Дивизоры и линейные расслоения

19 февраля 2024 года

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathrm{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(\pm m)$.

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathsf{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(\pm m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Даже если X проективно, пространство сечений $\Gamma(L, X)$ может быть ненулевым. Так, $\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(m), \mathsf{P}^n\right) = \mathrm{Sym}^m\left(k^{n+1}\right)$ при $m \geqslant 0$.

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathbb{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на $\mathbb{P}^n$. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\pm m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Даже если X проективно, пространство сечений $\Gamma(L, X)$ может быть ненулевым. Так, $\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(m), \mathbb{P}^n\right) = \mathrm{Sym}^m\left(k^{n+1}\right)$ при $m \geqslant 0$.

ПРИМЕР: Рассмотрим покрытие $\mathbb{P}^1 = \{(z : w)\}$ двумя картами $\{w \neq 0\}$, $\{z \neq 0\}$. На каждой из них всякое линейное расслоение **тривиализуется.** Какие расслоения из них можно склеить? На пересечении $\mathbb{A}^1 \backslash \{0\}$ частное двух тривиализаций — нигде не зануляющаяся алгебраическая функция, **то есть $(z/w)^m$.** Для каждого m получается свое расслоение. Это **то же расслоение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m)$,** что определено выше.

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathrm{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(\pm m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Даже если X проективно, пространство сечений $\Gamma(L, X)$ может быть ненулевым. Так, $\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(m), \mathrm{P}^n\right) = \mathrm{Sym}^m\left(k^{n+1}\right)$ при $m \geqslant 0$.

ПРИМЕР: Рассмотрим покрытие $\mathrm{P}^1 = \{(z : w)\}$ двумя картами $\{w \neq 0\}$, $\{z \neq 0\}$. На каждой из них всякое линейное расслоение **тривиализуется.** Какие расслоения из них можно склеить? На пересечении $\mathrm{A}^1 \backslash \{0\}$ частное двух тривиализаций — нигде не зануляющаяся алгебраическая функция, **то есть $(z/w)^m$.** Для каждого m получается свое расслоение. Это **то же расслоение $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(m)$,** что определено выше.

ТЕОРЕМА: (Биркгофа — Гротендика) Всякое **векторное** расслоение над P^1 есть **прямая сумма $\bigoplus_i \mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(m_i)$.** ■

Дивизоры и линейные расслоения

Обобщим построение $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(1)$ при помощи склейки на любую кривую.

Дивизоры и линейные расслоения

Обобщим построение $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(n)$ при помощи склейки на любую кривую. Пусть $x \in C$ — точка гладкой проективной кривой, и $z \in k(C)$ — **локальный параметр** в x (то есть $z(x) = 0$), регулярный на $U \subset C$. Рассмотрим покрытие C двумя картами: $C = U \cup (C \setminus \{x\})$. Склеим два тривиальных линейных расслоения $\mathsf{A}^1 \times U$ и $\mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\})$ так:

$$\mathsf{A}^1 \times U \ni (t, u) \sim (z^n t, u) \in \mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\}).$$

Дивизоры и линейные расслоения

Обобщим построение $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ при помощи склейки на любую кривую. Пусть $x \in C$ — точка гладкой проективной кривой, и $z \in k(C)$ — **локальный параметр** в x (то есть $z(x) = 0$), регулярный на $U \subset C$. Рассмотрим покрытие C двумя картами: $C = U \cup (C \setminus \{x\})$. Склеим два тривиальных линейных расслоения $\mathbb{A}^1 \times U$ и $\mathbb{A}^1 \times (C \setminus \{x\})$ так:

$$\mathbb{A}^1 \times U \ni (t, u) \sim (z^n t, u) \in \mathbb{A}^1 \times (C \setminus \{x\}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Получившееся линейное расслоение **не зависит** от выбора локального параметра. Оно обозначается $\mathcal{O}_C(nx)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $n \geqslant 0$, сечение $C \setminus \{x\} \ni p \mapsto (1, p)$ продолжается в точку x нулем кратностью n.

