Открытые множества и язык пучков

4 декабря 2023 года

Открытые множества как спектры

Пусть A — кольцо. Мы знаем, что **замкнутым** подмножествам $\operatorname{Spec} A$ соответствуют идеалы в A: $V(I) = \{J \in \operatorname{Spec} A : I \subset J\}$. Кольцо функций $V(I)$ — это просто A/I. Пусть теперь $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(I)$ — **открытое** подмножество. Это **спектр какого кольца?**

Открытые множества как спектры

Пусть A — кольцо. Мы знаем, что **замкнутым** подмножествам $\operatorname{Spec} A$ соответствуют идеалы в A: $V(I) = \{J \in \operatorname{Spec} A : I \subset J\}$. Кольцо функций $V(I)$ — это просто A/I. Пусть теперь $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(I)$ — **открытое** подмножество. Это **спектр какого кольца?**

Вообще говоря, **никакого.**

ЛЕММА: (Хартогс) Пусть $A = k[x, y]$, $I = (x, y)$, $V(I)$ — начало координат. Тогда все рациональные функции на $\operatorname{Spec} A$, **регулярные на U, регулярны и в нуле.** ■

Открытые множества как спектры

Пусть A — кольцо. Мы знаем, что **замкнутым** подмножествам $\operatorname{Spec} A$ соответствуют идеалы в A: $V(I) = \{J \in \operatorname{Spec} A : I \subset J\}$. Кольцо функций $V(I)$ — это просто A/I. Пусть теперь $U = \operatorname{Spec} A \setminus V(I)$ — **открытое** подмножество. Это **спектр какого кольца?**

Вообще говоря, **никакого.**

ЛЕММА: (Хартогс) Пусть $A = k[x, y]$, $I = (x, y)$, $V(I)$ — начало координат. Тогда все рациональные функции на $\operatorname{Spec} A$, **регулярные на U, регулярны и в нуле.** ■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть A — целостное кольцо, и $f \in A$ не делитель нуля. Тогда **простые идеалы в A_f** взаимно-однозначно соответствуют **идеалам A, не содержащим f.**

Иначе говоря, если $\operatorname{Spec} A$ — неприводимое аффинное многообразие, и f — функция на нем, то $\operatorname{Spec} A \setminus V(f) = \operatorname{Spec} A_f$.

Базовые открытые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Открытое множество в $\operatorname{Spec} A$ называется **базовым,** если его дополнение имеет вид $V(f)$ для какого-то $f \in A$.

Может так получиться, что $U \subset \operatorname{Spec} A$ — открытое подмножество, изоморфное спектру какого-то кольца A', но **не базовое.** В таком случае A' **не обязано** получаться из A локализацией.

Базовые открытые множества

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Открытое множество в $\operatorname{Spec} A$ называется **базовым,** если его дополнение имеет вид $V(f)$ для какого-то $f \in A$.

Может так получиться, что $U \subset \operatorname{Spec} A$ — открытое подмножество, изоморфное спектру какого-то кольца A', но **не базовое.** В таком случае A' **не обязано** получаться из A локализацией.

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x,y]/(y^2 - p(x))$ — кольцо функций эллиптической кривой $E = V(y^2 - p(x))$, и α — точка E, **не являющаяся элементом кручения.** Тогда кривая $U = E \setminus \{\alpha\}$ **аффинна,** но ее кольцо функций A' **не получается локализацией** из A. В самом деле, если $A' = S^{-1}A$ для $S \subset A$, то функции из S могут обращаться в нуль только в точках α и бесконечно удаленной. Если $s \in S$ имеет в α нуль порядка n, то $n[\alpha] = 0_E$ относительно группового закона. Тогда $n = 0$, $s(\alpha) \neq 0$, $s^{-1} \in A$ и $A' = S^{-1}A = A$ — противоречие.

В таком случае кольцо A' будет получаться лишь как **подкольцо** $A' \subset S^{-1}$ в какой-то локализации A по функциям с нулями в α — оно определено теми условиями, что его элементы должны быть регулярны во всех других точках, где обнуляются функции из S, кроме α.

Пучки

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — топологическое пространство. **Предпучком колец** $\mathcal{F}$ на X называется сопоставление каждому **открытому множеству** $U \subset X$ **кольца** $\Gamma(U, \mathcal{F})$, а каждой **паре** открытых множеств $U \subset U'$ **гомоморфизма** $\operatorname{res}_U^{U'} \colon \Gamma(U') \to \Gamma(U)$ такое, что для всякой тройки $U \subset U' \subset U''$ **имеет место равенство** $\operatorname{res}_U^{U'} \circ \operatorname{res}_{U'}^{U''} = \operatorname{res}_U^{U''}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Предпучок колец называется **пучком,** если для **всякого набора** открытых множеств $\{U_k\}$, $U = \bigcup_k U_k$ и **набора сечений** $s_k \in \Gamma(U_k)$ таких, что для всякой пары i, j имеет место $\operatorname{res}_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \operatorname{res}_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$, **существует и единственно** сечение $s \in \Gamma(U)$ такое, что $\forall k \operatorname{res}_{U_k}^{U}(s) = s_k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Окольцованным пространством** называется топологическое пространство с пучком колец.

