Проективные многообразия и раздутия

22 декабря 2023 года

Раздутие плоскости в точке

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Отображение **гладких** кривых, задающее изоморфизм на полях функций, есть **открытое вложение.** ■

ПРИМЕР: Рассмотрим отображение поверхностей $B = \{x = yz\} \subset \mathsf{A}^3 \xrightarrow{\pi} \mathsf{A}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x, y)$. Оно определяет изоморфизм на полях функций, но слой над нулем — **целая прямая.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Образ отображения π **ни открыт, ни замкнут:** это объединение открытого множества $y \neq 0$ и замкнутого $x = y = 0$. С точки зрения алгебраической геометрии, такой пропуск прямой неестествен. Заметим, что асимптотически B пересекает бесконечность как раз по прямой $y = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Рассмотрим поверхности $B = \{x = yz\} \subset \mathsf{A}^3$, $B' = \{y = xz'\} \subset \mathsf{A}^{3'}$. Склеим их по отображению $z'(x, y, z) = z^{-1}$, определенному и биективному при $z, z' \neq 0$. Склеенная поверхность B_0 допускает проекцию на A^2, биективную вне нуля и стягивающая **проективную прямую** над нулем. Она называется **раздутием** A^2 в нуле, и не является аффинной поверхностью.

Проективные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть V — k-векторное пространство. Множество прямых в нем называется **проективизацией** V и обозначается $\mathsf{P}_k(V)$. Проективизация k^{n+1} называется n-мерным **проективным пространством** и обозначается P^n.

ЗАМЕЧАНИЕ: Множество прямых в $k^{n+1} = \{(x_0, \ldots, x_n)\}$, не лежащих в гиперплоскости $x_i = 0$, можно отождествить с A^n: $(x_0, \ldots, x_n) \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$. Таким образом, P^n имеет **покрытие $n+1$ аффинной** картой. Итак, **проективные пространства алгебраичны.**

ЗАМЕЧАНИЕ: P^1 есть две копии A^1, склеенные по $z \mapsto z^{-1}$. P^2 есть три копии A^2, склеенные по отображениям $(x, y) \mapsto (x/y, 1/y)$ и тому подобным.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Проективным подмногообразием** называется замкнутое подмногообразие в P^n (замкнутое в каждой карте). **Проективным многообразием** называется многообразие, изоморфное какому-то проективному подмногообразию. **Квазипроективным многообразием** называется дополнение проективного многообразия до проективного подмногообразия.

Аффинные многообразия и проективные

ПРИМЕР: Пусть $C \subset \mathsf{A}^2$ — плоская кривая с уравнением $f(x, y) = 0$, скажем $y^2 = x^3 + ax + b$. Дополним новой переменной z все мономы до старшей степени: $y^2z = x^3 + axz^2 + bz^3$. Это однородное уравнение в k^3, а потому определяет кривую в P^2, которая в карте $\mathsf{A}^2 = \{z \neq 0\}$ выглядит как C. Итак, **аффинные многообразия квазипроективны.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $X \subset \mathsf{P}^n$ — проективное многообразие. Тогда многообразие $\{0\} \cup \{v \in k^{n+1} : \langle v \rangle \in X \subset \mathsf{P}^n\}$ **аффинно.** Иначе говоря, проективные многообразия задаются системами **однородных** уравнений.

Градуированная алгебра

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированным кольцом** называется кольцо A с разложением $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$, где A_i — подгруппы по сложению, удовлетворяющие $A_i A_j \subset A_{i+j}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Градуированным модулем** над градуированным кольцом A называется A-модуль M с разложением в прямую сумму абелевых групп $M = M_0 \oplus M_1 \oplus \ldots$ такую, что $A_i M_j \subset M_{i+j}$. Градуированный подмодуль самого градуированного кольца A называется **однородным идеалом.** Если I — однородный идеал, $a = a_0 + a_1 + \ldots$, $a_i \in A_i$, то $\forall i : a_i \in I$.

ПРИМЕР: Пусть A — какое-либо кольцо, и M — A-модуль. **Симметрической алгеброй** $\mathrm{Sym}_A(M)$ называется кольцо, порожденное A и выражениями вида $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ с соотношениями $m \cdot m' = m' \cdot m$, $am \cdot m' = m \cdot am'$, $(m \cdot m') \cdot m'' = m \cdot (m' \cdot m'')$. **Это градуированное кольцо.**

ПРИМЕР: Если k — поле, а V — k-векторное пространство, то $\mathrm{Sym}_k(V)$ есть алгебра многочленов.

Проективный спектр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал $A_+ = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} A_i$ градуированного кольца A называется **идеалом аугментации;** идеал, не содержащий идеала аугментации, называется **допустимым. Проективным спектром** градуированного кольца называется множество **допустимых однородных простых** идеалов, он обозначается $\mathrm{Proj}(A)$.

