Проективные модули и векторные расслоения

12 февраля 2024 года

Модули над кольцами

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: **Модулем** M над кольцом называется абелева группа с умножением $A \times M \to M$. **Тензорным произведением** модулей $M \otimes_A M'$ называется модуль, порожденный элементами $m \otimes m'$ с соотношениями $ma \otimes m' = m \otimes am'$. Очевидно, $A \otimes_A M = M$. Модуль M называется **обратимым,** если существует такой модуль M', что $M \otimes_A M' \cong A$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Модуль обратим тогда и только тогда, когда для каждого простого идеала $\mathfrak{p} \subset A$ изоморфны локализации $M_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ: Если модуль M обратим, то его обратный изоморфен $\operatorname{Hom}_A(M, A)$.

Геометрическая интерпретация модулей

Кольца — это кольца функций аффинных схем. А что такое модули над кольцами?

Геометрическая интерпретация модулей

Кольца — это кольца функций аффинных схем. А что такое модули над кольцами?

Напомним, что со всяким модулем можно связать **симметрическую алгебру** $\mathrm{Sym}_A(M)$ (она градуированная, но это неважно). Поскольку существует вложение $A \to \mathrm{Sym}_A(M)$ (как нулевой градуировки), то имеется и отображение $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}_A(M) \to \mathrm{Spec}\,A$. **Каковы его слои?** Над точкой $V(\mathfrak{m}) \in \mathrm{Spec}\,A$ это $\mathrm{Spec}\,\mathrm{Sym}_{A/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m})$ — а спектр симметрической алгебры над полем это **векторное пространство,** причем с отмеченной точкой (соответствующей идеалу аугментации). Если модуль M **обратим,** эти слои — **прямые.**

Геометрическая интерпретация модулей

Кольца — это кольца функций аффинных схем. А что такое модули над кольцами?

Напомним, что со всяким модулем можно связать **симметрическую алгебру** $\operatorname{Sym}_A(M)$ (она градуированная, но это неважно). Поскольку существует вложение $A \to \operatorname{Sym}_A(M)$ (как нулевой градуировки), то имеется и отображение $\operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_A(M) \to \operatorname{Spec} A$. **Каковы его слои?** Над точкой $V(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec} A$ это $\operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_{A/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m})$ — а спектр симметрической алгебры над полем это **векторное пространство,** причем с отмеченной точкой (соответствующей идеалу аугментации). Если модуль M **обратим,** эти слои — **прямые.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (из топологии) Векторным расслоением ранга n над гладким многообразием X называется отображение $E \xrightarrow{\pi} X$ такое, что на каждом **слое** имеется структура n-мерного **векторного пространства,** и всякая точка $x \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ такую, что $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n \to U$. Векторное расслоение ранга 1 называется **линейным.**

Геометрическая интерпретация модулей

Кольца — это кольца функций аффинных схем. А что такое модули над кольцами?

Напомним, что со всяким модулем можно связать **симметрическую алгебру** $\operatorname{Sym}_A(M)$ (она градуированная, но это неважно). Поскольку существует вложение $A \to \operatorname{Sym}_A(M)$ (как нулевой градуировки), то имеется и отображение $\operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_A(M) \to \operatorname{Spec} A$. **Каковы его слои?** Над точкой $V(\mathfrak{m}) \in \operatorname{Spec} A$ это $\operatorname{Spec}\operatorname{Sym}_{A/\mathfrak{m}}(M/\mathfrak{m})$ — а спектр симметрической алгебры над полем это **векторное пространство,** причем с отмеченной точкой (соответствующей идеалу аугментации). Если модуль M **обратим,** эти слои — **прямые.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: (из топологии) Векторным расслоением ранга n над гладким многообразием X называется отображение $E \xrightarrow{\pi} X$ такое, что на каждом **слое** имеется структура n-мерного **векторного пространства,** и всякая точка $x \in X$ имеет окрестность $U \subset X$ такую, что $\pi^{-1}(U) \cong U \times \mathbb{R}^n \to U$. Векторное расслоение ранга 1 называется **линейным.**

Для того, чтобы построить аналогичную теорию в алгебраической геометрии, следует найти аналог **локальной тривиальности.**

Проективные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P над кольцом A называется **проективным,** если имеется **изоморфизм** $P \oplus P' \cong A^{\oplus\infty}$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **точной тройки** модулей $0 \to K \to M \to P \to 0$ имеется отображение $P \to M$, **обратное последней стрелке.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **сюръекции** модулей $p\colon N \twoheadrightarrow M$ и отображения $f\colon P \to M$ существует отображение $\tilde{f}\colon P \to N$ **такое, что** $f = p \circ \tilde{f}$**.**

Проективные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P над кольцом A называется **проективным,** если имеется **изоморфизм** $P \oplus P' \cong A^{\oplus\infty}$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **точной тройки** модулей $0 \to K \to M \to P \to 0$ имеется отображение $P \to M$, **обратное последней стрелке.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **сюръекции** модулей $p\colon N \twoheadrightarrow M$ и отображения $f\colon P \to M$ существует отображение $\tilde{f}\colon P \to N$ **такое, что** $f = p \circ \tilde{f}$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — **кольцо главных идеалов,** всякий проективный модуль свободен.

