Теория размерности нетеровых колец

26 января 2024 года

Примарные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал $I \subset A$ называется **примарным,** если в факторе A/I всякий делитель нуля нильпотентен.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если I примарен, то $\sqrt{I}$ прост.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Идеал I примарен тогда и только тогда, когда $xy \in I$ влечет $x \in I$, либо $y \in I$, либо $x, y \in \sqrt{I}$.

Простая версия теоремы Крулля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Высотой** простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ называется размерность Крулля локализации $A_{\mathfrak{p}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал называется **минимальный простым** над идеалом I, если он минимален по включению среди идеалов, содержащих I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над I, то $V(\mathfrak{p})$ — максимальное неприводимое подмногообразие, содержащееся в $V(I)$.

Простая версия теоремы Крулля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Высотой** простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ называется размерность Крулля локализации $A_\mathfrak{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал называется **минимальный простым** над идеалом I, если он минимален по включению среди идеалов, содержащих I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над I, то $V(\mathfrak{p})$ — максимальное неприводимое подмногообразие, содержащееся в $V(I)$.

ТЕОРЕМА: **(Крулля о главных идеалах, простая версия):** Пусть A — нетерово кольцо, $a \in A$, и $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над (a). Тогда высота $\mathfrak{p}$ **не превосходит 1.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Можно считать, что A — локальное кольцо, а $\mathfrak{p} \subset A$ — максимальный идеал. Рассмотрим цепь длины два: $\mathfrak{p} \supset I \supset \{0\}$.

Простая версия теоремы Крулля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Высотой** простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ называется размерность Крулля локализации $A_\mathfrak{p}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал называется **минимальный простым** над идеалом I, если он минимален по включению среди идеалов, содержащих I.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над I, то $V(\mathfrak{p})$ — максимальное неприводимое подмногообразие, содержащееся в $V(I)$.

ТЕОРЕМА: (Крулля о главных идеалах, простая версия): Пусть A — нетерово кольцо, $a \in A$, и $\mathfrak{p}$ — минимальный простой идеал над (a). Тогда высота $\mathfrak{p}$ **не превосходит 1.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Можно считать, что A — локальное кольцо, а $\mathfrak{p} \subset A$ — максимальный идеал. Рассмотрим цепь длины два: $\mathfrak{p} \supset I \supset \{0\}$.

Определим **символические степени** $I^{(n)} = I^n A_I \cap A$. Это убывающая цепь идеалов: $I^{(0)} = A$, $I^{(1)} = I$, $I^{(k)} \supset I^{(k+1)}$. Всякая $I^{(n)}$ есть примарный идеал с $\sqrt{I^{(n)}} = I$, и $I^n \subset I^{(n)}$ (равенство достигается не всегда, однако увидеть это на примере трудно).

Простая версия теоремы Крулля (окончание)

Кольцо $A/(a)$ — локальное кольцо **размерности нуль,** а потому **нильпотентное,** и всякая **убывающая** цепочка идеалов в нем стабилизируется. Пусть $u \in I^{(n)}$, тогда $u = v + ab$, $v \in I^{(n+1)}$, и $ab \in I^{(n)}$. Но $a \notin I$, так что $b \in I^{(n)}$. Значит, $I^{(n)} \subset I^{(n+1)} + aI^{(n)}$ и потому $I^{(n)} = I^{(n+1)} + aI^{(n)}$. Тем самым $a\left(I^{(n)}/I^{(n+1)}\right) = I^{(n)}/I^{(n+1)}$, и **по лемме Накаямы** $I^{(n)} = I^{(n+1)}$. Значит, цепочка символических степеней $I^{(n)}$ стабилизируется не только в $A/(a)$, но и в A.

Простая версия теоремы Крулля (окончание)

Кольцо $A/(a)$ — локальное кольцо **размерности нуль,** а потому **нильпотентное,** и всякая **убывающая** цепочка идеалов в нем стабилизируется. Пусть $u \in I^{(n)}$, тогда $u = v + ab$, $v \in I^{(n+1)}$, и $ab \in I^{(n)}$. Но $a \notin I$, так что $b \in I^{(n)}$. Значит, $I^{(n)} \subset I^{(n+1)} + aI^{(n)}$ и потому $I^{(n)} = I^{(n+1)} + aI^{(n)}$. Тем самым $a\left(I^{(n)}/I^{(n+1)}\right) = I^{(n)}/I^{(n+1)}$, и **по лемме Накаямы** $I^{(n)} = I^{(n+1)}$. Значит, цепочка символических степеней $I^{(n)}$ стабилизируется не только в $A/(a)$, но и в A.

