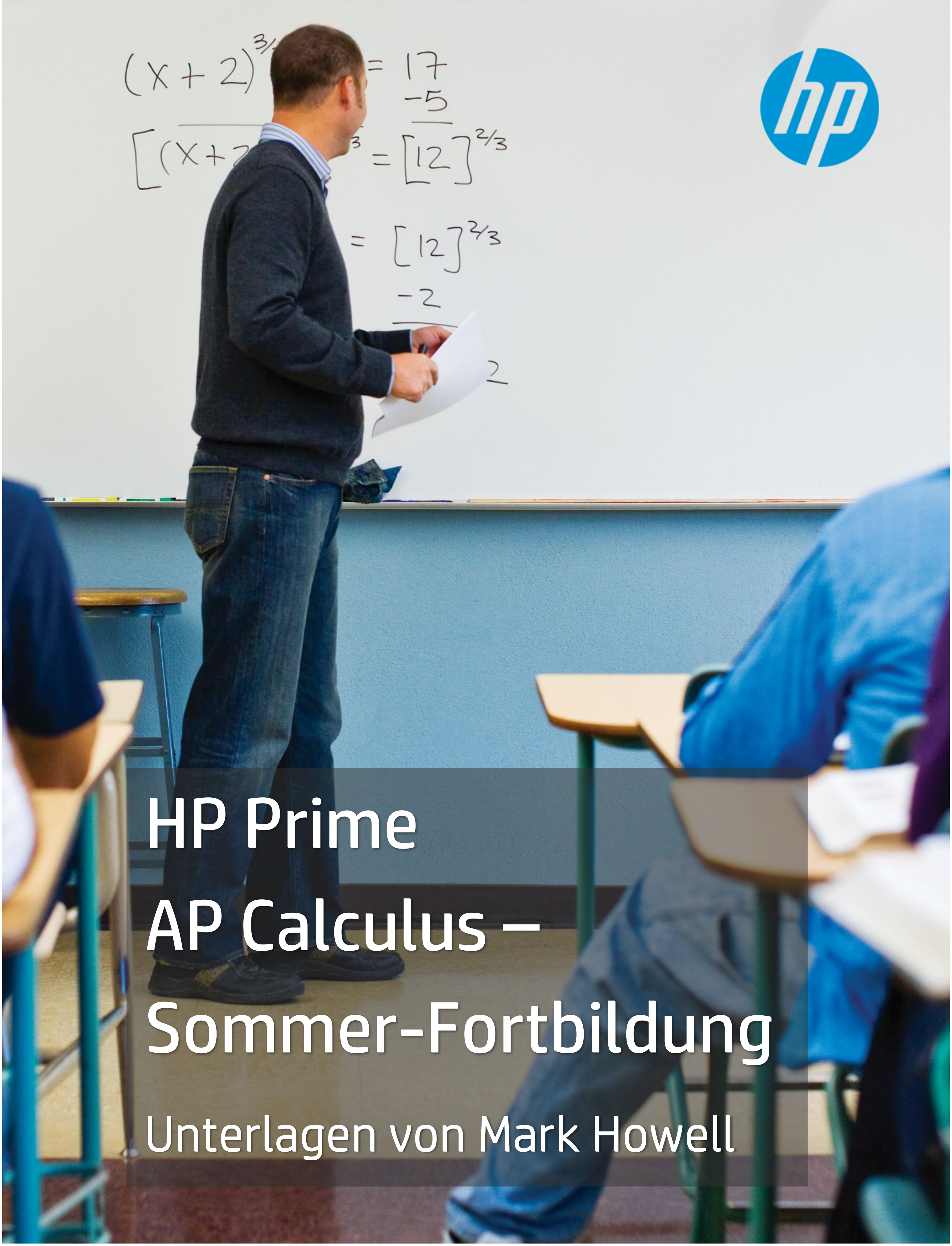


HP Prime AP Calculus – Sommer-Fortbildung

Unterlagen von Mark Howell

Inhaltsverzeichnis

Einführung in den HP Prime

Der HP Prime ist ein Taschenrechner mit einem berührungsempfindlichen Farbdisplay und Multi-Touch-Funktionalität, der ein Computeralgebrasystem (CAS) und eine Erweiterte Grafiken-App umfasst, mit der Sie jede Relation zwischen zwei Variablen grafisch darstellen können (z. B. $\sin(xy)=\cos(xy)$). Darüber hinaus gibt es eine dynamische Geometrie-App. In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie Sie den HP Prime bedienen. Darüber hinaus wird die Funktion-App vorgestellt.

In diesem Dokument werden die folgenden Konventionen verwendet:

- Tasten, die eine Hauptfunktion aufrufen, werden durch eine Abbildung der Taste dargestellt: [Num Setup], [Settings], [LN] usw.
- Eine Tastenkombination, die eine Alternativfunktion aufruft (oder ein Zeichen einfügt), wird durch die entsprechende Umschalttaste ([Shift] oder [ALPHA]) gefolgt von der Taste für die entsprechende Funktion/das entsprechende Zeichen dargestellt:
  - [Shift] [LN] gibt die natürliche Exponentialfunktion ein und [ALPHA] [x^2] fügt den Buchstaben F ein.
- Auch der Name der Alternativfunktion wird gegebenenfalls in Klammern nach der Tastenkombination angegeben:
  - [Shift] [Esc] (Clear), [Shift] [Plot] (Plot Setup).
- Eine Taste, die zum Einfügen einer Zahl dient, wird durch die betreffende Zahl dargestellt:
  - 5, 7, 8 usw.
- Alle unveränderlichen Display-Anzeigen, z. B. Bildschirm- und Feldnamen, werden fettgedruckt dargestellt:
  - **CAS-Einstellungen**, **X-Schrittweite**, **Dezimaltrenner** usw.
- Menüoptionen, die durch Tippen auf das Display ausgewählt werden, werden durch ein Bild der Option dargestellt:
  - [Spch ▸], [OK], [Abbr.] usw.
- Cursortasten werden durch [▼], [◀], [▶] und [▲] dargestellt. Mit diesen Tasten bewegen Sie sich auf einem Bildschirm von Feld zu Feld oder in einer Optionsliste von einer Option zur anderen.

HINWEIS: Sie müssen eine Menüoption mit dem Finger auswählen oder zur gewünschten Auswahl navigieren und [Enter] drücken.

Die ON-OFF-Taste befindet sich unten links auf dem Tastenfeld. Beim ersten Einschalten eines neuen HP Prime wird ein Begrüßungsbildschirm angezeigt, in dem der Benutzer aufgefordert wird, eine Sprache und einige Ersteinrichtungsoptionen auszuwählen. Die meisten Benutzer können ohne Weiteres die Standardeinstellungen übernehmen.

Die Bildschirmhelligkeit kann durch Drücken und Halten von [On] und [+] erhöht bzw. durch Drücken und Halten von [On] und [−] verringert werden.

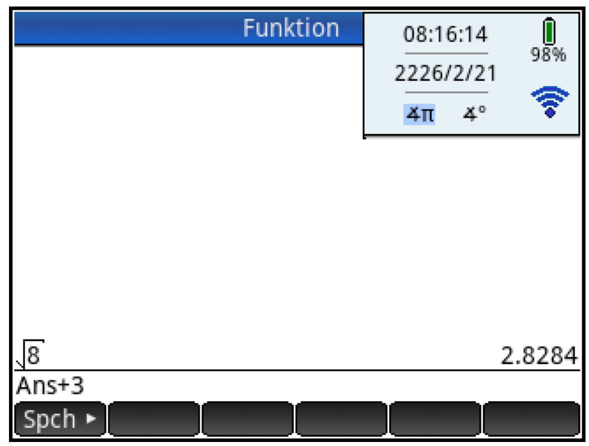
Nehmen Sie sich eine Minute Zeit, um das Layout des Tastenfelds zu betrachten. Die obere Tastengruppe mit dem schwarzen Hintergrund dient hauptsächlich zur Navigation von einer Umgebung zur anderen. Wenn Sie [Settings] drücken, wird die Startansicht für Berechnungen angezeigt. Wenn Sie [CAS] drücken, wird eine ähnliche Umgebung für symbolische oder exakte Berechnungen angezeigt. Durch Drücken von [Apps] wird ein Menü angezeigt, in dem Sie eine der Anwendungen im HP Prime auswählen können, z. B. **Funktion**, **Erweiterte Grafiken** oder **Arbeitsblatt**. Die untere Tastengruppe dient hauptsächlich zum Eingeben oder Bearbeiten von mathematischen Ausdrücken. Außerdem gibt es Umgebungen zum Eingeben von Listen, [Shift] [7], Matrizen, [Shift] [4], und Benutzerprogrammen, [Shift] [1].

Dabei wurde besonders auf die Position bestimmter Tasten geachtet. Die Zahl π ist beispielsweise über Shift 3 erreichbar. Die Listenbegrenzer, {}, werden direkt rechts neben der LISTEN-Taste Shift 8 angezeigt. Die Matrixbegrenzer, [], werden direkt rechts neben der MATRIX-Taste Shift 5 angezeigt.

Sie haben in der CAS-Ansicht und in der Startansicht folgende Möglichkeiten:

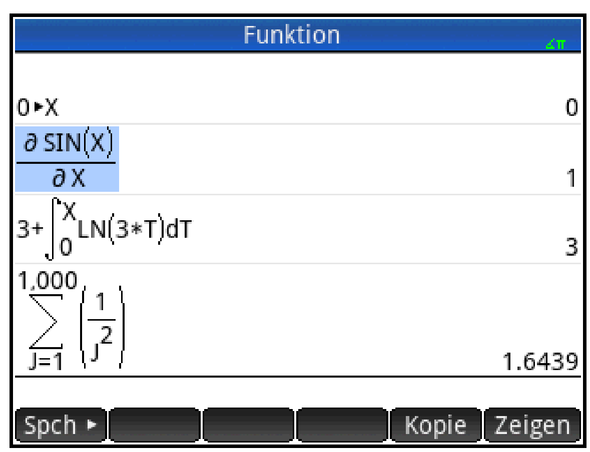
- Durch Tippen auf ein Element, können Sie es auswählen; tippen Sie zweimal darauf, um es in den Befehlszeileneditor zu kopieren.
- Durch Tippen und Ziehen nach oben oder unten können Sie durch den Berechnungsverlauf scrollen.
- Durch Drücken von Menu können Sie einen vorherigen Eintrag oder ein Ergebnis aus einer anderen Ansicht abrufen.
- Durch Drücken der Toolbox-Taste ( ) können Sie die Math- und CAS-Menüs sowie den Katalog anzeigen.
- Durch Drücken von können Sie ein Menü mit bedienerfreundlichen Vorlagen öffnen.
- Durch Drücken von Esc können Sie diese Menüs verlassen, ohne eine Auswahl vorzunehmen.
- Sie können auf die Menüschaltflächen Spch ▸, Kopie und Zeigen tippen.

Startansicht



Schalten Sie Ihren HP Prime ein und betrachten Sie die verschiedenen Bildschirmbereiche der Startansicht. Das Band am oberen Rand wird Titelleiste genannt. Darin wird die Umgebung angezeigt, in der Sie sich derzeit befinden (z. B. „Funktion" oder „Funktion Symbolische Ansicht"). Wenn Sie eine Shift-Taste drücken, wird im linken Bereich der Titelleiste ein Indikator angezeigt. Im rechten Bereich werden eine Batteriezustandsanzeige, eine Uhr und der aktuelle Winkelmodus angezeigt. Sie können auf diesen Schnelleinstellungsbereich oben rechts klicken, um einen Kalender anzuzeigen (durch Tippen auf Datum und Uhrzeit), um eine Verbindung zu einem WLAN-Schulnetzwerk herzustellen (durch Tippen auf das WLAN-Symbol) oder um den Winkelmodus zu ändern (durch Tippen auf die Winkelmodusanzeige).

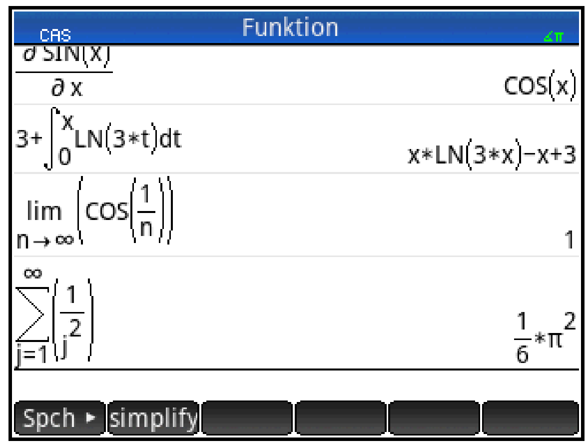
Der mittlere Bereich der Startansicht enthält einen Verlauf der bisherigen Berechnungen. Sie können mit den Cursortasten durch den Verlauf navigieren bzw. mit Ihrem Finger eine Auswahl vornehmen (durch Tippen) oder scrollen (durch Wischen). Direkt unter dem Verlauf befindet sich die Bearbeitungszeile. Dort können Sie mathematische Ausdrücke eingeben, die numerisch ausgewertet werden sollen. Am unteren Rand befinden sich Menüschaltflächen, z. B. Spch ▸ in der Startansicht. Diese Menüschaltflächen sind kontextsensitiv. Die jeweilige Beschriftung und Funktion hängen von der Umgebung ab, in der Sie sich befinden.



In der Startansicht können Sie wie in den nächsten Beispielen gezeigt numerische Berechnungen durchführen. Speichern Sie zunächst 0 in der reellen Variablen *X*, indem Sie 0 Spch ▸ X eingeben. Um die Variable *X* einzugeben, drücken Sie ALPHA X (oder x t θ n).

Drücken Sie , nachdem 0 in X gespeichert wurde, und wählen Sie die Ableitungsvorlage aus. Geben Sie im Zähler ein, tippen Sie dann in den Nenner und geben Sie ein. Drücken Sie , um das Ergebnis anzuzeigen: Der Wert der Ableitung von sin(*X*) (cos(*X*)), wenn *X*=0 ist, beträgt 1. Geben Sie für ein weiteres Beispiel 3+ ein. Kehren Sie dann zum Vorlagenmenü zurück und wählen Sie die Integralvorlage aus. Geben Sie LN(3*T) als Integranden ein und legen Sie die Integrationsgrenzen von 0 bis *X* fest (siehe Abbildung). Drücken Sie , um das Ergebnis anzuzeigen. Dieses ist 3, da *X*=0 ist. Die Abbildung rechts zeigt auch eine Summe. In allen Fällen sind die Ergebnisse eine reelle Zahl. In der Startansicht sind alle Ergebniswerte reelle oder komplexe Zahlen oder eine Matrix, Liste usw. mit reellen und/oder komplexen Zahlen. Sie können im Verlauf auf eine vorherige Eingabe oder auf ein Ergebnis klicken, um den Eintrag auszuwählen. Daraufhin werden zwei zusätzliche Menüschaltflächen angezeigt: Kopie und Zeigen. Über die erste Schaltfläche wird die Auswahl an der Cursorposition kopiert, über die zweite wird die Auswahl im Vollbildmodus im Lehrbuchformat angezeigt.

CAS-Ansicht



Demgegenüber ist die CAS-Ansicht für symbolische oder exakte numerische Ergebnisse vorgesehen. Drücken Sie , um die CAS-Ansicht zu öffnen. Lassen Sie uns die Berechnung der Ableitung wiederholen. Drücken Sie und wählen Sie die Ableitungsvorlage aus. Geben Sie im Zähler ein, tippen Sie dann in den Nenner und geben Sie ein. Drücken Sie , um das Ergebnis anzuzeigen: Die symbolische Ableitung von sin(*x*) ist cos(*x*). Beachten Sie hier, dass kleingeschriebene Variablen verwendet werden. Ebenso wird $3+\int_0^x LN(3\cdot t)dt$ in *x**LN(3**x*)-*x*+3 ausgewertet. Das CAS kann auch ∞ verwenden, wie in der Auswertung von $\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{1}{n}\right)$ und $\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j^2}\right)$ gezeigt (siehe Abbildung).

Kopieren und Einfügen

Wie bereits erwähnt können Sie die Auswahl im Verlauf der CAS- und Startansicht über Kopie in die Befehlszeile kopieren. Darüber hinaus können Sie die Auswahl mit (Copy) und (Paste) in die Prime-Zwischenablage kopieren bzw. aus der Zwischenablage an der Cursorposition einfügen. Diese Funktionalität bietet die Möglichkeit, Einträge in einer Umgebung zu kopieren und an einer beliebigen anderen Stelle im HP Prime einzufügen. Bei Daten können Sie auch auf einen Wert tippen und durch Halten und Ziehen des Fingers einen rechteckigen Wertebereich auswählen, kopieren und an einer anderen Stelle einfügen. Der virtuelle HP Prime-Taschenrechner bietet außerdem die Möglichkeit, einen Zellenbereich in einem Arbeitsblatt auf Ihrem PC zu kopieren und die numerischen Daten an einer beliebigen Stelle im virtuellen Prime-Taschenrechner einzufügen. Sie können die Daten dann an einen anderen HP Prime senden.

