec} k[x,t] \to \operatorname{Spec} k[x,y] = A^2,$$

$y(x,t) = tx$. Оно реализует **нодальную кубику** $y^2 = x^3 + x^2$ как **образ параболы $x = t^2 - 1$,** а **каспидальную кубику** $y^2 = x^3$ как **образ параболы $x = t^2$.**

Геометрический смысл введения новой переменной

Замена $t = y/x$ может быть представлена как отображение

$$A^2 = \operatorname{Spec} k[x,t] \to \operatorname{Spec} k[x,y] = A^2,$$

$y(x,t) = tx$. Оно реализует **нодальную кубику** $y^2 = x^3 + x^2$ как **образ параболы $x = t^2 - 1$,** а **каспидальную кубику** $y^2 = x^3$ как **образ параболы $x = t^2$.**

Еще нагляднее представлять эту замену **в пространстве:** добавляя новую переменную, мы переходим к поверхности $y = tx$ в $A^3 = \operatorname{Spec} k[x,y,t]$. Проекция $(x,y,t) \mapsto (x,y)$ **стягивает** все точки координатной оси Ot в нуль, а все точки вне нее **отображает взаимно-однозначно.**

Геометрический смысл введения новой переменной

Замена $t = y/x$ может быть представлена как отображение

$$A^2 = \operatorname{Spec} k[x,t] \to \operatorname{Spec} k[x,y] = A^2,$$

$y(x,t) = tx$. Оно реализует **нодальную кубику** $y^2 = x^3 + x^2$ как **образ параболы $x = t^2 - 1$,** а **каспидальную кубику** $y^2 = x^3$ как **образ параболы $x = t^2$.**

Еще нагляднее представлять эту замену **в пространстве:** добавляя новую переменную, мы переходим к поверхности $y = tx$ в $A^3 = \operatorname{Spec} k[x,y,t]$. Проекция $(x,y,t) \mapsto (x,y)$ **стягивает** все точки координатной оси Ot в нуль, а все точки вне нее **отображает взаимно-однозначно.** Таким образом, подъем кривых $y^2 = x^3 + x^2$ и $y^2 = x^3$ в их гладких точках определен однозначно. В **замыкании** этого подъема в первом случае добавятся **две точки $t = \pm 1$,** а во втором – **одна точка $t = 0$,** в которой пополненная кривая касается оси Ot.

Геометрический смысл введения новой переменной

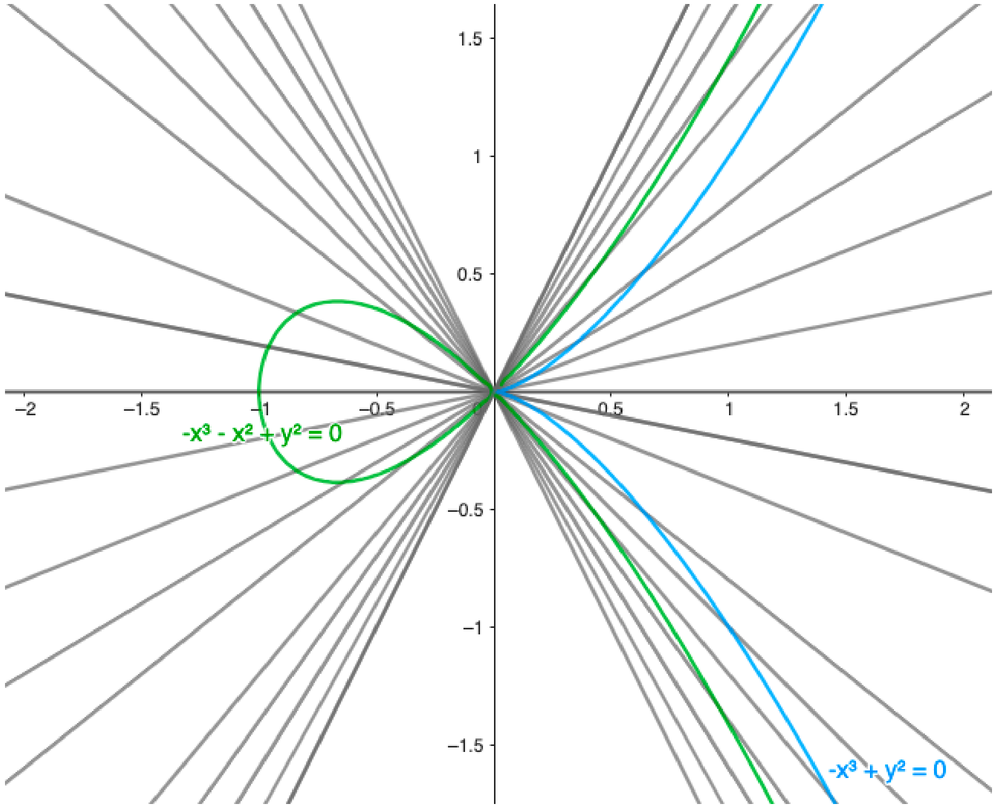
Замена $t = y/x$ может быть представлена как отображение

