Федеральное агентство связи

Сибирский Государственный Университет Телекоммуникаций и Информатики

СибГУТИ

Кафедра высшей математики

Расчетно-графическая работа № 9.

Приложение кратных интегралов

Выполнил: студент 1 курса группы ИП-014

Обухов Артём Игоревич

Преподаватель: Терещенко Анастасия Фёдоровна

Вариант 22

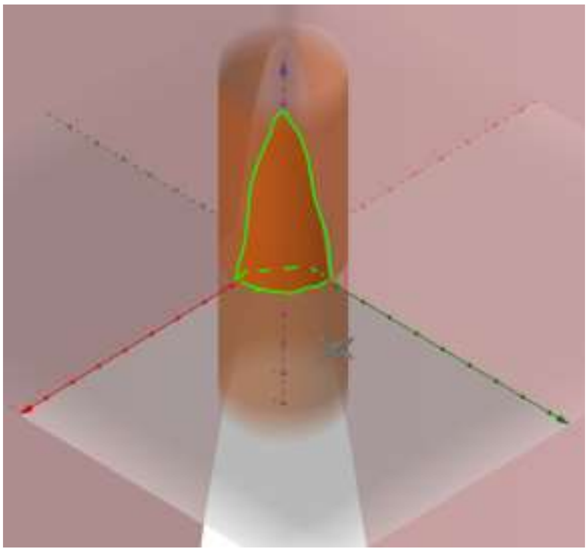
Найдите объём тела, ограниченного поверхностью $z = 4xy,\ x, y \geq 0$, плоскостью $z = 0$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 3$.

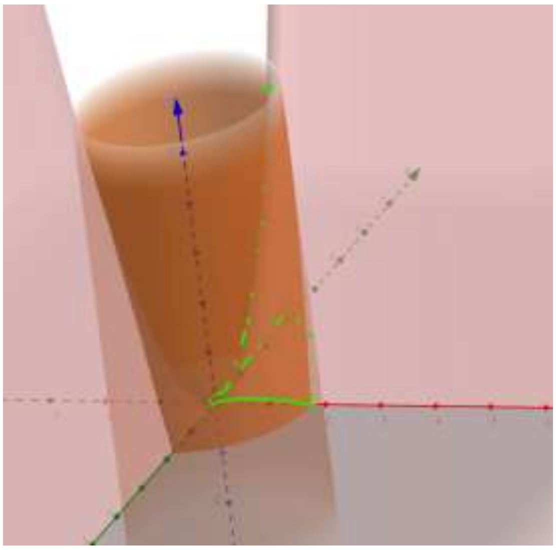
Ответ округлите до сотых.

Ответ:

z = 4xy – седловая поверхность

Тело, объем которого требуется найти, будет выглядеть так:

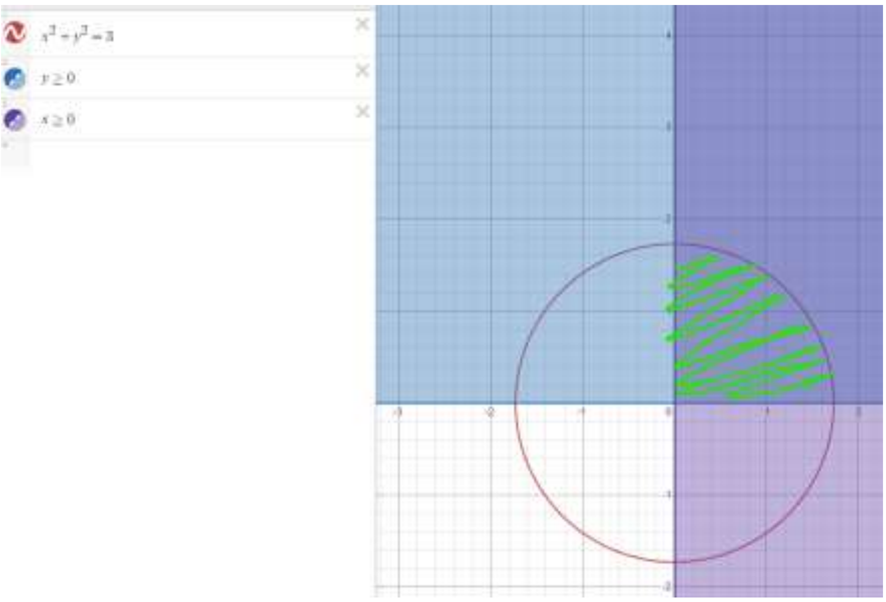




$$V = \iiint\limits_{T} dV$$

Формула объема тела(свойство тройного интеграла)

Для начала, найдем пределы интегрирования для плоскости (Ox, Oy)



В проекции цилиндра получается окружность

Найдем пределы для x и y

$x^2 + y^2 = 3$

$y^2 = 3 - x^2$

$y = \sqrt{3 - x^2}$

$y_{\text{в}} = \sqrt{3 - x^2}$

$y_{\text{н}} = 0$

Тогда x будет изменяться от 0 до $R_{\text{цил}}$

$x^2 + y^2 = R_{\text{цил}}^2$

Тогда

$3 = R_{\text{цил}}^2$

$R_{\text{цил}} = \sqrt{3}$

Из этого получаем, что x будет изменяться от 0 до $\sqrt{3}$

Далее, нам нужно найти пределы интегрирования для z

Заметим из приложенных графиков, что z будет изменяться от 0 до 4xy

Тогда $z_{\text{н}} = 0; z_{\text{в}} = 4xy$

Запишем итоговый интеграл

$$V = \iiint\limits_T dV = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_0^{4xy} dz = \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} z \Big|_0^{4xy} dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} (4xy - 0)dy = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4xy^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{3-x^2}} dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} (\frac{4x(3-x^2)}{2} - 0)dx = \int_0^{\sqrt{3}} (\frac{12x - 4x^3}{2})dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{12x}{2} dx - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{4x^3}{2} dx = \frac{12x^2}{2*2} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{4x^4}{2*4} \Big|_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3x^2}{1} \Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{x^4}{2} \Big|_0^{\sqrt{3}} = 3 * (\sqrt{3})^2 - 0 - \frac{(\sqrt{3})^4}{2} - 0 = \mathbf{4.5} \text{ ед}^3$$