

Федеральное агентство связи
Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и
Информатики
СибГУТИ
Кафедра физики

Лабораторная работа №5.1

**ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ
КОНТУРЕ**

Выполнил: студент 1 курса группы ИП-014 Обухов Артем Игоревич

Преподаватель, ведущий занятие: Лубский Виталий Владимирович

Сняты
экспериментальные
данные

дата

подпись

расшифровка

Отчёт принят

дата

подпись

расшифровка

Защита

оценка

дата

подпись

расшифровка

Новосибирск, 2020 г.

1. Цель работы

1. Ознакомиться с физическими процессами, протекающими в электрическом контуре.
2. Исследовать влияние величин емкости и индуктивности на период колебаний в контуре с малым сопротивлением.
3. Установить характер зависимости логарифмического декремента затухания колебаний от сопротивления контура.

2. Основные теоретические сведения

Исследуемый контур состоит из конденсатора емкостью C , катушки с индуктивностью L и резистора, имеющего сопротивление R . Схема соединения элементов электрической цепи приведена на рисунке 1.

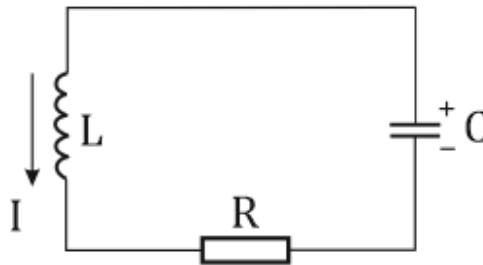


Рис. 1 Схема реального колебательного контура

Простой контур, который здесь рассматривается, является электрической цепью со сосредоточенными параметрами. Это означает, что емкость C сосредоточена в одном месте (конденсаторе), а индуктивность L и сопротивление R - в других местах контура (в катушке и в резисторе). Электрическими колебаниями в таком случае выступают повторяющиеся изменения электрических величин, характеризующих процессы в элементах контура. В конденсаторе, например, изменяются со временем следующие величины: заряд q и напряжение между обкладками U_C , а также характеристики электрического поля конденсатора.

Электрические колебания (процессы) происходят во всех элементах цепи согласованно. А именно так, что мгновенные значения силы тока I одни и те же в любом месте контура.

Подобное имеет место в цепи постоянного (стационарного) тока.

Поэтому электрические процессы в колебательном контуре называются квазистационарными («квази»- приставка, означающая «якобы, как будто»).

Квазистационарные процессы также подчиняются закону Ома, что и постоянный ток.

Для математического описания электрических процессов в контуре применим 2 правило Кирхгофа: «Сумма падений напряжения в контуре равна сумме действующих в нем ЭДС». В колебательном контуре имеются два падения напряжения: на конденсаторе U_c , равное $\frac{q}{C}$, и на сопротивлении, равное IR . При изменении силы тока в контуре в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции.

$$IR + U_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (1)$$

Сила тока по определению связана с зарядом конденсатора соотношением:

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ или } I = q' - \text{ так обозначается производная по времени.}$$

Подставив выражения для тока i и напряжения U_c в формулу (1), получим дифференциальное уравнение в виде:

$$L \frac{dI}{dt} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ или } Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

Разделим уравнение на коэффициент при старшей производной (индуктивность катушки) и введем обозначения:

$$2\beta = \frac{R}{L} \text{ и } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

После введения обозначений дифференциальное уравнение затухающих колебаний в контуре принимает вид:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0.$$

(2)

Функция

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (3)$$

является решением дифференциального уравнения (2) и называется уравнением затухающих колебаний заряда конденсатора.

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \text{ или } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (4)$$

Амплитуда заряда на конденсаторе убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$q_m = q_0 e^{-\beta t} \quad (5)$$

Быстрота убывания определяется величиной β , которую называют коэффициентом затухания.

$$\beta = \frac{R}{2L}. \quad (6)$$

Так как ω есть действительное число и ω^2 не может быть отрицательным, то затухающие колебания имеют место только при условии (см.4):

$$\beta^2 < \omega_0^2, \text{ или } \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (7)$$

Наконец, постоянные величины q_0 и φ_0 определяются начальными условиями. Если, например, вначале при разомкнутом контуре конденсатор заряжен (q_0 – величины заряда), а потом соединен с катушкой и резистором, то начальная фаза колебаний равна нулю, то есть $\varphi_0 = 0$. На рисунке 2 показаны графики затухающих колебаний в одном электрическом контуре при двух значениях коэффициента затухания. Причем, $\beta_2 > \beta_1$, а величины q_0 и φ_0 одинаковы. Пунктиром изображена зависимость амплитуды заряда q_m от времени. Эта зависимость называется экспоненциальной.