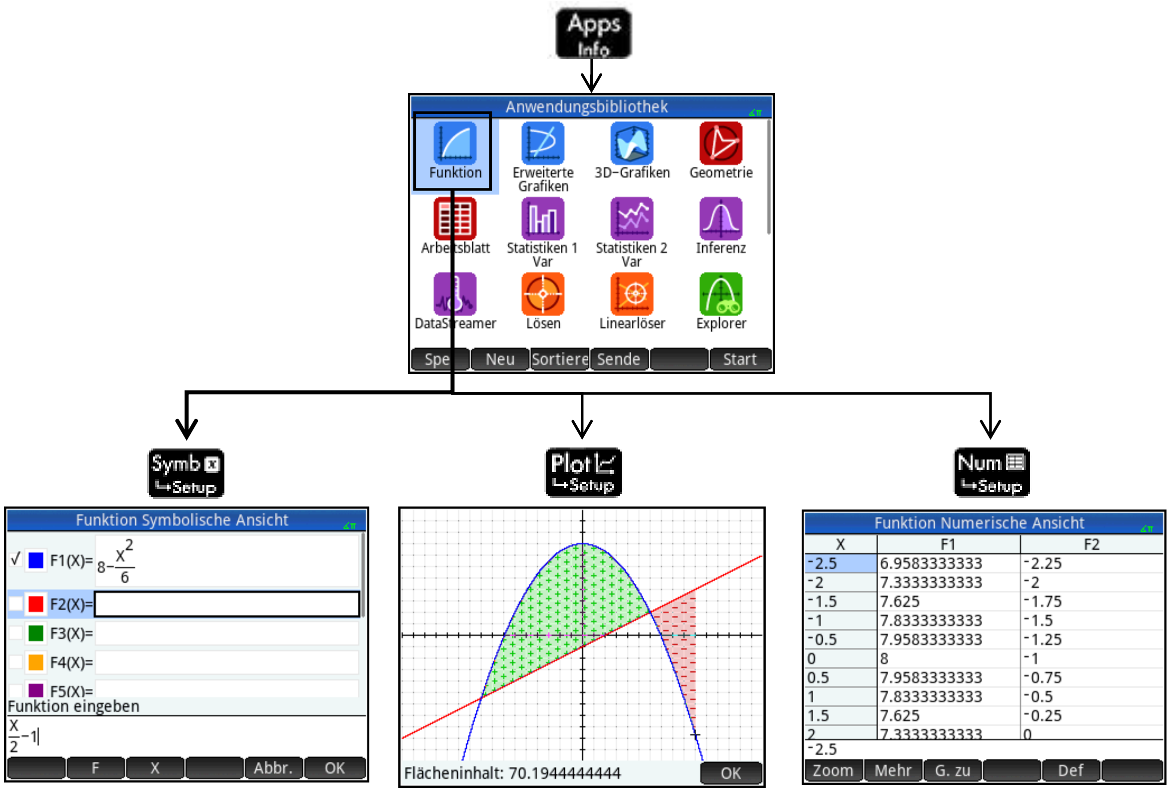
Löschen und Entfernen

In der CAS- und Startansicht können Sie einen Eintrag im Verlauf auswählen und drücken, um ihn zu löschen. Drücken Sie (Clear), um den gesamten Verlauf zu löschen. In einer Ansicht (symbolische Ansicht, Grafikeinstellungen usw.) werden mit (Clear) alle Einstellungen in der aktuellen Seite der Ansicht auf die jeweiligen werkseitigen Standardeinstellungen zurückgesetzt (gelöscht).

HP Prime-Apps und deren Ansichten

Im Lieferumfang des HP Prime-Grafiktaschenrechners sind mehrere Standard-Apps enthalten. Jede App wurde zur Untersuchung eines Teilgebiets der Mathematik oder zur Lösung von speziellen Problemen entwickelt. Jede Prime-App umfasst mindestens eine Ansicht. Eine App verfügt im Allgemeinen über eine symbolische Ansicht, eine grafische Ansicht und eine numerische Ansicht. Alle Apps weisen so gesehen eine gemeinsame Struktur auf, sodass die Verwendung der Apps einfacher zu erlernen ist. Das Schema der Prime-Apps ist in der folgenden Abbildung dargestellt.

HP Apps und ihre Ansichten



Symbolisch Grafisch Numerisch

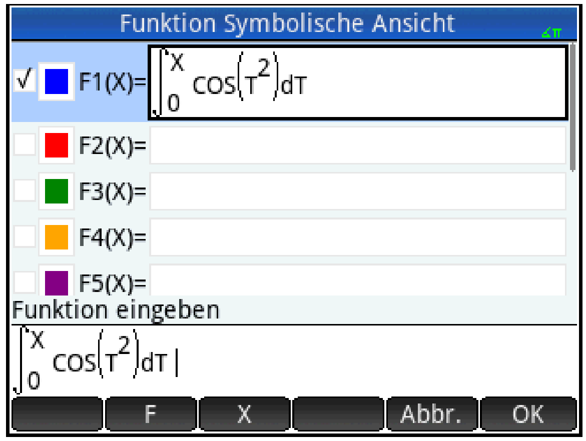
Drücken Sie Apps Info, um die Anwendungsbibliothek zu öffnen. Tippen Sie auf eine App, um sie zu starten, oder navigieren Sie mit dem Cursor-Pad durch die Bibliothek und tippen Sie auf Start, um die App zu starten.

Geben Sie die Arbeitsdaten für die App ein und speichern Sie sie mit einem leicht zu merkenden Namen. Setzen Sie dann die App zurück, damit Sie sie für andere Berechnungen verwenden können. Sie können jederzeit zu einer gespeicherten App zurückkehren und die App sogar an Arbeitskollegen senden! HP Apps verfügen über App-Funktionen und App-Variablen, die Sie in der App, in der CAS-Ansicht, in der Startansicht oder in Programmen verwenden können.

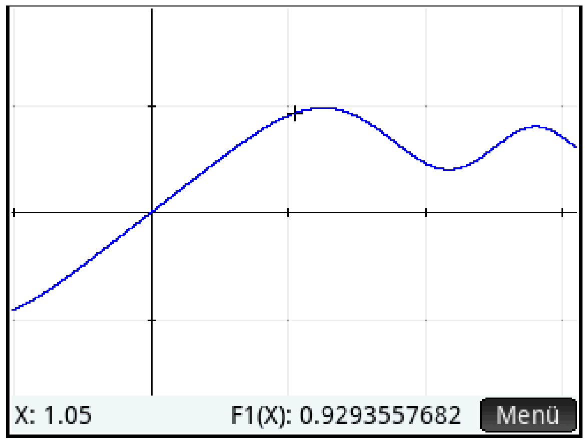
Erste Schritte: Die Funktion-App

Sei *g* die durch $g(x)=\int_0^x \cos\left(t^2\right)dt$ definierte Funktion für $-1\le x\le 2$. In welchen Intervallen fällt *g*?

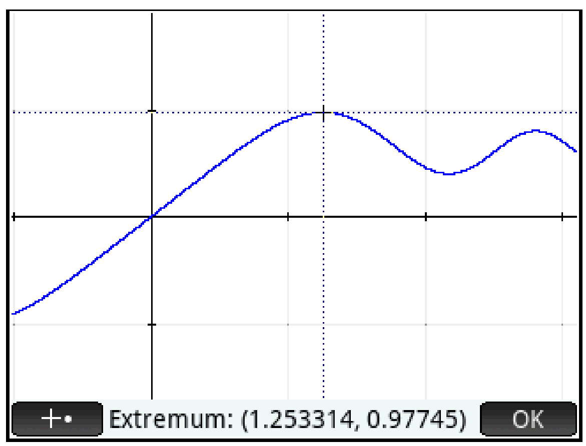
1. Drücken Sie Apps Info, um die Anwendungsbibliothek zu öffnen, und wählen Sie die Funktion-App aus. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet. Drücken Sie Units, um das Vorlagenmenü zu öffnen, und tippen Sie auf die Integralvorlage. Füllen Sie die Vorlage wie in der Abbildung gezeigt aus und tippen Sie auf OK.



2. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen anzuzeigen. Ziehen und zoomen Sie mit den Fingern, bis das Ansichtsfenster den in der obigen Problembeschreibung angegebenen Definitionsbereich aufweist (siehe Abbildung rechts). Bei den x-Werten zwischen -1 und 2 scheint es nur ein Intervall zu geben, in dem g(x) fällt. Das Intervall reicht vom relativen Maximum in der Nähe von x=1.2 bis zum Ende des Definitionsbereichs bei x=2.

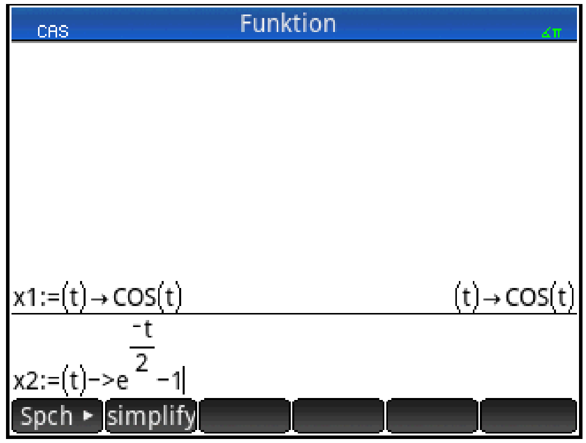


3. Tippen Sie in die Nähe des Maximums bei x≈1.2, um den Cursor in die Nähe des Extremums zu bewegen. Tippen Sie auf Menü, Fkt und wählen Sie „Extremum“ aus. Der linke Endpunkt des fallenden Intervalls liegt bei ungefähr 1.2533.



Somit fällt g(x) im Intervall $1.2533\le x\le 2$.

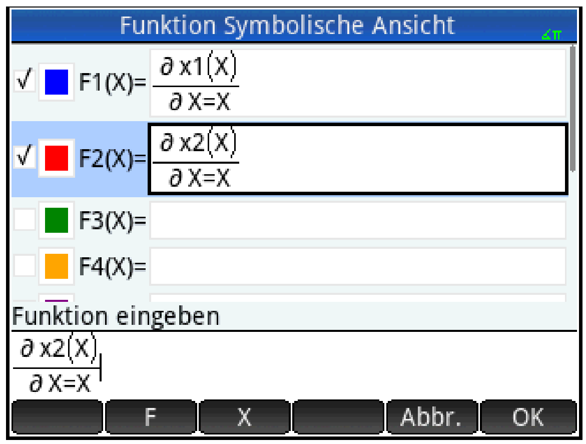
Zwei Teilchen bewegen sich vom Ursprung aus entlang der x-Achse. Für 0≤t≤10 werden die jeweiligen Positionen durch $x_1 = \cos(t)$ und $x_2 = e^{\frac{-x}{2}} - 1$ definiert. Für wie viele Werte von t weisen die Teilchen die gleiche Geschwindigkeit auf? Wir verwenden hier eine indirekte Methode, um ein nützliches Verfahren zu veranschaulichen.



1. Drücken Sie , um die CAS-Ansicht zu öffnen. Definieren Sie x1 und x2 wie oben gezeigt.

Hinweise:

- Verwenden Sie x1(t) und nicht nur x1.
- Der Prime verwendet := zum Definieren von Funktionen und Variablen.
- Das Abbildungssymbol (→) wird vom CAS nach der Eingabe eingefügt.
- Die erste Eingabe war tatsächlich x1(t):=COS(t).

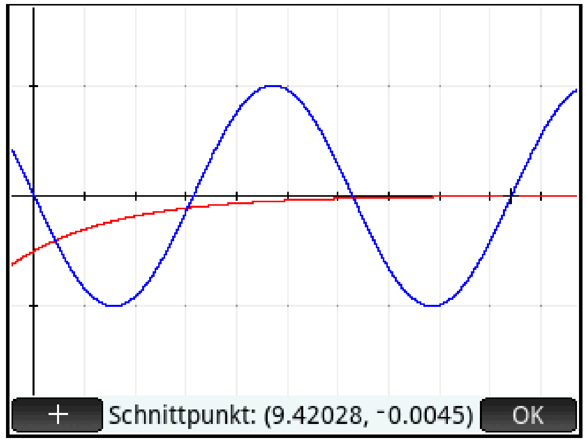


2. Drücken Sie , um die Anwendungsbibliothek zu öffnen. Navigieren Sie zur App **Funktion** und tippen Sie auf Neu.
3. Tippen Sie auf die App, um sie zu öffnen. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet. Wir definieren jetzt F1 und F2 als Ableitungen von x1 und x2 nach X. Tippen sie auf **F1(X)**, drücken Sie , um das Vorlagenmenü zu öffnen, und tippen Sie auf die Ableitungsvorlage. Geben Sie im Zähler x1(X) ein. Geben Sie im Nenner X=X ein. Definieren Sie genauso F2(X) als Ableitung von x2(X) nach X.

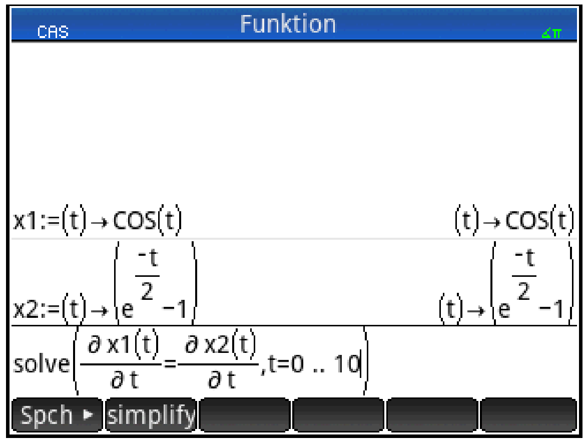
Hinweise:

- x1 und x2 verwenden den Kleinbuchstaben x, die Variable ist jedoch das großgeschriebene X.
- Die Notation X=X teilt dem Prime mit, dass X hier nicht wie an anderen Stellen im System ein einzelner Wert sein muss.

4. Drücken Sie Plot, um die Graphen anzuzeigen. Ziehen und zoomen Sie wieder mit den Fingern, bis das Ansichtsfenster dem im Problem angegebenen Definitionsbereich entspricht. Es gibt vier Zeitpunkte, an denen die Teilchen gleich schnell sind. Das heißt, die Geschwindigkeitsgraphen weisen 4 Schnittpunkte auf (siehe Abbildung).

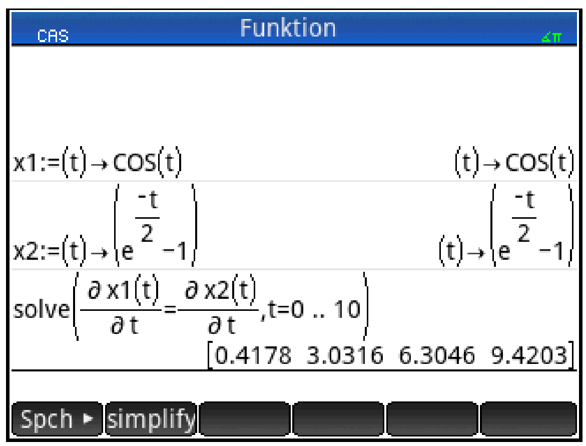


5. Der Verfolgungscursor befindet sich standardmäßig auf F1(X). Tippen Sie auf einen der Schnittpunkte, um den Verfolgungscursor dorthin zu bewegen. Tippen Sie auf Menü Fkt und wählen Sie **Schnittpunkt ...** aus. Sie werden aufgefordert, einen anderen Funktionsgraphen auszuwählen, um den Schnittpunkt zu ermitteln. Tippen Sie einfach auf OK, um F2(X) auszuwählen. In der Abbildung wurde der letzte Schnittpunkt bei (9.4203, 0.0045) ermittelt.



Wir haben dieses Verfahren verwendet, um zu veranschaulichen, dass Sie sowohl in der CAS-Ansicht als auch in der grafischen Ansicht arbeiten können.

6. Drücken Sie CAS, um zur CAS-Ansicht zurückzukehren.
7. Drücken Sie Mem, um das Toolbox-Menü zu öffnen. Tippen Sie auf CAS, um das CAS-Menü auszuwählen, und wählen Sie das Untermenü „Lösen“ aus. Tippen Sie auf den Befehl „Lösen“. Vervollständigen Sie den Befehl wie in der Abbildung gezeigt.



Drücken Sie Units und wählen Sie die Ableitungsvorlage aus. Die Notation t=0..10 definiert einen Definitionsbereich für *t*.

8. Drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen.

Die Ergebnisse wurden hier auf 4 Stellen gerundet, um die Lesbarkeit zu verbessern. Es gibt vier Werte. Dies stimmt mit unserer Untersuchung in der grafischen Ansicht überein.

Grenzwerte, Asymptoten und Zoomen

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

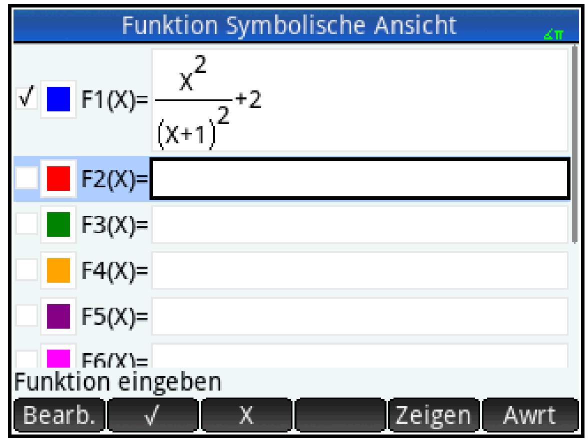
Verwendung der symbolischen Ansicht, grafischen Ansicht und numerischen Ansicht der Funktion-App; Hineinzoomen in einen Graphen; Hineinzoomen in eine Tabelle

AP Calculus-Inhalt:

Grenzwerte an einem Punkt und bei unendlich; einseitige Grenzwerte; horizontale und vertikale Asymptoten

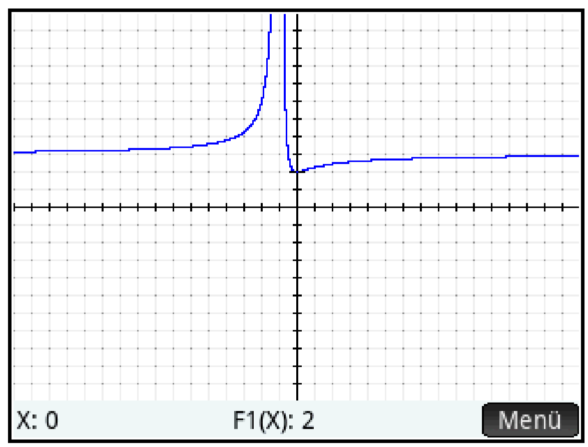
Übung:

1. Drücken Sie Apps Info, wählen Sie die App **Funktion** aus und tippen Sie auf Neu.
2. Geben Sie $F1(x)=\frac{x^2}{(x+1)^2}+2$ ein (siehe Abbildung).



Wir untersuchen jetzt das Verhalten dieser Funktion in der zugehörigen grafischen und numerischen Darstellung, wenn die Werte von x unbegrenzt wachsen.

3. Drücken Sie View Copy und wählen Sie **Dezimal** aus (tippen Sie dazu auf den Eintrag oder drücken Sie 4), um den Graphen in der Dezimalansicht anzuzeigen. In dieser Ansicht entsprechen die Pixel horizontal und vertikal 0.1 Einheiten. Sie sollten den rechts abgebildeten Graphen sehen.



