Нетеровость и локализация

27 ноября 2023 года

Конечные и квазиконечные отображения (напоминание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение k-алгебр. Если B **цела** над A, то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **конечным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \to B$ — отображение k-алгебр. Если **прообразы всех точек конечны,** то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **квазиконечным.**

Конечные и квазиконечные отображения (напоминание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение k-алгебр. Если B **цела** над A, то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **конечным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \to B$ — отображение k-алгебр. Если **прообразы всех точек конечны,** то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **квазиконечным.**

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x]$ и $B = k[x, x^{-1}]$. Октрытое вложение **квазиконечно, но не конечно:** x^{-1} **не является целым** над $k[x]$.

Конечные и квазиконечные отображения (напоминание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение k-алгебр. Если B **цела** над A, то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **конечным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \to B$ — отображение k-алгебр. Если **прообразы всех точек конечны,** то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **квазиконечным.**

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x]$ и $B = k[x, x^{-1}]$. Октрытое вложение **квазиконечно, но не конечно:** x^{-1} **не является целым** над $k[x]$.

ТЕОРЕМА: (основная теорема Зариского) Квазиконечное отображение аффинных многообразий $X \to Y$ **может быть разложено** как $X \to \bar{X} \to Y$, где $X \to \bar{X}$ — **открытое вложение,** а $\bar{X} \to Y$ — **конечное** отображение.■

Конечные и квазиконечные отображения (напоминание)

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение k-алгебр. Если B **цела** над A, то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **конечным.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть $A \to B$ — отображение k-алгебр. Если **прообразы всех точек конечны,** то отображение аффинных многообразий $\operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ называется **квазиконечным.**

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x]$ и $B = k[x, x^{-1}]$. Октрытое вложение **квазиконечно, но не конечно:** x^{-1} **не является целым** над $k[x]$.

ТЕОРЕМА: (основная теорема Зариского) Квазиконечное отображение аффинных многообразий $X \to Y$ **может быть разложено** как $X \to \bar{X} \to Y$, где $X \to \bar{X}$ — **открытое вложение,** а $\bar{X} \to Y$ — **конечное** отображение.■

ТЕОРЕМА: (основная теорема Зариского) Бирациональное отображение на **нормальное многообразие** в точке, где оно **не есть локальный изоморфизм,** имеет слой **положительной размерности.**■

Нетеровы кольца и модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — модуль над кольцом. Он называется **нетеровым,** если всякая **восходящая** цепочка подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ в M **стабилизируется:** $\exists n \forall i > n \colon M_i = M_n$. Кольцо называется **нетеровым,** если оно нетерово как модуль над собой.

Нетеровы кольца и модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — модуль над кольцом. Он называется **нетеровым,** если всякая **восходящая** цепочка подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \dots$ в M **стабилизируется:** $\exists n \forall i > n\colon M_i = M_n$. Кольцо называется **нетеровым,** если оно нетерово как модуль над собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение алгебр, порожденных элементом h. Если B **нетерово как модуль** над A, то h **цел** над A.$\blacksquare$

Нетеровы кольца и модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — модуль над кольцом. Он называется **нетеровым,** если всякая **восходящая** цепочка подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ в M **стабилизируется:** $\exists n \forall i > n\colon M_i = M_n$. Кольцо называется **нетеровым,** если оно нетерово как модуль над собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение алгебр, порожденных элементом h. Если B **нетерово как модуль** над A, то h **цел** над A.■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Локализация нетерова модуля — нетеров модуль над локальным кольцом.■

Нетеровы кольца и модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть M — модуль над кольцом. Он называется **нетеровым,** если всякая **восходящая** цепочка подмодулей $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \ldots$ в M **стабилизируется:** $\exists n \forall i > n \colon M_i = M_n$. Кольцо называется **нетеровым,** если оно нетерово как модуль над собой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ — расширение алгебр, порожденных элементом h. Если B **нетерово как модуль** над A, то h **цел** над A.■

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Локализация нетерова модуля — нетеров модуль над локальным кольцом.■