Дивизоры и линейные расслоения

Обобщим построение $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(n)$ при помощи склейки на любую кривую. Пусть $x \in C$ — точка гладкой проективной кривой, и $z \in k(C)$ — **локальный параметр** в x (то есть $z(x) = 0$), регулярный на $U \subset C$. Рассмотрим покрытие C двумя картами: $C = U \cup (C \setminus \{x\})$. Склеим два тривиальных линейных расслоения $\mathsf{A}^1 \times U$ и $\mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\})$ так:

$$\mathsf{A}^1 \times U \ni (t, u) \sim (z^n t, u) \in \mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Получившееся линейное расслоение **не зависит** от выбора локального параметра. Оно обозначается $\mathcal{O}_C(nx)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $n \geqslant 0$, сечение $C \setminus \{x\} \ni p \mapsto (1, p)$ продолжается в точку x нулем кратностью n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если $\mathcal{O}_C(x) \cong \mathcal{O}_C(y)$ для двух точек $x \neq y \in C$, то кривая C **рациональна.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По построению, это расслоение имеет два сечения: s_x с нулем в x и s_y с нулем в y. Их **частное** s_x/s_y — рациональная функция с одним нулем и одним полюсом, то есть **изоморфизм с P^1.** ■

Дивизоры и линейные расслоения

Обобщим построение $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(n)$ при помощи склейки на любую кривую. Пусть $x \in C$ — точка гладкой проективной кривой, и $z \in k(C)$ — **локальный параметр** в x (то есть $z(x) = 0$), регулярный на $U \subset C$. Рассмотрим покрытие C двумя картами: $C = U \cup (C \setminus \{x\})$. Склеим два тривиальных линейных расслоения $\mathsf{A}^1 \times U$ и $\mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\})$ так:

$$\mathsf{A}^1 \times U \ni (t, u) \sim (z^n t, u) \in \mathsf{A}^1 \times (C \setminus \{x\}).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Получившееся линейное расслоение **не зависит** от выбора локального параметра. Оно обозначается $\mathcal{O}_C(nx)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $n \geqslant 0$, сечение $C \setminus \{x\} \ni p \mapsto (1, p)$ продолжается в точку x нулем кратностью n.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если $\mathcal{O}_C(x) \cong \mathcal{O}_C(y)$ для двух точек $x \neq y \in C$, то кривая C **рациональна.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: По построению, это расслоение имеет два сечения: s_x с нулем в x и s_y с нулем в y. Их **частное** s_x/s_y — рациональная функция с одним нулем и одним полюсом, то есть **изоморфизм с P^1.** ■

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Если $D = \sum_i n_i x_i$ — дивизор на кривой C, то линейное расслоение $\bigotimes_i \mathcal{O}_C(n_i x_i)$ называется **линейным расслоением дивизора D,** и обозначается $\mathcal{O}_C(D)$.

Линейные расслоения и дивизоры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $L \to C$ — линейное расслоение, и s — его ненулевое сечение (возможно, рациональное). **Тогда** $L \cong \mathcal{O}_C((s))$**.** ■

Линейные расслоения и дивизоры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $L \to C$ — линейное расслоение, и s — его ненулевое сечение (возможно, рациональное). **Тогда $L \cong \mathcal{O}_C((s))$.** ■

ЛЕММА: У всякого линейного расслоения на проективном многообразии **есть ненулевое рациональное сечение.** ■

Линейные расслоения и дивизоры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $L \to C$ — линейное расслоение, и s — его ненулевое сечение (возможно, рациональное). **Тогда $L \cong \mathcal{O}_C((s))$.** ■

ЛЕММА: У всякого линейного расслоения на проективном многообразии **есть ненулевое мероморфное сечение.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любых двух ненулевых сечений $s_1, s_2 \in \Gamma(L, C)$ частное s_1/s_2 — мероморфная функция, а потому дивизоры (s_1) и (s_2) отличаются на главный. Итак, **линейное расслоение определяет класс дивизоров.** В частности, **степень — инвариант** линейного расслоения.

Линейные расслоения и дивизоры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $L \to C$ — линейное расслоение, и s — его ненулевое сечение (возможно, рациональное). **Тогда $L \cong \mathcal{O}_C((s))$.** ■

ЛЕММА: У всякого линейного расслоения на проективном многообразии **есть ненулевое рациональное сечение.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Для любых двух ненулевых сечений $s_1, s_2 \in \Gamma(L, C)$ частное s_1/s_2 — рациональная функция, а потому дивизоры (s_1) и (s_2) отличаются на главный. Итак, **линейное расслоение определяет класс дивизоров.** В частности, **степень — инвариант** линейного расслоения.

ПРИМЕР: Пусть $X \subset \mathsf{P}^n$ — кривая, и $L = \mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1)|_X$. Тогда всякий эффективный дивизор из класса (L) высекается на X гиперплоскостью.

ПРИМЕР: Пусть $L \to X$ — линейное расслоение, и $V = H^0(L, X)$. Для точки $x \in X$ рассмотрим $V_x = \{s \in V \colon s(x) = 0\} \subset V$. Сопоставление $x \mapsto V_x \in \mathsf{P}(V^*)$ — рациональное отображение. Если оно — изоморфизм на образ, говорят, что L **очень обильно.** В этом случае $L = \mathcal{O}_{\mathsf{P}(V^*)}(1)|_X$.