Нормальные кривые гладки

22 января 2024 года

Размерность Крулля

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Длиной** цепочки идеалов $I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$ называется **число** n**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Размерностью Крулля** кольца A называется максимальная длина цепочки **простых** идеалов.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для общих колец, даже нетеровых, размерность Крулля может вести себя патологически. Для неприводимых аффинных многообразий над полем размерность Крулля их кольца функций **равняется их размерности.** В самом деле, цепочка простых идеалов соответствует **цепочке неприводимых подмногообразий.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Размерность Крулля кольца равна супремуму размерностей Крулля его локализаций во всех максимальных идеалах.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Аффинной кривой** называется спектр **нетерова** кольца размерности Крулля **один.**

Теорема Крулля и регулярные кольца

ТЕОРЕМА: (Крулля о главных идеалах) Размерность Крулля локального нетерова кольца **не превосходит числа образующих** его максимального идеала.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Локальное нетерово кольцо называется **регулярным,** если его размерность Крулля **равняется** минимальному количеству образующих максимального идеала. Замкнутая точка аффинного многообразия называется **гладкой,** если ее локальное кольцо регулярно.

ЗАМЕЧАНИЕ: Минимальное количество образующих максимального идеала равно **размерности кокасательного пространства** $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$. Это следует из следующей формы **леммы Накаямы:**

ЛЕММА: (Накаяма) Пусть $(A, \mathfrak{m})$ — локальное нетерово кольцо. Всякий базис его кокасательного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ **поднимается до набора образующих** идеала $\mathfrak{m}$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Регулярность локального кольца точки напоминает существование **локальных координат.**

ТЕОРЕМА: (Зариский) Локальное нетерово кольцо размерности Крулля один **регулярно тогда и только тогда,** когда оно **целозамкнуто.**

Лемма Накаямы, слабая версия

ЛЕММА: (Накаямы для локальных колец) Пусть $(A, \mathfrak{m})$ — локальное кольцо, и M — конечнопорожденный A-модуль такой, что $\mathfrak{m}M = M$. **Тогда $M = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть M порожден элементами $m_1, \dots m_k$. Имеем: $m_i = \sum a_{ij} m_j$, $a_{ij} \in \mathfrak{m}$. В матричном виде это можно записать как $\Gamma\vec{m} = \vec{m}$, или же $(I - \Gamma)\vec{m} = \vec{0}$. В разложении определителя $\det(I - \Gamma)$ все **недиагональные** слагаемые суть элементы $\mathfrak{m}$, а диагональный имеет вид $\prod_i (1 - a_{ii})$, и потому **обратим.** Значит, $\det(I - \Gamma)$ **также обратим,** и $\vec{m} = (I - \Gamma)^{-1}(I - \Gamma)\vec{m} = (I - \Gamma)^{-1}\vec{0} = \vec{0}$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $(A, \mathfrak{m})$ — локальное нетерово кольцо. Всякий **базис** его кокасательного пространства $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ поднимается до набора **образующих идеала** $\mathfrak{m}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим прообразы элементов базиса, скажем $a_1, \dots, a_k$. Пусть они порождают идеал $\mathfrak{n}$. Тогда $\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$. Если $M = \mathfrak{m}/\mathfrak{n}$, то $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}(\mathfrak{m}/\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}^2/\mathfrak{n} = (\mathfrak{n} + \mathfrak{m}^2)/\mathfrak{n} = \mathfrak{m}/\mathfrak{n} = M$. В силу леммы Накаямы, $M = 0$ и $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}$. ■

Кривые и дискретные нормирования

Мы знаем, что локальные кольца **гладких** точек на кривых — **кольца дискретного нормирования** в силу существования **локального параметра.** Алгебраическая версия этого утверждения такова:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Следующие утверждения равносильны:
(1) A — регулярное локальное нетерово кольцо размерности Крулля один,
(2) A — кольцо дискретного нормирования.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A. Коль скоро $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1$, $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Для любого элемента $p \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ имеем $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = \langle p + \mathfrak{m}^2 \rangle_{A/\mathfrak{m}}$, и **в силу леммы Накаямы $\mathfrak{m} = (p)$.** В частности, **любые два** элемента $\mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$ отличаются умножением на **обратимый** элемент. Значит, всякий элемент $\mathfrak{m}^k$ имеет вид up^k, где u обратим. Итак, все простые идеалы A это $\mathfrak{m}$ и (0). Пересечение $\cap_{k>0} \mathfrak{m}^k$ есть простой идеал, отличный от $\mathfrak{m}$, а потому **нулевой.** Значит, **вообще всякий** ненулевой элемент A представляется в виде up^n, и это n и задает дискретное нормирование. ■

Гладкость нормальных кривых

ТЕОРЕМА: (Зариский) Целозамкнутые локальные нетеровы кольца размерности Крулля один регулярны.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Следует доказать, что максимальный идеал такого кольца главный. Тогда $\dim_{A/\mathfrak{m}} \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = 1 = \dim A$.