ПРИМЕР: Пусть $A = k[x]$, $B = k[x, x^{-1}]$. Этот модуль **ненетеров.** При локализации в идеале (x) имеем: $A_{(x)} = k[[x]]$, $B_{(x)} = k((x))$. Ряды Лорана как модуль над степенными рядами имеют **бесконечный базис** $\{x^{-i}\}_{i=0}^{+\infty}$**,** так что этот модуль **также ненетеров.** При локализации в идеале $(x-1)$ имеем: $A_{(x-1)} = k[[x-1]]$, $B_{(x-1)} = k[x^{-1}]((x-1))$. Но $x^{-1} = \frac{1}{1+(x-1)} = -(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \ldots$, так что эта локализация — **свободный** $k[[x-1]]$**-модуль ранга 1,** в частности, **нетеров.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1}B$ **цел над локальным кольцом** $A_\mathfrak{m}$. Тогда b **цел над** A**.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1}B$ **цел над локальным кольцом** $A_{\mathfrak{m}}$. Тогда b **цел над** A**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ШАГ 1. Уравнение на b над $A_{\mathfrak{m}}$ выглядит как $b^{n+1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}b + \dots + \frac{p_n}{q_n}b^n$, что равносильно $\left(\prod_{i=0}^n q_i\right) b^{n+1} = p_0 + p_1 b + \dots + p_n b^n$. Пусть $U_{\mathfrak{m}} \subset \operatorname{Spec}(A)$ — открытое множество, дополнение до нулей $Q_{\mathfrak{m}} = \prod_{i=0}^n q_i$. Значит, b **цел** над $k[U_{\mathfrak{m}}]$, **настоящим открытым множеством.**

Свойство быть целым проверяется локально

ПРИМЕР: Пусть $M = \bigoplus_p \mathbb{F}_p$ — сумма всех конечных полей как $\mathbb{Z}$-модуль. Все его локализации **нетеровы,** а сам он **ненетеров.**

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Пусть $A \subset B$ расширение колец, и $b \in B$ — элемент. Допустим, что для **всякого максимального** идеала $\mathfrak{m} \subset A$ элемент $\frac{b}{1} \in (A \setminus \mathfrak{m})^{-1}B$ **цел над локальным кольцом** $A_\mathfrak{m}$. Тогда b **цел над** A**.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: ШАГ 1. Уравнение на b над $A_\mathfrak{m}$ выглядит как $b^{n+1} = \frac{p_0}{q_0} + \frac{p_1}{q_1}b + \dots + \frac{p_n}{q_n}b^n$, что равносильно $\left(\prod_{i=0}^n q_i\right) b^{n+1} = p_0 + p_1 b + \dots + p_n b^n$. Пусть $U_\mathfrak{m} \subset \operatorname{Spec}(A)$ — открытое множество, дополнение до нулей $Q_\mathfrak{m} = \prod_{i=0}^n q_i$. Значит, b **цел** над $k[U_\mathfrak{m}]$, **настоящим открытым множеством.**

ШАГ 2. Система $\{U(\mathfrak{m})\}$ покрывает $\operatorname{Spec} A$. Выберем **конечное подпокрытие** $\{U_k\}_{i=1}^N$. Можем написать: $Q_k b^{n+1} = \sum_{i=0}^n p_{i,k} b^i$. Функции $\{Q_k\}_{k=1}^N$ обнуляются лишь в дополнениях до U_k, а коль скоро они покрывают все, **совместные нули** идеала $(Q_1, \dots Q_N)$ — **пустое множество.** Значит, $(Q_1, \dots Q_N) \ni 1 = \sum a_k Q_k$, и **имеет место разложение**

$$b^{n+1} = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=1}^N a_k p_{i,k} \right) b^i. \blacksquare$$

Полные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебраическое многообразие X называется **полным,** если для **всякого** многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ **замкнута.**

Полные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебраическое многообразие X называется **полным,** если для **всякого** многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ **замкнута.**

ПРИМЕР: Аффинные кривые **не полны:** если X такая кривая, и $\bar{X}$ — ее проективное замыкание, то проекция $X \times \bar{X} \to \bar{X}$ переводит диагональ (замкнутое подмножество) в незамкнутое подмножество $X \subset \bar{X}$.

