Линейные системы и рациональные поверхности

11 марта 2024 года

Базовые локусы линейных систем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Базовым локусом** линейной системы $V \subset \Gamma(L, X)$ называется множество, в котором зануляются все сечения из V.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если X — кривая, то базовый локус не представляет трудности для отображения: на кривых частично определенное отображение в P^n продолжается в пропущенные точки. На поверхностях это уже **неверно.**

ПРИМЕР: Пусть $X = \mathrm{P}^2$, $V \subset \Gamma(\mathcal{O}(1), \mathrm{P}^2)$ — двумерное подпространство. Тогда существует точка, в которой все его сечения зануляются. Можно считать, что это точка $(0:0:1)$, а $V = \langle x, y \rangle$. Тогда отображение линейной системой задается как $(x, y) \mapsto x/y$. Оно не продолжается в $(0,0)$, но становится корректно определенным, если **раздуть** эту точку. В таком случае это известное нам расслоение $\mathrm{Bl}_{(0,0)} \mathrm{P}^2 \to \mathrm{P}^1$ со слоями P^1.

Пучки кривых

ПРИМЕР: Если $\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}(V)$, то коники на ней — элементы $\mathsf{P}\,\mathsf{Sym}^2(V^*) = \mathsf{P}\,\Gamma(\mathcal{O}(2), \mathsf{P}^2)$, пятимерного проективного пространства. Выберем в нем **двумерное** подпространство, то есть **пару коник** Q_1, Q_2. Эта линейная система задает отображение $\mathsf{P}^2 \dashrightarrow \mathsf{P}^1$, $(x,y) \mapsto Q_1(x,y)/Q_2(x,y)$. Его базовый локус — четыре точки **пересечения** $Q_1 \cap Q_2$. Если их раздуть, оно становится **расслоением на коники.** У него есть четыре особых слоя (пары сторон и диагоналей четырехугольника).

ПРИМЕР: Аналогично, два сечения $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^2}(3)$ определяют **две кубики.** Если раздуть их девять точек пересечения, получится **рациональная эллиптическая поверхность.** В общей ситуации у нее двенадцать особых слоев — нодальных кубик, но для специфической конфигурации их может быть меньше, а особые слои — быть более сложными.

Инволюция Кремоны

ПРИМЕР: Рассмотрим треугольник в P^2, например координатный, и возьмем линейную систему коник, проходящих через его вершины. Это трехмерное семейство, а потому оно задает отображение $\mathsf{P}^2 \dashrightarrow \mathsf{P}^2$. В таких кониках можно выбрать базис $\langle xy, yz, zx\rangle$, а потому и отображение можно представить как $(x:y:z) \mapsto (yz:zx:xy)$, или же в неоднородных координатах $(x,y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Чтобы оно стало регулярным, надо раздуть вершины треугольника, после этого отображение стянет его стороны.

Инволюция Кремоны

ПРИМЕР: Рассмотрим треугольник в P^2, например координатный, и возьмем линейную систему коник, проходящих через его вершины. Это трехмерное семейство, а потому оно задает отображение $\mathrm{P}^2 \dashrightarrow \mathrm{P}^2$. В таких кониках можно выбрать базис $\langle xy, yz, zx\rangle$, а потому и отображение можно представить как $(x : y : z) \mapsto (yz : zx : xy)$, или же в неоднородных координатах $(x, y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Чтобы оно стало регулярным, надо раздуть вершины треугольника, после этого отображение стянет его стороны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Инволюция Кремоны меняет местами прямые и коники, описанные около треугольника. В других координатах она известна как **изогональное сопряжение.**

Инволюция Кремоны

ПРИМЕР: Рассмотрим треугольник в P^2, например координатный, и возьмем линейную систему коник, проходящих через его вершины. Это трехмерное семейство, а потому оно задает отображение $\mathrm{P}^2 \dashrightarrow \mathrm{P}^2$. В таких кониках можно выбрать базис $\langle xy, yz, zx\rangle$, а потому и отображение можно представить как $(x:y:z)\mapsto(yz:zx:xy)$, или же в неоднородных координатах $(x,y)\mapsto\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$. Чтобы оно стало регулярным, надо раздуть вершины треугольника, после этого отображение стянет его стороны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Инволюция Кремоны меняет местами прямые и коники, описанные около треугольника. В других координатах она известна как **изогональное сопряжение.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Инволюция Кремоны с вершинами в точках $(0:0:1)$, $(1:\sqrt{-1}:0)$ и $(1:-\sqrt{-1}:0)$ (общих точках всех евклидовых окружностей) называется **инверсией** плоскости. Она переводит прямые в окружности, проходящие через начало координат, и наоборот.

Инволюция Кремоны

ПРИМЕР: Рассмотрим треугольник в P^2, например координатный, и возьмем линейную систему коник, проходящих через его вершины. Это трехмерное семейство, а потому оно задает отображение $\mathrm{P}^2 \dashrightarrow \mathrm{P}^2$. В таких кониках можно выбрать базис $\langle xy, yz, zx \rangle$, а потому и отображение можно представить как $(x:y:z) \mapsto (yz:zx:xy)$, или же в неоднородных координатах $(x,y) \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$. Чтобы оно стало регулярным, надо раздуть вершины треугольника, после этого отображение стянет его стороны.

