Implizite Differenzierung

Erfahren Sie mehr über den HP Prime:
http://www.hp-prime.de

Eine Einführung in die HP Prime Funktionalitäten: Erweiterte Grafiken; Benutzung der Grafik Einstellung Variablen; Navigation im Katalog; Benutzung vom CAS für Implizite Differenzierung; Benutzung vom CAS für die Losung von Gleichungen.

Mathematischer Einhalt: Implizite Differenzierung

Aktivität:

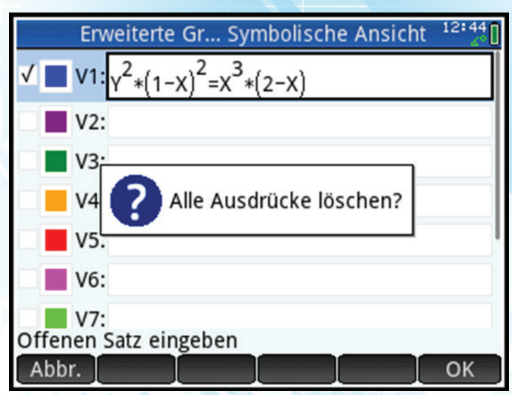
Wir suchen die Gleichung von der Tangente durch Punkt (2,0) an die Ellipse mit Gleichung:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 3y^2 - 4 = 0$$

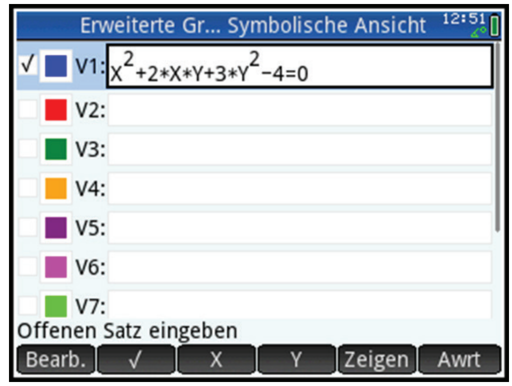
Öffnen Sie bitte die Anwendungen Bibliothek mit die Apps Info Taste. Starten Sie dann bitte die Erweiterte Grafiken Anwendung. Diese Anwendung öffnet in dem symbolischen Schirm, wo man bis zu 10 Gleichungen oder Ungleichungen eingeben kann.

OK

Löschen Sie bitte alle Ausdrucke mit Shift und Esc Clear. Bestätigen Sie mit Enter ≈ oder .

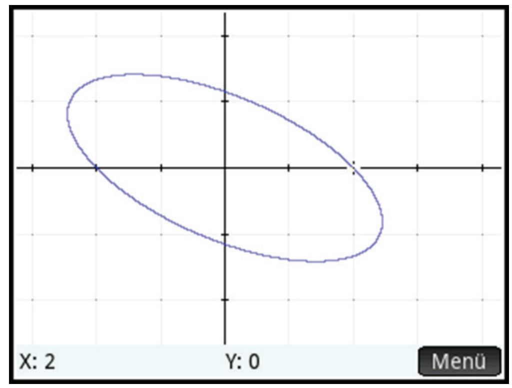


Geben Sie bitte als V1 die Gleichung für die Ellipse ein.

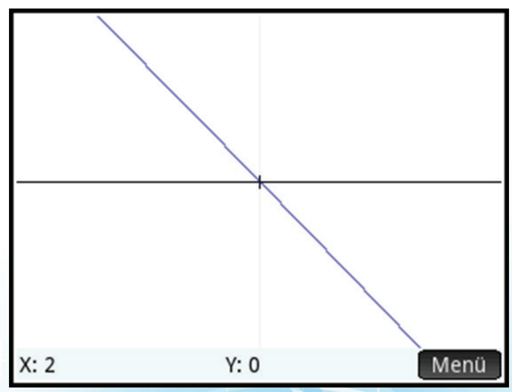


Im Unterrand von dem Schirm finden Sie Tasten fur die Symbolen =, X und Y. Offnen Sie die Grafik mit die Plot Setup Taste. Andern Sie bitte die Schirmeinstellungen; mit zwei Finger auf dem Schirm kneifen oder/und mit die + Ans und − Base Tasten vergrossern oder verkleinern.

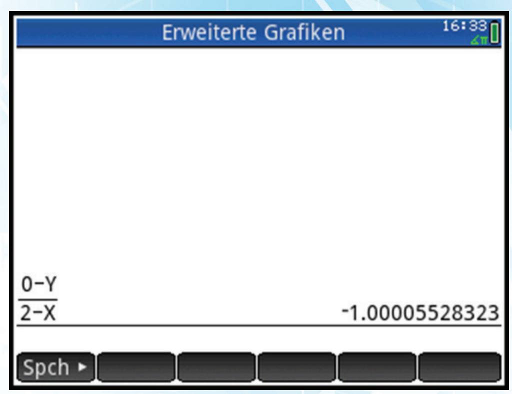
Wie Sie sehen seht es aus als ware (2,0) einen Punkt auf die Ellipse.



