Федеральное агентство связи

Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики

СибГУТИ

Кафедра физики

Лабораторная работа №5.1

ИЗУЧЕНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ КОНТУРЕ

Выполнил: студент 1 курса группы ИП-014 Обухов Артем Игоревич

Преподаватель, ведущий занятие: Лубский Виталий Владимирович

Сняты экспериментальные данные		____________	____________	____________
		дата	подпись	расшифровка
Отчёт принят		____________	____________	____________
		дата	подпись	расшифровка
Защита	____________	____________	____________	____________
	оценка	дата	подпись	расшифровка

Новосибирск, 2020 г.

1. **Цель работы**
   1. Ознакомиться с физическими процессами, протекающими в электрическом контуре.
   2. Исследовать влияние величин электроемкости и индуктивности на период колебаний в контуре с малым сопротивлением.
   3. Установить характер зависимости логарифмического декремента затухания колебаний от сопротивления контура.
2. **Основные теоретические сведения**

Исследуемый контур состоит из конденсатора электроемкостью C, катушки с индуктивностью L и резистора, имеющего сопротивление R. Схема соединения элементов электрической цепи приведена на рисунке 1.

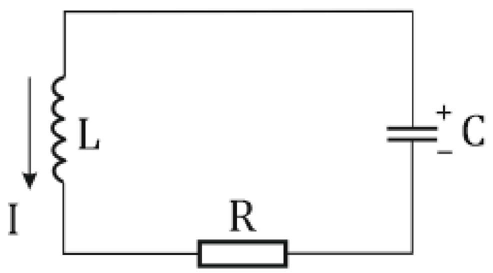


Рис. 1 Схема реального колебательного контура

Простой контур, который здесь рассматривается, является электрической цепью со сосредоточенными параметрами. Это означает, что электроемкость C сосредоточена в одном месте (конденсаторе), а индуктивность L и сопротивление R - в других местах контура (в катушке и в резисторе). Электрическими колебаниями в таком случае выступают повторяющиеся изменения электрических величин, характеризующих процессы в элементах контура. В конденсаторе, например, изменяются со временем следующие величины: заряд q и напряжение между обкладками U_c а также характеристики электрического поля конденсатора.

Электрические колебания (процессы) происходят во всех элементах цепи согласованно. А именно так, что мгновенные значения силы тока I одни и те же в любом месте контура.

Подобное имеет место в цепи постоянного (стационарного) тока.

Поэтому электрические процессы в колебательном контуре называются квазистационарными («квази»- приставка, означающая «якобы, как будто»).

Квазистационарные процессы также подчиняются закону Ома, что и постоянный ток.

Для математического описания электрических процессов в контуре применим 2 правило Кирхгофа: «Сумма падений напряжения в контуре равна сумме действующих в нем ЭДС». В колебательном контуре имеются два падения напряжения: на конденсаторе U_C, равное $\frac{q}{C}$, и на сопротивлении, равное IR. При изменении силы тока в контуре в катушке индуктивности возникает ЭДС самоиндукции.

$$IR + U_C = -L\frac{dI}{dt} \qquad (1)$$

Сила тока по определению связана с зарядом конденсатора соотношением:

$I = \frac{dq}{dt}$ или $I = q'$ - так обозначается производная по времени.

Подставив выражения для тока i и напряжения U_C в формулу (1), получим дифференциальное уравнение в виде:

$$L\frac{dI}{dt} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ или } Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = 0$$

Разделим уравнение на коэффициент при старшей производной (индуктивность катушки) и введем обозначения:

$$2\beta = \frac{R}{L} \ и \ \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

После введения обозначений дифференциальное уравнение затухающих колебаний в контуре принимает вид:

$$q'' + 2\beta q' + \omega_0^2 q = 0. \qquad (2)$$

Функция

$$q = q_0 e^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (3)$$

является решением дифференциального уравнения (2) и называется уравнением затухающих колебаний заряда конденсатора.