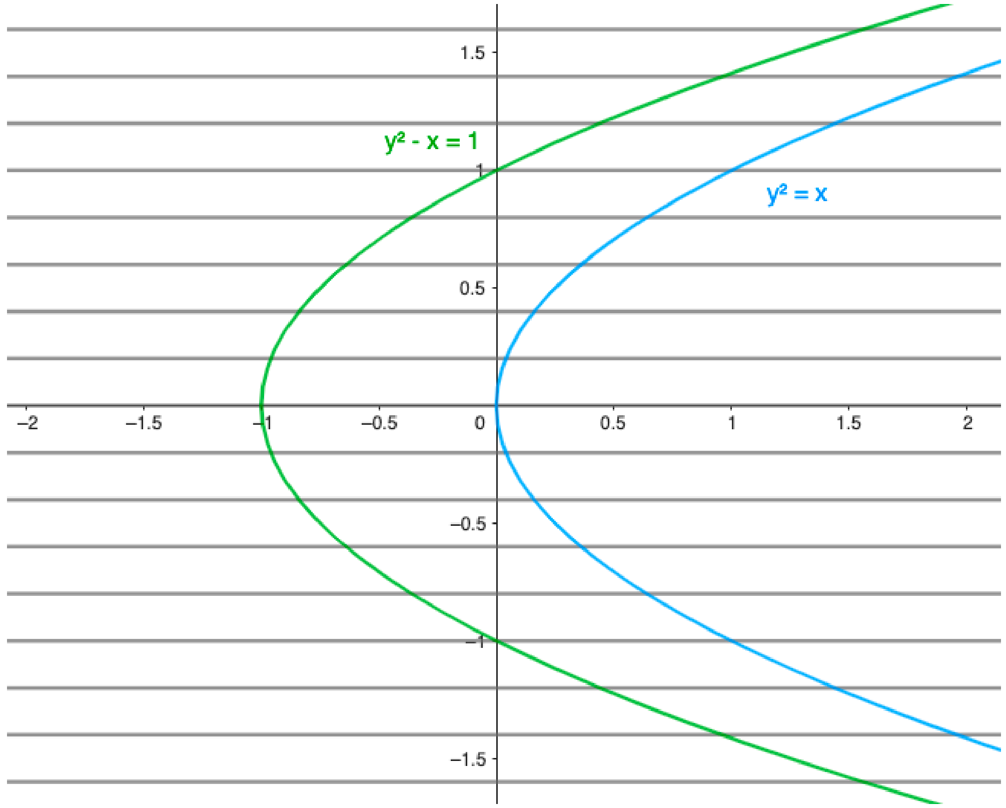
$$A^2 = \mathrm{Spec}\, k[x,t] \to \mathrm{Spec}\, k[x,y] = A^2,$$

$y(x,t) = tx$. Оно реализует **нодальную кубику** $y^2 = x^3 + x^2$ как **образ параболы** $x = t^2 - 1$**,** а **каспидальную кубику** $y^2 = x^3$ как **образ параболы** $x = t^2$**.**