ПРИМЕР: $\mathrm{Proj}\, A[t] = \mathrm{Spec}\, A$.

ПРИМЕР: $\mathrm{Proj}\, k[x_0, \dots, x_n] = \mathrm{P}^n$.

Проективный спектр

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Идеал $A_+ = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} A_i$ градуированного кольца A называется **идеалом аугментации;** идеал, не содержащий идеала аугментации, называется **допустимым. Проективным спектром** градуированного кольца называется множество **допустимых однородных простых** идеалов, он обозначается $\mathrm{Proj}(A)$.

ПРИМЕР: $\mathrm{Proj}\, A[t] = \mathrm{Spec}\, A$.

ПРИМЕР: $\mathrm{Proj}\, k[x_0, \dots, x_n] = \mathsf{P}^n$.

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x, y]$, $I = (x, y)$ — идеал нуля. Тогда $\mathrm{Proj}(\mathrm{Sym}_A(I))$ есть **раздутие плоскости** в нуле.

ЗАМЕЧАНИЕ: Вложение $A \to \mathrm{Sym}_A(I)$ дает отображение $\mathrm{Bl}_0(\mathsf{A}^2) \to \mathsf{A}^2$. Ограничение его на замкнутую точку $\{0\} = V(I)$ есть отображение $k \to \mathrm{Sym}_k\langle x, y\rangle$, **то есть** $\mathsf{P}^1_k \to \mathrm{Spec}\, k$**.** Ограничения его на другие точки суть $k \to \mathrm{Sym}_k(k) \cong k$, то есть **изоморфизм.**

Структура раздутий плоскости

ПРИМЕР: Функция $(x,y) \mapsto x/y \in \mathsf{P}^1$ после раздутия нуля превращается в **регулярное** отображение в P^1. Иначе говоря, раздутие $\mathsf{Bl}_0(\mathsf{A}^2)$ допускает A^1-**расслоение** над P^1.

Структура раздутий плоскости

ПРИМЕР: Функция $(x, y) \mapsto x/y \in \mathsf{P}^1$ после раздутия нуля превращается в **регулярное** отображение в P^1. Иначе говоря, раздутие $\mathsf{Bl}_0(\mathsf{A}^2)$ допускает A^1-**расслоение** над P^1.

ПРИМЕР: Рассмотрим гиперболоид $\{x^2 - y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathsf{P}^3$. Его **стереографическая проекция** из точки $P = (0; 0; 1)$ пишется так: $(x, y, z) \mapsto (x : y : 1 - z)$. Чтобы она стала регулярной, нужно раздуть p. После этого проекция будет взаимно-однозначной везде, кроме прямых $z = 1, x = \pm y$, которые она стягивает в точки $(1 : \pm 1 : 0)$. Итак, **раздутие P^2 в двух точках** есть **раздутие квадрики в одной точке.**

Структура раздутий плоскости

ПРИМЕР: Функция $(x,y) \mapsto x/y \in \mathsf{P}^1$ после раздутия нуля превращается в **регулярное** отображение в P^1. Иначе говоря, раздутие $\mathsf{Bl}_0(\mathsf{A}^2)$ допускает A^1-**расслоение** над P^1.

ПРИМЕР: Рассмотрим гиперболоид $\{x^2 - y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathsf{P}^3$. Его **стереографическая проекция** из точки $P = (0;0;1)$ пишется так: $(x,y,z) \mapsto (x : y : 1 - z)$. Чтобы она стала регулярной, нужно раздуть p. После этого проекция будет взаимно-однозначной везде, кроме прямых $z = 1, x = \pm y$, которые она стягивает в точки $(1 : \pm 1 : 0)$. Итак, **раздутие P^2 в двух точках** есть **раздутие квадрики в одной точке.**

ПРИМЕР: Раздуем на P^2 три точки, скажем $p = (1 : 0 : 0)$, $q = (0 : 1 : 0)$ и $r = (0 : 0 : 1)$. Тогда прямые pq, qr, rp **можно стянуть,** и получится другая P^2. Это преобразование можно записать как $(x : y : z) \mapsto (x^{-1} : y^{-1} : z^{-1}) = (yz : zx : xy)$. Оно называется **инволюцией Кремоны,** матшкольникам его версии известны как **изогональное сопряжение** и **инверсия.** Оно переводит **прямые** в **коники, описанные** около треугольника pqr.

Структура раздутий плоскости

ПРИМЕР: Функция $(x,y) \mapsto x/y \in \mathsf{P}^1$ после раздутия нуля превращается в **регулярное** отображение в P^1. Иначе говоря, раздутие $\mathsf{Bl}_0(\mathsf{A}^2)$ допускает A^1-**расслоение** над P^1.