ТЕОРЕМА: **(Капланского о проективных модулях)** Всякий проективный модуль над локальным кольцом свободен. ■

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, проективные модули действительно соответствуют локально-тривиальным расслоениям.

Проективные модули

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P над кольцом A называется **проективным,** если имеется **изоморфизм** $P \oplus P' \cong A^{\oplus\infty}$**.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **точной тройки** модулей $0 \to K \to M \to P \to 0$ имеется отображение $P \to M$, **обратное последней стрелке.**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ: Модуль P называется **проективным,** если для всякой **сюръекции** модулей $p\colon N \twoheadrightarrow M$ и отображения $f\colon P \to M$ существует отображение $\tilde{f}\colon P \to N$ **такое, что** $f = p \circ \tilde{f}$**.**

ЗАМЕЧАНИЕ: Если A — **кольцо главных идеалов,** всякий проективный модуль свободен.

ТЕОРЕМА: **(Капланского о проективных модулях)** Всякий проективный модуль над локальным кольцом свободен. ∎

ЗАМЕЧАНИЕ: Таким образом, проективные модули действительно соответствуют локально-тривиальным расслоениям.

ТЕОРЕМА: **(Квиллена — Суслина)** Всякий проективный модуль над $k[x_1, \ldots, x_n]$ свободен. ∎

Доказательство теоремы Капланского

Мы дадим доказательство только в частном случае: а именно, предполагая, что P **конечнопорожден.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО: Пусть n — минимальное число образующих P. Имеем: $0 \to K \to A^{\oplus n} \xrightarrow{\pi} P \to 0$. Если $k = \sum_{i=1}^n a_i e_i \in K$, то $\sum_{i=1}^n a_i \pi(e_i) = \pi(k) = 0$, и потому $a_i \in \mathfrak{m}$. Итак, $K \subset \mathfrak{m}A^{\oplus n}$. Выберем разложение $A^{\oplus n} = K \oplus P$. Тогда $\mathfrak{m}A^{\oplus n} = \mathfrak{m}K \oplus \mathfrak{m}P$, и $K \subset \mathfrak{m}K \oplus \mathfrak{m}P$. Но проекция $K \to \mathfrak{m}P$ вдоль $\mathfrak{m}K$ обязана быть нулевой, то есть $K \subset \mathfrak{m}K$ и потому $K = \mathfrak{m}K$. **По лемме Накаямы,** $K = 0$ и $P = A^{\oplus n}$. ■

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathsf{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathsf{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(\pm m)$.

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathsf{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathsf{P}^1}(\pm m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Даже если X проективно, пространство сечений $\Gamma(L, X)$ может быть ненулевым. Так, $\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathsf{P}^n}(m), \mathsf{P}^n\right) = \mathrm{Sym}^m \left(k^{n+1}\right)$ при $m \geqslant 0$.

Расслоения над проективными пространствами

ПРИМЕР: Пусть $B = \mathrm{Bl}_0 k^{n+1}$ — **раздутие** векторного пространства в нуле. Тогда проекция $B \to \mathrm{P}^n$, $(x_0, x_1, \dots x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ — нетривиальное линейное расслоение. Оно обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(-1)$ и называется **тавтологическим** линейным расслоением на P^n. Двойственное к нему расслоение обозначается $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(1)$, их m-е степени обозначаются $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(\pm m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ: Даже если X проективно, пространство сечений $\Gamma(L, X)$ может быть ненулевым. Так, $\Gamma\left(\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n}(m), \mathrm{P}^n\right) = \mathrm{Sym}^m\left(k^{n+1}\right)$ при $m \geqslant 0$.

ПРИМЕР: Рассмотрим покрытие $\mathrm{P}^1 = \{(z : w)\}$ двумя картами $\{w \neq 0\}$, $\{z \neq 0\}$. На каждой из них всякое линейное расслоение **тривиализуется.** Какие расслоения из них можно склеить? На пересечении $\mathrm{A}^1 \backslash \{0\}$ частное двух тривиализаций — нигде не зануляющаяся алгебраическая функция, **то есть $(z/w)^m$.** Для каждого m получается свое расслоение. Это **то же расслоение $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^1}(m)$,** что определено выше.