Арифметика линейных расслоений

15 апреля 2024 года

Линейные расслоения как группа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — многообразие. Тогда линейные расслоения с операцией тензорного умножения образуют абелеву группу, называемую **группой Пикара** $\operatorname{Pic}(X)$.

Линейные расслоения как группа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — многообразие. Тогда линейные расслоения с операцией тензорного умножения образуют абелеву группу, называемую **группой Пикара** $\mathrm{Pic}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, всякое линейное расслоение на ней имеет вид $\mathcal{O}_C(D) = \bigotimes \mathcal{O}_C(n_i x_i)$ для какого-то дивизора $D = \sum n_i x_i$.

Линейные расслоения как группа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — многообразие. Тогда линейные расслоения с операцией тензорного умножения образуют абелеву группу, называемую **группой Пикара** $\operatorname{Pic}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, всякое линейное расслоение на ней имеет вид $\mathcal{O}_C(D) = \bigotimes \mathcal{O}_C(n_i x_i)$ для какого-то дивизора $D = \sum n_i x_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Группа Пикара гладкой проективной кривой изоморфна группе классов дивизоров. Степень является гомоморфизмом группы Пикара в целые числа.

Линейные расслоения как группа

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Пусть X — многообразие. Тогда линейные расслоения с операцией тензорного умножения образуют абелеву группу, называемую **группой Пикара** $\mathrm{Pic}(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, всякое линейное расслоение на ней имеет вид $\mathcal{O}_C(D) = \bigotimes \mathcal{O}_C(n_i x_i)$ для какого-то дивизора $D = \sum n_i x_i$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Группа Пикара гладкой проективной кривой изоморфна группе классов дивизоров. Степень является гомоморфизмом группы Пикара в целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Множество линейных расслоений степени d обозначается Pic^d. Pic^0 является подгруппой, и всякое Pic^d как множество **неканонически** изоморфно Pic^0. Отображение $C \to \mathrm{Pic}^1(C)$, $x \mapsto \mathcal{O}_C(x)$, называется **отображением Абеля — Якоби.**

Отображение Абеля — Якоби для комплексных кривых

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим гладкую кубику C в вейерштрассовой нормальной форме $y^2 = x^3 + px + q$. Дифференциальная форма $\alpha = dy/x$ в ограничении на нее не имеет нулей и полюсов.

Отображение Абеля — Якоби для комплексных кривых

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим гладкую кубику C в вейерштрассовой нормальной форме $y^2 = x^3 + px + q$. Дифференциальная форма $\alpha = dy/x$ в ограничении на нее не имеет нулей и полюсов.

Выберем точку $p \in C$, и введем функцию $f(z) = \int_p^z \alpha$. Она определена с точностью до решетки $\Lambda = \left\{\int_\gamma \alpha : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}$.

Отображение Абеля — Якоби для комплексных кривых

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим гладкую кубику C в вейерштрассовой нормальной форме $y^2 = x^3 + px + q$. Дифференциальная форма $\alpha = dy/x$ в ограничении на нее не имеет нулей и полюсов.

Выберем точку $p \in C$, и введем функцию $f(z) = \int_p^z \alpha$. Она определена с точностью до решетки $\Lambda = \left\{\int_\gamma \alpha : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: **(Абель, ок. 1825)** Это отображение — аналитический изоморфизм C с фактором $\mathbb{C}/\Lambda$. ■

Отображение Абеля — Якоби для комплексных кривых

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим гладкую кубику C в вейерштрассовой нормальной форме $y^2 = x^3 + px + q$. Дифференциальная форма $\alpha = dy/x$ в ограничении на нее не имеет нулей и полюсов.

Выберем точку $p \in C$, и введем функцию $f(z) = \int_p^z \alpha$. Она определена с точностью до решетки $\Lambda = \left\{\int_\gamma \alpha : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: (Абель, ок. 1825) Это отображение — аналитический изоморфизм C с фактором $\mathbb{C}/\Lambda$. ■

Для произвольной кривой C выберем базис $\alpha_1, \dots, \alpha_g$ в пространстве дифференциальных форм. Он определяет решетку

$$\Lambda = \left\{\left(\int_\gamma \alpha_1, \dots, \int_\gamma \alpha_g\right) : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}^g.$$

Рассмотрим отображение $z \mapsto \left(\int_p^z \alpha_1, \dots, \int_p^z \alpha_g\right) \mod \Lambda$.

