

Dosimetria

Estatística de Contagens

Dalila Mendonça

1. Introdução

Como a Radioatividade se trata de um processo aleatório, realizar medidas das partículas emitidas está relacionada a uma certa flutuação estatística que está associada a imprecisão nas contagens.

A estatística de contagens é utilizada para determinar uma medida adequada da radiação emitida em processos nucleares juntamente com a incerteza associada a medida. A estatística de contagens pode ser dividida em duas categorias:

1. É utilizada para verificar o correto funcionamento do equipamento de medida onde diversas medidas são realizadas sob as mesmas condições, mantendo as características do equipamento o mais constante possível. Devido às flutuações das leituras, as medidas obtidas terão uma certa variação interna que pode ser quantificada e comparada com valores determinados em modelos estatísticos preditivos e caso exista uma divergência pode-se inferir que o equipamento está com anormalidades nas contagens;
2. É utilizada para determinar a incerteza estatística inerente da medição quando apenas uma medida é realizada;

2. Caracterização dos Dados

Assumindo uma coleção de N medidas independentes da mesma quantidade física:

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_i, \dots, x_N$$

onde os valores de x_i são inteiros, medidos em intervalos de tempo com mesmo tamanho.

- A *Soma S* das medidas é dada por:

$$S \equiv \sum_{i=1}^N x_i \quad (\text{Eq. 1})$$

- A *Média Experimental \bar{x}_e* das medidas é dada por:

$$\bar{x}_e \equiv \frac{S}{N} \quad (\text{Eq. 2})$$

onde N é o total de medidas realizadas.

- A *Função de Distribuição de Frequência* $F(x)$ representa a frequência relativa com o qual cada medida aparece em uma coleção de dados, ou seja:

$$F(x) = \frac{\text{Numero de ocorrencias de } x}{\text{numero total de medidas } N} \quad (\text{Eq. 3})$$

A distribuição de frequências é um valor normalizado, ou seja:

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1 \quad (\text{Eq. 4})$$

- A média experimental \bar{x}_e pode ser obtida em função da distribuição de frequência através da seguinte relação:

$$\bar{x}_e = \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot F(x) \quad (\text{Eq. 5})$$

- O *resíduo* d_i de qualquer dado do conjunto, que é a diferença do valor medido para a média do conjunto de dados, ou seja

$$d_i \equiv x_i - \bar{x}_e \quad (\text{Eq. 6})$$

de modo que:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_i = 0 \quad (\text{Eq. 7})$$

- O desvio, é definido semelhantemente ao resíduo, com a diferença que para o resíduo é utilizado a média experimental \bar{x}_e e para o desvio é utilizado o valor verdadeiro da média \bar{x} , ou seja:

$$\epsilon_i \equiv x_i - \bar{x} \quad (\text{Eq. 8})$$

- A variância amostral quantifica a quantidade de flutuação interna em conjunto de dados. É definida como a média do quadrado do desvio:

$$s^2 \equiv \epsilon^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x})^2 \quad (\text{Eq. 9})$$

A variância amostral é útil para avaliar o grau de dispersão de um conjuntos de dados ou avaliar o quanto um valor é diferente de outro.

- Uma vez que não se sabe o valor verdadeiro da média, a expressão alternativa para obter a variância é dada por:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - \bar{x}_e)^2 \quad (\text{Eq. 10})$$

que é aplicada a uma amostra no qual é utilizada a média experimental. Como a variância amostral é dada pela média do quadrado dos desvios do valor medido para a média, a variância amostral é uma medida da flutuação do conjunto de dados.

- A variância amostral em termos da função de distribuição de frequência é dada por:

$$s^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x - \bar{x})^2 F(x) \quad (\text{Eq. 11})$$

o que permite chegar na relação:

$$s^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 \quad (\text{Eq. 12})$$

3. Modelos Estatísticos

Sob certas condições, é possível prever a função de distribuição que irá descrever o resultado de diversas medições feitas repetidamente. As medições são definidas como a contagem do número de sucessos em um ensaio, onde só existem duas possibilidades: sucesso ou falha (processo binário).