4. Beim HP Prime können Sie recht einfach das grafische Verhalten für große Werte von x betrachten. Wischen Sie dazu einfach im Graphen mit dem Finger horizontal von rechts nach links, um nach rechts zu scrollen. Tippen Sie auf den Graphen, nachdem dieser horizontal zu verlaufen scheint. Eingabe und Ausgabe werden für den angetippten Punkt angezeigt. Geben Sie die angezeigten Werte für X und F1(X) ein.

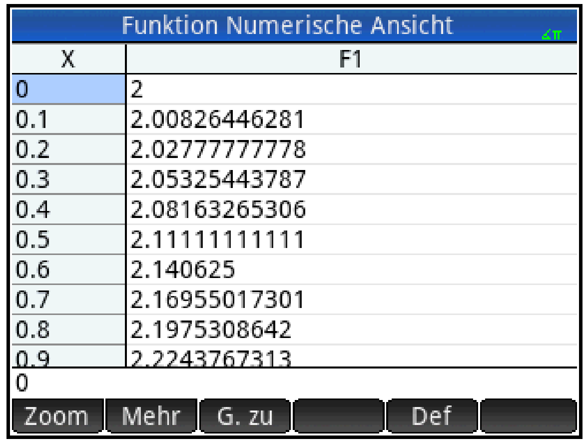
A. X________________________ F1(X) ________________________

Wischen Sie mit dem Finger mehrmals wie zuvor und zeichnen Sie erneut die Werte von X und F1(X) auf.

B. X________________________ F1(X) ________________________

5. Sie sollten feststellen, dass die Werte F1(X) ziemlich nah an einer positiven Ganzzahl liegen. Wie lautet diese Ganzzahl? ____________________

Lassen Sie uns jetzt dieses Verhalten numerisch in einer Wertetabelle betrachten.



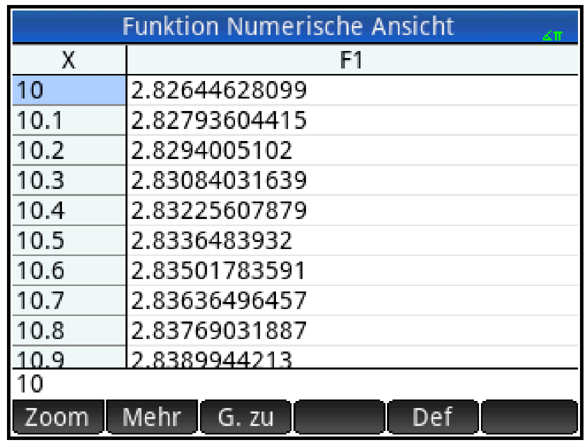
Funktion Numerische Ansicht

X	F1
0	2
0.1	2.00826446281
0.2	2.02777777778
0.3	2.05325443787
0.4	2.08163265306
0.5	2.11111111111
0.6	2.140625
0.7	2.16955017301
0.8	2.1975308642
0.9	2.2243767313

6. Drücken Sie , um eine Tabelle der Eingaben und Ausgaben für F1 anzuzeigen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, die Ausgaben von F1(X) für große Werte von X zu betrachten. Eine besteht darin, direkt einen Wert für X einzugeben.

7. Setzen sie den Cursor irgendwo in die Spalte für X und geben Sie 10 ein. In der Tabelle wird sofort der neue Wert angezeigt.
8. Geben Sie 100, dann 1000, dann 1000000 für X ein und beachten Sie jeweils, was mit den Ausgaben von F1(X) passiert. Sie sollten feststellen, dass sie sich der Ganzzahl nähern, die Sie als Antwort auf die Frage 3 angegeben haben.



Funktion Numerische Ansicht

X	F1
10	2.82644628099
10.1	2.82793604415
10.2	2.8294005102
10.3	2.83084031639
10.4	2.83225607879
10.5	2.8336483932
10.6	2.83501783591
10.7	2.83636496457
10.8	2.83769031887
10.9	2.8389944213

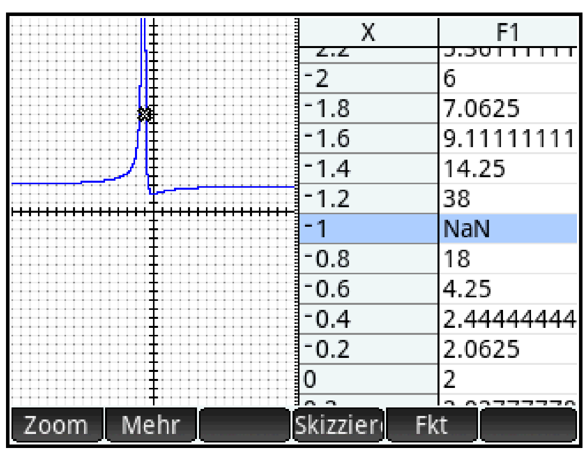
In der mathematischen Fachsprache sagen wir, dass der Grenzwert von F1(X), wenn *x* gegen plus unendlich geht, 3 ist. Dieses Ergebnis wird durch folgende Schreibweise ausgedrückt:

$$\lim_{x\to\infty} F1(x) = 3.$$

Wir sagen weiterhin, dass die Gerade $y = 3$ eine *horizontale* Asymptote für den Graphen von $y = \frac{x^2}{(x+1)^2} + 2$ ist. Beachten Sie, dass wir die Werte von F1(X) so nah an 3 annähern können, wie wir möchten (abgesehen von den Einschränkungen der numerischen Präzision des Taschenrechners), indem Sie die Eingaben, X, entsprechend groß machen.

Sie können auch horizontal mit den Fingern zoomen. Ordnen Sie zwei Finger in der grafischen Ansicht horizontal nebeneinander an, warten Sie einen Moment und bewegen Sie sie dann horizontal auseinander, um den Bereich um die jeweiligen x-Werte zu vergrößern. Daraufhin wird ein Paar blauer horizontaler Pfeile angezeigt, die darauf hinweisen, dass die horizontale Zoomfunktion aktiv ist.

9. Lassen Sie uns nun sehen, wie wir mit dem HP Prime das Verhalten der Ausgaben von F1(X) für Werte von X in der Nähe von -1 untersuchen. Drücken Sie und wählen Sie **Dezimal** aus, um wieder die Dezimalansicht anzuzeigen. Drücken Sie dann 1, um den Cursor an einen Punkt mit einer *x*-Koordinate von -1 zu bewegen. Dieses Mal verwenden wir die Grafik-Tabellen-Ansicht, um das Verhalten der Funktion zu untersuchen. Drücken Sie mit dem Cursor auf einem Punkt mit der *x*-Koordinate -1 auf und wählen Sie **BS teilen: Graf.-Tab.** aus.



X	F1
-2	6
-1.8	7.0625
-1.6	9.11111111
-1.4	14.25
-1.2	38
-1	NaN
-0.8	18
-0.6	4.25
-0.4	2.44444444
-0.2	2.0625
0	2

10. Die Ausgabe für x = -1 wird als NaN angezeigt (englische Abkürzung für „not-a-number“ = „keine Zahl“). Warum gibt es keine Ausgabe bei $x = -1$? ____

    ____

11. Drücken Sie Zoom und wählen Sie **X vergrößern** aus. Dadurch wird lediglich der horizontale Maßstab geändert, der vertikale Maßstab bleibt unverändert. Beachten Sie, dass Werte in der Tabelle beim Hineinzoomen entsprechend angepasst werden. Drücken Sie Zoom und wählen Sie mehrmals **X vergrößern** aus. Wischen Sie ggf. vertikal, damit der Graph weiterhin in der Ansicht bleibt. Sie können auch wie oben beschrieben mit einer horizontalen Zoomgeste hineinzoomen.
12. Was scheint mit den Funktionsausgaben zu geschehen, wenn sich die Eingaben -1 nähern? Was passiert mit dem Graphen?

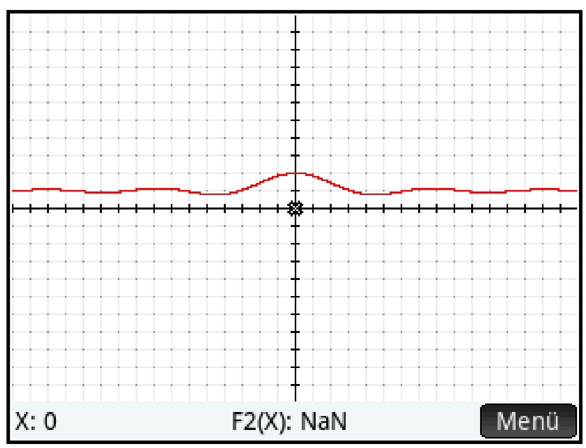
    ____

    ____

    ____

Sie können auch mit einer Zoomgeste vertikal hineinzoomen. Ordnen Sie zwei Finger in der grafischen Ansicht vertikal nebeneinander an, warten Sie einen Moment und bewegen Sie sie dann auseinander, um die Ansicht zu vergrößern. Daraufhin wird ein Paar blauer vertikaler Pfeile angezeigt, die darauf hinweisen, dass die vertikale Zoomfunktion aktiv ist.

Hier sagen wir $\lim\limits_{x\to -1} F1(x) = +\infty$. Wir können auch sagen, dass die Funktion keinen Grenzwert hat, wenn sich x -1 nähert. Die Werte der Funktion wachsen unbegrenzt, wenn sich die Eingaben -1 nähern. Wir sagen dann, dass die Gerade $x = -1$ eine *vertikale* Asymptote für den Graphen von $y = \dfrac{x^2}{(x+1)^2} + 2$ ist.

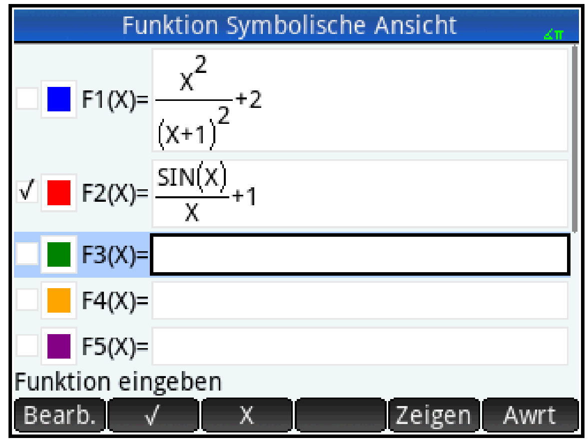


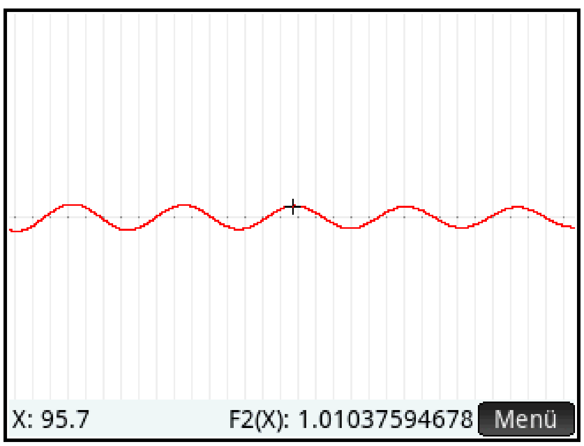
Anhand dieses Beispiels sollte der Begriff des Grenzwerts deutlich geworden sein. Wie das nächste Beispiel veranschaulicht, muss der Begriff u. U. aber auch mit Vorsicht gehandhabt werden.

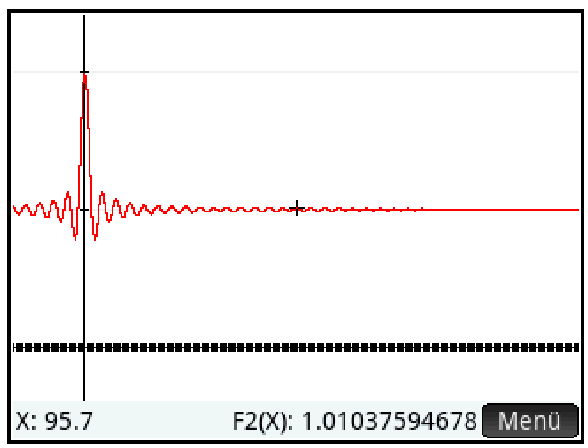
13. Drücken Sie Symb Setup und tippen Sie auf das Häkchen links neben F1(X), um die Funktion abzuwählen. Geben Sie dann $F2(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} + 1$ ein. Drücken Sie erneut View Copy und wählen Sie **Dezimal** aus, um den Graphen in der Dezimalansicht anzuzeigen. Sie sollten den rechts abgebildeten Graphen sehen. Gehen Sie wie im vorherigen Beispiel vor und scrollen Sie nach rechts, um festzustellen, was mit den Werten von F2(X) passiert, wenn *x* sehr groß wird.
14. Was ist der Wert für $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\sin(x)}{x} + 1 \right)$? ____________________

Tippen Sie auf den Graphen, nachdem Sie nach rechts gescrollt sind und der Graph horizontal zu verlaufen scheint. Tippen Sie auf Menü, dann auf Zoom und wählen Sie **Y vergrößern** aus. Sie können auch vertikal mit den Fingern zoomen. Ordnen Sie zwei Finger in der grafischen Ansicht vertikal nebeneinander an und bewegen Sie sie dann vertikal auseinander.

Der horizontale Maßstab wird dadurch nicht verändert. Die Ansicht wird lediglich vertikal vergrößert. Vergrößern Sie die Ansicht mehrmals vertikal, bis sie sehen können, dass der Graph in Wirklichkeit gar nicht horizontal verläuft! Verkleinern Sie die Ansicht (Zoom **Verkleinern**), um eine bessere Vorstellung davon zu erhalten, was passiert. Sie sollten feststellen, dass die Amplitude der Schwingungen mit zunehmenden Wert von *x* kleiner wird. Dieses Beispiel veranschaulicht, warum wir nicht sagen können, dass sich die Werte der Funktion immer weiter 1 nähern, obwohl $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}+1\right)=1$ ist. In diesem Fall trifft eine Aussage wie „Wir können die Werte von $\frac{\sin(x)}{x}+1$ so nah wie gewünscht an 1 annähern, indem wir die Werte von *x* ausreichend groß machen." den Sachverhalt besser.







Drücken Sie Num Setup und geben Sie in eine beliebige Zelle der X-Spalte 0 ein. Wir können genauso in die Tabelle hineinzoomen wie in einen Graphen. Tippen Sie bei Auswahl von 0 in der X-Spalte auf Zoom und wählen Sie **Vergrößern** aus. Dadurch wird die Schrittweite in der Tabelle geändert. Drücken Sie mehrmals + (Vergrößerungstaste). Sie können natürlich auch vertikal mit den Fingern zoomen, um in der Tabelle an einer Zeile hinein- oder herauszuzoomen.

15. Was ist der Wert für $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}+1\right)$? ______________________

Weitergehende Übung:

Eine HP Prime-App namens „LimitsDe" enthält Definitionen für diese und andere Funktionen.
Zusammen genommen veranschaulichen diese Beispiele nahezu jedes, möglicherweise vorkommende Grenzwertproblem. Verteilen Sie die LimitsDe-App an die Schüler. Lassen Sie die Schüler dann die jeweilige Funktion am angegebenen Punkt untersuchen und eine entsprechende Schlussfolgerung in der Fachsprache für Grenzwerte machen.

$F3(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$; $x = 2$

$F4(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $x = 0$

$F5(x)=x\cdot\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $x = 0$

$F6(x)=\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $x = 0$. Verwenden Sie die Fachsprache für einseitige Grenzwerte.

$F7(x)=\dfrac{1}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$; $x = 0$

$F8(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$; $x = 2$. Verwenden Sie die Fachsprache für einseitige Grenzwerte.

$F9(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{4}, \text{if } x\le 2\\ 4-x, \text{if } x>2\end{cases}$; $x = 2$. Verwenden Sie die Fachsprache für einseitige Grenzwerte.

Hinweis: Sie können einen dritten Ast zu einer stückweise definierten Funktion hinzufügen. Setzen Sie den Cursor an das Ende des zweiten Asts und drücken Sie , Eval.

$F0(x)=\dfrac{2^{-x+2}+3^x}{2^{-x}-5\cdot 3^x}$; $x\to+\infty$ und $x\to-\infty$. Beschreiben Sie auch horizontale und vertikale Asymptoten.

Antworten

4A. Die Antworten variieren. X = 61, F1(X) = 2.968

4B. Die Antworten variieren. X = 146, F1(X) = 2.98644

5. 3

10. Der Versuch, F1(1) auszuwerten, führt zu einer Division durch 0.

12. Der Graph verläuft nahezu vertikal

14. 1

15. 2

Einführung der Ableitung

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Zeichnen einer Tangente am Graphen einer Funktion; Speichern der X- und Y-Koordinaten des Verfolgungscursors am Graphen in Variablen mit Spch ▸ (Store); Auswerten eines Differenzenquotienten in der Startansicht

AP Calculus-Inhalt:

Lokale Linearität Differenzierbarkeit; Grenzwert einer durchschnittlichen Änderungsrate, um die Steigung einer Kurve an einem Punkt zu ermitteln; Einführung der Ableitung an einem Punkt

Übung:

1. Drücken Sie Apps/Info und wählen Sie die App **Funktion** aus.
2. Drücken Sie Shift Esc/Clear (Clear) und tippen Sie auf OK, um die symbolische Ansicht zu löschen.
3. Geben Sie $F1(x)=\sin(x)$ ein.
4. Drücken Sie View/Copy und wählen Sie **Dezimal** aus, um den Graphen in der Dezimalansicht anzuzeigen.
5. Drücken Sie mehrmals + (Vergrößerungstaste), bis sich die Form des Graphen nicht mehr ändert.
6. Was ist beim Verkleinern mit der Form des Graphen passiert?

   ____

Vergewissern Sie sich, dass sich der Cursor am Punkt befindet, an dem X = 0 ist.