Отображение Абеля — Якоби для комплексных кривых

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Рассмотрим гладкую кубику C в вейерштрассовой нормальной форме $y^2 = x^3 + px + q$. Дифференциальная форма $\alpha = dy/x$ в ограничении на нее не имеет нулей и полюсов.

Выберем точку $p \in C$, и введем функцию $f(z) = \int_p^z \alpha$. Она определена с точностью до решетки $\Lambda = \left\{\int_\gamma \alpha : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}$.

ТЕОРЕМА: (Абель, ок. 1825) Это отображение — аналитический изоморфизм C с фактором $\mathbb{C}/\Lambda$. ■

Для произвольной кривой C выберем базис $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ в пространстве дифференциальных форм. Он определяет решетку

$$\Lambda = \left\{\left(\int_\gamma \alpha_1, \ldots, \int_\gamma \alpha_g\right) : \gamma \in H_1(C, \mathbb{Z})\right\} \subset \mathbb{C}^g.$$

Рассмотрим отображение $z \mapsto \left(\int_p^z \alpha_1, \ldots, \int_p^z \alpha_g\right) \mod \Lambda$.

ТЕОРЕМА: (Абеля — Якоби) Многообразие $\mathbb{C}^g/\Lambda$ (**якобиан** кривой C) аналитически изоморфно $\operatorname{Pic}^0(C)$. Отображение выше при этом переводится в отображение Абеля — Якоби $z \mapsto \mathcal{O}_C(p - z) \in \operatorname{Pic}^0(C)$. Выбор точки $p \in C$ соответствует выбору изоморфизма $\operatorname{Pic}^0(C) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Pic}^1(C)$. ■

Алгебраико-геометрическое описание якобиана

Аналогично отображению Абеля — Якоби $C \to \mathrm{Pic}^1(C)$ можно рассмотреть отображения $C \times C \to \mathrm{Pic}^2(C)$ и т. д. Поскольку размерность $\mathrm{Pic}^d(C)$ одна и та же, а размерность C^d растет, можно ожидать, что рано или поздно она покроет весь Pic^d.

Алгебраико-геометрическое описание якобиана

Аналогично отображению Абеля — Якоби $C \to \mathsf{Pic}^1(C)$ можно рассмотреть отображения $C \times C \to \mathsf{Pic}^2(C)$ и т. д. Поскольку размерность $\mathsf{Pic}^d(C)$ одна и та же, а размерность C^d растет, можно ожидать, что рано или поздно она покроет весь Pic^d.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметрической степенью кривой S^dC называется фактор C^d по действию симметрической группы. Отображение Абеля — Якоби пропускается через нее.

Алгебраико-геометрическое описание якобиана

Аналогично отображению Абеля — Якоби $C \to \mathrm{Pic}^1(C)$ можно рассмотреть отображения $C \times C \to \mathrm{Pic}^2(C)$ и т. д. Поскольку размерность $\mathrm{Pic}^d(C)$ одна и та же, а размерность C^d растет, можно ожидать, что рано или поздно она покроет весь Pic^d.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Симметрической степенью кривой S^dC называется фактор C^d по действию симметрической группы. Отображение Абеля — Якоби пропускается через нее.

ТЕОРЕМА: (Якоби об обращении) Если $d \geqslant g$, то отображение $S^dC \to \mathrm{Pic}^d(C)$ сюръективно, а слои его — проективные пространства. ■

Алгебраико-геометрическое описание якобиана

Аналогично отображению Абеля — Якоби $C \to \mathrm{Pic}^1(C)$ можно рассмотреть отображения $C \times C \to \mathrm{Pic}^2(C)$ и т. д. Поскольку размерность $\mathrm{Pic}^d(C)$ одна и та же, а размерность C^d растет, можно ожидать, что рано или поздно она покроет весь Pic^d.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симметрической степенью** кривой S^dC называется фактор C^d по действию симметрической группы. Отображение Абеля — Якоби пропускается через нее.

ТЕОРЕМА: **(Якоби об обращении)** Если $d \geqslant g$, то отображение $S^dC \to \mathrm{Pic}^d(C)$ сюръективно, а слои его — проективные пространства. ■

ПРИМЕР: Пусть C — плоская кубика. Отображение Абеля — Якоби $S^2C \to \mathrm{Pic}^2(C) \cong C$ можно описать так: (x, y) отправляется в третью точку пересечения xy с C. Его слои — проективные прямые.