Полные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебраическое многообразие X называется **полным,** если для **всякого** многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ **замкнута.**

ПРИМЕР: Аффинные кривые **не полны:** если X такая кривая, и $\bar{X}$ — ее проективное замыкание, то проекция $X \times \bar{X} \to \bar{X}$ переводит диагональ (замкнутое подмножество) в незамкнутое подмножество $X \subset \bar{X}$.

ТЕОРЕМА: Гладкие проективные многообразия полны.■

Полные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебраическое многообразие X называется **полным,** если для **всякого** многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ **замкнута.**

ПРИМЕР: Аффинные кривые **не полны:** если X такая кривая, и $\bar{X}$ — ее проективное замыкание, то проекция $X \times \bar{X} \to \bar{X}$ переводит диагональ (замкнутое подмножество) в незамкнутое подмножество $X \subset \bar{X}$.

ТЕОРЕМА: Гладкие проективные многообразия полны.■

ТЕОРЕМА: Алгебраическое многообразие X над $\mathbb{C}$ полно тогда и только тогда, когда **аналитическое** многообразие X^{an} **компактно.** ■

Полные многообразия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Алгебраическое многообразие X называется **полным,** если для **всякого** многообразия Y проекция $X \times Y \to Y$ **замкнута.**

ПРИМЕР: Аффинные кривые **не полны:** если X такая кривая, и $\bar{X}$ — ее проективное замыкание, то проекция $X \times \bar{X} \to \bar{X}$ переводит диагональ (замкнутое подмножество) в незамкнутое подмножество $X \subset \bar{X}$.

ТЕОРЕМА: Гладкие проективные многообразия полны.■

ТЕОРЕМА: Алгебраическое многообразие X над $\mathbb{C}$ полно тогда и только тогда, когда **аналитическое** многообразие X^{an} **компактно.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, полнота — **алгебраический аналог компактности.** Попытаемся понять, каков аналог **отображения с компактными слоями.**

Универсальная замкнутость и собственность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение схем $X \to Y$ называется **универсально замкнутым,** если для **всякого** отображения $Z \to Y$ отображение $X \times_Y Z \to Z$ является **замкнутым.**

Универсальная замкнутость и собственность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение схем $X \to Y$ называется **универсально замкнутым,** если для **всякого** отображения $Z \to Y$ отображение $X \times_Y Z \to Z$ является **замкнутым.**

ПРИМЕР: Если $Y = \operatorname{Spec} k$, а X — многообразие, универсальная замкнутость равносильна полноте.

Универсальная замкнутость и собственность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение схем $X \to Y$ называется **универсально замкнутым,** если для **всякого** отображения $Z \to Y$ отображение $X \times_Y Z \to Z$ является **замкнутым.**

ПРИМЕР: Если $Y = \operatorname{Spec} k$, а X — многообразие, универсальная замкнутость равносильна полноте.

ПРИМЕР: Накрытия аффинных кривых универсально замкнуты.

ПРИМЕР: Открытое вложение $A^1 \setminus \{0\} \to A^1$ не универсально замкнуто.

Универсальная замкнутость и собственность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение схем $X \to Y$ называется **универсально замкнутым,** если для **всякого** отображения $Z \to Y$ отображение $X \times_Y Z \to Z$ является **замкнутым.**

ПРИМЕР: Если $Y = \operatorname{Spec} k$, а X — многообразие, универсальная замкнутость равносильна полноте.

ПРИМЕР: Накрытия аффинных кривых универсально замкнуты.

ПРИМЕР: Открытое вложение $A^1 \setminus \{0\} \to A^1$ не универсально замкнуто.

ТЕОРЕМА: **Универсально замкнутое квазиконечное** отображение многообразий **конечно.** ■

Универсальная замкнутость и собственность

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Отображение схем $X \to Y$ называется **универсально замкнутым,** если для **всякого** отображения $Z \to Y$ отображение $X \times_Y Z \to Z$ является **замкнутым.**

ПРИМЕР: Если $Y = \operatorname{Spec} k$, а X — многообразие, универсальная замкнутость равносильна полноте.