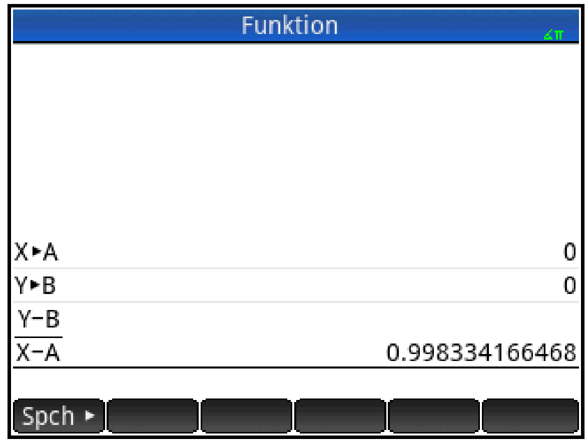
7. Tippen Sie auf Menü und Fkt. Wählen Sie **Tangente** aus, um die Tangente am Graphen von F1 bei X = 0 zu zeichnen.
8. Was scheint für den Graphen von $F1(x)=\sin(x)$ und der Tangente bei *X* = 0 zu gelten?

   ____

9. Drücken Sie mehrmals −, bis Sie eine Abweichung zwischen Tangente und dem Graph von $F1(x)=\sin(x)$ sehen können. Eine Gleichung für die Tangente scheint *y* = *x* zu sein. Wir könnten die *y*-Koordinate eines Punkts auf der Tangente verwenden, um näherungsweise die *y*-Koordinate eines Punkts auf dem Graphen von $F1(x)=\sin(x)$ zu bestimmen.
10. Wie groß ist die *y*-Koordinate der Tangente, wenn *x* = 0.2 ist? ______________
11. Tippen Sie auf Menü und G. zu und geben Sie dann 0.2 ein, um den Cursor auf den Punkt des Graphen von $F1(x)=\sin(x)$ zu bewegen, an dem *x* = 0.2 ist.

    Was ist der Wert für $\sin(0.2)$? ______________
12. Wir groß ist der Fehler, wenn die Tangente als Näherung für $\sin(0.2)$ verwendet wird? ______________

    (Die Antwort erhalten Sie, indem Sie die Antwort auf Frage 12 von der Antwort auf Frage 10 subtrahieren.)



13. Drücken Sie [View] und wählen Sie **Dezimal** aus, um den Graphen in der Dezimalansicht anzuzeigen.
14. Drücken Sie [Home]. Sie speichern jetzt die Cursorkoordinaten, die der HP Prime intern in den Variablen X und Y verwaltet, in den Variablen A und B. Geben Sie dazu [ALPHA] [×] [Spch ▸] [ALPHA] [Vars] [Enter] und [ALPHA] [1] [Spch ▸] [ALPHA] [Mem] [Enter] ein.
15. Drücken Sie [Plot] und dann [▶], um den Cursor ein Pixel nach rechts von X = 0 zu verschieben.
16. Drücken Sie [Home] und geben Sie den Ausdruck $\frac{Y-B}{X-A}$ ein.

Der Ausdruck $\frac{Y-B}{X-A}$ wird Differenzenquotient (Quotient von zwei Differenzen) genannt und stellt die Steigung der Strecke dar, die die Punkte $\left(X,\sin(X)\right)$ und $\left(A,\sin(A)\right)$ verbindet. Er stellt auch die durchschnittliche Änderungsrate von $F1(x)=\sin(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[A,X]$ dar. In diesem Fall ist *A* = 0.

Sie zoomen jetzt in den Graphen hinein und berechnen erneut diese durchschnittliche Änderungsrate.

17. Drücken Sie [Plot] und dann [◀], um den Cursor zurück an den Punkt zu verschieben, an dem X = 0 ist.
18. Drücken Sie einmal [+], um die Ansicht zu vergrößern, und dann [▶], um den Cursor ein Pixel nach rechts von X = 0 zu verschieben.
19. Drücken Sie [Home]. Jetzt müssen Sie lediglich [Enter] drücken, um den Differenzenquotienten mit dem neuen Punkt zu berechnen.
20. Wiederholen Sie diesen Prozess mehrmals:
    a. Wechseln Sie zurück zum Graphen und bewegen Sie den Cursor auf X=0.
    b. Vergrößern Sie die Ansicht und bewegen Sie den Cursor ein Pixel nach rechts von X = 0.
    c. Wechseln Sie zur Startansicht und berechnen Sie erneut den Differenzenquotienten.

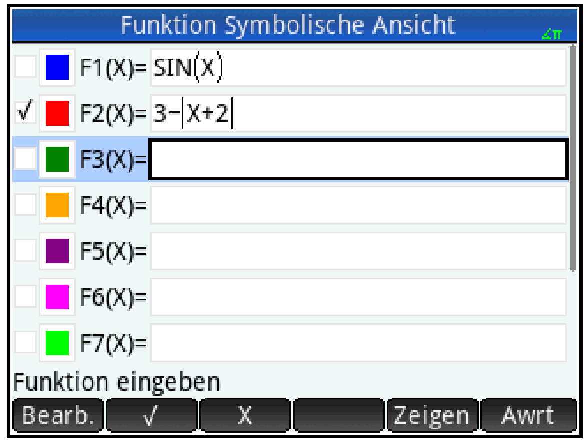
Sie sollten zwei wichtige Dinge beobachten, die zusammenhängen: Der Graph wird immer gerader und die Differenzenquotienten konvergieren gegen einen Grenzwert.

21. Drücken Sie jetzt [View] und wählen Sie **Dezimal** aus, um wieder die Dezimalansicht zu aktivieren.
22. Drücken Sie mehrmals [◀], um den Cursor auf die *linke* Seite von X=0 zu bewegen. Halten Sie inne und denken Sie nach, bevor Sie den Differenzenquotienten berechnen!
23. Muss die Steigung kleiner oder größer als 1 sein? ______________________________
24. Drücken Sie [Home] und dann [Enter], um den neuen Differenzenquotienten zu berechnen. War Ihre Antwort richtig?

Wiederholen Sie jetzt die Berechnung mehrerer Differenzenquotienten, während Sie weiter in den Graphen hineinzoomen, wobei jetzt aber X-Werte verwendet werden, die *kleiner* als 0 sind. Sie sollten erneut feststellen, dass der Graph immer gerader wird und sich die Differenzenquotienten einem Grenzwert nähern.

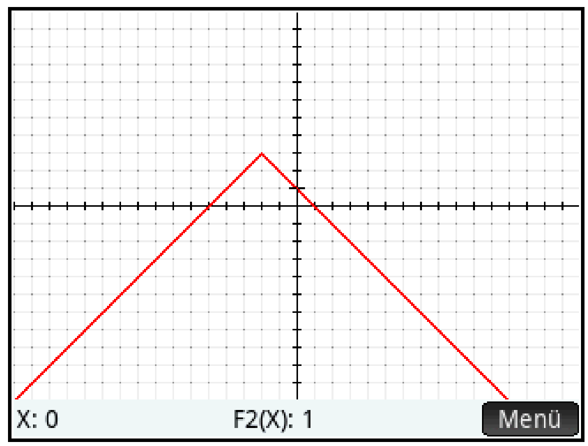
25. Wie groß ist der Grenzwert der durchschnittlichen Änderungsraten, wenn sich X 0 nähert? ___________

Dieser Grenzwert wird die Ableitung von $\sin(x)$ an dem Punkt genannt, an dem $x = 0$ ist. Dieser Grenzwert stellt die Steigung der Tangenten des Graphen am jeweiligen Punkt dar. Wenn dieser Grenzwert existiert, sagen wir, dass die Funktion an diesem Punkt *differenzierbar* ist.



Nicht jede Funktion verfügt über einen Graphen, der lokal linear aussieht.

26. Drücken Sie Symb Setup und tippen Sie auf das Häkchen links neben F1(X), um die Funktion abzuwählen. Geben Sie dann $F2(x) = 3 - |x+2|$ ein. Tippen Sie auf Units und wählen Sie die Vorlage für Absolutwerte aus.
27. Drücken Sie View Copy und wählen Sie **Dezimal** aus, um den Graphen in der Dezimalansicht anzuzeigen. Bewegen Sie den Cursor mit den Cursortasten an den Punkt, bei dem X = -2 ist. Zoomen Sie dann mehrmals in den Graphen hinein.
28. Wird der Graph begradigt? ________________________
29. Drücken Sie Settings, wenn sich der Cursor am Punkt (-2, 3) befindet. Geben Sie ALPHA × Spch ▸ ALPHA Vars Enter und ALPHA 1 Spch ▸ ALPHA Mem Enter ein, um diese Werte in A und B zu speichern.
30. Drücken Sie Plot Setup und dann ▸, um den Cursor ein Pixel nach rechts von X = 0-2 zu verschieben. Drücken Sie Settings und tippen Sie auf den Ausdruck $\frac{Y-B}{X-A}$, um ihn auszuwählen. Tippen Sie dann auf Kopie und drücken Sie Enter.
31. Wie groß ist die Steigung der Strecke, wenn X > -2 ist?



____

32. Wechseln Sie zurück zum Graphen, bewegen Sie den Cursor auf die linke Seite von X=-2, kehren Sie zur Startansicht zurück und berechnen Sie erneut den Differenzenquotienten. Wie groß ist die Steigung der Strecke, wenn X < -2 ist?

____

Da die Steigungen auf beiden Seiten von X=-2 nicht gleich sind, sagen wir in diesem Fall, dass die Funktion bei X=-2 *nicht differenzierbar* ist.

33. Geben Sie diese Funktion jetzt in die symbolische Ansicht der Funktion-App ein: $F3(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Zoomen Sie bei X=0 in den Graphen hinein.
34. Scheint der Graph lokal linear zu sein? ______________________________________
35. Untersuchen Sie wie in der Übung skizziert den Graphen von F3(X) am Punkt X=0. Fassen Sie Ihre Feststellungen zusammen.

Antworten

6. Beim Hineinzoomen wird der Graph von $y = \sin(x)$ immer gerader.

8. In der Nähe von *x* = 0 sind die Graphen von $y = \sin(x)$ und $y = x$ fast nicht mehr unterscheidbar.

10. y= 0.2

11. $\sin(0.2) = 0.19866933$

12. Der Fehler ist 0.2 – 0.19866933 = 0.00133.

23. Die Steigung sollte kleiner als 1 sein.

25. 1

28. Nein, der Graph wird nicht begradigt.

31. Bei x > -2 ist die Steigung -1.

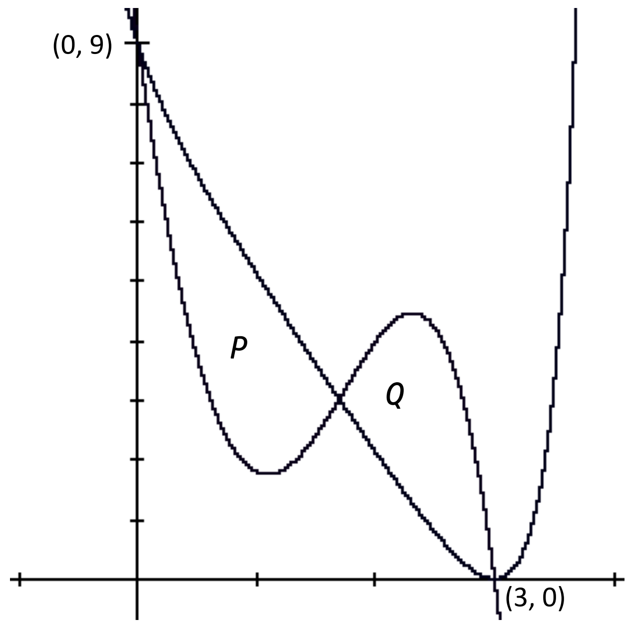
32. Bei x < -2 ist die Steigung 1.

34. Ja, obwohl der Graph vertikal wird.

35. Die Steigung wird unbegrenzt größer.

Freie Übung 1 zur AP-Examensprüfung

Seien *f* und *g* die durch $f(x) = 8 - 3x + e^{x^2 - 3x}$ und $g(x) = -0.5x^4 + 0.4x^3 + 7x^2 - 14.1x + 9$ definierten Funktionen. Seien *P* und *Q* die beiden Bereiche, die durch die Graphen von *f* und *g* eingeschlossen werden (siehe Abbildung).



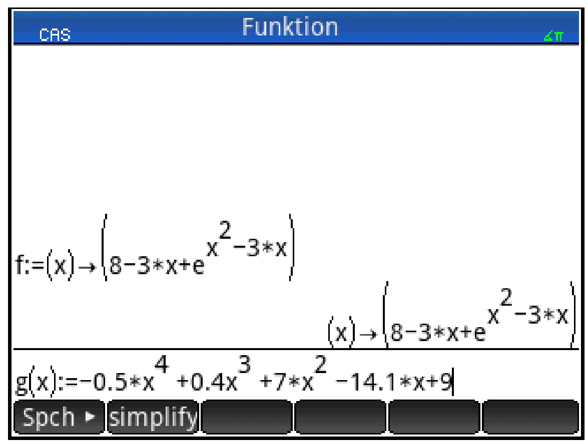
a) Ermitteln Sie die Summe der Flächen der Bereiche *P* und *Q*.

1. Drücken Sie CAS, um die CAS-Ansicht zu öffnen. Definieren Sie die beiden Funktionen so wie beschrieben. Das Doppelsymbol (:=) wird als Symbol für eine Definition verwendet (siehe rechts). Drücken Sie Shift ., um den Doppelpunkt einzugeben.

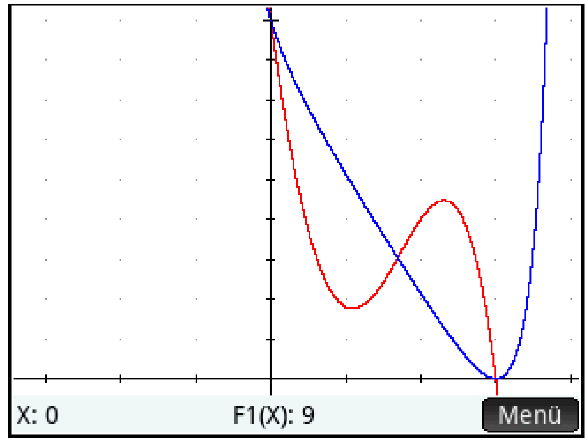
„f(x):=" wird vom CAS nach der Eingabe umgewandelt in „f:=(x)→".

2. Drücken Sie nach der Definition von *f* und *g* Apps, um die Anwendungsbibliothek zu öffnen, und wählen Sie die Funktion-App aus. Geben Sie F1(X)=f(X) und F2(X)=g(X) ein. Beachten Sie, dass *f* und *g* kleingeschrieben werden, aber *X* in jeder Funktionsdefinition großgeschrieben wird.

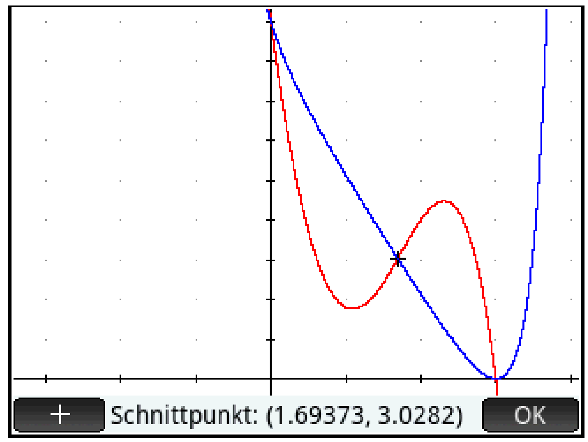
Der Graph von f(x) wird blau, der Graph von g(x) rot dargestellt.



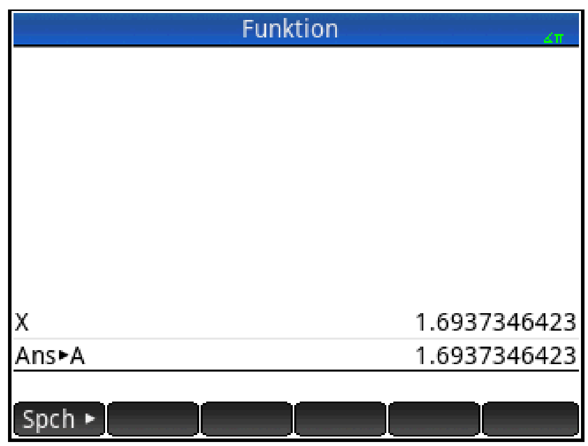
3. Drücken Sie Plot, um die Graphen anzuzeigen. Ziehen und zoomen Sie mit den Fingern, bis Sie ein geeignetes Ansichtsfenster erhalten (siehe Abbildung rechts).



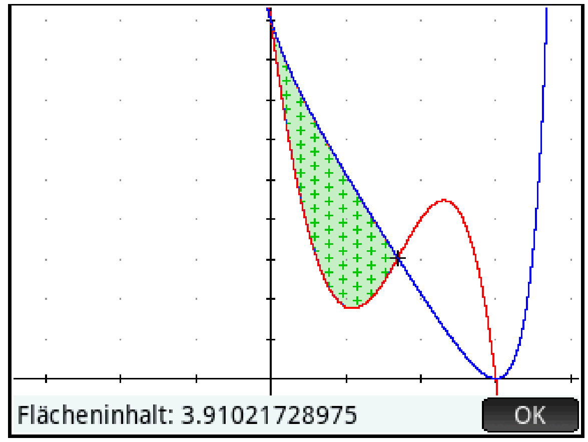
4. Um die Summe der Flächen zu berechnen, müssen wir den Schnittpunkt kennen. Tippen Sie in die Nähe des Schnittpunkts, um den Cursor dorthin zu bewegen. Tippen Sie dann auf Menü, Fkt und wählen Sie **Schnittpunkt ...** aus. Sie werden aufgefordert, den Schnittpunkt mit **F2(X)** oder den Schnittpunkt mit der **X-Achse** auszuwählen. Wählen Sie **F2(X)** aus.