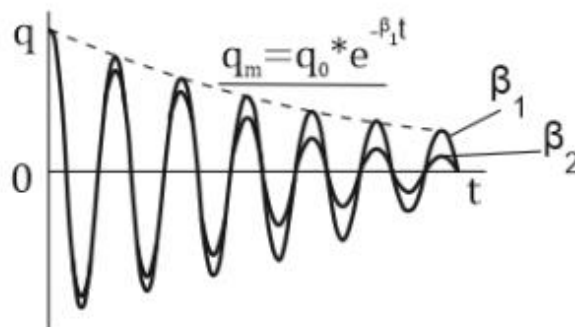


Рис. 2 Графики затухающих колебаний заряда с разными коэффициентами затуханий

Теперь обратим внимание на такие особенности колебательного процесса с затуханием, которые на рисунке заметить нельзя. Для этого найдем уравнение колебаний тока в контуре, приняв уравнение колебаний заряда в виде $q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Так как $I = q'$, то после дифференцирования получим:

$$I = -q_0 e^{-\beta t} [\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t].$$

Записав слагаемое $\omega \sin \omega t$ как $-\omega \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$ и складывая оба слагаемых выражения в скобках с помощью векторной диаграммы, получим уравнение колебаний тока в виде:

$$i = q_0 \omega_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \psi), \quad (6)$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \beta^2}$ (см. соотношение 4), а $\psi = \arctg\left(-\frac{\omega}{\beta}\right)$ есть сдвиг фаз между колебаниями заряда и тока.

Полученный результат приводит к следующим заключениям:

1. Амплитуда тока в начальный момент времени $I_0 = \omega_0 q_0$ не зависит от характеристик затухания.

2. В контурах с малым сопротивлением R и достаточно большой частотой ω реализуется неравенство: $\beta \ll \omega$. Это случай слабого затухания, величина сдвига фаз Ψ стремится к $(-\frac{\pi}{2})$. Затухание влияет на частоту ω только во втором порядке.

Полученная ранее формула (4) позволяет рассчитать относительную разницу величин ω_0 и ω с помощью соотношения:

$$\frac{\omega_0 - \omega}{\omega} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{\beta}{\omega} \right)^2. \quad (7)$$

В результате при СЛАБОМ ЗАТУХАНИИ уравнения колебаний заряда и тока можно приближенно записать так:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos \omega_0 t, \quad I = -I_0 e^{-\beta t} \sin \omega_0 t. \quad (8)$$

Отметим, что период колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ определяется в этом случае известной формулой Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Точное же значение периода затухающих колебаний (в соответствии с формулой (4)) равно

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \quad (9)$$

Вернемся еще раз к экспоненциальной зависимости $q_m = q_0 e^{-\beta t}$, изображенной на рис. 2, чтобы рассказать о других важных характеристиках затухающих колебаний и дать им физическое объяснение.

Непрерывное рассеяние энергии на сопротивлении приводит к тому, что наибольший заряд конденсатора уменьшается с каждым периодом колебаний, именно:

$$q_m(0) > q_m(T) > q_m(2T) > \dots q_m(NT) > \dots,$$

N - число колебаний. Эти амплитуды колебаний образуют убывающую геометрическую прогрессию. А это означает, что отношение величины каждого максимума $q_m(t)$ к последующему $q_m(t+T)$ одинаково. Безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения амплитудных значений, отстоящих по времени на период колебания, называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\delta = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)}. \quad (10)$$

С логарифмическим декрементом затухания связана (обратно пропорциональной зависимостью) еще одна характеристика затухающих колебаний - добротность Q . (Не путать с зарядом q !). В случае слабого затухания добротность определяется следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}, \quad (11)$$

то есть, чем меньше затухание, тем больше добротность.

Для того, чтобы выявить смысл характеристик затухания, введем понятие времени релаксации τ . Это такой промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в e раз ($e \approx 2,72$ - основание натуральных логарифмов).