Циклическая частота затухающих колебаний

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2 \text{ или } \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \qquad (4)$$

Амплитуда заряда на конденсаторе убывает со временем по экспоненциальному закону:

$$q_m = q_0 e^{-\beta \cdot t} \qquad (5)$$

Быстрота убывания определяется величиной β, которую называют коэффициентом затухания.

$$\beta = \frac{R}{2L}. \tag{6}$$

Так как ω есть действительное число и ω^2 не может быть отрицательным, то затухающие колебания имеют место только при условии (см.4):

$$\beta^2 < \omega_0^2, \text{ или } \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC}, \text{ или } R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{7}$$

Наконец, постоянные величины q_0 и φ_0 определяются начальными условиями. Если, например, вначале при разомкнутом контуре конденсатор заряжен (q_0- величины заряда), а потом соединен с катушкой и резистором, то начальная фаза колебаний равна нулю, то есть φ_0=0. На рисунке 2 показаны графики затухающих колебаний в одном электрическом контуре при двух значениях коэффициента затухания. Причем, $\beta_2 > \beta_1$, а величины q_0 и φ_0 одинаковы. Пунктиром изображена зависимость амплитуды заряда q_m от времени. Эта зависимость называется экспоненциальной.

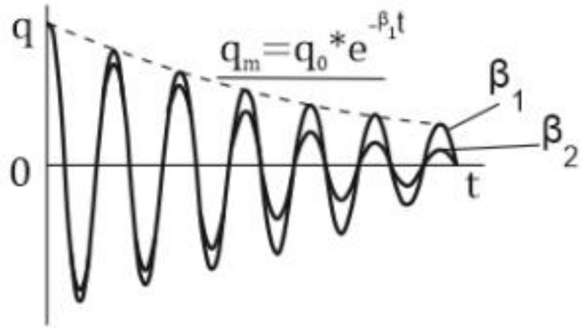


Рис. 2 Графики затухающих колебаний заряда с разными коэффициентами затуханий

Теперь обратим внимание на такие особенности колебательного процесса с затуханием, которые на рисунке заметить нельзя. Для этого найдем уравнение колебаний тока в контуре, приняв уравнение колебаний заряда в виде $q_0 e^{-\beta t} \cos \omega t$. Так как $I = q'$, то после дифференцирования получим:

$$I = -q_0 e^{-\beta \cdot t}[\omega \sin \omega t + \beta \cos \omega t].$$

Записав слагаемое $\omega \sin \omega t$ как $-\omega\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)$ и складывая оба слагаемых выражения в скобках с помощью векторной диаграммы, получим уравнение колебаний тока в виде:

$$i = q_0\omega_0 e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\psi), \tag{6}$$

где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2+\beta^2}$ (см. соотношение 4), а $\psi = arctg\left(-\frac{\omega}{\beta}\right)$ есть сдвиг фаз между колебаниями заряда и тока.

Полученный результат приводит к следующим заключениям:

1. Амплитуда тока в начальный момент времени $I_0 = \omega_0 q_0$ не зависит от характеристик затухания.
2. В контурах с малым сопротивлением R и достаточно большой частотой ω реализуется неравенство: $\beta \ll \omega$. Это случай слабого затухания, величина сдвига фаз Ψ стремится к ($-\frac{\pi}{2}$) . Затухание влияет на частоту ω только во втором порядке.

Полученная ранее формула (4) позволяет рассчитать относительную разницу величин ω_0и ω с помощью соотношения:

$$\frac{\omega_0-\omega}{\omega} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\beta}{\omega}\right)^2. \tag{7}$$

В результате при СЛАБОМ ЗАТУХАНИИ уравнения колебаний заряда и тока можно приближенно записать так:

$$q = q_0 e^{-\beta\cdot t}\cos\omega_0 t, \quad I = -I_0 e^{-\beta\cdot t}\sin\omega_0 t. \tag{8}$$

Отметим, что период колебаний $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ определяется в этом случае известной формулой Томсона: $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Точное же значение периода затухающих колебаний (в соответствии с формулой (4)) равно

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}}. \tag{9}$$

Вернемся еще раз к экспоненциальной зависимости $q_m = q_0 e^{-\beta t}$, изображенной на рис. 2, чтобы рассказать о других важных характеристиках затухающих колебаний и дать им физическое объяснение.