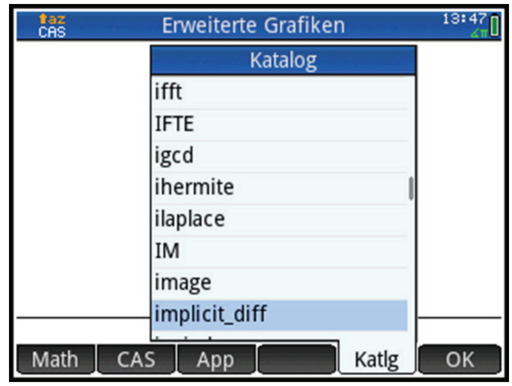
Bringen Sie den Cursor zu dem Punkt (2,0) und vergrossern Sie mehrmals mit + Ans bis Sie lokale Linearitat erreichen.



Wir schätzen nun die Steigung der Kurve bei (2, 0). Drücken Sie ▶, um den Cursor um ein Pixel nach rechts von (2, 0) zu bewegen. Die aktuellen Trace-Cursor-Koordinaten werden in den Variablen X und Y gespeichert. Drücken Sie Settings, um die Home-Ansicht zu öffnen. Drücken Sie Units, um das Menü Vorlage zu öffnen und wählen Sie die Fraktionsvorlage. Stellen Sie den Zähler 0 – Y und den Nenner 2 – X ein. Drücken Sie Enter, um das Ergebnis wie in der Abbildung gezeigt zu sehen. Unsere Schätzung für den Abhang liegt bei –1.



Wir werden nun implizite Differenzierung verwenden, um genau die Steigung zu finden. Drücken Sie CAS Settings, um die CAS-Ansicht zu öffnen. Drücken Sie Mem B, um die Werkzeugkasten-Menüs zu öffnen, tippen Sie auf Katlg und drücken Sie dann i (TAN ATAN i) und m (+/− M), um zu Befehlen zu springen, die mit diesen beiden Buchstaben beginnen. Scrollen Sie nach unten zu *impllicit_diff*. Drücken Sie Help User, um die Hilfeseite für diesen Befehl anzuzeigen.



Beachten Sie die Menütasten:

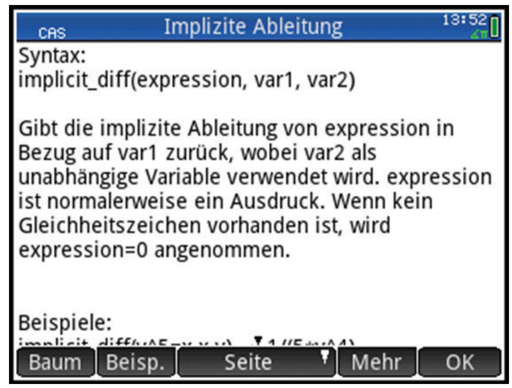
Baum : öffnet den gesamten Hilfsbaum

Beisp. : öffnet ein Menü mit Beispielen zum Einfügen

▲ Seite ▼ : Seite für Seite Navigation

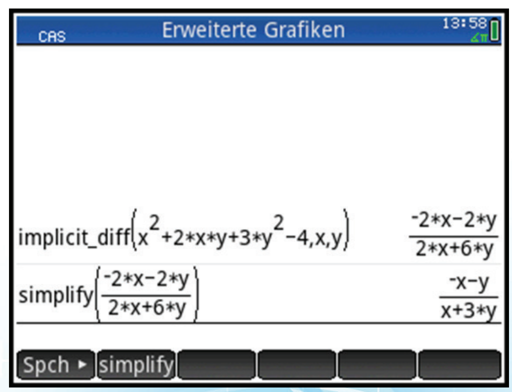
Mehr : Die zugehörigen Befehle anzeigen

OK : Schließen Sie die Hilfeseite



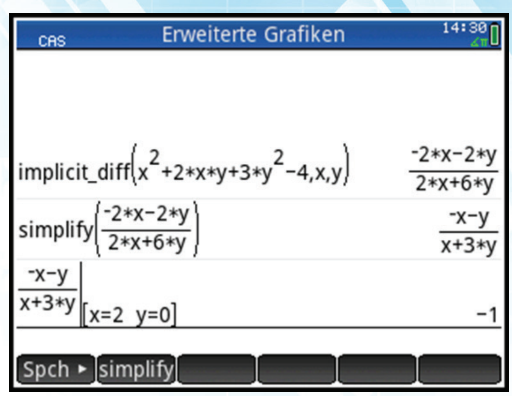
Wir können sehen, dass der Befehl einen Ausdruck nimmt, gefolgt von den Variablen für die Differenzierung.