Еще нагляднее представлять эту замену **в пространстве:** добавляя новую переменную, мы переходим к поверхности $y = tx$ в $A^3 = \mathrm{Spec}\, k[x,y,t]$. Проекция $(x,y,t) \mapsto (x,y)$ **стягивает** все точки координатной оси Ot в нуль, а все точки вне нее **отображает взаимно-однозначно.** Таким образом, подъем кривых $y^2 = x^3 + x^2$ и $y^2 = x^3$ в их гладких точках определен однозначно. В **замыкании** этого подъема в первом случае добавятся **две точки** $t = \pm 1$**,** а во втором – **одна точка** $t = 0$**,** в которой пополненная кривая касается оси Ot. Это — алгебраическая версия **правила Лопиталя.** Такое геометрическое преобразование, когда вместо одной точки вклеивается целая прямая — простейший пример **раздутия.**

До и после раздутия





Серые линии — кривые $y/x = \text{const}$, что равносильно $t = \text{const}$.

Не все нормальные многообразия гладки

Итак, целозамкнутость координатного кольца **связана** с гладкостью. Более того, верна

ТЕОРЕМА: Нормальные кривые гладки. ■

Не все нормальные многообразия гладки

Итак, целозамкнутость координатного кольца **связана** с гладкостью. Более того, верна

ТЕОРЕМА: Нормальные кривые гладки. ■

В общем случае, однако, она запрещает только самые простые особенности — а именно те, что можно устранить **конечным бирациональным морфизмом** (грубо говоря, те особенности, в которых можно **«развести» разные ветви** многообразия).

Не все нормальные многообразия гладки

Итак, целозамкнутость координатного кольца **связана** с гладкостью. Более того, верна

ТЕОРЕМА: **Нормальные кривые гладки.** ■

В общем случае, однако, она запрещает только самые простые особенности — а именно те, что можно устранить **конечным бирациональным морфизмом** (грубо говоря, те особенности, в которых можно **«развести» разные ветви** многообразия).

ПРИМЕР: Рассмотрим **конус** $z^2 = xy$ в $A^3 = \operatorname{Spec} k[x, y, z]$. Его координатное кольцо **целозамкнуто.**

Не все нормальные многообразия гладки

Итак, целозамкнутость координатного кольца **связана** с гладкостью. Более того, верна

ТЕОРЕМА: Нормальные кривые гладки. ■

В общем случае, однако, она запрещает только самые простые особенности — а именно те, что можно устранить **конечным бирациональным морфизмом** (грубо говоря, те особенности, в которых можно **«развести» разные ветви** многообразия).

ПРИМЕР: Рассмотрим **конус** $z^2 = xy$ в $A^3 = \operatorname{Spec} k[x, y, z]$. Его координатное кольцо **целозамкнуто.**

Мы могли бы попытаться устранить особенность раздутием, добавив новые переменные $u = z/x$, $v = z/y$, и рассмотрев в пятимерном пространстве $A^5 = \operatorname{Spec} k[x, y, z, u, v]$ трехмерное подмногообразие, заданное уравнениями $z = ux = vy$.

Не все нормальные многообразия гладки

Итак, целозамкнутость координатного кольца **связана** с гладкостью. Более того, верна

ТЕОРЕМА: Нормальные кривые гладки. ■

В общем случае, однако, она запрещает только самые простые особенности — а именно те, что можно устранить **конечным бирациональным морфизмом** (грубо говоря, те особенности, в которых можно **«развести» разные ветви** многообразия).

ПРИМЕР: Рассмотрим **конус** $z^2 = xy$ в $A^3 = \operatorname{Spec} k[x, y, z]$. Его координатное кольцо **целозамкнуто.**

Мы могли бы попытаться устранить особенность раздутием, добавив новые переменные $u = z/x$, $v = z/y$, и рассмотрев в пятимерном пространстве $A^5 = \operatorname{Spec} k[x, y, z, u, v]$ трехмерное подмногообразие, заданное уравнениями $z = ux = vy$. Однако уравнение конуса в таких координатах можно будет **переписать как** $uxvy = xy$**,** что вне прообраза нуля сведется **к** $uv = 1$**.** Таким образом, в замыкании подъема гладких точек конуса будет лежать **целая гипербола**, и соответствующее расширение координатного кольца конуса не будет конечным.