ПРИМЕР: Накрытия аффинных кривых универсально замкнуты.

ПРИМЕР: Открытое вложение $A^1 \setminus \{0\} \to A^1$ не универсально замкнуто.

ТЕОРЕМА: **Универсально замкнутое квазиконечное** отображение многообразий **конечно.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Для общих схем это утверждение **неверно.** Чтобы оно стало верным, необходимо добавить два условия, для многообразий автоматических: **отделимость** (**диагональ** $X \to X \times_Y X \to Y$ **замкнута**) и **конечный тип** (соответствующее расширение алгебр **мультипликативно конечно порождено**). Отделимые универсально замкнутые отображения схем конечного типа называются **собственными.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дедекиндово кольцо** — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Первое из определений по смыслу (для случая k-алгебр) равнозначно «координатному кольцу **неприводимой гладкой аффинной кривой** над полем k». Вообще говоря, все они **эквивалентны.**

Дедекиндовы кольца

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — **целозамкнутое нетерово** кольцо, в котором всякий ненулевой **простой идеал максимален.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — кольцо, в котором всякий ненулевой собственный идеал раскладывается в **произведение простых.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Дедекиндово кольцо — кольцо, в котором **локализация** во всяком **максимальном идеале** есть **кольцо дискретного нормирования.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Первое из определений по смыслу (для случая k-алгебр) равнозначно «координатному кольцу **неприводимой гладкой аффинной кривой** над полем k». Вообще говоря, все они **эквивалентны.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Кольца дискретного нормирования суть кольца главных идеалов, однако дедекиндовы кольца, вообще говоря, **таковыми не являются.** Иначе говоря, дедкиндовость — **глобализация** свойства кольца главных идеалов.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J) - (a)$. $x \in \mathrm{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J) - (a)$**.**

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathsf{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J)-(a)$. $x \in \mathsf{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J)-(a)$**.** Обратно, со всяким **дивизором** D **можно связать дробный идеал:** через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

Дробные идеалы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Дробным идеалом** кольца A называется **конечно-порожденный A-подмодуль** поля $\mathrm{Frac}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Всякий дробный идеал имеет вид $I = \frac{1}{a}J$ для $a \in A$ и идеала $J \subset A$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — координатное кольцо гладкой кривой, то с дробным идеалом можно связать **дивизор.** (Целый) идеал J определяет эффективный дивизор совместных нулей всех своих элементов (J), функция a — дивизор своих нулей, и дивизор, связанный с $\frac{1}{a}J$, **будет иметь вид** $(J) - (a)$. $x \in \mathrm{Frac}(A)$ принадлежит I **тогда и только тогда, когда** $(x) > (J) - (a)$. Обратно, со всяким **дивизором** D **можно связать дробный идеал:** через точки D, идущие с отрицательным коэффициентом, следует провести кривую (ее уравнение будет $a = 0$), а в качестве эффективного дивизора (I) взять точки D с положительным коэффициентом и лишние точки пересечения кривой $a = 0$ с нашей.

ЗАМЕЧАНИЕ: Для особой кривой это **неверно:** так, на кривой $y^2 = x^3$ дивизор $-(0;0)$ **не приходит** ни из какого дробного идеала.

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обратимость дробного идеала — **локальное свойство.** Дробные идеалы **колец дискретного нормирования** (как и любых колец главных идеалов) **обратимы.** Все **локальные кольца дедекиндова кольца — кольца дискретного нормирования.** ■

Обратимость дробных идеалов

Произведение дробных идеалов определяется аналогично произведению идеалов. Дробный идеал I называется **обратимым,** если существует дробный идеал I' такой, что $II' = A$. **Главные дробные идеалы обратимы.**

ЗАМЕЧАНИЕ: У координатного кольца гладкой кривой всякий ненулевой дробный идеал обратим (это доказано на предыдущем слайде).