ЗАМЕЧАНИЕ: Инволюция Кремоны меняет местами прямые и коники, описанные около треугольника. В других координатах она известна как **изогональное сопряжение.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Инволюция Кремоны с вершинами в точках $(0:0:1)$, $(1:\sqrt{-1}:0)$ и $(1:-\sqrt{-1}:0)$ (общих точках всех евклидовых окружностей) называется **инверсией** плоскости. Она переводит прямые в окружности, проходящие через начало координат, и наоборот.

ТЕОРЕМА: (М. Нетер, Кастельнуово) Если k алгебраически замкнуто, **группа бирациональных автоморфизмов** P^2_k **порождена** инволюциями Кремоны.

Стереографическая проекция

Рассмотрим линейную систему V коник, проходящих через **две** точки p, q. Она четырехмерна, и определяет отображение в P^3. Чтобы оно стало регулярным, нужно раздуть их. Если ℓ — прямая через эти точки, то коники, от которых она отщипывается, образуют гиперплоскость в V, и поэтому линейное отображение такой системой **стянет** ее.

ЗАМЕЧАНИЕ: Имеем: $\dim \operatorname{Sym}^2 V = 10$. Заметим, что все суммы попарных произведений коник из V задают квартики с двумя особенностями в точках p, q, что составляет подпространство коразмерности **шесть** в $\Gamma(\mathcal{O}(4), \mathsf{P}^2)$, стало быть размерности девять. Итак, существует квадрика, на которой лежит образ вложения этой линейной системой (а потому он ей **и является**).

ЗАМЕЧАНИЕ: Стандартная **стереографическая проекция** квадрики на плоскость сначала раздувает центр проекции, а потом стягивает две прямые на квадрике, проходившие через раздутую точку. Значит, вложение такой линейной системой **обратно** стереографической проекции.

Поверхность Веронезе

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Образ вложения P^2 при помощи $\mathcal{O}(2)$ есть **поверхность Веронезе.** Это поверхность $S \subset \mathrm{P}^5$.

ЗАМЕЧАНИЕ: По лемме, через нее проходит $\dim \mathrm{Sym}^2 \Gamma(\mathcal{O}(2), \mathrm{P}^2) - \dim \Gamma(\mathcal{O}(4), \mathrm{P}^2) = \frac{6 \cdot 7}{2} - 15 = 6$ разных квадрик.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим в пространстве всех квадрик локус двойных прямых $(ax+by+cz)^2 = 0$. Это **тоже поверхность Веронезе.** Точки **хорд** поверхности Веронезе представляют **вырожденные** квадрики.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: **Многообразие секущих** поверхности Веронезе есть **детерминантальная гиперповерхность** $\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ: Любые две касательные плоскости к поверхности Веронезе пересекаются.

ТЕОРЕМА: (Ф. Севери, 1901) Поверхность Веронезе — единственная поверхность в P^5, чьи секущие не наполняют собой все пространство. ■

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на P^2 линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $\mathsf{P}^2 \dashrightarrow \mathsf{P}^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на P^2 линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{P^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $P^2 \dashrightarrow P^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

ТЕОРЕМА: (А. Клебш, 1866) Всякая кубическая поверхность получается таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Способов выбрать шесть точек на P^2 имеется $6{\cdot}2-8=4$-хмерное семейство, и выбрать кубику в P^3 — $\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}-16=4$-хмерное. Отсюда видно, что теорема Клебша верна для **общей кубики.**

Кубическая поверхность

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим на P^2 линейную систему **кубик** (то есть $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^2}(3)$), и в ней — неполную подсистему кубик, проходящих через шесть точек $\{p_i\}_{i=1}^6$ общего положения. Она **четырехмерна,** и задает рациональное отображение $\mathrm{P}^2 \dashrightarrow \mathrm{P}^3$ (не определенное в шести точках p_i). После их раздутия отображение становится регулярным. Плоские сечения его образа суть **кубические кривые.** Иначе говоря, образ такого вложения — **кубическая поверхность.**

ТЕОРЕМА: (А. Клебш, 1866) Всякая кубическая поверхность получается таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Способов выбрать шесть точек на P^2 имеется $6{\cdot}2-8 = 4$-хмерное семейство, и выбрать кубику в P^3 — $\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6} - 16 = 4$-хмерное. Отсюда видно, что теорема Клебша верна для **общей кубики.**

ТЕОРЕМА: (Кэли — Сальмон, 1849) На гладкой кубической поверхности над $\mathbb{C}$ лежит ровно **двадцать семь прямых.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Они получаются из раздутия следующим образом: 6 прямых добавляется при раздутии, $15 = \binom{6}{2}$ прямых соединяют раздутые точки, и еще 6 прямых возникают из коник, проходящих через пять раздутых точек.