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал** **максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Первое из определений по смыслу (для случая k-алгебр) равнозначно «координатному кольцу **неприводимой гладкой аффинной кривой** над полем k». Вообще говоря, все они **эквивалентны.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал** **максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Первое из определений по смыслу (для случая k-алгебр) равнозначно «координатному кольцу **неприводимой гладкой аффинной кривой** над полем k». Вообще говоря, все они **эквивалентны.**

ЗАМЕЧАНИЕ: **Кольца дискретного нормирования суть кольца главных идеалов,** однако дедекиндовы кольца, вообще говоря, **таковыми не являются.** Иначе говоря, дедкиндовость — **глобализация** свойства кольца главных идеалов.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J) - (a)$. $x \in \mathrm{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J) - (a)$**.**

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J) - (a)$. $x \in \mathrm{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J) - (a)$**.** Обратно, со всяким **дивизором** D **можно связать дробный идеал:** через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J) - (a)$. $x \in \mathrm{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J) - (a)$**.** Обратно, со всяким **дивизором** D **можно связать дробный идеал:** через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для особой кривой это **неверно:** так, на кривой $y^2 = x^3$ дивизор $-(0;0)$ **не приходит** ни из какого дробного идеала.

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обратимость дробного идеала — **локальное свойство.** Дробные идеалы **колец дискретного нормирования** (как и любых колец главных идеалов) **обратимы.** Все **локальные кольца дедекиндова кольца — кольца дискретного нормирования.** ■

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обратимость дробного идеала — **локальное свойство.** Дробные идеалы **колец дискретного нормирования** (как и любых колец главных идеалов) **обратимы.** Все **локальные кольца дедекиндова кольца — кольца дискретного нормирования.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Это свойство — **еще одно определение** дедекиндова кольца.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Cl}(A)$ — тривиальная группа, **и наоборот.** Таким образом, группа классов **контролирует неоднозначность разложения** на множители.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Cl}(A)$ — тривиальная группа, **и наоборот.** Таким образом, группа классов **контролирует неоднозначность разложения** на множители.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку на кривых **главным дробным идеалам соответствуют главные дивизоры,** группа классов идеалов координатного кольца изоморфна **группе классов дивизоров** соответствующей кривой.

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух).

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p+q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\mathrm{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**.**

Вещественная окружность

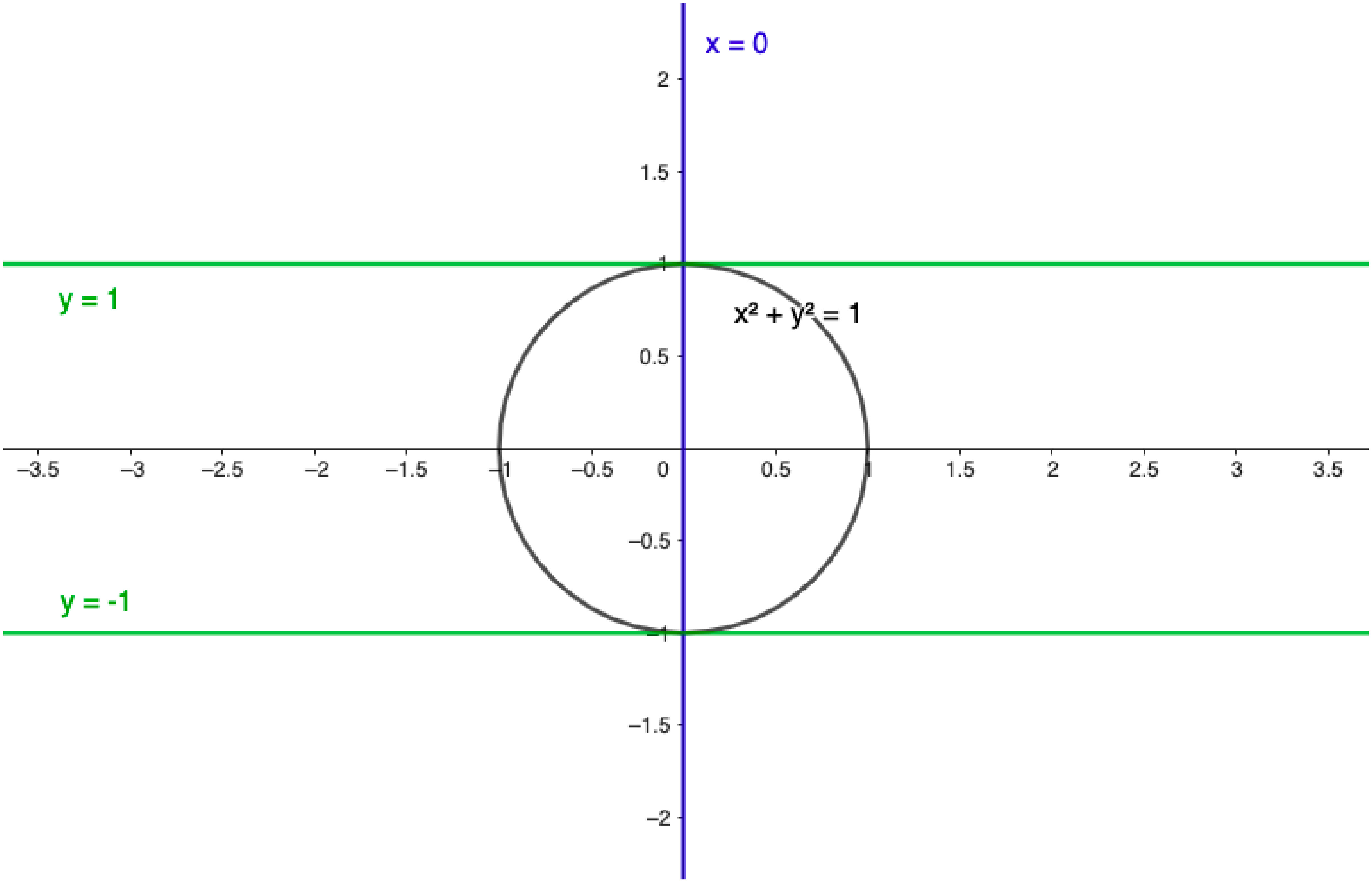
ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p+q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\operatorname{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**.**