Processos Binários

- Jogar uma moeda: onde a Cara pode ser definida como a opção de sucesso e a probabilidade de sucesso é de $p = 1/2$;
- Jogar um dado: Onde uma das faces pode ser escolhida como a opção de sucesso, por exemplo a face 2 e a probabilidade de sucesso é de $p = 1/6$;
- Decaimento radioativo: onde o decaimento pode ser definido como a opção de sucesso e a probabilidade de sucesso é de $1 - e^{-\lambda t}$

Existem três principais modelos estatísticos que abordam processos binários:

1. **Distribuição Binomial:** Este modelo amplamente utilizado para todos os casos em que a probabilidade p de ocorrência de sucesso é *constante*. Não é computacionalmente aplicável à decaimentos radioativos pois o número de núcleos é sempre muito grande o que o torna *raramente aplicável à contagens nucleares*.
2. **Distribuição de Poisson:** Este modelo é uma aproximação matemática direta da distribuição binomial quando é considerado que a probabilidade de sucesso p é *pequena e constante*. Isto significa que é escolhido um *tempo de observação muito menor que o tempo de meia-vida da fonte*, de forma que o número de átomos decaindo em função do tempo é constante e a probabilidade de registrar uma contagem para um dado decaimento do núcleo é sempre pequena;
3. **Distribuição Gaussiana:** É também conhecida como distribuição normal; e faz a aproximação para os casos em que o número médio de sucessos é relativamente *grande*. Esta condição se aplica a qualquer situação em que será acumulado *diversas contagens durante a medição* e não apenas algumas poucas contagens. Portanto, este é o modelo amplamente utilizado em estatística de contagens.

Distribuição Binomial

Se n é o número de ensaios e para cada ensaio existe a probabilidade p de ocorrer um sucesso então podemos prever que a probabilidade de contarmos x sucessos é dada por:

$$P(x) = \frac{n!}{(n-x)!x!} p^x (1-p)^{n-x} \quad (\text{Eq. 13})$$

onde $P(x)$ é a função preditiva da distribuição de probabilidade, definida apenas para valores inteiros de x e n .

- A Distribuição Binomial é normalizada de forma que:

$$\sum_{x=0}^n P(x) = 1 \quad (\text{Eq. 14})$$

- O valor médio \bar{x} da distribuição é dado por:

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n x \cdot P(x) \quad (\text{Eq. 15})$$

que pode ser simplificado para a relação:

$$\bar{x} = p \cdot n \quad (\text{Eq. 16})$$

- A variância é dada por:

$$\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 \cdot P(x) \quad (\text{Eq. 17})$$

que pode ser simplificada para a relação:

$$\sigma^2 = np(1-p) \quad (\text{Eq. 18})$$

$$\sigma^2 = \bar{x}(1-p) \quad (\text{Eq. 19})$$

- O desvio padrão, é dado pela raiz da variância, ou seja:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (\text{Eq. 20})$$

O desvio padrão nos fornece a diferença entre o valor medido e a média verdadeira.

Distribuição de Poisson

Como citado anteriormente, esta distribuição se adequa àqueles *processos binários onde a probabilidade de obter sucesso é pequena*, ou seja, $p \ll 1$ e não varia com o tempo. Portanto, pode ser aplicada a maioria das contagens nucleares onde o número de núcleos é grande e o tempo de observação é muito menor que o tempo de meia vida do elemento radioativo.

A aproximação da distribuição binomial para se adequar a estes casos é dada por:

$$P(x) = \frac{(\bar{x})^x e^{-\bar{x}}}{x!} \quad (\text{Eq. 21})$$

onde $\bar{x} = pn$. Esta simplificação é útil quando se conhece apenas a *média da distribuição* e não se sabe o *tamanho* e as *probabilidades* individuais da amostra.

- A distribuição de Poisson é normalizada, de modo que:

$$\sum_{x=0}^n P(x) = 1 \quad (\text{Eq. 22})$$

- A **média** da distribuição de Poisson é dada por:

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n x \cdot P(x) \quad (\text{Eq. 23})$$

- A **variância** da distribuição de Poisson é dada por:

$$\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 \cdot P(x) = pn \quad (\text{Eq. 24})$$

ou seja,

$$\sigma^2 = \bar{x} \quad (\text{Eq. 25})$$

- O **desvio padrão** é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\bar{x}} \quad (\text{Eq. 26})$$

Esta distribuição é aproximadamente centrada em torno da média embora seja consideravelmente assimétrica devido aos valores pequenos da média.