Заменив t на τ в выражении $q_m = q_0 e^{-\beta t}$, получим $e^{-1} = e^{-\beta \tau}$, откуда:

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \quad (12)$$

То есть коэффициент затухания β - это величина, обратная времени релаксации τ .

Связь коэффициента затухания и логарифмического декремента получают из формулы определения последнего (10):

$$\begin{aligned} \delta &= \ln e^{\beta \tau} \\ \delta &= \beta T, \end{aligned} \quad (13)$$

где T - период колебаний.

В случае слабого затухания можно выразить логарифмический декремент затухания через параметры контура

$$\delta = R \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \quad (14)$$

В качестве меры затухания можно использовать также число N_e - число колебаний, совершающихся в контуре за время, равное времени релаксации

τ . При малом затухании время τ больше периода колебаний. Поэтому имеем: так как $\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N_e T}$, то

$$\delta = \frac{1}{N_e} \quad (15)$$

$$Q = \pi N_e. \quad (16)$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в e раз. Добротность же прямо пропорциональна числу N_e .

Исходя из формул (14) и (16), можно получить формулу зависимости добротности от параметров контура при слабом затухании:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (17)$$

Полная картина поведения электрического контура не ограничивается только затухающими колебаниями. В контуре с сильным затуханием (большим сопротивлением R) колебаний заряда нет, есть только монотонное убывание с течением времени. Не будем рассматривать соответствующие решения дифференциального уравнения (2). Заметим только, что специальный случай «критического затухания» имеет место при сопротивлении R , равном $R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ в котором величину R_{kp} называют критическим сопротивлением контура.

Эта последняя формула подтверждает общую особенность, выражающуюся в том, что все рассмотренные выше характеристики процессов в колебательном контуре имеют связи с численными значениями параметров контура R , L и C . Исследования, проводимые в этой работе, имеют целью проверить некоторые из них.

3. Описание лабораторной установки

Электрическая цепь собрана по схеме, изображенной на рис. 1. Колебания возбуждаются в контуре благодаря зарядке конденсатора от источника однополупериодного переменного тока с частотой 50 Гц. Затухающие колебания напряжения на конденсаторе подаются на клеммы вертикального усиления осциллографа (рис. 3). При этом частоту развертки электрического сигнала осциллографом устанавливают примерно такой же, что и частота зарядки C . В качестве элементов колебательного контура используются наборы конденсаторов, катушек индуктивности и сопротивлений (резисторов). Присоединение каждого элемента набора производится с помощью кнопочного выключателя. Для

включения элементов R , L , C в цепь контура нужно нажать соответствующие кнопки и зафиксировать их в «утопленном состоянии».

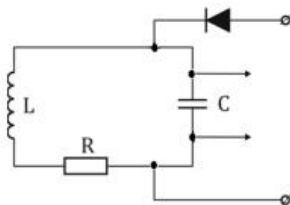


Рис.3 Электрическая схема установки

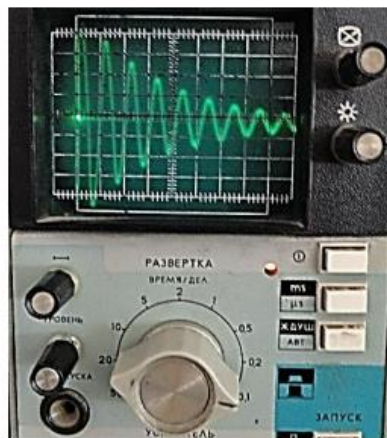


Рис. 4 Затухающие колебания на экране осциллографа

Значения сопротивления R , емкости C и индуктивности L для каждого положения кнопочных выключателей составляют отдельную таблицу. Таблица выдается на рабочее место при выполнении работы. Основные измерения проводятся с помощью осциллографа. Осциллограмма напряжения U_c выглядит так, как показано на рис. 4, то есть подобна графику колебаний заряда на конденсаторе на рис. 2 ($U_c = \frac{q}{C}$). По горизонтальной оси отложено время t , по вертикальной оси отложено напряжение на конденсаторе U_c . Время по горизонтальной оси можно рассчитать. Для этого поверх экрана нанесена прямоугольная сетка, калиброванная в единицах времени ($мс$ или $мкс$). Назовем временную длительность одного квадрата сетки по горизонтали ценой деления развертки и обозначим ее γ . Для более точного измерения каждое деление «разделено» на доли по 0,2 (это указано на сетке). Тогда время t , в течение которого происходят N колебаний, будет равно $t = n \cdot \gamma$, где n - число квадратов сетки, в пределах которых укладываются эти N колебаний. На рис. 4 видно, что для $N=6$, то есть для шести периодов T , число n равно 6,7. Величину γ отсчитывают непосредственно на панели