Непрерывное рассеяние энергии на сопротивлении приводит к тому, что наибольший заряд конденсатора уменьшается с каждым периодом колебаний, именно:

$$q_m(0) > q_m(T) > q_m(2T) > \dots q_m(NT) > \dots,$$

N - число колебаний. Эти амплитуды колебаний образуют убывающую геометрическую прогрессию. А это означает, что отношение величины каждого максимума $q_m(t)$к последующему $q_m($ t+T) одинаково. Безразмерная величина, равная натуральному логарифму отношения амплитудных значений, отстоящих по времени на период колебания, называется логарифмическим декрементом затухания:

$$\delta = \ln \frac{q_m(t)}{q_m(t+T)}. \qquad (10)$$

С логарифмическим декрементом затухания связана (обратно пропорциональной зависимостью) еще одна характеристика затухающих колебаний - добротность *Q*. (*Не путать с зарядом q!*). В случае слабого затухания добротность определяется следующим образом:

$$Q = \frac{\pi}{\delta}, \qquad (11)$$

то есть, чем меньше затухание, тем больше добротность.

Для того, чтобы выявить смысл характеристик затухания, введем понятие времени релаксации τ. Это такой промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в *e* раз (*e≈2*,72- основание натуральных логарифмов).

Заменив t на τ в выражении $q_m = q_0 e^{-\beta \cdot t}$, получим $e^{-1} = e^{-\beta \cdot \tau}$, откуда:

$$\beta = \frac{1}{\tau}. \qquad (12)$$

То есть коэффициент затухания β - это величина, обратная времени релаксации τ.

Связь коэффициента затухания и логарифмического декремента получают из формулы определения последнего (10):

$$\delta = \ln e^{\beta\tau}$$

$$\delta = \beta T, \qquad (13)$$

где *T*- период колебаний.

В случае слабого затухания можно выразить логарифмический декремент затухания через параметры контура

$$\delta = R \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \qquad (14)$$

В качестве меры затухания можно использовать также число N_e- число колебаний, совершающихся в контуре за время, равное времени релаксации

τ. При малом затухании время τ больше периода колебаний. Поэтому имеем: так как $\beta = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{N_e T}$, то

$$\delta = \frac{1}{N_e} \tag{15}$$

$$Q = \pi N_e. \tag{16}$$

Таким образом, логарифмический декремент затухания есть величина, обратная числу колебаний, по истечении которых амплитуда уменьшается в e раз. Добротность же прямо пропорциональная числу N_e.

Исходя из формул (14) и (16), можно получить формулу зависимости добротности от параметров контура при слабом затухании:

$$Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}. \tag{17}$$

Полная картина поведения электрического контура не ограничивается только затухающими колебаниями. В контуре с сильным затуханием (большим сопротивлением R) колебаний заряда нет, есть только монотонное убывание с течением времени. Не будем рассматривать соответствующие решения дифференциального уравнения (2). Заметим только, что специальный случай «критического затухания» имеет место при сопротивлении R, равном $R_{kp} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ в котором величину $R_{кр}$ называют критическим сопротивлением контура.

Эта последняя формула подтверждает общую особенность, выражающуюся в том, что все рассмотренные выше характеристики процессов в колебательном контуре имеют связи с численными значениями параметров контура R, L и C. Исследования, проводимые в этой работе, имеют целью проверить некоторые из них.

3. Описание лабораторной установки

Электрическая цепь собрана по схеме, изображенной на рис. 1. Колебания возбуждаются в контуре благодаря зарядке конденсатора от источника однополупериодного переменного тока с частотой 50 Гц. Затухающие колебания напряжения на конденсаторе подаются на клеммы вертикального усиления осциллографа (рис. 3). При этом частоту развертки электрического сигнала осциллографом устанавливают примерно такой же, что и частота зарядки С. В качестве элементов колебательного контура используются наборы конденсаторов, катушек индуктивности и сопротивлений (резисторов). Присоединение каждого элемента набора производится с помощью кнопочного выключателя. Для включения элементов R, L, C в цепь контура нужно нажать соответствующие кнопки и зафиксировать их в «утопленном состоянии».