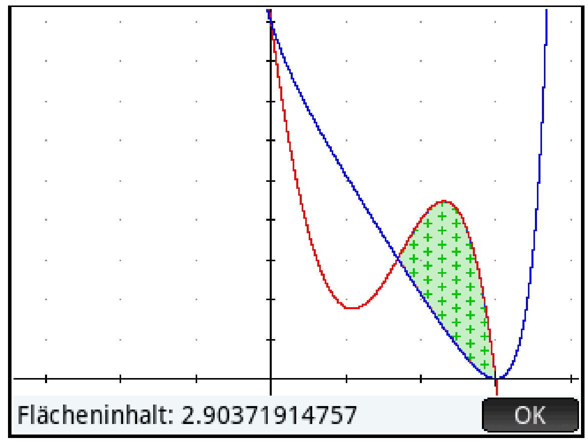


5. Wir benötigen den x-Wert des Schnittpunkts für zukünftige Berechnungen und speichern ihn daher in der Variablen A. Drücken Sie Home, um die Startansicht anzuzeigen. Die aktuelle Cursorposition ist in X und Y gespeichert. Geben Sie X (ALPHA × Enter) ein, um den Wert anzuzeigen. Tippen Sie dann auf Spch ▸ und drücken Sie ALPHA Vars Enter, um den Wert in A zu speichern.

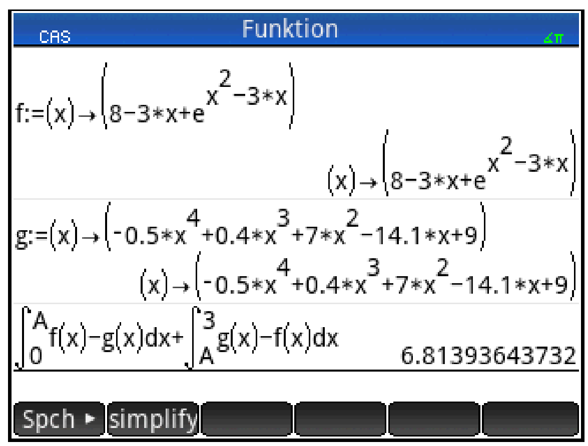


6. Drücken Sie Plot, um zur grafischen Ansicht zurückzukehren. Tippen Sie auf Menü, Fkt und wählen Sie **Flächeninhalt ...** aus. Sie werden aufgefordert, einen Anfangswert einzugeben. Geben Sie 0 ein, und tippen Sie auf OK. Anschließend werden Sie aufgefordert, die Fläche unter F1(X) oder zwischen F1(X) und F2(X) auszuwählen. Wählen Sie letztere aus. Danach werden Sie aufgefordert, einen Endwert einzugeben. Geben Sie *A* ein, und tippen Sie auf OK. Die Fläche ist 3.9102 (siehe rechts). Zeichnen Sie diese Fläche auf und tippen Sie danach auf OK.
7. Drücken Sie ⊙, um von F1(X) zu F2(X) zu wechseln. Wiederholen Sie den Prozess in Schritt 6, um die Fläche zwischen den Kurven von A bis 3 zu ermitteln.
8. Die Summe der Flächen ist 3.9102+2.9037 = 6.8139.





9. Dieses Ergebnis kann auch direkt in der CAS-Ansicht berechnet werden. Drücken Sie CAS, um die CAS-Ansicht anzuzeigen. Drücken Sie Units und wählen Sie die Integralvorlage aus. Geben Sie die in der Abbildung gezeigten Integrale ein und drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen.

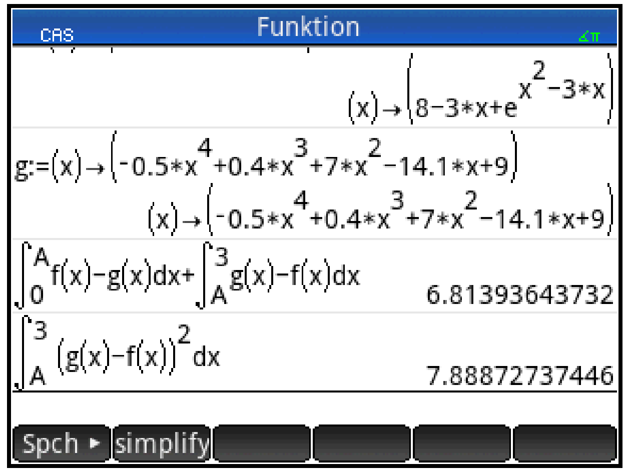


Sie müssen ALPHA Shift Vars drücken, um im CAS den Großbuchstaben A einzugeben.

HINWEIS: Sie müssen ⊙ drücken, nachdem Sie das letzte *x* (in *dx*) des ersten Integrals eingegeben haben, um den Cursor hinter die Integralvorlage zu bewegen, bevor Sie + drücken und die zweite Integralvorlage ausfüllen!

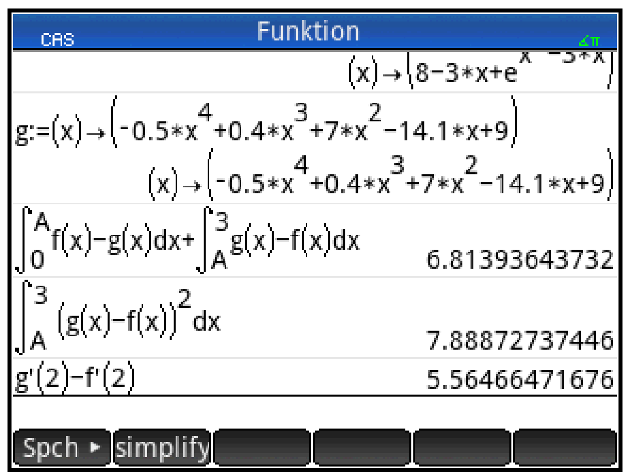
b) Der Bereich Q ist die Basis eines Volumenkörpers, dessen Querschnitte senkrecht zur x-Achse Quadrate sind. Ermitteln Sie das Volumen dieses Volumenkörpers.

10. Berechnen Sie das Integral mit CAS (siehe Abbildung rechts). Das Volumen ist ca. 7.8887.



c) Sei h der vertikale Abstand zwischen den Graphen von f und g im Bereich Q. Ermitteln Sie die Änderungsrate von h abhängig von x, wenn x=2 ist.

11. Verwenden Sie wiederum CAS. Sie finden das Ableitungssymbol (f'), indem Sie auf Shift Vars drücken. Da h'(x) = g'(x) – f'(x) ist, gilt h'(2) = g'(2) – f'(2). Das Ergebnis ist ungefähr 5.5647.



Die Verwendung der üblichen mathematischen Notation und Vorlagen erleichtert die Bedienung des HP Prime-CAS und fördert sowohl mathematische Diskurse als auch eine korrekte mathematische Schreibweise. Beide Fertigkeiten sind notwendig, um das AP Calculus-Examen erfolgreich zu bestehen!

Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten (Elementarmathematik)

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Verteilung einer App über das Schulnetzwerk; Verteilung einer Datenmenge mit einer App; Verwendung der Statistiken 2 Var-App

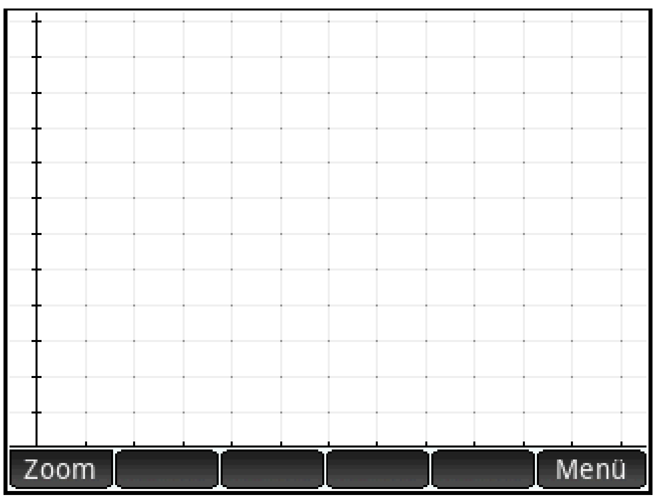
AP Calculus-Inhalt:

Diese Übung umfasst keine Calculus-Inhalte. In dieser Übung wird eine Sinuskurve, $y = A\sin\left(B\cdot\left(x-H\right)\right)+K$, an eine Datenmenge angepasst und die Parameter der Kurve werden im Kontext interpretiert. Eine analytische Übung finden Sie in der nachfolgenden *Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten (Analysis).*

Übung:

Die Schüler stellen eine Verbindung zum HP Schulnetzwerk her und der Lehrer verteilt die *SRSSDe*-App. Drücken Sie  und wählen Sie die App **SRSSDe** aus. Die App basiert auf der integrierten Statistiken 2 Var-App. Drücken Sie   (Info), um einen Hinweis mit der Beschreibung der Daten in den einzelnen Spalten anzuzeigen. Drücken Sie  und , um das Streudiagramm bzw. die numerischen Daten anzuzeigen.

Erstellen Sie in der folgenden Abbildung eine grobe Kopie des Streudiagramms:



Beantworten Sie die folgenden Fragen anhand des Graphen und/oder anhand der Tabelle:

1. An welchem Tag gab es das meiste Tageslicht? ______________________________

2. An welchem Tag gab es das wenigste Tageslicht? ______________________________

3. In welchen Zeitraum nahm das Tageslicht zu? Welche Gründe dafür gibt es?

____

____

4. In welchen Zeitraum nahm das Tageslicht ab? Welche Gründe dafür gibt es?

____

____

5. In welchem Jahreszeitraum nimmt das Tageslicht am schnellsten zu? ______________

6. In welchem Jahreszeitraum nimmt das Tageslicht am schnellsten ab? ______________

Sie ermitteln jetzt eine Gleichung in der Form $L(X) = A \sin(B(X-H)) + K$ für die Tageslichtdauer in Minuten am Tag X nach der Sonnenwende. Sie müssen die Periode (damit Sie den Parameter B bestimmen können), die Amplitude (zum Berechnen von A), die Phasenverschiebung (für H) und die Vertikalverschiebung (für K) bestimmen. Nachdem Sie die einzelnen Parameter in der Startansicht ermittelt haben, speichern Sie den jeweiligen Wert in der gleichnamigen Variablen.

7. Die Funktion $L(X)$ ist periodisch. Wie groß ist die Periode? ______________

8. Der Parameter B kann über die Gleichung $2\pi / B$ = Periode ermittelt werden. Wie groß ist B?

   ______________ Speichern Sie diesen Wert in der Variablen B.

9. Der Parameter A wird Amplitude der Funktion L genannt und kann anhand der Gleichung A = (Dauer des längsten Tags in Minuten - Dauer des kürzesten Tags in Minuten) / 2 ermittelt werden. Wie groß ist A?

   ______________ Speichern Sie diesen Wert in der Variablen A.

10. Der Parameter K steuert die Vertikalverschiebung der Funktion L und kann anhand der Gleichung K = (Dauer des längsten Tags + Dauer des kürzesten Tags) / 2 ermittelt werden. Wie groß ist K?

    ______________ Speichern Sie diesen Wert in der Variablen K. Gibt es eine andere Möglichkeit, um K zu ermitteln?

11. Der Parameter H steuert die Horizontalverschiebung von L und kann aus $H = 365/4$ ermittelt werden. Wie groß ist H?

    ______________ Speichern Sie diesen Wert in der Variablen H.

12. Nachdem Sie *A*, *B*, *H* und *K* ermittelt haben, können Sie einen Graphen von *L* im Streudiagramm überlagern. Tippen Sie in der Grafikanzeige auf Menü und dann auf Anpass, um die Regressionsfunktion zu aktivieren. Skizzieren Sie die Regression über dem Streudiagramm, das Sie am Anfang dieser Übung gezeichnet haben.

13. Ermitteln Sie mit dem Verfolgungscursor im Graphen von $L(X)$ die Tageslichtdauer in Minuten an Ihrem Geburtstag. (Drücken Sie ⏶ oder ⏷, wenn sich der Verfolgungscursor im Streudiagramm befindet, um zur Regression zu wechseln). Vergleichen Sie diese Prognose mit den Onlinedaten.

    $L(X)$ prognostiziert ____. Die Onlinequelle sagt:

    ____.

Zusatzübung für Interessierte

14. Wie ändert sich der Graph von *L*, wenn Sie sich vom Äquator weg zum Nordpol bewegen?

    ____

    ____

15. Wie sieht das Graph von *L* für einen Ort auf der Südhalbkugel an Ihrem Breitengrad aus?

    ____

    ____

    ____

16. Suchen Sie die Daten zu Sonnenaufgang/-untergang für Ihren Lieblingsort im Internet. Vergleichen Sie die Graphen mit denen anderer Schüler. Wenn Sie möchten, können Sie in S2 ein Streudiagramm von C3 über C1 einrichten. Die Daten in C3 gelten für Honolulu, Hawaii.

17. Schwankt die Periode eines Graphen? ____

18. Ändert sich die Amplitude? ____

19. Wo liegen die Orte mit einer größeren Amplitude? ____

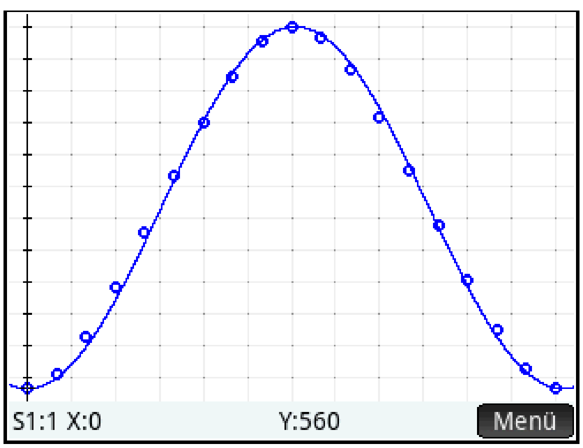
    ____

20. In C4 befinden sich die Tageslichtdaten für Melbourne, Australien. Diese Stadt auf der Südhalbkugel weist ungefähr den gleichen Breitengrad auf wie Washington, DC. Stellen Sie C4 über C1 grafisch in einem Streudiagramm dar. Wie unterscheidet sich der Graph vom Graphen von C2 über C1?

21. Drücken Sie [Symb/Setup]. Navigieren Sie zum Feld **Anpassung1** und drücken Sie [Shift] [View/Copy] (Copy). Navigieren Sie dann zum Feld **Typ3** und drücken Sie [Ausw]. Wählen Sie **Benutzerdef.** als Regressionstyp für **S3** aus. Navigieren Sie dann zum Feld **Anpassung3** und drücken Sie [Shift] [Menu/Paste] (Paste). Wählen Sie den Ausdruck aus, den Sie soeben kopiert haben. Bearbeiten Sie den Ausdruck dann so, dass die Regression zum Streudiagramm für Melbourne, Australien passt. Tipp: Sie können dies erreichen, indem Sie ein einzelnes Zeichen in den Ausdruck einfügen! Vergewissern Sie sich schließlich, dass lediglich **S3** für die Grafikdarstellung und die zugehörige Regression ausgewählt ist. Drücken Sie [Plot/Setup] und schauen Sie sich das Ergebnis an!

Antworten

1. Tag 180 (19. Juni) mit 901 Minuten.
2. Tag 0 und Tag 560 mit 560 Minuten.
3. Die Tageslichtdauer nimmt von Tag 0 bis Tag 180 zu. Zwischen Winter und Frühling.
4. Die Tageslichtdauer nimmt von Tag 180 bis Tag 360 ab. Zwischen Sommer und Herbst.
5. Der Graph zeigt, dass die Tageslichtdauer am schnellsten um Tag 80 zunimmt. Die Zunahme ist am Frühlingsäquinoktium (um den 21. März) am größten.
6. Der Graph zeigt, dass die Tageslichtdauer am schnellsten um Tag 280 abnimmt. Die Abnahme ist am Herbstäquinoktium (um den 21. September) am größten.
7. 365 Tage (für Puristen: ca. 365.25 Tage)
8. $B = 0.0172142$
9. $A = 170.5$
10. $K = 730.5$
11. $H = 91.25$
12.



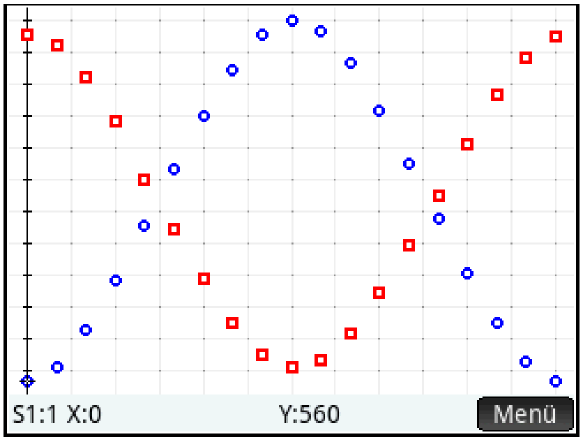
13. Die Antworten variieren. Der prognostizierte Zeitpunkt sollte aber in der Nähe des tatsächlichen Zeitpunkts liegen.
14. Die Amplitude nimmt zu.
15. Spiegelung um die Gerade $y = K$.

17. Die Perioden müssen alle gleich sein (365 Tage).

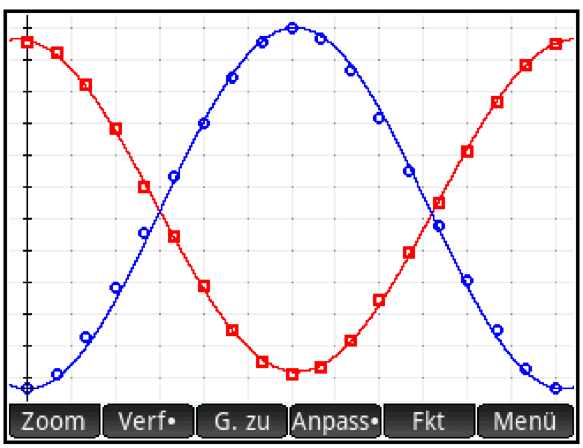
18. Die Amplituden können schwanken.