осциллографа. Отсчёт числа полных колебаний удобно проводить по амплитудным (максимальным) значениям напряжений. Начало отсчёта «0». На рис. 4 переключатель развертки по горизонтали указывает 0,1. Справа от переключателя нажата кнопка **ms**, значит, цена деления γ равна 0,1 мс. Отсчитываем шесть полных колебаний ($N=6$). На экране осциллографа время шести колебаний соответствует $n=6,7$ делениям. Тогда $t = n \cdot \gamma = 0,67$ мс. Время одного колебания, то есть период колебания $T = \frac{t}{N} = \frac{0,67}{6} = 0,116$ мс.

Важным параметром затухающих колебаний является время релаксации τ . За это время амплитуда колебания уменьшается в « e » раз ($e=2,72$ – основание натурального логарифма). Амплитуду напряжения можно измерять в делениях (одно деление – это сторона квадрата сетки на экране осциллографа по вертикали). Цена деления в данном случае для наших рассматриваний не важна. Важно, чтобы формат изображения был удобен для рассматриваний. На рис. 4 амплитуда напряжения $U_{m0} = 4$ деления. Амплитуда через время релаксации ($\frac{4}{2,72} = 1,48$) $U_{m\tau} = 1,48$ деления. Осциллограмма показывает, что уменьшение амплитуды в « e » раз произошло за время $\tau = \gamma n = 0,1 \cdot 4,4 = 0,44$ мс.

4. Экспериментальные результаты

$$R0 = \frac{2 \cdot 19,1 \text{ мГн}}{200 \text{ мкс} \cdot 9} = 21,2 \text{ Ом}$$

C, нФ	L, мГн	N	n	γ , мкс/дел	t, мкс	T _{эксп} , мкс	\sqrt{LC} , мкс	T _{теор} , мкс
10,04	19,1	11	10	100	1000	90.91	13.85	87.022
15,1	19,1	10	10	100	1000	100	16.98	106.69
20	19,1	8	11.5	100	1150	143.75	19.54	122.77
25,1	19,1	8	10	100	1000	125	21.89	137.54
30,1	19,1	8	12.5	100	1250	156.25	23.97	150.61
36.2	19.1	6	10	100	1000	166.67	26.29	165.18

$$t_{\text{эксп1}} = n * \gamma = 10 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000 \text{ мкс}$$

$$t_{\text{эксп2}} = n * \gamma = 10 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000 \text{ мкс}$$

$$t_{\text{эксп3}} = n * \gamma = 11.5 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1150 \text{ мкс}$$

$$t_{\text{эксп4}} = n * \gamma = 10 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000 \text{ мкс}$$

$$t_{\text{эксп5}} = n * \gamma = 12.5 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1250 \text{ мкс}$$

$$t_{\text{эксп6}} = n * \gamma = 10 * 100 \frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп1}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{11} = 90.91 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп2}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{10} = 100 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп3}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1150 \text{ мкс}}{8} = 143.75 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп4}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{8} = 125 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп5}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1250 \text{ мкс}}{8} = 156.25 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{эксп6}} = \frac{t_{\text{эксп}}}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{6} = 166.67 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{10.04 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 1.38479 * 10^{-5} \text{C} = 13.85 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{15.1 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 1.69826 * 10^{-5} \text{C} = 16.98 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{20 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 1.95448 * 10^{-5} \text{C} = 19.54 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{25.1 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 2.18954 * 10^{-5} \text{C} = 21.89 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{30.1 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 2.39773 * 10^{-5} \text{C} = 23.97 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{36.2 * 10^{-9} \Phi * 19,1 * 10^{-3} \Gamma_{\text{H}}} = 2.62949 * 10^{-5} \text{C} = 26.29 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 13.85 \text{ мкс} = 87.022 \text{ мкс}$$

