Артиновы кольца и теорема Крулля о пересечении

2 февраля 2024 года

Артиновость

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль называется **артиновым,** если всякая **убывающая цепочка** подмодулей в нем **стабилизируется.** Кольцо называется **артиновым,** если оно артиново как модуль над собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Фактор и подмодуль артинова модуля артинов. Если $0 \to M \to M' \to M'' \to 0$ — короткая точная тройка, и модули M, M'' артиновы, то **и M' артинов.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Аналогичное утверждение верно и для нетеровых модулей.

ЛЕММА: Пусть $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_n \subset A$ — последовательность максимальных идеалов таких, что $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i = 0$. Тогда A **артиново** если и только если оно **нетерово.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Рассмотрим цепочку идеалов $\mathfrak{q}_i = \prod_{j=1}^i \mathfrak{m}_j$, $\mathfrak{q}_0 = A$, и факторы $V_i = \mathfrak{q}_{i-1}/\mathfrak{q}_i$. Тогда A нетерово (артиново) тогда и только тогда, когда каждое V_i нетерово (артиново) как $A/\mathfrak{m}_i$-модуль. Но **для поля это синонимы.** ■

Нильрадикал артинова кольца

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: В артиновом кольце всякий **простой идеал максимален, и их конечное число.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\mathfrak{p} \subset A$ — простой идеал артинова кольца. Тогда $A/\mathfrak{p}$ — артинова область целостности. Для всякого $x \in A/\mathfrak{p}$ имеем $(x^n) = (x^{n+1})$ для какого-то n и потому $x^n = yx^{n+1}$. В силу **целостности** $xy = 1$, и потому $A/\mathfrak{p}$ — поле, то есть $\mathfrak{p}$ максимален.

Выпишем счетную последовательность максимальных идеалов $\mathfrak{m}_i$, и рассмотрим цепочку $\mathfrak{m}_1 \supset \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supset \dots$ В какой-то момент выяснится, что $\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_{n+1}$. Но $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subset \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$, и из $\prod_{i=1}^n \mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{m}_{n+1}$ и простоты $\mathfrak{m}_{n+1}$ **следует** $\mathfrak{m}_k \subset \mathfrak{m}_{n+1}$ для некого $k \leqslant n$. Противоречие! ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Нильрадикал артинова кольца нильпотентен.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Имеем $\mathfrak{N}^n = \mathfrak{N}^{n+1}$ для какого-то n. Пусть $\mathfrak{N}^n = I \neq 0$. Рассмотрим множество Ξ идеалов J, для которых $IJ \neq 0$. Оно непусто, так как $\mathfrak{N} \in \Xi$. Значит, есть в Ξ и **минимальный идеал** с элементом x таким, что $xI \neq 0$. Тогда (x) и есть минимальный идеал. Но $(xI)I = xI^2 = xI \neq 0$, так что $(x) \supset xI \in \Xi$ и потому $xI = (x)$. Иначе говоря, $x = xy$ для какого-то $y \in I \subset \mathfrak{N}$. Значит, $x = xy = xy^2 = \dots = xy^m = 0$. Противоречие! ■

Нетеровость артиновых колец

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $a \in A$ — не нильпотент. Тогда какой-то простой идеал не содержит .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Есть простой идеал в локализации $A[a^{-1}]$. ■

СЛЕДСТВИЕ: Нильрадикал есть пересечение всех простых идеалов. ■

ТЕОРЕМА: **(Акиздуки, Хопкинс)** Артиновы кольца — это в точности **нетеровы** кольца размерности Крулля **нуль.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \subset A$ — все максимальные идеалы артинова кольца. Тогда $\mathfrak{N} = \bigcap \mathfrak{m}_i$, и $\prod \mathfrak{m}_i^k = (\prod \mathfrak{m}_i)^k \subset (\bigcap \mathfrak{m}_i)^k = \mathfrak{N}^k = (0)$ при каком-то k. По лемме с первого слайда, при таком данном артиновость влечет нетеровость, а размерность нуль мы уже знаем.