19. Orte mit höherer Breite (näher an den Polen) weisen größere Amplituden auf.

20. Der Graph ist eine Spiegelung um die Gerade $y = K$.



21. Die Regression lautet Y = -A*SIN(B*(X-H))+K. Der Graph sieht folgendermaßen aus:



Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten (Analysis)

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Verwendung der Statistiken 2 Var-App; Verwendung von Kopieren und Einfügen; Verwendung des Befehls ∆-Liste

AP Calculus-Inhalt:

Interpretation von Änderungsraten im Kontext; Ausblick auf den ersten Test zu Ableitungen; Berechnung einer Vielzahl durchschnittlicher Änderungsraten; Wiederholung der Übung möglich, nachdem die Kettenregel behandelt wurde, um einen interessanten Zusammenhang zwischen der Amplitude der Funktion $L(X)$ in der vorherigen Übung und der Amplitude der Funktion $R(X)$ in dieser Übung aufzuzeigen

Übung:

Anhand der Daten, die in der Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten erfasst wurden, werden Sie einige grundlegenden Konzepte der Analysis untersuchen. Insbesondere approximieren Sie die Änderungsrate bei der Tageslichtdauer in Minuten nach der Wintersonnenwende. Darüber hinaus suchen Sie Zusammenhänge zwischen diesen Werten und der jeweiligen Jahreszeit.

Sei $L(X)$ die Funktion, die die Tageslichtdauer in Minuten am Tag X nach der Wintersonnenwende darstellt.

1. Approximieren Sie unter Verwendung der erfassten Daten (nicht anhand der ermittelten Funktion zur Modellierung der Daten) die Änderungsrate von $L(X)$ abhängig von X, wenn $X = 180$ ist (etwa zur Jahresmitte). Zeigen Sie Ihre Berechnungen und geben Sie die Maßeinheiten an.

2. In welcher Jahreszeit liegt Tag 180? Was scheint für die Tageslichtdauer in Minuten an einem Tag für diese Zeit zu gelten?

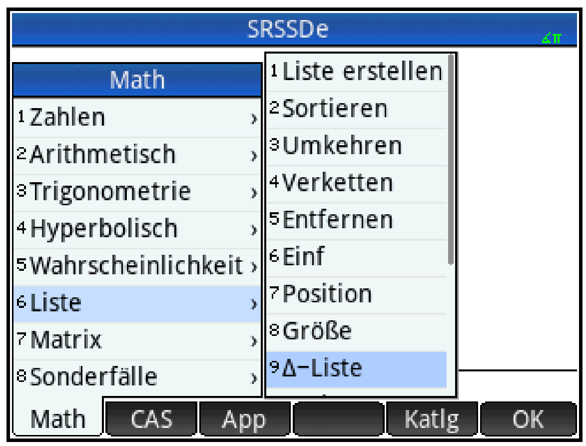
3. Approximieren Sie wiederum anhand der erfassten Daten die Änderungsrate von $L(X)$ abhängig von X, wenn $X = 270$ ist (etwa drei Viertel des Jahresverlaufs). Zeigen Sie Ihre Berechnungen und geben Sie die Maßeinheiten an.

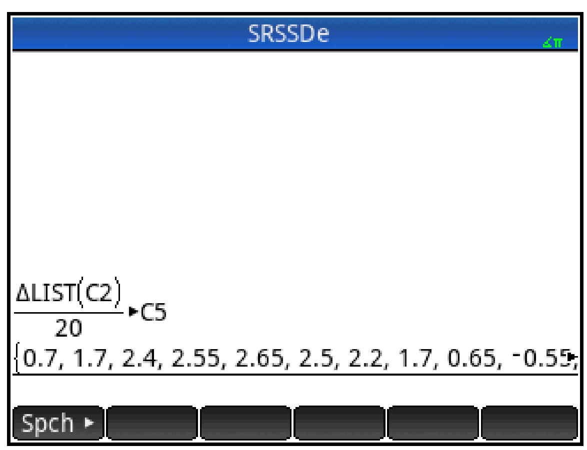
---

4. In welcher Jahreszeit liegt Tag 270? Was scheint für die Tageslichtdauer in Minuten an einem Tag für diese Zeit zu gelten?

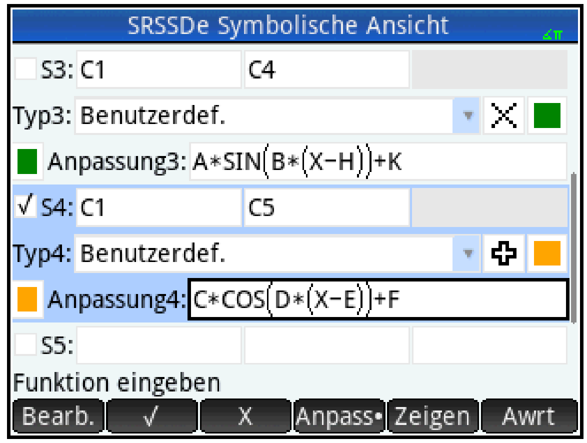
---

5. Drücken Sie in der Startansicht, tippen Sie auf Math und dann auf **Liste** und wählen Sie **Δ-Liste** aus. Geben Sie den Befehl ΔList(C2)/20 Spch ▸ C5 ein. Dadurch wird die angenäherte Änderungsrate von $L(X)$ an allen Tagen, für die Tageslichtdaten vorhanden sind, in C5 gespeichert.





6. Erstellen Sie ein Streudiagramm für C5 über C1. Sie müssen den ersten Eintrag in C1 löschen, da es in C5 eine Differenz weniger gibt als Einträge in C1 vorhanden sind.



7. An welchem Tag *X* ändert sich das Vorzeichen von C5 über C1 näherungsweise von plus in minus? Zu welcher Jahreszeit erfolgt dies?

8. An welchem Tag *X* erreicht der Graph von C5 über C1 näherungsweise ein Maximum? Zu welcher Jahreszeit erfolgt dies?

9. An welchem Tag *X* erreicht der Graph von C5 über C1 näherungsweise ein Minimum? Zu welcher Jahreszeit erfolgt dies?

10. Ermitteln Sie anhand der in der vorherigen Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten beschriebenen Verfahren die Gleichung einer Funktion in der Form $R(t) = C\cos(D(X - E)) + F$, die durch die Punkte im Streudiagramm von C5 über C1 verläuft.

11. Beschreiben Sie die Ähnlichkeiten und Unterschiede der Änderungsrate der Tageslichtdauer in Minuten für Washington DC, Honolulu und Melbourne, Australien, wenn Sie die weitergehenden Übungen zur vorherigen Übung durchgeführt haben.

12. Vergleichen Sie die Amplitude dieser Regression mit der Amplitude der Regression für die Tageslichtdauer in Minuten über die Tage nach der Sonnenwende, wenn Sie die Kettenregel in der Klasse behandelt haben. Wie hängen die Amplituden symbolisch zusammen?

Antworten

1. Die angenäherte Änderungsrate von $L(t)$ abhängig von t, wenn $t = 180$ ist, beträgt:

   $\frac{890-888}{40}=\frac{1}{20}=.05$ oder $\frac{890-901}{20}=-\frac{11}{20}=-.55$ oder $\frac{901-888}{20}=\frac{13}{20}=.65$ Tageslichtdauer in Minuten pro Tag

2. Der Zeitpunkt liegt in der Nähe der Sommersonnenwende, d. h. dem Tag, an dem die Tageslichtdauer in Minuten ein Maximum erreicht.

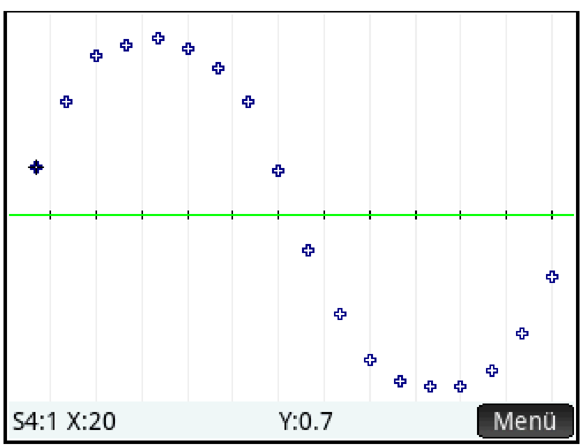
3. Die angenäherte Änderungsrate von $L(t)$ abhängig von t, wenn $t = 270$ ist, beträgt:

   $\frac{714-766}{20}=-2.6$ Tageslichtdauer in Minuten pro Tag

4. Dieser Zeitpunkt liegt in der Nähe des Herbstäquinoktiums, an dem die Tageslichtdauer 12 Stunden bzw. 720 Minuten beträgt. Zu diesem Zeitpunkt wird die Tageslichtdauer schneller kürzer als an jedem anderen Zeitpunkt im Jahr.

7. Die Werte von C5 sind:
   {.7, 1.7, 2.4, 2.55, 2.65, 2.5, 2.2, 1.7, .65, -.55, -1.5, -2.2, -2.5, -2.6, -2.6, 2.35, -1.8, -.95}

Das Streudiagramm ist nachstehend aufgeführt:

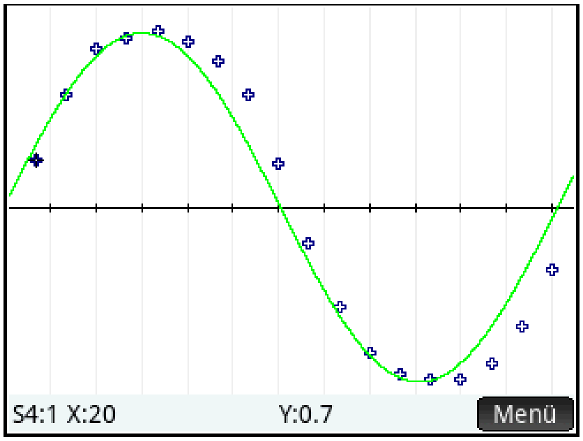


8. Das Vorzeichen von C5 über C1 ändert sich um den Tag 190 von plus in minus. Dieser Zeitpunkt liegt in der Nähe der Sommersonnenwende ungefähr bei Tag 182.

9. C5 über C1 erreicht ein Maximum um den Tag 79 in der Nähe des Frühlingsäquinoktiums an Tag 90.

10. C5 über C1 erreicht ein Minimum um den Tag 265 in der Nähe des Herbstäquinoktiums an Tag 270.

11. *F* = 0. Die Periode beträgt 365, sodass *D* =2*π/365 ist. Die Phasenverschiebung *E* ist ein Vierteljahr, sodass *E* = 365/4 ist. Die Amplitude ist die Hälfte der Differenz zwischen dem Maximal- und Minimalwert von L5, sodass *C* = 2.625 ist. Das resultierende Modell lautet y = 2.625*cos(2*π/365*(x-365/4)). Eine Überlagerung des Modells im Streudiagramm führt zu folgendem Ergebnis:



12. Die Amplitude der Funktion R(x) beträgt das *D*-Fache der Amplitude der Funktion L(x).

Die Ableitungsfunktion

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Hineinzoomen in eine Tabelle; Definieren einer Funktion mit einer anderen; Definieren einer Funktion mit **NumStep**

AP Calculus-Inhalt:

Definition der Ableitung $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Übung:

Die Schüler stellen eine Verbindung zum HP Schulnetzwerk her und der Lehrer verteilt die *DervDefnZmTblDe*-App.

1. Drücken Sie , nachdem Sie die App erhalten haben, und wählen Sie **DervDefnZmTblDe** aus. Die App basiert auf der integrierten Funktion-App. Drücken Sie , um die Definitionen der Funktionen anzuzeigen, die in dieser Übung untersucht werden. Beachten Sie, dass vorerst nur die Funktion F2(X) ausgewählt (aktiviert) ist.

2. Drücken Sie (Num Setup). Dort werden die Werte von Variablen angezeigt, die die Darstellung der numerischen Ansicht steuern, z. B. **Startwert**, **Schrittweite** und **Zoomfaktor**. **Startwert** ist der erste Wert in der Tabelle. **Schrittweite** ist die Differenz zwischen angrenzenden Eingaben in der Tabelle und **Zoomfaktor** ist ein Faktor für die Änderung der Schrittweite, wenn Sie in die Tabelle hineinzoomen (Division von Schrittweite durch Zoomfaktor) oder herauszoomen (Multiplikation von Schrittweite mit Zoomfaktor).

3. Wie lautet der Wert von **Schrittweite**? ______________________

4. Drücken Sie , um wieder die Definitionen der Funktionen anzuzeigen. Können Sie vorhersagen, wie der Graph von F2(X) aussieht?

____

Der Graph von F2(X) ähnelt einer allgemeinen trigonometrischen Funktion. Drücken Sie , um ihn anzuzeigen.

5. Welche trigonometrische Funktion stellt der Graph dar?

____

6. Erklären Sie, warum der Graph von F2(X) so aussieht.

____

____

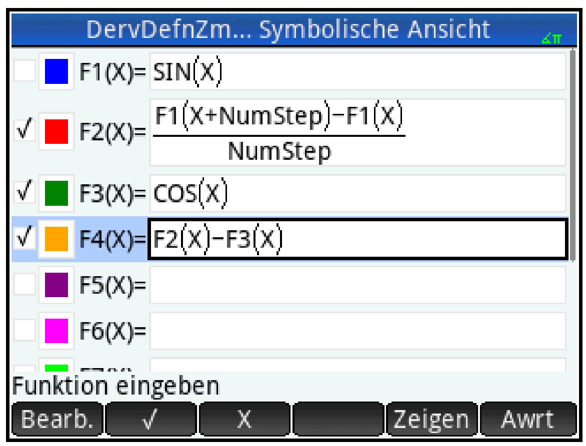
____

Bedenken Sie folgende Frage, wenn Sie bei der Beantwortung von Frage 4 Schwierigkeiten hatten. Bei X = 0 ist $F2(0) = \frac{SIN(0+0.1) - SIN(0)}{0.1}$. Diese Gleichung sollte Ihnen vertraut sein. Sie stellt eine Approximation für die Ableitung einer bestimmten Funktion bei einem bestimmten Wert von *X* dar.

7. Welche Funktion ist das? ____________________ Wie lautet der Wert von *X*? __________

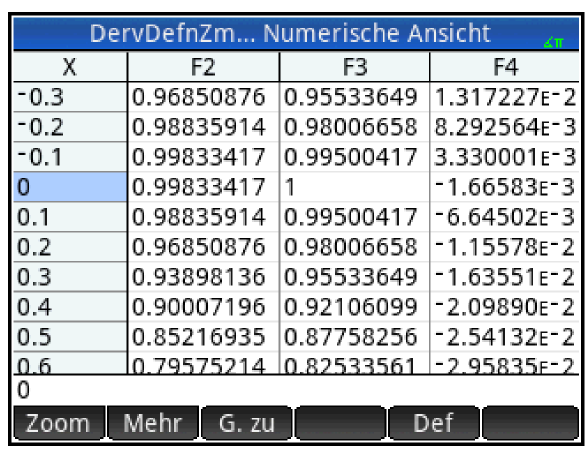
Für jeden Wert von *X* stellt F2(X) eine Approximation für die Ableitung dar. F2(X) ist aber nicht exakt die Ableitung.

8. Drücken Sie Symb und betrachten Sie erneut die Funktionsdefinitionen.



Sie sehen, dass F3(X) = COS(X) und F4(X) die Differenz zwischen unserer Approximation für die Ableitung und der exakten Ableitung ist. Sie betrachten jetzt die numerische Ansicht für F2(X), F3(X) und F4(X).

9. Aktivieren Sie zuerst F3(X) und F4(X), indem Sie in der symbolischen Ansicht auf das Kontrollkästchen neben der jeweiligen Funktion klicken. Drücken Sie dann Num und studieren Sie die Tabelle. Vergleichen Sie insbesondere die Werte von F2(X) und F3(X) für das gleiche X. Die Werte von F4(X) stellen den Unterschied zwischen der Approximation der Ableitung von SIN(X) und der exakten Ableitung für jeden Wert von X dar.



Jetzt zoomen Sie in die Tabelle hinein. Bei jedem Hineinzoomen in die Tabelle wird die Variable NumStep durch 4 (Wert des Zoomfaktors) geteilt. Das bewirkt, dass sich die Werte von X enger zusammen liegen. Beachten Sie aber, dass die Variable NumStep in der Definition von F2(X) enthalten ist. Normalerweise wird hier eine Variable namens *h* oder u. U. Δx verwendet. Beim Hineinzoomen in die Tabelle sollten die Approximationen daher verbessert werden, da NumStep kleiner wird.

10. Drücken Sie Zoom und wählen Sie **Vergrößern** aus. Zum Vergleich können Sie die Wertetabelle auf der vorherigen Seite betrachten.

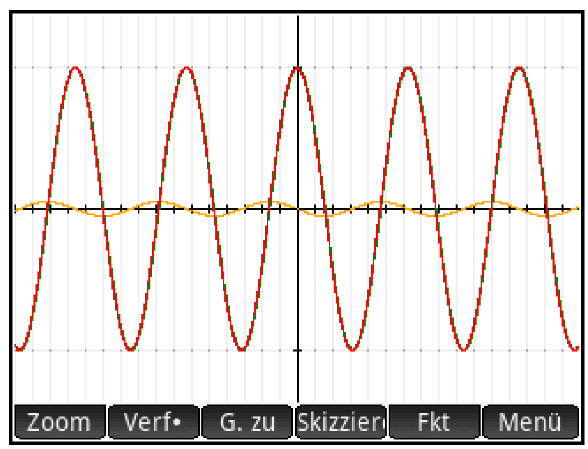
11. Vergleichen Sie die Werte von F2(X) und F3(X) bei jedem Wert von X. Liegen sie näher zusammen?

    ____

12. Betrachten Sie die Werte von F4(X). Sind sie größer oder kleiner als vorher? ______________

13. Zoomen Sie mehrmals in die Tabelle hinein, aber übertreiben Sie es nicht! Sie können auch wie beim Graphen die Vergrößerungstaste + drücken.

14. Drücken Sie Plot und vergrößern Sie sie Ansicht vertikal mit den Fingern. Ordnen Sie zwei Finger vertikal nebeneinander an, warten Sie einen Moment und bewegen Sie sie dann vertikal auseinander. Daraufhin wird ein Paar blauer vertikaler Pfeile angezeigt, die darauf hinweisen, dass die vertikale Zoomfunktion aktiv ist. Wiederholen Sie diese Geste, bis Sie sehen können, dass F4(X) nicht wirklich konstant 0 ist. Je kleiner Sie NumStep machen, desto größer muss die vertikale Vergrößerung sein, um festzustellen, dass F2(X) und F3(X) verschieden sind.