Tippen Sie auf OK, um die Hilfeseite zu schließen. Tippen Sie nochmal auf OK, um den Befehl in das CAS einzufügen. Der CAS verwendet Kleinschreibung Variablennamen, so verwenden Sie x und y hier.

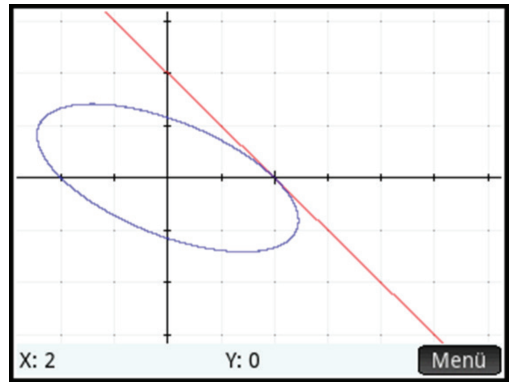


Geben Sie den Ausdruck für unsere Ellipse ein, gefolgt von x und y und drücken Sie Enter, um das Ergebnis zu sehen. Tippen Sie auf simplify, um den Ausdruck zu vereinfachen.

Drücken Sie Units und wählen Sie die dritte Schablone in der ersten Zeile (mit dem Befehl where ()), tippen Sie auf das erste Quadrat, tippen Sie dann auf das letzte Ergebnis, und tippen Sie auf Kopie, um es in das Quadrat zu kopieren. Tippen Sie auf das zweite Quadrat und geben Sie bitte ein: x=2, y = 0. Drücken Sie Enter, um das Ergebnis zu sehen: Die Steigung ist −1, genau wie wir es vorher geschätzt haben.



Drücken Sie Symb, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren und geben Sie die Gleichung der Tangentenlinie ein. Die Linie, deren Steilheit –1 ist und durch Punkt (2, 0) geht, ist y – 0 = –1 (x – 2) oder y = –x + 2. Geben Sie diese Gleichung in V2 ein (bitte beachten Sie die Großbuchstaben) und drücken Sie Plot, um die Grafik zu sehen. Sie können die Gleichung entweder in Punkt-Slope-Form oder Slope-Intercept-Form eingeben. Drücken Sie (mehrmals) −, um zurück zu zoomen, so dass Sie die gesamte Ellipse sehen können.

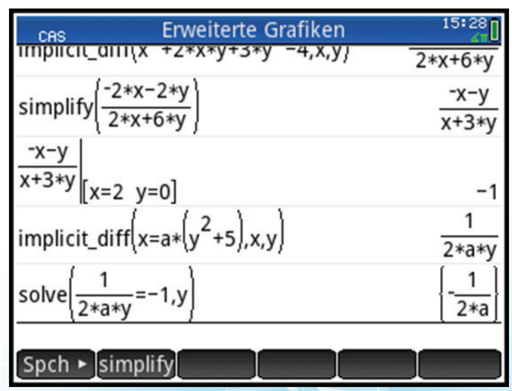


Vor HP Prime, um die Steigung der Tangente an den Graphen einer Beziehung mit impliziter Differenzierung zu finden, war eine mechanische Übung mit einem Sprung des Glaubens, dass die Gleichung erhalten wurde wirklich die Gleichung einer Linie tangential zu einer Kurve. Jetzt können wir leicht überprüfen, indem Sie das Resultat grafisch darstellen.

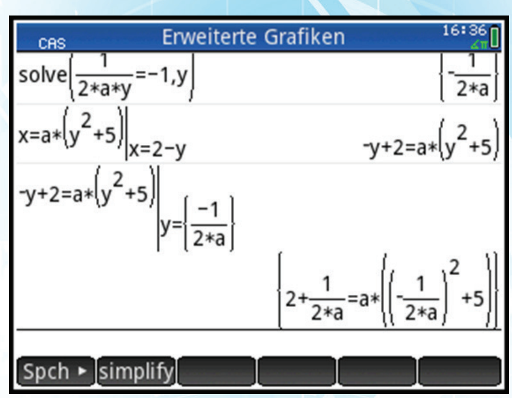
Erweiterung:

Finden Sie alle Werte von a, für die die Parabel $x = a \cdot (y^2 + 5)$ auch tangential zu unserer Geraden y = –x + 2 ist.