ПРИМЕР: Функция x имеет два нуля на окружности: $(0;\pm 1)$. Если бы кольцо A было **кольцом главных идеалов,** x **раскладывалась бы** в произведение двух функций, каждая из которых имеет один нуль.

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p + q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\mathrm{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР: Функция x имеет два нуля на окружности: $(0; \pm 1)$. Если бы кольцо A было **кольцом главных идеалов,** x **раскладывалась бы** в произведение двух функций, каждая из которых имеет один нуль. Этого не происходит; однако x^2 **раскладывается в два сомножителя,** имеющих эти нули с кратностью два: $x^2 = (1 - y)(1 + y)$. Это пример **неоднозначного разложения на множители.**



Квадрат синей функции раскладывается в произведение двух зеленых, но она сама — простой элемент.

Комплексная окружность

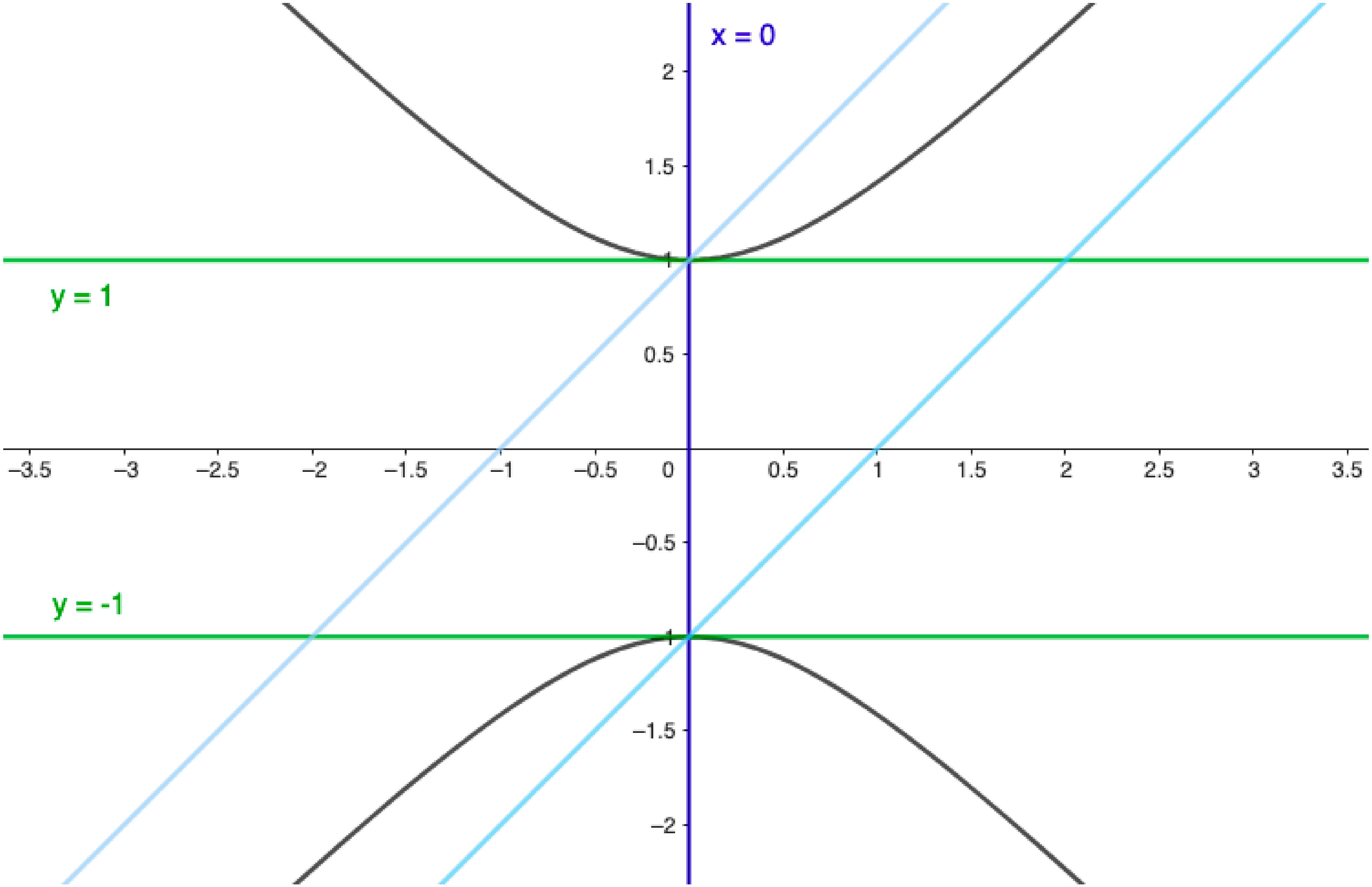
ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x+iy-i=0$ и $x-iy-i=0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0;\pm 1)$.

Комплексная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x+iy-i=0$ и $x-iy-i=0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0;\pm 1)$. Если их перемножить, получится $(x-i)^2-(iy)^2 = x^2-2ix-1+y^2 = -2ix$ — что отличается от x на обратимый элемент $2i$.