ТЕОРЕМА: Ненулевые дробные идеалы **дедекиндова** кольца **обратимы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Обратимость дробного идеала — **локальное свойство.** Дробные идеалы **колец дискретного нормирования** (как и любых колец главных идеалов) **обратимы.** Все **локальные кольца дедекиндова кольца — кольца дискретного нормирования.** ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Это свойство — **еще одно определение** дедекиндова кольца.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Cl}(A)$ — тривиальная группа, **и наоборот.** Таким образом, группа классов **контролирует неоднозначность разложения** на множители.

Группа классов идеалов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Фактор группы всех (обратимых) дробных идеалов кольца A по главным называется **группой классов идеалов** $\mathrm{Cl}(A)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — кольцо главных идеалов, то $\mathrm{Cl}(A)$ — тривиальная группа, **и наоборот.** Таким образом, группа классов **контролирует неоднозначность разложения** на множители.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку на кривых **главным дробным идеалам соответствуют главные дивизоры,** группа классов идеалов координатного кольца изоморфна **группе классов дивизоров** соответствующей кривой.

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух).

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p+q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\mathrm{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**.**

Вещественная окружность

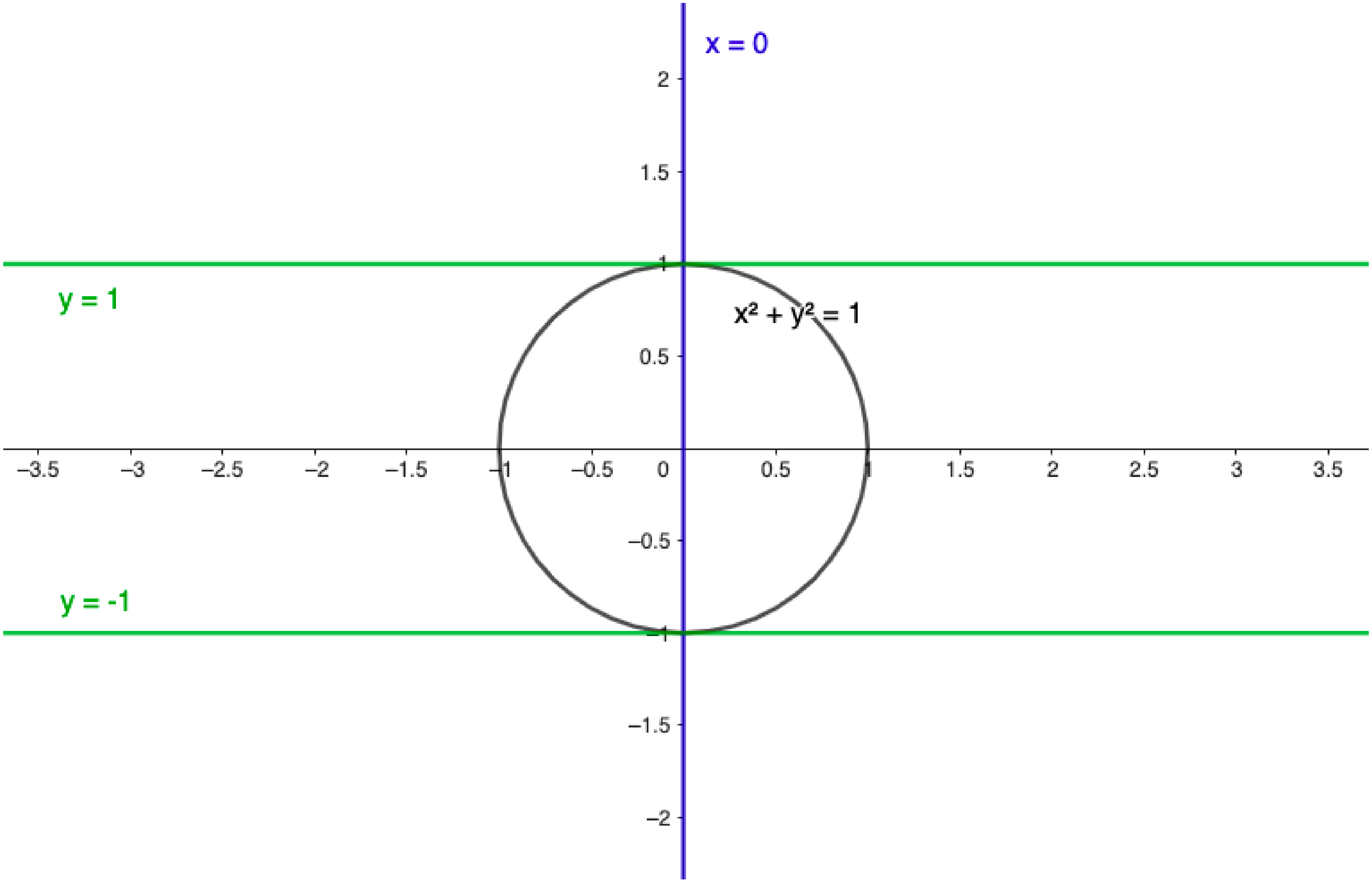
ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p+q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\operatorname{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР: Функция x имеет два нуля на окружности: $(0;\pm 1)$. Если бы кольцо A было **кольцом главных идеалов,** x **раскладывалась бы** в произведение двух функций, каждая из которых имеет один нуль.