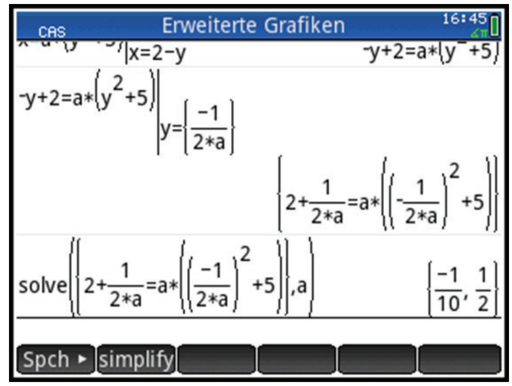
Drücken Sie CAS, um zum CAS zurückzukehren. Differenzieren Sie unsere Gleichung implizit in bezug auf x und y, wie Dargestellt in der Abbildung rechts. Drücken Sie Mem, tippen Sie auf CAS, tippen Sie auf 3. Lösen, und wählen Sie 1 Lösen. Kopieren Sie nun den Ausdruck (nur doppeltippen) und stellen Sie es ist gleich –1, wie gezeigt. Drücken Sie ,, gefolgt von y. Damit Lösen Sie nach y und drücken Sie Enter, um das Ergebnis zu sehen.



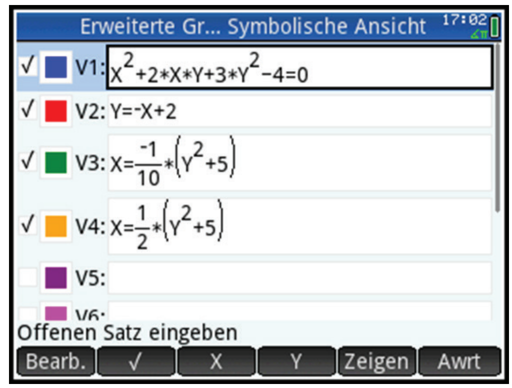
Wir wissen, daß der Punkt der Tangentialität beide Gleichungen (die Parabel und die Linie) erfüllt. Wählen Sie nochmal die dritte Schablone mit dem Befehl Where() und geben Sie die Parabelgleichung ein Wie in der Abbildung rechts dargestellt. In dass zweite Quadrat geben Sie die Substitution x = 2 – y ein, um eine Gleichung zu erhalten in a und y.



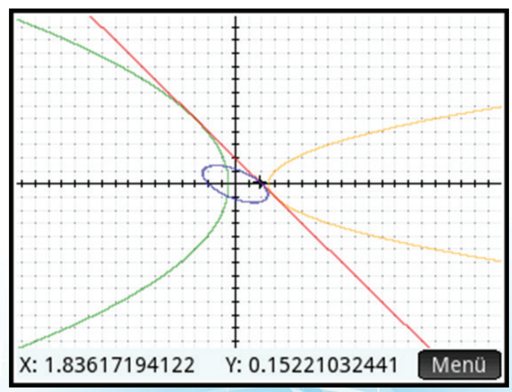
Wiederholen Sie mit dem Ergebnis und unsere Substitution für y Ausgedrückt in a, gegeben durch unsere implizite Ableitungsgleichung.



Jetzt lösen nach a. Das Ergebnis zeigt, dass es zwei Werte von a gibt, –1/10 und 1/2, für die der Graph von $x = a \cdot (y^2 + 5)$ tangential ist zur Geraden y = –x + 2.

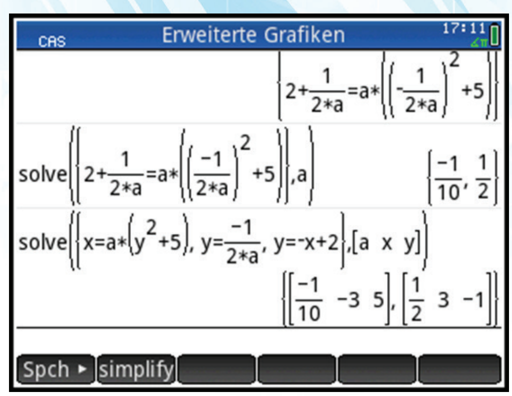


Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und geben Sie diese Gleichungen in V3 und V4 ein.



Drücken Sie Plot Setup, um die Graphen zu sehen.

Sie können den gesamten Prozess in einem Schritt durchführen, wenn Sie möchten. Verwenden Sie den Befehl solve () mit dem in geschweiften Klammern eingeschlossenen Satz von Gleichungen als System, gefolgt vom Vektor der Variablen. Die Abbildung rechts zeigt den genauen Ausdruck und das Ergebnis.



Das Ergebnis zeigt, dass:

- Wenn a = –1/10, ist die Parabel tangential zur Linie am Punkt (–3, 5)
- Wenn a = ½, ist die Parabel tangential zur Linie am Punkt (3, –1)

Diese Ergebnisse können in der Plot-Ansicht überprüft werden.

Die HP Prime CAS bietet Ihnen außergewöhnliche Flexibilität bei der Erforschung und exacte Lösung von Problemen.