ПРИМЕР: Рассмотрим гиперболоид $\{x^2 - y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathsf{P}^3$. Его **стереографическая проекция** из точки $P = (0;0;1)$ пишется так: $(x,y,z) \mapsto (x:y:1-z)$. Чтобы она стала регулярной, нужно раздуть p. После этого проекция будет взаимно-однозначной везде, кроме прямых $z=1, x=\pm y$, которые она стягивает в точки $(1:\pm 1:0)$. Итак, **раздутие P^2 в двух точках** есть **раздутие квадрики в одной точке.**

ПРИМЕР: Раздуем на P^2 три точки, скажем $p=(1:0:0)$, $q=(0:1:0)$ и $r=(0:0:1)$. Тогда прямые pq, qr, rp **можно стянуть,** и получится другая P^2. Это преобразование можно записать как $(x:y:z) \mapsto (x^{-1}:y^{-1}:z^{-1}) = (yz:zx:xy)$. Оно называется **инволюцией Кремоны,** матшкольникам его версии известны как **изогональное сопряжение** и **инверсия.** Оно переводит **прямые** в **коники, описанные** около треугольника pqr.

ТЕОРЕМА: (М. Нетер, Кастельнуово) Если k алгебраически замкнуто, **группа бирациональных автоморфизмов** P^2_k **порождена** инволюциями Кремоны для всевозможных троек p,q,r.

Проективность раздутий

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если P^n — проективное пространство, то **двойственное проективное пространство** $\check{\mathsf{P}}^n$ есть множество **гиперплоскостей** в нем. Если $\mathsf{P}^n = \mathsf{P}(V)$, то $\check{\mathsf{P}}^n = \mathsf{P}(V^*)$. Всякая точка $x \in \mathsf{P}^n$ определяет гиперплоскость $\check{x} \subset \check{\mathsf{P}}^n$ как $\{H : x \in H\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Подмногообразие $\mathcal{I} = \{(x, H) : x \in H\} \subset \mathsf{P}^n \times \check{\mathsf{P}}^n$ называется **многообразием инцидентности.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Для точки $p \in \mathsf{P}^n$ рассмотрим гиперплоскость $\check{p} \subset \check{\mathsf{P}}^n$, и пересечем подмногообразие $\mathsf{P}^n \times \check{p}$ с $\mathcal{I}$. Проекция этого пересечения на P^n — **изоморфизм вне p,** а слой в точке p — **проективное пространство** P^{n-1}. Пересечение $(\mathsf{P}^n \times \check{p}) \cap \mathcal{I}$ есть **раздутие** P^n в точке p.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку $\mathsf{P}^n \times \mathsf{P}^m$ вкладывается в P^{n+m+1}, **раздутия проективных** многообразий **в точках** сами **проективны.**

Алгебра Риса

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x, y]/(xy)$, $I = (x, y)$. Как выглядит $\operatorname{Proj}(\operatorname{Sym}_A I)$? Вне нуля это изоморфизм, но слой над нулем — также $k \to \operatorname{Sym}_k\langle x, y\rangle$, то есть P^1_k. Стало быть, $\operatorname{Proj}(\operatorname{Sym}_A I)$ есть **цепочка из трех прямых,** а **хотелось бы** получить две непересекающиеся.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $I \subset A$ — идеал. Его **алгеброй Риса** называется сумма $A[It] = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} I^i t^i \subset A[t]$ (где $I^0 := A$).

ЗАМЕЧАНИЕ: В нашем случае $\operatorname{Sym}_A I$ **содержит** ненулевой элемент $xy \in \operatorname{Sym}^2_A I$ (как произведение $x \cdot y$ элементов из $\operatorname{Sym}^1_A I$), а алгебра Риса — **не содержит.** Для точки на плоскости $\operatorname{Sym}_A I$ и $A[It]$ **совпадают.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Раздутием** аффинной схемы $\operatorname{Spec} A$ в замкнутой подсхеме $V(I)$ называется **проективный спектр алгебры Риса** $\operatorname{Proj} A[It]$.

ПРИМЕР: В нашем случае $I^k = \langle x^k, x^{k+1}, \ldots, y^k, y^{k+1} \ldots\rangle = \langle x^k, x^{k+1}, \ldots\rangle \oplus \langle y^k, y^{k+1}, \ldots\rangle$. В нуле имеем слой $k \to \operatorname{Sym}_k\langle x\rangle \oplus \operatorname{Sym}_k\langle y\rangle$, то есть $\operatorname{Proj} k[x] \sqcup \operatorname{Proj} k[y] \to \operatorname{Spec} k$ — отображение **из двух точек в одну.**

ЗАМЕЧАНИЕ: В общем случае разница между симметрической алгеброй и алгеброй Риса есть разница между **нормальным пространством** и **нормальным конусом.**