Вещественная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A = \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **вещественной окружности,** и p — точка на ней. Тогда дивизор p **не может быть главным:** всякий вещественный многочлен, зануляющийся в p, зануляется еще где-то (либо зануляется в p с кратностью не меньше двух). Дивизор $2p$ **главный:** он задается касательной к окружности в точке p. Для любых двух вещественных точек p, q дивизор $p+q$ **главный** (он задается секущей pq). Итак, $\operatorname{Cl}(A) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$**.**

ПРИМЕР: Функция x имеет два нуля на окружности: $(0; \pm 1)$. Если бы кольцо A было **кольцом главных идеалов,** x **раскладывалась бы** в произведение двух функций, каждая из которых имеет один нуль. Этого не происходит; однако x^2 **раскладывается в два сомножителя,** имеющих эти нули с кратностью два: $x^2 = (1-y)(1+y)$. Это пример **неоднозначного разложения на множители.**



Квадрат синей функции раскладывается в произведение двух зеленых, но она сама — простой элемент.

Комплексная окружность

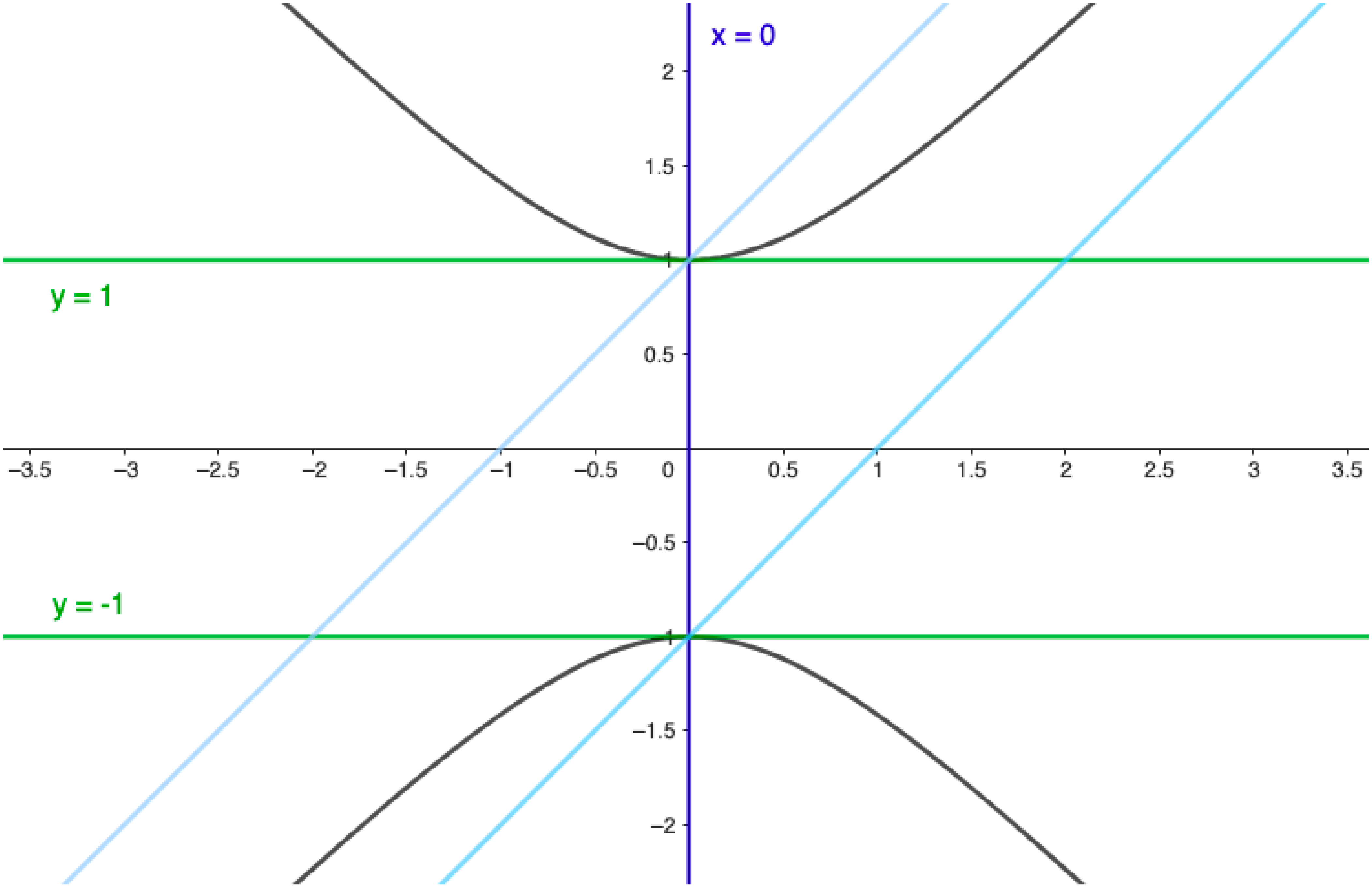
ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x + iy - i = 0$ и $x - iy - i = 0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0; \pm 1)$.

Комплексная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x+iy-i = 0$ и $x-iy-i=0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0;\pm 1)$. Если их перемножить, получится $(x-i)^2-(iy)^2 = x^2-2ix-1+y^2 = -2ix$ — что отличается от x на обратимый элемент $2i$.

Комплексная окружность