Алгебраико-геометрическое описание якобиана

Аналогично отображению Абеля — Якоби $C \to \mathrm{Pic}^1(C)$ можно рассмотреть отображения $C \times C \to \mathrm{Pic}^2(C)$ и т. д. Поскольку размерность $\mathrm{Pic}^d(C)$ одна и та же, а размерность C^d растет, можно ожидать, что рано или поздно она покроет весь Pic^d.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Симметрической степенью** кривой S^dC называется фактор C^d по действию симметрической группы. Отображение Абеля — Якоби пропускается через нее.

ТЕОРЕМА: **(Якоби об обращении)** Если $d \geqslant g$, то отображение $S^dC \to \mathrm{Pic}^d(C)$ сюръективно, а слои его — проективные пространства. ■

ПРИМЕР: Пусть C — плоская кубика. Отображение Абеля — Якоби $S^2C \to \mathrm{Pic}^2(C) \cong C$ можно описать так: (x, y) отправляется в третью точку пересечения xy с C. Его слои — проективные прямые.

ПРИМЕР: Пусть C — кривая рода два. Известно, что она обладает инволюцией $\iota\colon C \to C$ с шестью неподвижными точками, фактор по которой — P^1. Тогда отображение $S^2C \to \mathrm{Pic}^2(C)$ — изоморфизм вне локуса пар $(p, \iota(p))$, который она стягивает в точку. Иначе говоря, якобиан кривой рода два получается из S^2C **сдутием** одной рациональной кривой.

Слои отображения Абеля — Якоби

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathcal{O}(p_1 + p_2 + \cdots + p_d) \cong L$, то в $\Gamma(L)$ есть сечение s с $(s) = p_1 + p_2 + \cdots + p_d$, и оно единственно с точностью до пропорциональности.

Слои отображения Абеля — Якоби

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathcal{O}(p_1 + p_2 + \cdots + p_d) \cong L$, то в $\Gamma(L)$ есть сечение s с $(s) = p_1 + p_2 + \cdots + p_d$, и оно единственно с точностью до пропорциональности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слой отображения $S^d C \to \operatorname{Pic}^d(C)$ над точкой L изоморфен $P\,\Gamma(L, C)$.

Слои отображения Абеля — Якоби

ЗАМЕЧАНИЕ: Если $\mathcal{O}(p_1 + p_2 + \cdots + p_d) \cong L$, то в $\Gamma(L)$ есть сечение s с $(s) = p_1 + p_2 + \cdots + p_d$, и оно единственно с точностью до пропорциональности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Слой отображения $S^d C \to \operatorname{Pic}^d(C)$ над точкой L изоморфен $\mathsf{P}\,\Gamma(L, C)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, если доказать, что отображение $S^d C \to \operatorname{Pic}^d(C)$ сюръективно, то получим $\dim \Gamma(L, C) \geqslant d - g + 1$. Это и есть **неравенство Римана**.

Почему размерности сходятся

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы якобиан кривой был компактным, необходимо, чтобы решетка Λ имела ранг $2g$. Он равен рангу группы первых гомологий C, рассматриваемой топологически как сфера с ручками.

Почему размерности сходятся

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы якобиан кривой был компактным, необходимо, чтобы решетка Λ имела ранг $2g$. Он равен рангу группы первых гомологий C, рассматриваемой топологически как сфера с ручками.

ТЕОРЕМА: Размерность пространства регулярных алгебраических 1-форм на гладкой проективной комплексной кривой C равна числу ручек у C как топологической поверхности.

Удобно рассматривать двойственное пространство **когомологий.**

Почему размерности сходятся

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы якобиан кривой был компактным, необходимо, чтобы решетка Λ имела ранг $2g$. Он равен рангу группы первых гомологий C, рассматриваемой топологически как сфера с ручками.

ТЕОРЕМА: Размерность пространства регулярных алгебраических 1-форм на гладкой проективной комплексной кривой C равна числу ручек у C как топологической поверхности.

Удобно рассматривать двойственное пространство **когомологий.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурой Ходжа веса 1** называется пара $V_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ и подпространства $V^{1,0} \subset V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ такого, что $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$ пересекает $V^{1,0}$ только по нулевому вектору.

Почему размерности сходятся

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы якобиан кривой был компактным, необходимо, чтобы решетка Λ имела ранг $2g$. Он равен рангу группы первых гомологий C, рассматриваемой топологически как сфера с ручками.