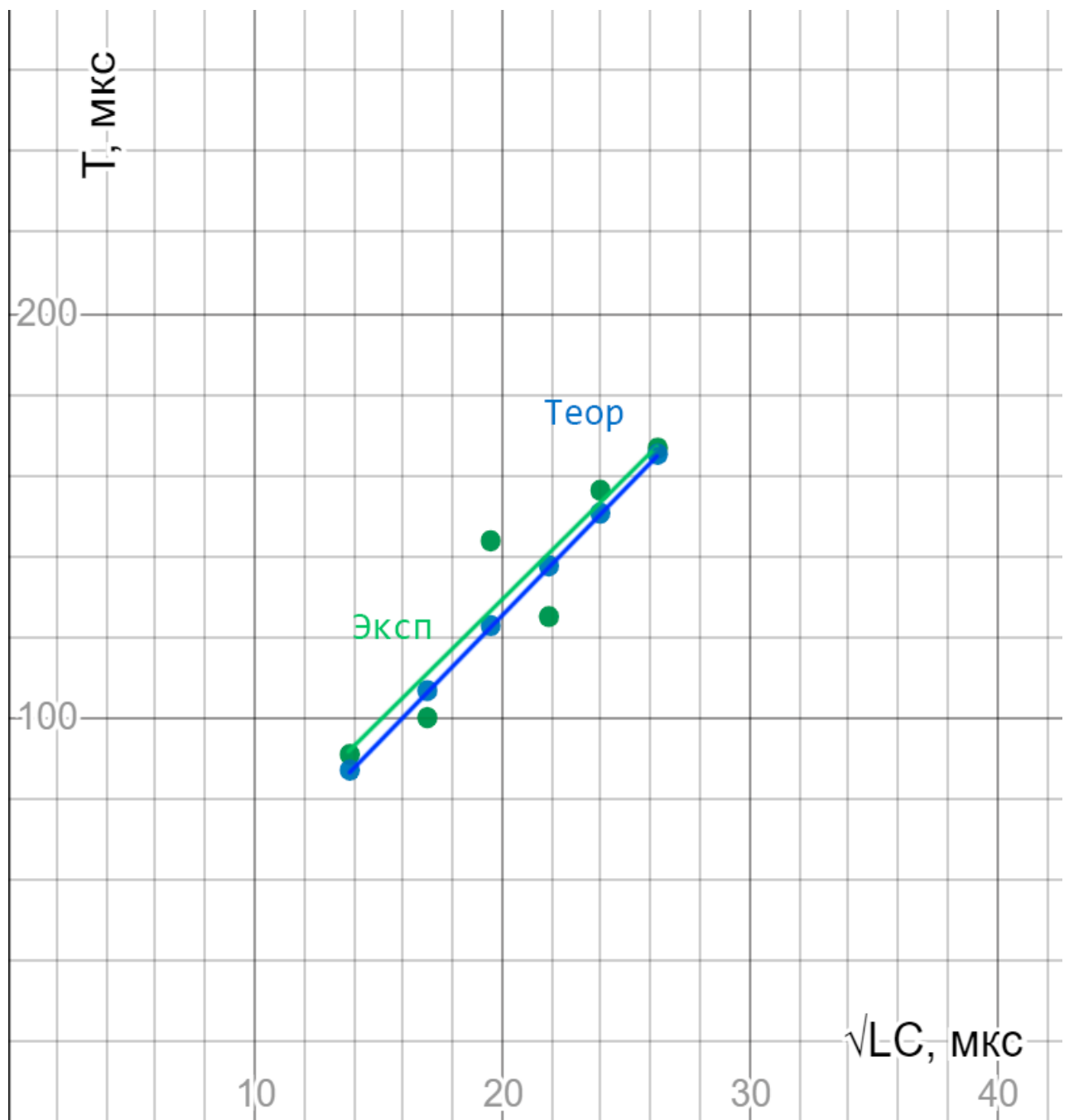
$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 16.98 \text{ мкс} = 106.69 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 19.54 \text{ мкс} = 122.77 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 21.89 \text{ мкс} = 137.54 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 23.97 \text{ мкс} = 150.61 \text{ мкс}$$

$$T_{\text{теор}} = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 26.29 \text{ мкс} = 165.18 \text{ мкс}$$



Вывод: в данной работе я ознакомился с физическими процессами, протекающими в электрическом контуре. Исследовал внешние величины емкости и индуктивности на период колебаний в контуре с малым сопротивлением. Изобразив зависимость на графике мы увидели прямую зависимость. Научились работать с осциллографом.