Комплексная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x+iy-i = 0$ и $x-iy-i = 0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0;\pm 1)$. Если их перемножить, получится $(x-i)^2-(iy)^2 = x^2-2ix-1+y^2 = -2ix$ — что отличается от x на обратимый элемент $2i$. Если же каждую из этих функций возвести в квадрат, получится $(x+iy-i)^2 = x^2+2ix(y-1)-(y-1)^2 = x^2+2ix(y-1)-y^2+2y-1 = 2ix(y-1)-2y(y-1) = 2i(x+iy)(y-1)$. Функция $x+iy$ в нашем кольце также обратима: в самом деле, $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = 1$. Таким образом, **при комплексификации окружности неоднозначность разложения на множители исчезает.**



Каждая из зеленых функций теперь — квадрат голубой, а синяя — произведение голубых.

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Используя **теорему Безу,** можно заключить, что такая кривая, если она имеет степень d, должна иметь на бесконечности **особую точку кратности d или $d-1$,** причем **определенную над тем же полем,** что сама кривая.

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Используя **теорему Безу,** можно заключить, что такая кривая, если она имеет степень d, должна иметь на бесконечности **особую точку кратности d или $d-1$,** причем **определенную над тем же полем,** что сама кривая.

В частности, проекция из такой точки определяет **рациональную параметризацию** кривой.