ПРИМЕР: Пусть $A' = \mathbb{C}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ — координатное кольцо **комплексной окружности.** Она имеет мнимые асимптоты $x \pm iy = 0$; в частности, функции $x + iy - i = 0$ и $x - iy - i = 0$ имеют по **единственному нулю** в точках $(0; \pm 1)$. Если их перемножить, получится $(x - i)^2 - (iy)^2 = x^2 - 2ix - 1 + y^2 = -2ix$ — что отличается от x на обратимый элемент $2i$. Если же каждую из этих функций возвести в квадрат, получится $(x+iy-i)^2 = x^2+2ix(y-1)-(y-1)^2 = x^2+2ix(y-1)-y^2+2y-1 = 2ix(y-1)-2y(y-1) = 2i(x+iy)(y-1)$. Функция $x+iy$ в нашем кольце также обратима: в самом деле, $(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = 1$. Таким образом, **при комплексификации окружности неоднозначность разложения на множители исчезает.**



Каждая из зеленых функций теперь — квадрат голубой, а синяя — произведение голубых.

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Используя **теорему Безу,** можно заключить, что такая кривая, если она имеет степень d, должна иметь на бесконечности **особую точку кратности d или $d-1$,** причем **определенную над тем же полем,** что сама кривая.

Кольца главных идеалов

Итак, мы можем сформулировать, когда **координатное кольцо аффинной кривой является кольцом главных идеалов:** для каждой точки кривой должна существовать **функция, зануляющаяся только в ней.**

Используя **теорему Безу,** можно заключить, что такая кривая, если она имеет степень d, должна иметь на бесконечности **особую точку кратности d или $d-1$,** причем **определенную над тем же полем,** что сама кривая.

В частности, проекция из такой точки определяет **рациональную параметризацию** кривой.