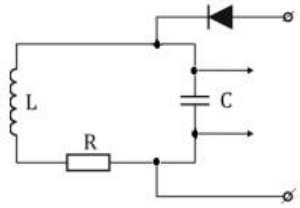


Рис.3 Электрическая схема установки

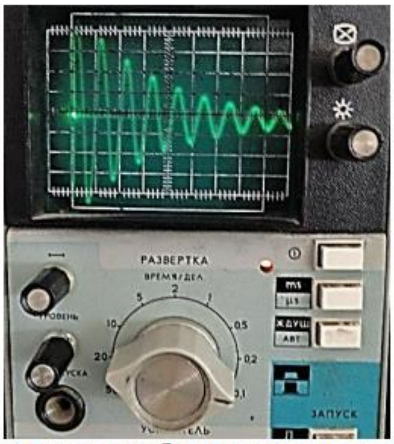


Рис. 4 Затухающие колебания на экране осциллографа

Значения сопротивления R, электроемкости C и индуктивности L для каждого положения кнопочных выключателей составляют отдельную таблицу. Таблица выдается на рабочее место при выполнении работы. Основные измерения проводятся с помощью осциллографа. Осциллограмма напряжения U_c выглядит так, как показано на рис. 4, то есть подобна графику колебаний заряда на конденсаторе на рис. 2 ($U_c = \frac{q}{C}$). По горизонтальной оси отложено время t, по вертикальной оси отложено напряжение на конденсаторе U_c. Время по горизонтальной оси можно рассчитать. Для этого поверх экрана нанесена прямоугольная сетка, калиброванная в единицах времени (*мс* или *мкс*). Назовем временную длительность одного квадрата сетки по горизонтали ценой деления развертки и обозначим ее γ. Для более точного измерения каждое деление «разделено» на доли по 0,2 (это указано на сетке). Тогда время t, в течение которого происходят N колебаний, будет равно $t=n\cdot\gamma$, где n- число квадратов сетки, в пределах которых укладываются эти N колебаний. На рис. 4 видно, что для $N=6$, то есть для шести периодов T, число n равно 6,7. Величину γ отсчитывают непосредственно на панели осциллографа. Отсчёт числа полных колебаний удобно проводить по амплитудным (максимальным) значениям напряжениям. Начало отсчёта «0». На рис. 4 переключатель развертки по горизонтали указывает 0,1. Справа от переключателя нажата кнопка $\boxed{ms}$, значит, цена деления γ равна 0,1 мс. Отсчитываем шесть полных колебаний (N=6). На экране осциллографа время шести колебаний соответствует n=6,7 делениям. Тогда $t = n \cdot \gamma = 0{,}67$ мс. Время одного колебания, то есть период колебания $T = \frac{t}{N} = \frac{0.67}{6} = 0{,}116$ мс.

Важным параметром затухающих колебаний является время релаксации τ. За это время амплитуда колебания уменьшается в «e» раз (e=2,72 – основание натурального логарифма). Амплитуду напряжения можно измерять в делениях (одно деление – это сторона квадрата сетки на экране осциллографа по вертикали). Цена деления в данном случае для наших рассмотрений не важна. Важно, чтобы формат изображения был удобен для рассмотрений. На рис. 4 амплитуда напряжения U_{m0} = 4 деления. Амплитуда через время релаксации $(\frac{4}{2{,}72} = 1{,}48)$ $U_{m\tau}$ = 1,48 деления. Осциллограмма показывает, что уменьшение амплитуды в «e» раз произошло за время $\tau = \gamma n = 0{,}1 \cdot 4{,}4 = 0{,}44$ мс.