Структурный пучок

Если $\operatorname{Spec} A$ — аффинная схема, на ней можно определить **предпучок** $\mathcal{O}$ следующим образом: $\Gamma(U, \mathcal{O})$ — рациональные функции $a/b \in \operatorname{Frac}(A)$, регулярные во всех точках U. С таким определением, однако, трудно работать в общем случае (например когда A не целостно).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Структурный пучок на $\operatorname{Spec} A$ определяется на базовых открытых множествах $U_f = \operatorname{Spec} A \backslash V(f)$ как A_f, а на всех остальных — как **минимальное кольцо,** удовлетворяющее аксиоме пучка.

Иначе говоря, назовем **системой элементов** открытое покрытие $\bigcup_k U_{f_k} = U$ и набор $s_k \in A_{f_k}$. Будем говорить, что она **согласована**, если для любых i, j имеем $s_i/1 = s_j/1 \in A_{f_i, f_j}$. Две согласованных системы элементов $\{(U_k, s_k)\}, \{(U'_, s'_k)\}$ называются **эквивалентными**, если их объединение снова согласовано. Тогда элементами $s \in \Gamma(U, \mathcal{O})$ мы будем называть классы эквивалентности согласованных систем элементов. Гомоморфизмы ограничения на множества покрытия мы будем вводить как $\operatorname{res}^U_{U_k}(s) = s_k$. Если $U_F \supset U$, то гомоморфизм $\operatorname{res}^{U_F}_U$ можно определить как $s \mapsto \{U_{f_k}, s/1 \in A_{F, f_k}\}$.

Еще раз о лемме Хартогса

ПРИМЕР: Рассмотрим покрытие $\mathbb{A}^2 \setminus \{(0;0)\}$ **двумя множествами** $\mathbb{A}^2 \setminus Ox = \operatorname{Spec} k[x,y,y^{-1}]$ и $\mathbb{A}^2 \setminus Oy = \operatorname{Spec} k[x,y,x^{-1}]$. Их пересечение есть $\operatorname{Spec} k[x,y,x^{-1},y^{-1}]$. Согласованные системы элементов для этого покрытия — это элементы максимального кольца R, делающего **диаграмму коммутативной:**

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & k[x,y]_{x^{-1}} \arrow[d] \\ k[x,y]_{y^{-1}} \arrow[r] & k[x,y]_{x^{-1},y^{-1}} \end{tikzcd}$$

Поскольку нижняя и правая стрелка — вложения, имеем

$$R = k[x,y]_{x^{-1}} \cap k[x,y]_{y^{-1}} \subset k[x,y]_{x^{-1},y^{-1}}.$$

Иначе говоря, $R = k[x,y]$**.**

Схемы

Итак, простейшее открытое множество в $\mathbb{A}^2$ **не является** спектром кольца. Это значит, что даже в аффинной геометрии нельзя не использовать **более общего понятия.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Схема — это окольцованное пространство, **локально** изоморфное **аффинной схеме** (спектру кольца с его структурным пучком).

Вместо обычных понятий коммутативной алгебры (таких как модуль над кольцом), теория схем рассматривает **пучки** $\mathcal{O}$-модулей — их сечения над U образуют модуль над кольцом $\Gamma(U, \mathcal{O})$.

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1}B$ **цел над локальным кольцом** $A_\mathfrak{m}$. Тогда b **цел над** A**.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1} B$ **цел над локальным кольцом** $A_{\mathfrak{m}}$. Тогда b **цел над** A**.**
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ШАГ 1. Уравнение на b над $A_{\mathfrak{m}}$ выглядит как $b^{n+1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1} b + \dots + \frac{p_n}{q_n} b^n$, что равносильно $\left(\prod_{i=0}^n q_i\right) b^{n+1} = p_0 + p_1 b + \dots + p_n b^n$. Пусть $U_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Spec}(A)$ — открытое множество, дополнение до нулей $Q_{\mathfrak{m}} = \prod_{i=0}^n q_i$. Значит, b **цел** над $k[U_{\mathfrak{m}}]$, **настоящим открытым множеством.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1}B$ **цел над локальным кольцом** $A_\mathfrak{m}$. Тогда b **цел над** A**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ШАГ 1. Уравнение на b над $A_\mathfrak{m}$ выглядит как $b^{n+1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}b + \dots + \frac{p_n}{q_n}b^n$, что равносильно $\left(\prod_{i=0}^n q_i\right) b^{n+1} = p_0 + p_1 b + \dots + p_n b^n$. Пусть $U_\mathfrak{m} \subset \operatorname{Spec}(A)$ — открытое множество, дополнение до нулей $Q_\mathfrak{m} = \prod_{i=0}^n q_i$. Значит, b **цел** над $k[U_\mathfrak{m}]$, **настоящим открытым множеством.**

ШАГ 2. Система $\{U(\mathfrak{m})\}$ покрывает $\operatorname{Spec} A$. Выберем **конечное подпокрытие** $\{U_k\}_{i=1}^N$. Можем написать: $Q_k b^{n+1} = \sum_{i=0}^n p_{i,k} b^i$. Функции $\{Q_k\}_{k=1}^N$ обнуляются лишь в дополнениях до U_k, а коль скоро они покрывают все, **совместные нули** идеала $(Q_1, \dots Q_N)$ — **пустое множество.** Значит, $(Q_1, \dots Q_N) \ni 1 = \sum a_k Q_k$, и **имеет место разложение**

$$b^{n+1} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=1}^N a_k p_{i,k} \right) b^i . \blacksquare$$