# Пространства Римана–Зариского

**18 декабря 2023 года**

## Нормирования и валюации

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $K$ — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Если верна более сильная аксиома (3') $|x + y| \leqslant \max(|x|, |y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

## Нормирования и валюации

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $K$ — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Если верна более сильная аксиома (3') $|x+y| \leqslant \max(|x|,|y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\Gamma$ — упорядоченная абелева группа. Отображение $\nu\colon K \to \Gamma\cup\{\infty\}$ называется **валюацией,** если (1) $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$; (2) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$; (3) $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $\Gamma \subset \mathbb{R}$, а $\nu$ — валюация, то $|x|_\nu = e^{-\nu(x)}$ — неархимедово нормирование.

## Нормирования и валюации

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $K$ — поле. **Нормированием** называется отображение $|\cdot|\colon K \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ такое, что (1) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; (2) $|xy| = |x||y|$; (3) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Если верна более сильная аксиома (3') $|x+y| \leqslant \max(|x|,|y|)$, нормирование называется **неархимедовым.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $\Gamma$ — упорядоченная абелева группа. Отображение $\nu\colon K \to \Gamma \cup \{\infty\}$ называется **валюацией,** если (1) $\nu(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$; (2) $\nu(xy) = \nu(x) + \nu(y)$; (3) $\nu(x+y) \geqslant \min(\nu(x), \nu(y))$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Если $\Gamma \subset \mathbb{R}$, а $\nu$ — валюация, то $|x|_\nu = e^{-\nu(x)}$ — неархимедово нормирование.

**ПРИМЕР:** Если $X$ — аффинная кривая, всякая точка $x \in X$ определяет валюацию на поле функций $k(X)$: $\nu_x(f)$ есть порядок полюса $f$ в $x$.

**ПРИМЕР:** Если $p$ — простое число, **$p$-адическая валюация** на $\mathbb{Q}$ определяется как $\nu(n/p^k m) = k$, где $m, n$ не делятся на $p$.

## Места

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Нормирование определяет метрику $d(x,y) = |x-y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

## Места

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Нормирование определяет метрику $d(x, y) = |x - y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

**ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916)** Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и $p$-адические нормирования. ■

## Места

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Нормирование определяет метрику $d(x,y) = |x-y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

**ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916)** Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и $p$-адические нормирования. ■

**ТЕОРЕМА:** Нетривиальные места поля $\mathbb{F}_p(t)$ это deg и $\pi$-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in \mathbb{F}_p[t]$.

**ТЕОРЕМА:** Нетривиальные места поля $k(t)$, **тривиальные на $k$**, это deg и $\pi$-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in k[t]$.

## Места

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Нормирование определяет метрику $d(x, y) = |x - y|$, а потому и топологию. Если она дискретна, нормирование называется **тривиальным.** Нормирования, определяющие одинаковую топологию, называются **эквивалентными.** Классы эквивалентности нормирований называются **местами.**

**ТЕОРЕМА: (А. М. Островский, 1916)** Нетривиальные места поля $\mathbb{Q}$ это стандартный модуль и $p$-адические нормирования. ■

**ТЕОРЕМА:** Нетривиальные места поля $\mathbb{F}_p(t)$ это deg и $\pi$-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in \mathbb{F}_p[t]$.

**ТЕОРЕМА:** Нетривиальные места поля $k(t)$, **тривиальные на $k$**, это deg и $\pi$-адические нормирования для всех неприводимых многочленов $\pi \in k[t]$.

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Таким образом, множество мест данного поля весьма похоже на спектр его кольца целых.

## Пространства Римана–Зариского

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** $K$ над $k$ называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюации в $K$, содержащих $k$. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

## Пространства Римана–Зариского

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** $K$ над $k$ называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюоации в $K$, содержащих $k$. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

**ПРИМЕР:** Пусть $C$ — алгебраическая кривая над $k$, и $k(C)$ — ее поле функций. Пространство Римана–Зариского $K/k$ состоит из тривиального нормирования, и из $p$-адических нормирований для точек $p \in C$. Оно изоморфно **гладкой проективной модели** кривой $C$ с топологией Зариского, **тривиальное** нормирование при этом соответствует **общей точке.**

## Пространства Римана–Зариского

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ:** Пусть $k \subset K$ — расширение полей. **Пространством Римана–Зариского** $K$ над $k$ называется множество подколец (не обязательно дискретной) валюации в $K$, содержащих $k$. **Базой топологии** на нем служат множества колец, содержащих фиксированное подмножество $S \subset K$.