4. Экспериментальные результаты

$$\boldsymbol{R0} = \frac{\mathbf{2*19.1}\ \text{мГн}}{\mathbf{200}\ \text{мкс}\mathbf{*9}} = \mathbf{21.2}\ \text{Ом}$$

C, нФ	L, мГн	N	n	γ, мкс/дел	t, мкс	Тэксп, мкс	$\sqrt{LC}$, мкс	Ттеор, мкс
10,04	19,1	11	10	100	1000	90.91	13.85	87.022
15,1	19,1	10	10	100	1000	100	16.98	106.69
20	19,1	8	11.5	100	1150	143.75	19.54	122.77
25,1	19,1	8	10	100	1000	125	21.89	137.54
30,1	19,1	8	12.5	100	1250	156.25	23.97	150.61
36.2	19.1	6	10	100	1000	166.67	26.29	165.18

$$\text{tэксп1} = n *\ \gamma = 10 * 100\,\frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000\ \text{мкс}$$

$$\text{tэксп2} = n *\ \gamma = 10 * 100\,\frac{\text{мкс}}{\text{дел}} = 1000\ \text{мкс}$$

$$tэксп3 = n * \gamma = 11.5 * 100\frac{мкс}{дел} = 1150 \text{ мкс}$$

$$tэксп4 = n * \gamma = 10 * 100\frac{мкс}{дел} = 1000 \text{ мкс}$$

$$tэксп5 = n * \gamma = 12.5 * 100\frac{мкс}{дел} = 1250 \text{ мкс}$$

$$tэксп6 = n * \gamma = 10 * 100\frac{мкс}{дел} = 1000 \text{ мкс}$$

$$Tэксп1 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{11} = 90.91 \text{ мкс}$$

$$Tэксп2 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{10} = 100 \text{ мкс}$$

$$Tэксп3 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1150 \text{ мкс}}{8} = 143.75 \text{ мкс}$$

$$Tэксп4 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{8} = 125 \text{ мкс}$$

$$Tэксп5 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1250 \text{ мкс}}{8} = 156.25 \text{ мкс}$$

$$Tэксп6 = \frac{tэксп}{N} = \frac{1000 \text{ мкс}}{6} = 166.67 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{10.04 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 1.38479 * 10^{-5}С = 13.85 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{15.1 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 1.69826 * 10^{-5}С = 16.98 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{20 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 1.95448 * 10^{-5}С = 19.54 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{25.1 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 2.18954 * 10^{-5}С = 21.89 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{30.1 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 2.39773 * 10^{-5}С = 23.97 \text{ мкс}$$

$$\sqrt{LC} = \sqrt{36.2 * 10^{-9}Ф * 19{,}1 * 10^{-3} \text{ Гн}} = 2.62949 * 10^{-5}С = 26.29 \text{ мкс}$$

$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 13.85 \text{ мкс} = 87.022 \text{ мкс}$$