5. Контрольные вопросы

- 1) За какое время изменения тока в катушке индуктивности передается к сопротивлению контура, если длина соединительного провода равно 0,1 м? Оценить при этом наибольшую возможную частоту колебаний в электрическом контуре.

Катушка индуктивности обладает реактивным сопротивлением, модуль которого $X_L = \omega L$, где L – индуктивность катушки, ω – циклическая частота протекающего тока. Соответственно, чем больше частота тока, протекающего через катушку, тем больше её сопротивление.

Катушка с током запасает энергию в магнитном поле, равную работе, которую необходимо совершить для установления текущего тока I . Эта энергия равна:

$$E_c = \frac{LI^2}{2}$$

При изменении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

При замыкании катушки с током на резистор происходит переходной процесс, при котором ток в цепи экспоненциально уменьшается в соответствии с формулой:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

где $T = \frac{L}{R}$ – постоянная времени.

То есть время изменения тока в катушке:

$$\begin{aligned} \frac{t}{T} &= \ln \frac{I_0}{I} \\ t &= \frac{R}{L} \ln \frac{I_0}{I} \end{aligned}$$

Длина:

$$l = cT = \frac{cR}{L}$$

$$t = \frac{l}{c} \ln \frac{I_0}{I}$$

$$t \sim \frac{l}{c} = \frac{0,1}{3 \cdot 10^8} = 3,3 \cdot 10^{-10} \text{ с} = 33 \text{ нс}$$

То есть, уменьшение тока в 2,7 раза передается за 3 нс.

Наибольшая частота:

$$\vartheta = \frac{1}{T} = 33 \text{ нс}$$

Наибольшая частота возможна при уменьшении тока в 2,7 раза.

1) Какие физические законы описывают процессы, протекающие в колебательном контуре?

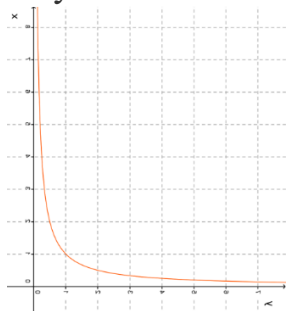
Колебания происходят благодаря перетеканию энергии магнитного поля в энергию электрического и наоборот. По закону сохранения энергии сумма их постоянна. В идеале колебания гармонические. Но в реальности они затухают.

2) В чем состоит отличие дифференциального уравнения свободных колебаний в реальном (с учетом сопротивления) электрическом контуре от такого же в идеальном контуре?

В реальном контуре колебания затухающие. Поэтому это уравнение отличается слагаемым $2b \cdot dq/dt$ b -коэффициент затухания.

3) От чего зависит быстрота уменьшения амплитуды напряжения на сопротивлении R контура? Изобразить закономерность графически.

Скорость уменьшения амплитуды колебаний не зависит от ее величины, а определяется добротностью контура, от которой зависит затухание в нем.



4) Какой промежуток времени колебаний называется временем релаксации? Зависит ли время релаксации от сопротивления контура?

Время релаксации — период времени, за который амплитудное значение возмущения в выведенной из равновесия физической системе уменьшается в e раз

5) Какая закономерность затухающих колебаний выражается с помощью логарифмического декремента затухания? Каков физический смысл этой величины ?

Логарифмический декремент колебаний — безразмерная физическая величина, описывающая уменьшение амплитуды колебательного процесса и равная натуральному логарифму отношения двух последовательных амплитуд колеблющейся величины в одну и ту же сторону

6) Какова зависимость добротности электрического контура Q от параметров R, L, C ?

Зависимости нет. Она зависит от потерь в контуре и равна отношению характеристического сопротивления (корень из L/C) к сопротивлению потерь.

7) Какие формулы подтверждают зависимость: а) T от \sqrt{LC} ,

б) δ от R ? Согласуются ли они с графиками, полученными опытным путем? (подумать над этим пунктом)

а) $T = 2\pi\sqrt{LC}$

б) $\delta = R \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$

Да, согласуются

6. Задача

Логарифмический декремент затухания электрического контура $\delta = 0,2$. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за время одного колебания заряда?

Дано:	Решение:
$\delta = 0,2$	$\delta = \ln \frac{A_1}{A_2}$
$\frac{A_1}{A_2} - ?$	$\frac{A_1}{A_2} = e^\delta = e^{0,2} = 1.22140275816$
	Ответ: 1.22140275816