ТЕОРЕМА: Размерность пространства регулярных алгебраических 1-форм на гладкой проективной комплексной кривой C равна числу ручек у C как топологической поверхности.

Удобно рассматривать двойственное пространство **когомологий.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурой Ходжа веса 1** называется пара $V_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ и подпространства $V^{1,0} \subset V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ такого, что $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$ пересекает $V^{1,0}$ только по нулевому вектору. **Якобианом** структуры Ходжа называется фактор $V^{1,0}/\Lambda$, где Λ — образ $V_{\mathbb{Z}}$ при проекции вдоль $V^{0,1}$. Это комплексный тор, и любой комплексный тор получается таким образом.

Почему размерности сходятся

ЗАМЕЧАНИЕ: Чтобы якобиан кривой был компактным, необходимо, чтобы решетка Λ имела ранг $2g$. Он равен рангу группы первых гомологий C, рассматриваемой топологически как сфера с ручками.

ТЕОРЕМА: Размерность пространства регулярных алгебраических 1-форм на гладкой проективной комплексной кривой C равна числу ручек у C как топологической поверхности.

Удобно рассматривать двойственное пространство **когомологий.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Структурой Ходжа веса 1** называется пара $V_{\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ и подпространства $V^{1,0} \subset V_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{C}$ такого, что $V^{0,1} = \overline{V^{1,0}}$ пересекает $V^{1,0}$ только по нулевому вектору. **Якобианом** структуры Ходжа называется фактор $V^{1,0}/\Lambda$, где Λ — образ $V_{\mathbb{Z}}$ при проекции вдоль $V^{0,1}$. Это комплексный тор, и любой комплексный тор получается таким образом.

ЗАМЕЧАНИЕ: Если первые когомологии **сферы с ручками** — это просто **решетка**, то первые когомологии **комплексной кривой — структура Ходжа.**

Соотношения Ходжа — Римана

ЗАМЕЧАНИЕ: Первые когомологии сферы с ручками — это не просто решетка, а решетка с симплектической формой: $\omega(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge \beta$. Она двойствена **форме пересечения** на циклах в H_1.

Соотношения Ходжа — Римана

ЗАМЕЧАНИЕ: Первые когомологии сферы с ручками — это не просто решетка, а решетка с симплектической формой: $\omega(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge \beta$. Она двойственна **форме пересечения** на циклах в H_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, то $\omega(\alpha, \beta) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in H^{1,0}$, и $\omega(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$ для любого ненулевого $\alpha \in H^{1,0}$. Это нетривиальные условия на то, какое положение может принимать пространство $H^{1,0}$. Они называются **соотношениями Ходжа — Римана.**

Соотношения Ходжа — Римана

ЗАМЕЧАНИЕ: Первые когомологии сферы с ручками — это не просто решетка, а решетка с симплектической формой: $\omega(\alpha, \beta) = \int \alpha \wedge \beta$. Она двойственна **форме пересечения** на циклах в H_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, то $\omega(\alpha, \beta) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in H^{1,0}$, и $\omega(\alpha, \bar{\alpha}) > 0$ для любого ненулевого $\alpha \in H^{1,0}$. Это нетривиальные условия на то, какое положение может принимать пространство $H^{1,0}$. Они называются **соотношениями Ходжа — Римана.**

ПРИМЕР: Пусть E — эллиптическая кривая. Тогда $H^1(E, \mathbb{Z})$ — стандартная решетка с образующими e_1, e_2, $\omega(e_1, e_2) = 1$. Если $\alpha = a_1 e_1 + a_2 e_2$ — класс алгебраической 1-формы, то $\omega(\alpha, \bar{\alpha}) = a_1 \bar{a_2} + a_2 \bar{a_1} > 0$. Значит, возможные $H^{1,0}$ образуют комплексный диск в P$(H^1 \otimes \mathbb{C})$, что соответствует параметризации эллиптических кривых точками верхней полуплоскости.