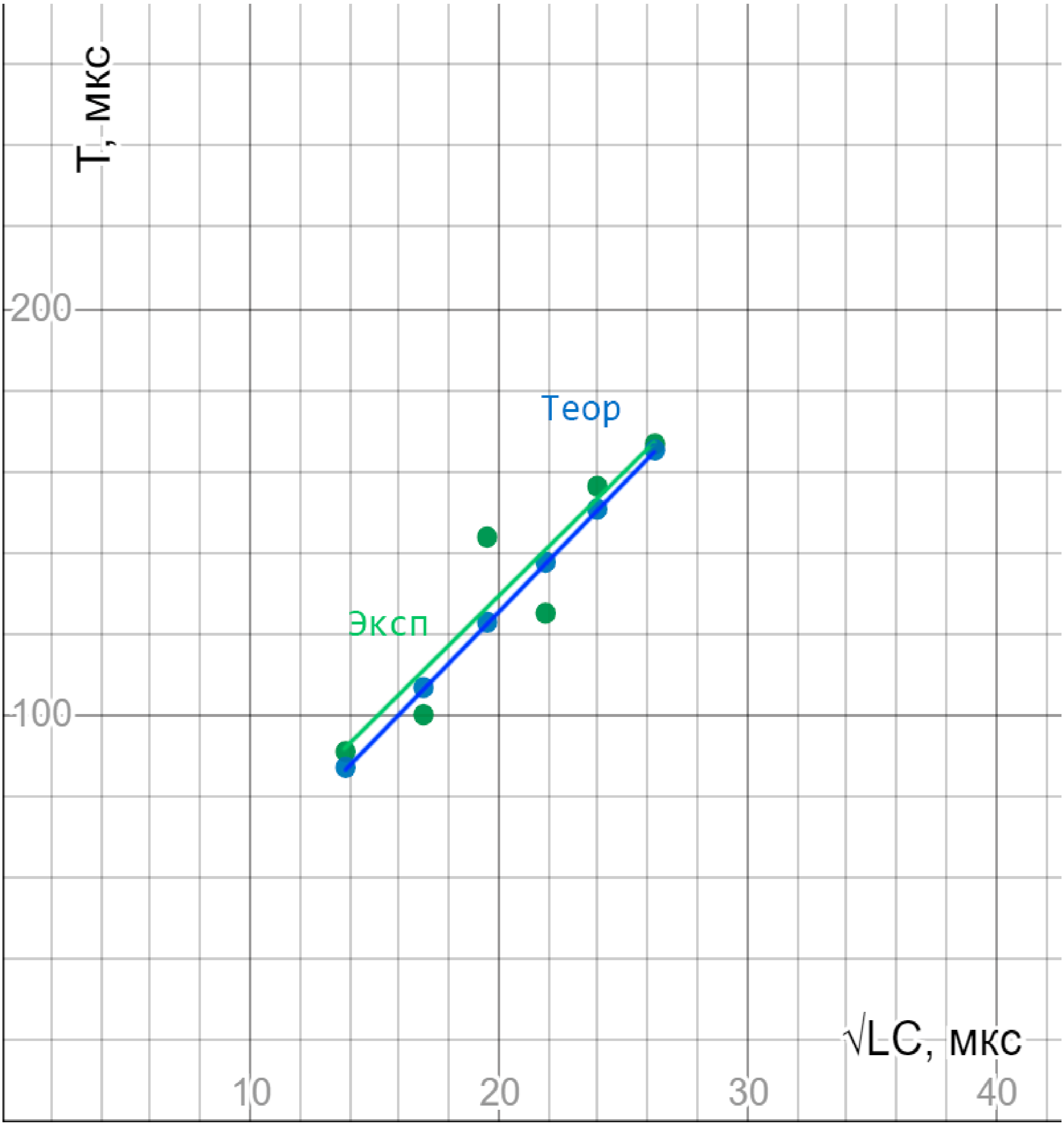
$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 16.98 \text{ мкс} = 106.69 \text{ мкс}$$

$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 19.54 \text{ мкс} = 122.77 \text{ мкс}$$

$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 21.89 \text{ мкс} = 137.54 \text{ мкс}$$

$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 23.97 \text{ мкс} = 150.61 \text{ мкс}$$

$$Tтеор = 2\pi\sqrt{LC} = 2\pi * 26.29 \text{ мкс} = 165.18 \text{ мкс}$$



Вывод: В ходе проделанной работы я ознакомился с физическими процессами, протекающими в электрическом контуре.На графике изображена линейная зависимость T от $\sqrt{LC}$. Определил сопротивление на намотке катушки R0=21.2 Ом.

5. **Контрольные вопросы**
   1) **За какое время изменения тока в катушке индуктивности передается к сопротивлению контура, если длина соединительного провода равно 0,1 м? Оценить при этом наибольшую возможную частоту колебаний в электрическом контуре.**

Катушка индуктивности обладает реактивным сопротивлением, модуль которого $X_L = \omega L$, где $L -$ индуктивность катушки, $\omega -$ циклическая частота протекающего тока. Соответственно, чем больше частота тока, протекающего через катушку, тем больше её сопротивление.