Distribuição Normal (Gaussiana)

A Distribuição de Poisson fornece uma aproximação matemática da distribuição binomial para os casos em que $p \ll 1$. A distribuição normal faz a aproximação da distribuição de Poisson para os casos em que o valor médio da distribuição é grande (maior que 25 ou 30). A Gaussiana é dada por:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\bar{x}}} \quad (\text{Eq. 27})$$

As propriedades da Distribuição Normal são:

- É normalizada, ou seja:

$$\sum_{x=0}^n P(x) = 1 \quad (\text{Eq. 28})$$

- A **média** da distribuição Normal é dada por:

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^n x \cdot P(x) \quad (\text{Eq. 29})$$

- A **variância** da distribuição Normal é dada por:

$$\sigma^2 \equiv \sum_{x=0}^n (x - \bar{x})^2 \cdot P(x) = pn \quad (\text{Eq. 30})$$

ou seja,

$$\sigma^2 = \bar{x} \quad (\text{Eq. 31})$$

- O **desvio padrão** é dado por:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\bar{x}} \quad (\text{Eq. 32})$$

Os valores de desvio padrão podem ser utilizados como limites superiores e inferiores da margem de erro de forma que dependendo da quantidade de desvios padrão utilizados para estabelecer os limites há um percentual de chance de o valor verdadeiro para a média estar dentro do intervalo. A Tabela 1 mostra os limites do intervalo para uma medida única com valor igual a 100, onde a confiança representa o percentual de chance do valor verdadeiro da média estar dentro daquele intervalo, e o desvio padrão é dado por $\sigma = \sqrt{100} = 10$ (Para uma contagem única x , $\sigma = \sqrt{\bar{x}}$).

Tabela 1: Exemplo de intervalos de para uma medida única $x = 100$

Desvios Padrão	Intervalo	Confiança
$x \pm 0.67\sigma$	93.3 - 106.7	50%
$x \pm \sigma$	90.0 - 110.0	68%
$x \pm 1.64\sigma$	83.6 - 116.4	90%
$x \pm 1.96\sigma$	80.4 - 119.6	95%
$x \pm 2.58\sigma$	74.2 - 125.8	99%

O desvio padrão relativo é definido como

$$\sigma/x$$

4. Propagação de Erros

Dada uma medida u , obtida através das medidas x, y, z, \dots ou seja, $u = u(x, y, z, \dots)$, cada uma com seus respectivos desvios padrões $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \dots$; O desvio padrão da medida u é dada por:

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots \quad (\text{Eq. 33})$$

Soma ou Subtração de Contagens

Dado

$$u = x + y \quad \text{ou} \quad u = x - y$$

O desvio padrão será:

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} \quad (\text{Eq. 34})$$

Multiplicação por Constante

Dado

$$u = A \cdot x$$

onde A é uma constante, o desvio padrão de u será:

$$\sigma_u = A\sigma_x \quad (\text{Eq. 35})$$

Divisão Por Constante

Dado

$$u = \frac{1}{B} \cdot x$$

onde B é uma constante, o desvio padrão de u será:

$$\sigma_u = \frac{1}{B}\sigma_x \quad (\text{Eq. 36})$$

Multiplicação ou Divisão De Contagens

Dado

$$u = x \cdot y$$

ou

$$u = \frac{x}{y}$$

onde x e y são contagens, o desvio padrão de u será:

$$\sigma_u = u \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2} \quad (\text{Eq. 37})$$

Valor Médio de Múltiplas Contagens Independentes

Dado

$$S = x_1 + x_2 + \dots + x_N$$

onde x_i foram medidas tomadas da mesma variável no mesmo intervalo de tempo. Dado N medições, a média das medidas é dada por:

$$\bar{x} = \frac{S}{N}$$

Portanto, o desvio padrão para a média é dado por:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\bar{x}}{N}} \quad (\text{Eq. 38})$$

Referências

- [1] Peter R Almond, Peter J Biggs, Bert M Coursey, William F Hanson, M Saiful Huq, Ravinder Nath, and David WO Rogers. Aapm's tg-51 protocol for clinical reference dosimetry of high-energy photon and electron beams. *Medical physics*, 26(9):1847–1870, 1999.
- [2] Frank Herbert Attix. *Introduction to radiological physics and radiation dosimetry*. John Wiley & Sons, 2008.
- [3] Sonja Dieterich, Eric Ford, Daniel Pavord, and Jing Zeng. *Practical Radiation Oncology Physics E-Book: A Companion to Gunderson & Tepper's Clinical Radiation Oncology*. Elsevier Health Sciences, 2015.
- [4] Glenn F Knoll. *Radiation detection and measurement*. John Wiley & Sons, 2010.
- [5] Stephen V Musolino. Absorbed dose determination in external beam radiotherapy: an international code of practice for dosimetry based on standards of absorbed dose to water; technical reports series no. 398, 2001.