Antworten

3. NumStep ist 0.1.

4. COS(X)

5. COS(X)

6. F2(X) ist ein Differenzenquotient, der die Ableitung von SIN(X) bei jedem Wert von X approximiert. Da NumStep eine kleine Zahl ist (0.1), gleicht der Graph von F2 der Ableitung.

7. SIN(X) bei X = 0

11. Im Allgemeinen gilt: Je kleiner NumStep ist, desto näher liegen die Werte von F2(X) an COS(X), d. h., die Approximation wird besser, wenn wir in die Tabelle hineinzoomen.

12. F4(X) ist der Fehler des Differenzenquotienten F2(X) als Approximation der Ableitung F3(X). Beim Hineinzoomen werden die Fehler daher kleiner.

Implizite Differentiation

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Erweiterte Grafiken-App; Verwendung von Variablen der Grafikeinstellungen; Navigation im Katalog; Durchführung einer impliziten Differentiation mit CAS; Lösen von Gleichungen mit CAS

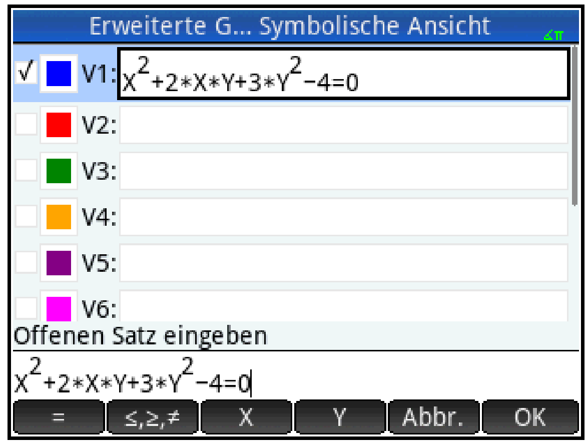
AP Calculus-Inhalt:

Implizite Differentiation

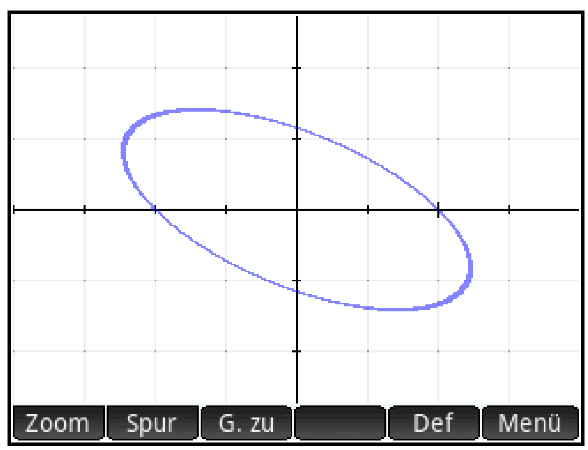
Übung:

Der Punkt mit den Koordinaten (2,0) ist ein Punkt auf der Ellipse $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + 3y^2 - 4 = 0$. Wie lautet die Gleichung der Tangente zur Ellipse an diesem Punkt?

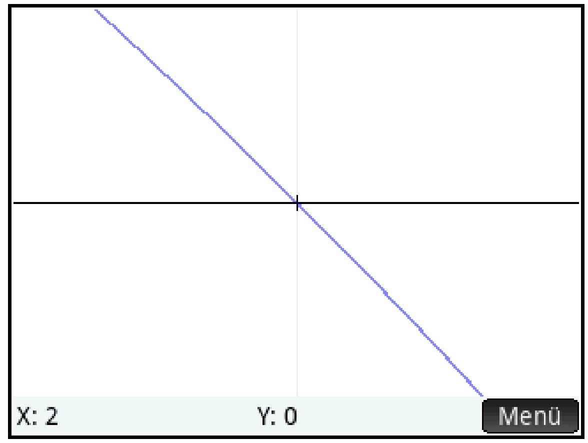
1. Drücken Sie , um die Anwendungsbibliothek zu öffnen, und wählen Sie die App **Erweiterte Grafiken** aus. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet, in der Sie bis zu 10 Gleichungen oder Ungleichungen eingeben können. Geben Sie in **V1** die Gleichung für die Ellipse ein. Tippen Sie auf die Menüschaltflächen am unteren Rand, um =, X und Y einzugeben. Tippen Sie danach auf OK oder drücken Sie Enter.



2. Drücken Sie , um den Graphen der Ellipse anzuzeigen. Drücken Sie , um die Ansicht durch Spreizen der Finger zu vergrößern und den Mittelpunkt des Graphen durch Ziehen zu verschieben, wie in der Abbildung rechts gezeigt.



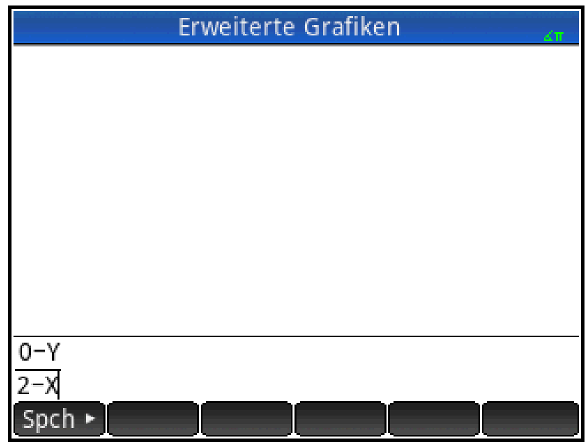
3. Bewegen Sie den Verfolgungscursor an den Punkt (2,0) und drücken Sie , um die Ansicht an diesem Punkt zu vergrößern. Zoomen Sie weiter hinein, bis der Graph lokal linear verläuft (siehe Abbildung rechts).



Ist die Steigung der Tangente an der Ellipse bei (2, 0) positiv oder negativ?

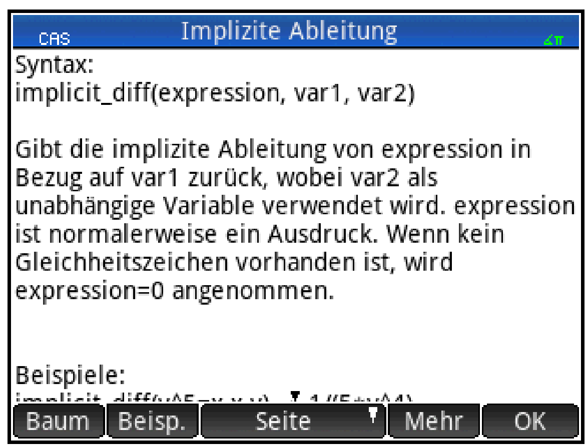
Wir schätzen jetzt die Steigung der Kurve bei (2, 0) ab.

4. Drücken Sie , um den Cursor ein Pixel nach rechts von (2, 0) zu verschieben. Die aktuellen Koordinaten des Verfolgungscursors werden in den Variablen X und Y gespeichert. Drücken Sie , um die Startansicht zu öffnen. Drücken Sie , um das Vorlagenmenü zu öffnen, und wählen Sie die Bruchvorlage aus. Geben Sie 0 – Y als Zähler und 2 – X als Nenner ein. Drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen. Zeichnen Sie Ihre Approximation unten auf.



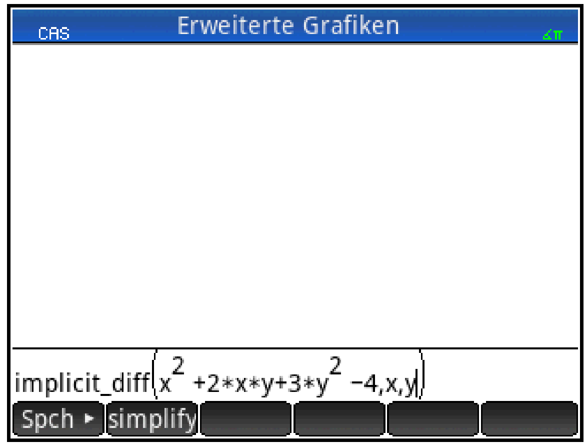
Wir ermitteln jetzt die exakte Steigung durch implizite Differentiation.

5. Drücken Sie CAS, um die CAS-Ansicht zu öffnen. Drücken Sie , um die Toolbox-Menüs zu öffnen. Tippen Sie auf Katlg und drücken Sie dann TAN +/- (IM), um Befehle anzuzeigen, die mit diesen beiden Buchstaben beginnen. Scrollen Sie nach unten zu **implicit_diff**. Drücken Sie Help, um die Hilfeseite für diesen Befehl anzuzeigen. Die Menüschaltflächen sind:
   - Baum: Öffnet den gesamten Hilfestrukturbaum.
   - Beisp.: Öffnet ein Menü mit Beispielen, die in CAS eingefügt werden können.
   - Seite: Ermöglicht die Navigation von einer Seite zu einer anderen.
   - Mehr: Zeigt verwandte Befehle an.
   - OK: Schließt die Hilfeseite.

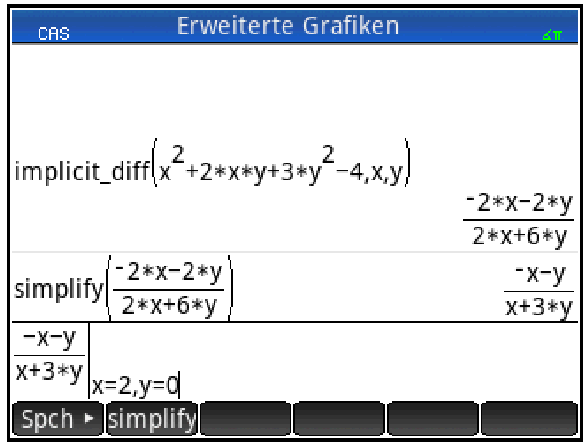


Wie sehen, dass der Befehl einen Ausdruck gefolgt von den Variablen für die Differentiation übernimmt.

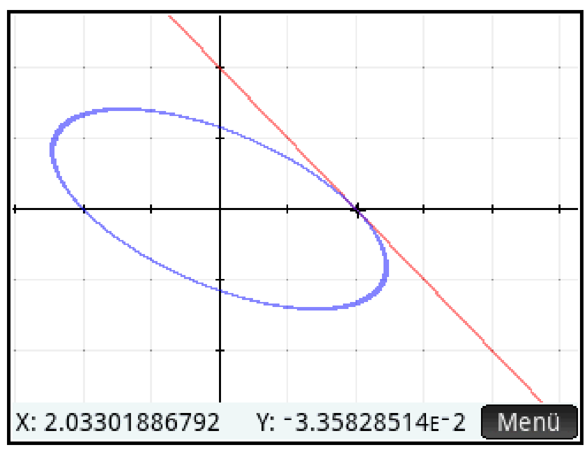
6. Tippen Sie auf OK, um die Hilfeseite zu schließen. Tippen Sie auf OK, um den Befehl in CAS einzufügen. Das CAS verwendet kleingeschriebene Namen für Variablen, sodass Sie hier *x* und *y* verwenden müssen. Geben Sie den Ausdruck für die Ellipse gefolgt von x und y ein und drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen. Tippen Sie auf simplify, um den Ausdruck zu vereinfachen. Zeichnen Sie den Ausdruck unten auf.



7. Drücken Sie [Units] und wählen Sie die dritte Vorlage in der ersten Zeile aus. (Mit diesem Wo-Befehl kann angegeben werden, wo eine Funktion ausgewertet werden soll.) Tippen Sie in das erste Kästchen, dann auf unser letztes Ergebnis und dann auf Kopie, um das Ergebnis in das Kästchen zu kopieren. Tippen Sie in das zweite Kästchen und geben Sie x=2, y=0 ein. Drücken Sie Enter, um das exakte Ergebnis anzuzeigen. Zeichnen Sie den exakten Wert der Steigung der Tangente unten auf.



8. Drücken Sie Symb, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren. Geben Sie dort die Gleichung der Tangente in **V2** ein und drücken Sie Plot, um den Graphen anzuzeigen. Sie können die Gleichung in der Punktsteigungsform oder in der Steigungsschnittpunktform eingeben. Drücken Sie [−], um die Ansicht wieder zu verkleinern, sodass die ganze Ellipse sichtbar ist.

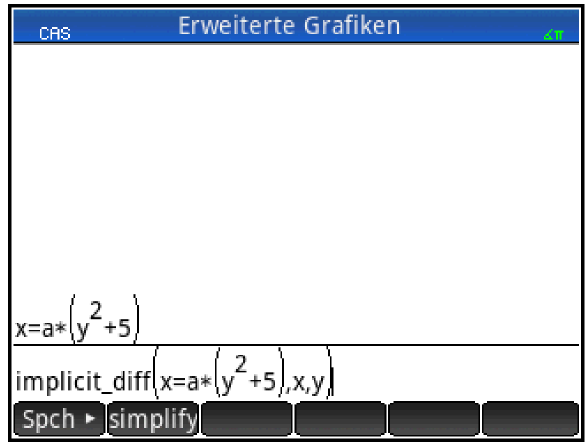


Bevor es den HP Prime gab, war die Ermittlung der Steigung der Tangente am Graph einer Beziehung mit impliziter Differentiation eine mechanische Aufgabe mit einer gewissen Unsicherheit, ob die erhaltene Gleichung tatsächlich die Gleichung der Tangente an einer Kurve ist. Dies kann jetzt leicht grafisch verifiziert werden.

Weitergehende Übung

Ermitteln Sie alle Werte von *a*, für die die Parabel $x = a \cdot (y^2 + 5)$ ebenfalls tangential zur Geraden y= -x+2 verläuft.

1. Drücken Sie CAS, um zum CAS zurückzukehren. Differenzieren Sie die Gleichung implizit nach x und y (siehe Abbildung rechts).



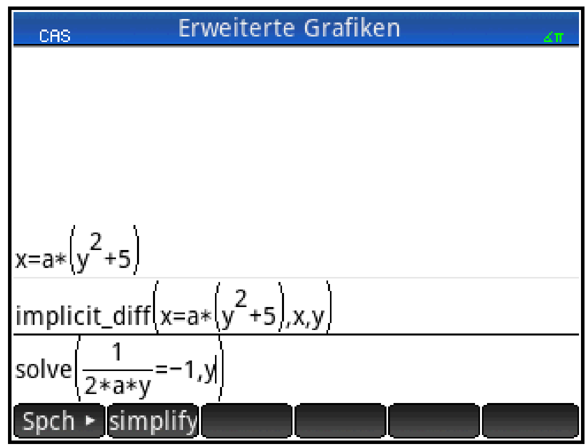
Wir wissen dass die Ableitung bei (2, 0) -1 ist. Schreiben Sie eine Gleichung auf, die diese Tatsache ausdrückt.

Wir haben jetzt drei Gleichungen in a, x und y:

- $x = a \cdot (y^2 + 5)$
- *y* = -*x* +2 oder *x* = 2 - *y*
- $\frac{1}{2ay} = -1$

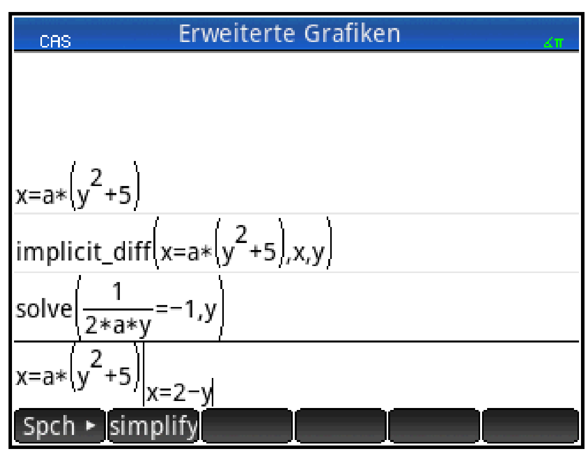
Wir sollten in der Lage sein, dieses Gleichungssystem zu lösen. Zuerst lösen wir die letzte Gleichung nach *y* abhängig von *a* auf.

2. Drücken Sie Toolbox und tippen Sie auf CAS. Tippen Sie auf **Lösen** und wählen Sie **Lösen** aus. Kopieren Sie jetzt den Ausdruck (doppeltippen Sie einfach darauf) und legen Sie ihn wie gezeigt auf -1 fest. Drücken Sie , und dann ALPHA 1 (Y), um nach *y* aufzulösen. Drücken Sie dann Enter, um das Ergebnis anzuzeigen. Dieses Ergebnis ist ein Ausdruck, der gleich y ist. Schreiben Sie die Gleichung unten auf.



Wir wissen, dass der Berührungspunkt beide Gleichungen erfüllt (die der Parabel und die der Geraden). Wir nutzen diese Tatsache, um eine andere Gleichung in a und y zu erhalten, in der x nicht vorkommt.

3. Kehren Sie zum Wo-Befehl zurück und geben Sie die Parabelgleichung wie in der Abbildung gezeigt ein. Geben Sie im zweiten Kästchen die Substitution x= 2-y ein, um eine Gleichung in *a* und *y* zu erhalten. Schreiben Sie die Gleichung unten auf.



---

4. Wiederholen Sie den Wo-Befehl von Schritt 3 mit dem Ergebnis von Schritt 3 auf der linken Seite und unserer Substitution für *y* abhängig von *a* (gegeben in Schritt 2) auf der rechten Seite. Sie sollten eine quadratische Funktion in a erhalten. Schreiben Sie die quadratische Funktion unten auf.

____

5. Lösen Sie jetzt nach *a* auf. Es gibt zwei Werte von *a*, für die der Graph von $x = a \cdot (y^2 + 5)$ tangential zur Geraden y= -x+2 ist. Schreiben Sie diese Werte unten auf.

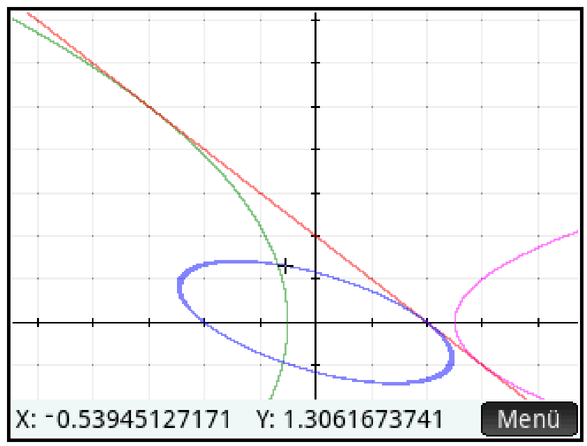
____

6. Setzen Sie diese Werte von a jetzt in $x = a \cdot (y^2 + 5)$ ein, um zwei parabolische Gleichungen zu erhalten. Zeichnen Sie die Gleichungen unten auf.