Катушка с током запасает энергию в магнитном поле, равную работе, которую необходимо совершить для установления текущего тока I. Эта энергия равна:

$$E_{\text{c}} = \frac{LI^2}{2}$$

При изменении тока в катушке возникает ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon = -L\frac{dI}{dt}$$

При замыкании катушки с током на резистор происходит переходной процесс, при котором ток в цепи экспоненциально уменьшается в соответствии с формулой:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

где $T = \frac{L}{R}$ —потсоянная времени.

То есть время изменения тока в катушке:

$$\frac{t}{T} = \ln\frac{I_0}{I}$$

$$t = \frac{R}{L}\ln\frac{I_0}{I}$$

Длина:

$$l = cT = \frac{\text{c}R}{L}$$

$$t = \frac{l}{c}\ln\frac{I_0}{I}$$

$$t \sim \frac{l}{c} = \frac{0{,}1}{3 \cdot 10^8} = 3{,}3 \cdot 10^{-10}\ \text{с} = 33\ \text{нс}$$

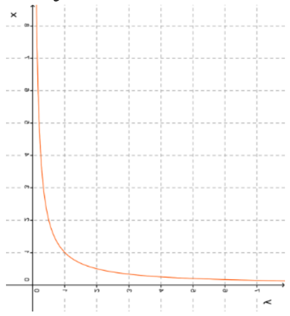
То есть, уменьшение тока в 2,7 раза передается за 3 нс.

Наибольшая частота:

$$\vartheta = \frac{1}{T} = 33 \text{ нс}$$

Наибольшая частота возможна при уменьшении тока в 2,7 раза.

1) **Какие физические законы описывают процессы, протекающие в колебательном контуре?**
   Колебания происходят благодаря перетеканию энергии магнитного поля в энергию электрического и наоборот. По закону сохранения энергии сумма их постоянна. В идеале колебания гармонические. Но в реальности они затухают.
2) **В чем состоит отличие дифференциального уравнения свободных колебаний в реальном (с учетом сопротивления) электрическом контуре от такого же в идеальном контуре?**
   В реальном контуре колебания затухающие. Поэтому это уравнение отличается слагаемым 2b*dq/dt b-коэффициент затухания.
3) **От чего зависит быстрота уменьшения амплитуды напряжения на сопротивлении R контура? Изобразить закономерность графически.**
   Скорость уменьшения амплитуды колебаний не зависит от ее величины, а определяется добротностью контура, от которой зависит затухание в нем.



4) **Какой промежуток времени колебаний называется временем релаксации? Зависит ли время релаксации от сопротивления контура?**
   Время релаксации — период времени, за который амплитудное значение возмущения в выведенной из равновесия физической системе уменьшается в *e* раз

5) **Какая закономерность затухающих колебаний выражается с помощью логарифмического декремента затухания? Каков физический смысл этой величины ?**
   Логарифмический декремент колебаний — безразмерная физическая величина, описывающая уменьшение амплитуды колебательного процесса и равная натуральному логарифму отношения двух

последовательных амплитуд колеблющейся величины в одну и ту же сторону

6) **Какова зависимость добротности электрического контура Q от параметров R, L, C?**

Зависимости нет. Она зависит от потерь в контуре и равна отношению характеристического сопротивления (корень из L/C) к сопротивлению потерь.

7) **Какие формулы подтверждают зависимость: а) Т от $\sqrt{LC}$,**

б) δ от R? **Согласуются ли они с графиками, полученными опытным путем? (подумать над этим пунктом)**

а) $T = 2\pi\sqrt{LC}$

б) $\delta = R \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{C}{L}}$

Да, согласуются

6. **Задача**

Логарифмический декремент затухания электрического контура δ = 0,2. Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за время одного колебания заряда?

Дано:	Решение:
$\delta = 0{,}2$	$\delta = \ln\frac{A1}{A2}$
$\frac{A1}{A2}$ –?	$\frac{A1}{A2} = e^{\delta} = e^{0.2} = 1.22140275816$
	Ответ: 1.22140275816