Наоборот, пусть A — нетерово кольцо размерности Крулля нуль. Всякий максимальный идеал в нем не просто прост, а **минимален среди простых,** а из-за нетеровости таких **конечное число.** $\mathfrak{N} = \bigcap_{i=1}^n \mathfrak{m}_i$, в силу нетеровости $\mathfrak{N}^k = 0$ и потому $\prod \mathfrak{m}_i^k \subset \mathfrak{N}^k = (0)$. В силу леммы с первого слайда, нетеровость тогда влечет артиновость. ■

Теорема Крулля о пересечении

ТЕОРЕМА: (Крулля о пересечении) Пусть $(A, \mathfrak{m})$ — нетерово локальное кольцо. **Тогда $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^i = 0$.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: (неправильное) Пусть $M = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^i$. Тогда $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^i\right) = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}\mathfrak{m}^i = \bigcap_{i=2}^{+\infty} \mathfrak{m}^i$. Поскольку $\mathfrak{m}^i \subset \mathfrak{m}$ при $i > 1$, это то же, что $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^i = M$, то есть $\mathfrak{m}M = M$, и **по лемме Накаямы** $M = 0$.

ВОПРОС: Где ошибка?

ПРИМЕР: Рассмотрим кольцо $k[x,y]/(xy - xy^2)$. В нем $xy = xy^2 = xy^3 = \ldots$ Рассмотрим цепь идеалов $(y) \supset (y)^2 \supset \ldots$ Их пересечение есть нулевой идеал, так что $(x)\bigcap_{i=1}^{+\infty}(y)^i = (0)$. С другой стороны, $\bigcap_{i=1}^{+\infty}(x)(y)^i = \bigcap_{i=1}^{+\infty}(xy^i) = \bigcap_{i=1}^{+\infty}(xy) = (xy) \neq (0)$. Иначе говоря, умножение на идеал **не коммутирует** с пересечением.

Лемма Артина — Риса

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — A-модуль, и $I \subset A$ — идеал. **I-фильтрацией** называется цепочка подмодулей $M = M_0 \supset M_1 \supset \dots$ такая, что $IM_i \subset M_{i+1}$. Будем говорить, что I-фильтрация **стабильна,** если начиная с какого-то номера N имеем $I^k M_n = M_{n+k}$, $n > N$, а k любое.

ЛЕММА: (Э. Артин, Д. Рис) Пусть M — нетеров модуль над нетеровым кольцом A, $I \subset A$ — идеал, и $\{M_i\}$ — стабильная I-фильтрация. Тогда для всякого подмодуля $N \subset M$ фильтрация $N_i = N \cap M_i$ также I-стабильна.
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Нам понадобится такое

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Алгеброй Риса** называется **градуированная** алгебра $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i$, где $I^0 = A$. Если A нетерово, она конечно порождена над A. Если M снабжен I-фильтрацией, то $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} M_i$ — модуль над алгеброй Риса.

Заметим, что I-фильтрация **стабильна** тогда и только тогда, когда модуль $\bigoplus_{i=0}^{+\infty} M_i$ **конечно порожден** над алгеброй Риса. Тем самым, лемма следует из того, что **подмодуль нетерова модуля нетеров.** ■

Доказательство теоремы Крулля о пересечении

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Фильтрация $A \supset \mathfrak{m} \supset \mathfrak{m}^2 \supset \dots$ очевидно стабильна. Ограничивая ее на пересечение $I = \bigcap_{i=1}^{+\infty} \mathfrak{m}^i$, по лемме Артина — Риса имеем, что $I \cap \mathfrak{m}^{n+k} = \mathfrak{m}^k(I \cap \mathfrak{m}^n)$ начиная с какого-то n. В частности, $\mathfrak{m}I = \mathfrak{m}(I \cap \mathfrak{m}^n) = I \cap \mathfrak{m}^{n+1} = I$, и **по лемме Накаямы** $I = 0$. ■

Кроме того, лемма Артина — Риса имеет такое

СЛЕДСТВИЕ: Пусть $N \subset M$ — подмодуль нетерова модуля над нетеровым кольцом A, и $I \subset A$ — идеал. Тогда I-адическая топология на N **совпадает с ограничением** I-адической топологии с M на N. ■