**ПРИМЕР:** Пусть $C$ — алгебраическая кривая над $k$, и $k(C)$ — ее поле функций. Пространство Римана–Зариского $K/k$ состоит из тривиального нормирования, и из $p$-адических нормирований для точек $p \in C$. Оно изоморфно **гладкой проективной модели** кривой $C$ с топологией Зариского, **тривиальное** нормирование при этом соответствует **общей точке.**

**ЗАМЕЧАНИЕ:** Уже для полей функций поверхностей пространство Римана–Зариского не изоморфно никакой схеме. Однако в некотором смысле оно неособо, и может служить более **слабой версией разрешения особенностей.**

## Что бывает на поверхностях

**ПРИМЕР:** Пусть $C = \{f(x,y) = 0\}$ — неприводимая плоская кривая. Если $\varphi \in k(x,y)$ — рациональная функция, то она имеет вид $g/f^n h$, где $g$ и $h$ взаимно просты с $f$. Тогда $\nu(g/f^n h) = n$ — дискретная валюация.

## Что бывает на поверхностях

**ПРИМЕР:** Пусть $C = \{f(x,y) = 0\}$ — неприводимая плоская кривая. Если $\varphi \in k(x,y)$ — рациональная функция, то она имеет вид $g/f^n h$, где $g$ и $h$ взаимно просты с $f$. Тогда $\nu(g/f^n h) = n$ — дискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $x \in C$ — точка на кривой. Функция $g/h$ непостоянна на $C$, так что имеет в $x$ ноль или полюс порядка $m$. Тогда $\nu_{C,x}(f^n g/h) = (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ — недискретная валюация.

## Что бывает на поверхностях

**ПРИМЕР:** Пусть $C = \{f(x,y) = 0\}$ — неприводимая плоская кривая. Если $\varphi \in k(x,y)$ — рациональная функция, то она имеет вид $g/f^n h$, где $g$ и $h$ взаимно просты с $f$. Тогда $\nu(g/f^n h) = n$ — дискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $x \in C$ — точка на кривой. Функция $g/h$ непостоянна на $C$, так что имеет в $x$ ноль или полюс порядка $m$. Тогда $\nu_{C,x}(g/f^n h) = (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ — недискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $k = \mathbb{C}$, $C'$ — **неалгебраическая** кривая, $x \in C'$ — гладкая точка. Ограничение $\varphi|_{C'}$ в локальной координате имеет вид $z^n g(z)$, $g(0) \neq 0$, $x = z(0)$. Тогда $\nu_{C',x}(\varphi) = n$ — дискретная валюация.

## Что бывает на поверхностях

**ПРИМЕР:** Пусть $C = \{f(x,y) = 0\}$ — неприводимая плоская кривая. Если $\varphi \in k(x,y)$ — рациональная функция, то она имеет вид $g/f^n h$, где $g$ и $h$ взаимно просты с $f$. Тогда $\nu(g/f^n h) = n$ — дискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $x \in C$ — точка на кривой. Функция $g/h$ непостоянна на $C$, так что имеет в $x$ ноль или полюс порядка $m$. Тогда $\nu_{C,x}(g/f^n h) = (n,m) \in \mathbb{Z}^2$ — недискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $k = \mathbb{C}$, $C'$ — **неалгебраическая** кривая, $x \in C'$ — гладкая точка. Ограничение $\varphi|_{C'}$ в локальной координате имеет вид $z^n g(z)$, $g(0) \neq 0$, $x = z(0)$. Тогда $\nu_{C',x}(\varphi) = n$ — дискретная валюация.

**ПРИМЕР:** Пусть $k = \mathbb{C}$, $\gamma$ иррационально, подставим $y = x^\gamma$ и рассмотрим у функции $\Phi(x) = \varphi(x, x^\gamma)$ разложение по (иррациональным) степеням $x$. Если оно начинается с $x^{n+m\gamma}$, положим $\nu(\varphi) = n + m\gamma$. Это недискретная валюация, ее группа значений плотна в $\mathbb{R}$.