Соотношения Ходжа — Римана

ЗАМЕЧАНИЕ: Первые когомологии сферы с ручками — это не просто решетка, а решетка с симплектической формой: $\omega(\alpha,\beta) = \int \alpha \wedge \beta$. Она двойствена **форме пересечения** на циклах в H_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если C — кривая, то $\omega(\alpha,\beta) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in H^{1,0}$, и $\omega(\alpha,\bar{\alpha}) > 0$ для любого ненулевого $\alpha \in H^{1,0}$. Это нетривиальные условия на то, какое положение может принимать пространство $H^{1,0}$. Они называются **соотношениями Ходжа — Римана.**

ПРИМЕР: Пусть E — эллиптическая кривая. Тогда $H^1(E,\mathbb{Z})$ — стандартная решетка с образующими e_1, e_2, $\omega(e_1,e_2) = 1$. Если $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2$ — класс алгебраической 1-формы, то $\omega(\alpha,\bar{\alpha}) = a_1\bar{a_2} + a_2\bar{a_1} > 0$. Значит, возможные $H^{1,0}$ образуют комплексный диск в $\mathrm{P}(H^1 \otimes \mathbb{C})$, что соответствует параметризации эллиптических кривых точками верхней полуплоскости.

ПРИМЕР: Для кривой рода два условие $\omega|_{H^{1,0}} = 0$ задает гиперповерхность в грассманиане $\mathrm{Gr}(2, H^1) \cong \mathrm{Gr}(2,4)$. Действительно, кривые рода два образуют трехпараметрическое семейство: они получаются как двойные накрытия P^1 с ветвлением в шести точках, из которых три можно считать фиксированными.

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

ТЕОРЕМА: Такая целочисленная форма ψ на структуре Ходжа веса один называется **поляризацией.**

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

ТЕОРЕМА: Такая целочисленная форма ψ на структуре Ходжа веса один называется **поляризацией.** Комплексный тор допускает вложение в проективное пространство тогда и только тогда, когда на нем существует поляризация. В этом случае он называется **абелевым многообразием**.

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

ТЕОРЕМА: Такая целочисленная форма ψ на структуре Ходжа веса один называется **поляризацией.** Комплексный тор допускает вложение в проективное пространство тогда и только тогда, когда на нем существует поляризация. В этом случае он называется **абелевым многообразием**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку ψ может рассматриваться как отображение $V_{\mathbb{Z}} \to V_{\mathbb{Z}}^*$, поляризация задает отображение из комплексного тора в **двойственный**. Поляризация называется **главной,** если это отображение — изоморфизм.

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}P^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

ТЕОРЕМА: Такая целочисленная форма ψ на структуре Ходжа веса один называется **поляризацией.** Комплексный тор допускает вложение в проективное пространство тогда и только тогда, когда на нем существует поляризация. В этом случае он называется **абелевым многообразием**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку ψ может рассматриваться как отображение $V_{\mathbb{Z}} \to V_{\mathbb{Z}}^*$, поляризация задает отображение из комплексного тора в **двойственный**. Поляризация называется **главной,** если это отображение — изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Гиперплоское сечение якобиана легко описать: в Pic^{g-1} он представляется как образ $S^{g-1}C$. Он называется **Θ-дивизором**.

Поляризации

ЗАМЕЧАНИЕ: Рассмотрим комплексный тор $\mathbb{C}^g/\Lambda$, и пусть $f\colon \mathbb{C}^g/\Lambda \to \mathbb{C}\,\mathrm{P}^n$ — какое-то вложение. Пересекая его с плоскостью подходящей размерности, имеем кривую C. Определим форму ψ на $V_{\mathbb{Z}}$ как $\psi(\alpha,\beta) = \int_C \alpha\wedge\beta$. Она удовлетворяет соотношениям Ходжа — Римана.

ТЕОРЕМА: Такая целочисленная форма ψ на структуре Ходжа веса один называется **поляризацией.** Комплексный тор допускает вложение в проективное пространство тогда и только тогда, когда на нем существует поляризация. В этом случае он называется **абелевым многообразием**.

ЗАМЕЧАНИЕ: Поскольку ψ может рассматриваться как отображение $V_{\mathbb{Z}} \to V_{\mathbb{Z}}^*$, поляризация задает отображение из комплексного тора в **двойственный**. Поляризация называется **главной,** если это отображение — изоморфизм.

ЗАМЕЧАНИЕ: Гиперплоское сечение якобиана легко описать: в Pic^{g-1} он представляется как образ $S^{g-1}C$. Он называется **Θ-дивизором**. Любой якобиан — главно поляризованное абелево многообразие, но обратное далеко не верно. Описание якобианов среди главно поляризованных абелевых многообразий составляет **проблему Шоттки;** алгебраического решения она не имеет.