Обозначим за $\mathfrak{m}^{-1}$ дробный идеал $\{x \in \operatorname{Frac} A : x\mathfrak{m} \subset A\}$. Имеем: $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subset A$, и потому **либо $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$, либо $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$.**

Случай 1: $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$. Тогда $1 = \sum a_i x_i$, $a_i \in \mathfrak{m}$, $x_i \in \mathfrak{m}^{-1}$. Все $a_i x_i \in A$, но какой-то $a_j x_j \notin \mathfrak{m}$, так что $1/(a_j x_j) \in A$. Тогда $a = 1/x_j = a_j/(a_j x_j) \in A$, и потому $a x_j = 1$. Для $m \in \mathfrak{m}$ имеем $m = 1m = (a x_j)m = a(x_j m)$. Но $x_j \in \mathfrak{m}^{-1}$, и потому $x_j m \in A$, стало быть $\mathfrak{m} \subset (a)$ и **потому $\mathfrak{m} = (a)$.**

Гладкость нормальных кривых (продолжение)

Случай 2: $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$. Пусть $0 \neq m \in \mathfrak{m}$, рассмотрим локализацию $\{m^k\}^{-1}A \subset \operatorname{Frac} A$. Всякий ненулевой максимальный идеал в ней нетривиально пересекает A, а поскольку **простых идеалов в A два,** это пересечение должно быть $\mathfrak{m}$ и содержать m. Значит, оно содержит и $m/m = 1$, ненулевых максимальных идеалов в $\{m^k\}^{-1}A$ нет, **и $\{m^k\}^{-1}A = \operatorname{Frac} A$.** Итак, **всякий элемент $\operatorname{Frac} A$ можно расписать в виде a/m^n.**

Значит, если $0 \neq m_0 \in \mathfrak{m}$, то для всякого $0 \neq m \in \mathfrak{m}$ имеем $1/m_0 = a/m^n$ для какого-то $a \in A$, а потому $m^n = am_0 \in (m_0)$ при достаточно большой степени n. Применяя это к образующим $m_1, \ldots, m_k$ идеала $\mathfrak{m}$, видим, что $m_1^n, \ldots, m_k^n \in (m_0)$, а потому $(\sum a_i m_i)^{kn} \in (m_0)$. Значит, $\mathfrak{m}^i \subset (m_0)$ для всех $i \geqslant nk$, и существует минимальное i, для которого $\mathfrak{m}^i \subset (m_0)$. **Если $i = 1$,** то $\mathfrak{m} = (m_0)$, и **утверждение доказано.** Если нет, то выберем $m' \in \mathfrak{m}^{i-1} \setminus \mathfrak{m}^i$, и тогда $(m'/m_0)\mathfrak{m} \subset \frac{1}{m_0}\mathfrak{m}^i = \frac{1}{m_0}(m_0) \subset A$, а потому $m'/m_0 \in \mathfrak{m}^{-1}$. С другой стороны, $m'/m_0 \notin A$, **а потому $\mathfrak{m}^{-1} \not\subset A$.**

Гладкость нормальных кривых (окончание)

С третьей стороны, для всякого $x \in \mathfrak{m}^{-1}$ имеем $x\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$. Выберем образующие $\{m_i\}$ у $\mathfrak{m}$, и запишем x как матрицу с коэффициентами в A. По **теореме Гамильтона — Кэли,** x является корнем ее характеристического многочлена, а у него **старший коэффициент ± 1. В силу целозамкнутости,** $x \in A$, так что $\mathfrak{m}^{-1} \subset A$ — противоречие. ■

ТЕОРЕМА: (Зариский) У целозамкнутого нетерова целостного кольца размерности Крулля один все локализации в ненулевых простых идеалах — кольца дискретного нормирования. Иначе говоря, **нормализации кривых гладки.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Достаточно показать, что эти локализации сами целозамкнуты и имеют размерность Крулля один. ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Целозамкнутые нетеровы целостные кольца размерности Крулля один называются **дедекиндовыми.**