Пусть $x \in I$. Тогда $x^n \in I^n \subset I^{(n)} \subset I^n A_I$ и потому лежит в пересечении их всех. Но A_I — локальное нетерово кольцо, и **по теореме Крулля о пересечении** $\cap_k I^k A_I = 0$. Значит $x^n = 0$, и $x = 0$ в силу простоты I, а потому $I = \{0\}$. Противоречие! ■

Теорема Крулля о высоте

ТЕОРЕМА: (Крулля о высоте) Пусть A — нетерово кольцо, идеал $I\subset A$ порожден n элементами, и $\mathfrak{p}$ — минимальный простой над I. Тогда высота $\mathfrak{p}$ **не превосходит n.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: **База** индукции $n=1$ известна. Будем доказывать **шаг.** Пусть $I=(a_1,\dots,a_k)$, и имеется цепочка $\mathfrak{p}=I_{k+1}\supset I_k\supset\dots\supset I_1\supset\{0\}$. Пусть $a_1\in I_{i+1}\setminus I_i$.

Теорема Крулля о высоте

ТЕОРЕМА: (Крулля о высоте) Пусть A — нетерово кольцо, идеал $I\subset A$ порожден n элементами, и $\mathfrak{p}$ — минимальный простой над I. Тогда высота $\mathfrak{p}$ **не превосходит n.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: База индукции $n=1$ известна. Будем доказывать **шаг.** Пусть $I=(a_1,\dots,a_k)$, и имеется цепочка $\mathfrak{p}=I_{k+1}\supset I_k\supset\dots\supset I_1\supset\{0\}$. Пусть $a_1\in I_{i+1}\setminus I_i$.

Рассмотрим локальное кольцо $B=A_{I_{i+1}}/I_{i-1}A_{I_{i+1}}$, $a=[a_1]\neq 0$ лежит в его максимальном идеале. Пусть $J\subset B$ — минимальный простой над (a). **По теореме Крулля о главных идеалах,** высота J равна единице, и потому J не максимален. Положим за $I_i'\subset A$ обратный образ J. Он содержит a_1.

Продолжая таким образом заменять I_i на I_i', приходим к цепочке $\mathfrak{p}=I_{k+1}'\supset I_k'\supset\dots\supset I_1'\supset\{0\}$ **с $a_1\in I_1'$.** Для кольца A/I_1' имеем противоречие с предположением индукции. ■

Теорема Крулля о высоте

ТЕОРЕМА: (Крулля о высоте) Пусть A — нетерово кольцо, идеал $I \subset A$ порожден n элементами, и $\mathfrak{p}$ — минимальный простой над I. Тогда высота $\mathfrak{p}$ **не превосходит n.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: База индукции $n = 1$ известна. Будем доказывать **шаг.** Пусть $I = (a_1, \ldots, a_k)$, и имеется цепочка $\mathfrak{p} = I_{k+1} \supset I_k \supset \cdots \supset I_1 \supset \{0\}$. Пусть $a_1 \in I_{i+1} \setminus I_i$.

Рассмотрим локальное кольцо $B = A_{I_{i+1}}/I_{i-1}A_{I_{i+1}}$, $a = [a_1] \neq 0$ лежит в его максимальном идеале. Пусть $J \subset B$ — минимальный простой над (a). **По теореме Крулля о главных идеалах,** высота J равна единице, и потому J не максимален. Положим за $I_i' \subset A$ обратный образ J. Он содержит a_1.

Продолжая таким образом заменять I_i на I_i', приходим к цепочке $\mathfrak{p} = I_{k+1}' \supset I_k' \supset \cdots \supset I_1' \supset \{0\}$ **с $a_1 \in I_1'$.** Для кольца A/I_1' имеем противоречие с предположением индукции. ∎

СЛЕДСТВИЕ: Если A локально, для $\mathfrak{m} = I = \mathfrak{p}$ имеем утверждение из прошлого занятия. В частности, **нетерово локальное кольцо имеет конечную размерность Крулля.**