______________________________ und ______________________________

7. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und geben Sie diese Gleichungen in V3 und V4 ein.

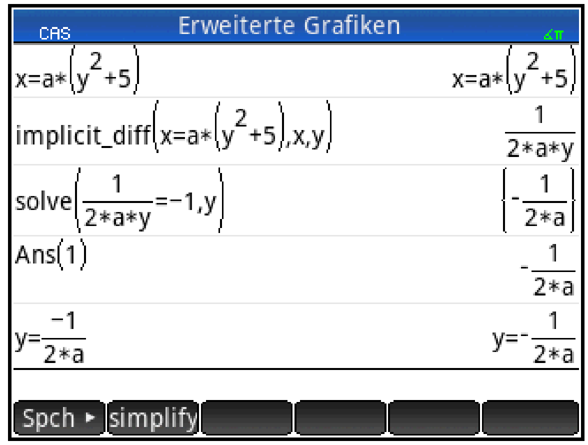
8. Drücken Sie Plot Setup, um die Graphen anzuzeigen.



Antworten zur Übung

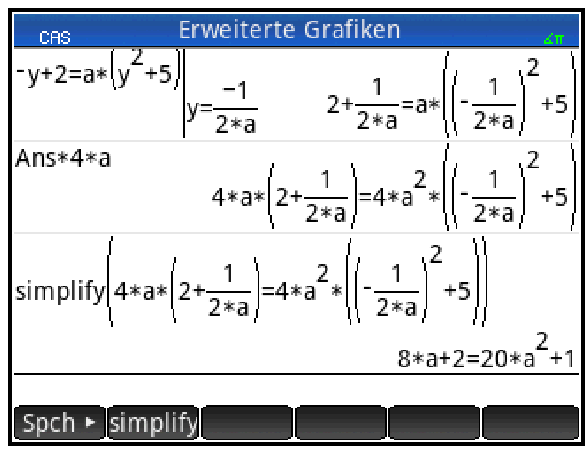
3. Die Steigung der Tangente muss negativ sein.
4. Die Antworten variieren, sollten aber in der Nähe von -1 liegen.
6. $\frac{-x-y}{x+3y}$
7. Die Steigung der Tangente bei (2, 0) ist exakt -1.
8. Die Gleichung der Tangente ist y-0 = -1(x-2) oder y= -x+2 oder x + y = 2.

Antworten zur weitergehenden Übung



1. Die Gleichung lautet $\frac{1}{2ay}=-1$.

2. Die Gleichung lautet $y=\frac{-1}{2a}$. Am Ende von Schritt 2 wird das Ergebnis in einer Matrix angezeigt. Drücken Sie Shift + ( ) 1 Enter, um das Ergebnis aus der Matrix zu entfernen. Vervollständigen Sie dann die Gleichung wie in der Abbildung gezeigt.

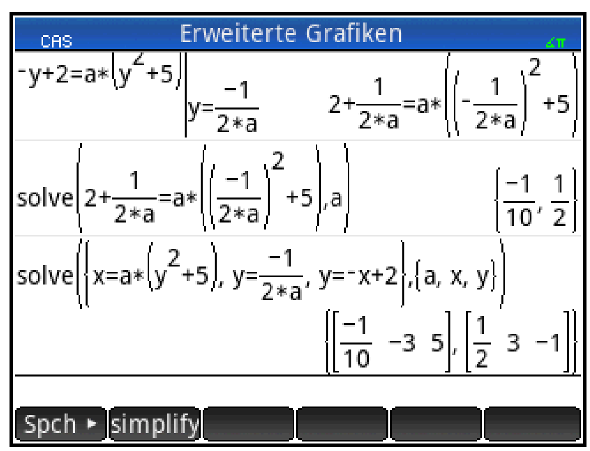


3. Die Gleichung lautet $2-y=a\left(y^2+5\right)$.

4. Die Gleichung lautet $2+\frac{1}{2a}=a\left(\left(\frac{-1}{2a}\right)^2+5\right)$. Bei Multiplikation mit 4a und anschließender Vereinfachung ist das Ergebnis eindeutig quadratisch in a: $20a^2-8a-1=0$.

5. Lösen Sie diese Gleichung mit der Quadratformel oder dem Befehl „Lösen“. Sie erhalten a= 1/2 oder a = -1/10.

6. Die Gleichungen sind $x=\frac{1}{2}\cdot\left(y^2+5\right)$ und $x=\frac{-1}{10}\cdot\left(y^2+5\right)$.



Sie können den ganzen Prozess in einem Schritt durchführen, wenn Sie möchten. Verwenden Sie den solve()-Befehl mit den Gleichungen in geschweiften Klammern als Gleichungssystem und dem Vektor der Variablen dahinter. Die Abbildung rechts zeigt den exakten Ausdruck und das Ergebnis:

- Bei *a* = -1/10 ist die Parabel tangential zur Geraden am Punkt (-3, 5).
- Bei *a* = 1/2 ist die Parabel tangential zur Geraden am Punkt (3, -1).

Die Ergebnisse können in der grafischen Ansicht überprüft werden.

Approximieren von Integralen mit Riemann-Summen

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Verwendung eines benutzerdefinierten Menüs für Ansichten zur Navigation in einer benutzerdefinierten App

AP Calculus-Inhalt:

Einführung in Riemann-Summen über eine Fläche; Konvergenz von Riemann-Summen und Fehlerverhalten

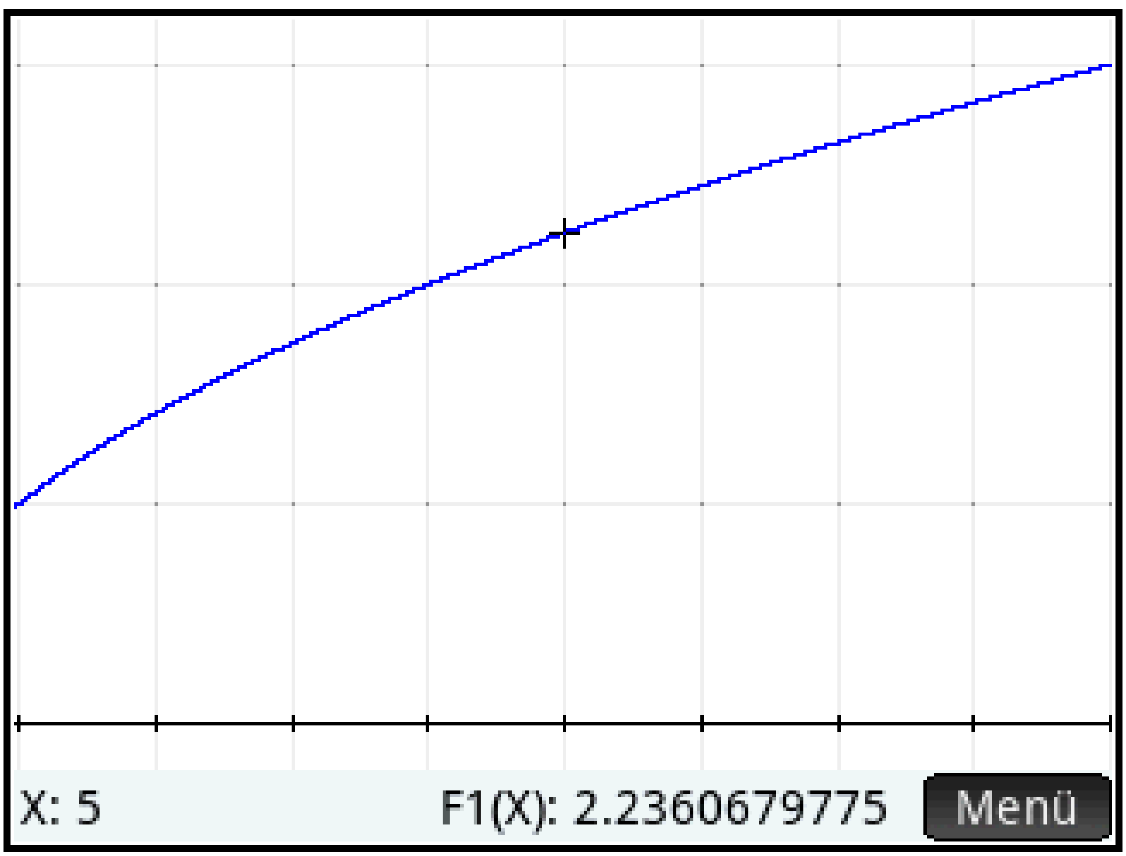
Übung:

Die Schüler stellen eine Verbindung zum HP Schulnetzwerk her und der Lehrer verteilt die *NumIntDe*-App. Drücken Sie Apps Info und wählen Sie **NumIntDe** aus. Die App basiert auf der integrierten Funktion-App.

In dieser Übung verwenden Sie die Funktion $f(x)=\sqrt{x}$. Insbesondere approximieren Sie das bestimmte Integral, $\int_1^9 \sqrt{x}dx$, das die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ von $x = 1$ bis $x = 9$ darstellt.

Der erste Schritt bei der Approximation eines Integrals besteht darin, das Intervall zu unterteilen. In diesem Beispiel reicht das Intervall von $x = 1$ bis $x = 9$.

1. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen von $F1(X)=\sqrt{X}$ zu betrachten.



Zuerst verwenden Sie 2 Teilintervalle: [1,5] und [5,9]. Sie werten die Integrandenfunktion, $F1(X)=\sqrt{X}$, am linken Endpunkt dieser beiden Intervalle (bei *X* = 1 und *X* = 5) aus und zeigen die Ergebnisse in der numerischen Ansicht an. Drücken Sie Shift Num Setup (Num Setup). Beachten Sie, dass die Tabelleneinrichtung (**Typ**) auf **Selbstdefiniert** festgelegt ist. Drücken Sie Num Setup und geben Sie 1 und 5 in die Spalte für *X* ein.

2. Zeichnen Sie in unserem Graphen aus Frage 1 die Rechtecke mit der Breite 4 und den Höhen, die durch die Werte von F1(1) und F1(5) gegeben sind. Setzen Sie Ihren Stift dazu bei *X* = 1 auf die *x*-Achse. Zeichnen Sie eine vertikale Strecke nach oben bis zum Graphen von F1(X). Die Länge dieser Strecke ist $F1(1)=\sqrt{1}=1$. Zeichnen Sie dann eine horizontale Strecke vom Punkt (1, 1) zum Punkt (5, 1). Setzen Sie den Stift bei *X* = 5 auf die *x*-Achse und zeichnen Sie wie oben eine vertikale Strecke nach oben bis zum Graphen von F1(X) und dann eine horizontale Strecke zum Punkt $\left(9,\sqrt{5}\right)$. Vervollständigen Sie das zweite Rechteck, indem Sie eine vertikale Strecke nach unten zur *x*-Achse bei *X* = 9 zeichnen.

3. Drücken Sie Num Setup. Schreiben Sie eine Berechnung in der Form der Summe von zwei Produkten auf, die die Summe der Flächen der beiden Rechtecke angibt, die Sie in 2 gezeichnet haben. Werten Sie die Summe aus und schreiben Sie deren Wert auf drei Dezimalstellen genau auf.

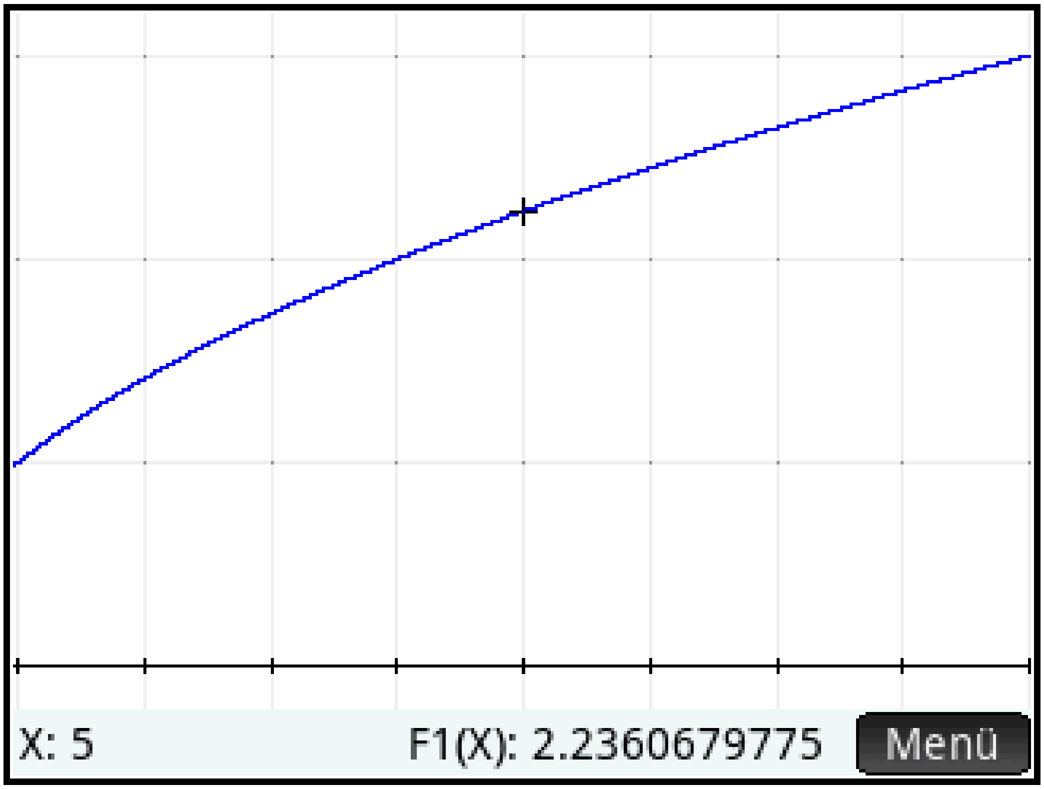
Diese Summe wird linksseitige Riemann-Summe mit 2 Teilintervallen von *F*1(*X*) im Intervall [1,9] genannt. Betrachten Sie die Rechtecke, die Sie im Graphen gezeichnet haben.

4. Ist der Wert der linksseitigen Summe kleiner oder größer als die exakte Fläche unter dem Graphen von F1(X) von 1 bis 9? Erläutern Sie Ihre Antwort.

Um die Approximation der Fläche zu verbessern, müssen Sie lediglich mehr Teilintervalle erstellen, sodass die Breite der einzelnen Rechtecke kleiner wird. Zuerst verwenden Sie 4 Rechtecke mit einer Breite von jeweils 2.

5. Drücken Sie   und ändern Sie **Schrittweite** in 2.

6. Zeichnen Sie im Graphen die 4 Rechtecke mit der Breite 2 und den Höhen mit den Werten von F1(X) in der Tabelle (siehe Beschreibung in Frage 2).



7. Schreiben Sie eine Berechnung in der Form der Summe von vier Produkten auf, die die Summe der Flächen der vier Rechtecke angibt, die Sie in 7 gezeichnet haben. Berechnen Sie die Summe auf drei Dezimalstellen genau.

8. Ist die Summe kleiner oder größer als die exakte Fläche unter der Kurve?

9. Ist die Summe kleiner oder größer als die Summe, die Sie mit zwei Rechtecken berechnet haben?

Zeichnen Sie ein Bild, dass Ihre Antwort auf Frage 9 stützt.

Durch immer mehr Rechtecke in der Summe werden die Approximationen immer besser. Die Berechnungen werden aber bald ziemlich mühsam. Die NumIntDe-App hilft Ihnen, die Berechnungen zu automatisieren.

Drücken Sie . Wählen Sie **Grenzen** aus und geben Sie 1 für die Untergrenze und 9 für die Obergrenze ein (diese sind u. U. bereits auf die richtigen Werte eingestellt). Wählen Sie **Methode auswählen** und **LINKS** aus, um die linksseitigen Riemann-Summen zu berechnen. Wählen Sie dann „3 Anzahl Teilintervalle eingeben“ aus. Geben Sie 2 für die Anzahl der Teilintervalle ein und drücken Sie . Wählen Sie dann „6 Grafik“ aus. Daraufhin werden die beiden Rechtecke gezeichnet und die Summe berechnet. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren Antworten auf die Fragen 2 und 3. Drücken Sie dann und . Wiederholen Sie die oben aufgeführten Schritte, um 4 Rechtecke zu zeichnen und vergleichen Sie die Ergebnisse mit Ihren Antworten auf die Fragen 6 und 7. Drücken Sie dann und wählen Sie **Numerische Ergebnisse** aus. Daraufhin wird die numerische Ansicht angezeigt, in der Sie die Anzahl der Teilintervalle in der X-Spalte der Tabelle eingeben können. Der Wert der Summe wird für die jeweils ausgewählte Methode (links oder rechts) berechnet. Geben Sie 4 für X ein. Daraufhin wird auch die Summe für 4 linksseitige Rechtecke angezeigt. Vervollständigen Sie die nachstehende Tabelle für linksseitige Riemann-Summen in der numerischen Ansicht.

10.

Anzahl der Teilintervalle	Linksseitige Riemann-Summe	Rechtsseitige Riemann-Summe
8		
16		
32		
64		
128		
256		
512		
1024		
2048		

11. Nähern sich die Werte der linksseitigen Riemann-Summen einem Grenzwert, wenn die Anzahl der Teilintervalle größer wird? ____________________________ Wenn ja, wie lautet dieser Wert? ______________

Wählen Sie im Ansichtsmenü **Methode auswählen** und **RECHTS** aus, um die rechtsseitigen Riemann-Summen zu berechnen. Füllen Sie die Spalte für rechtsseitige Werte in der Tabelle wie zuvor aus.

12. Sind die rechtsseitigen Riemann-Summen größer oder kleiner als die exakte Fläche unter der Kurve?

____

13. Erläutern Sie, warum die rechtsseitigen Riemann-Summen immer kleiner werden, wenn die Anzahl der Rechtecke größer wird.

____

____

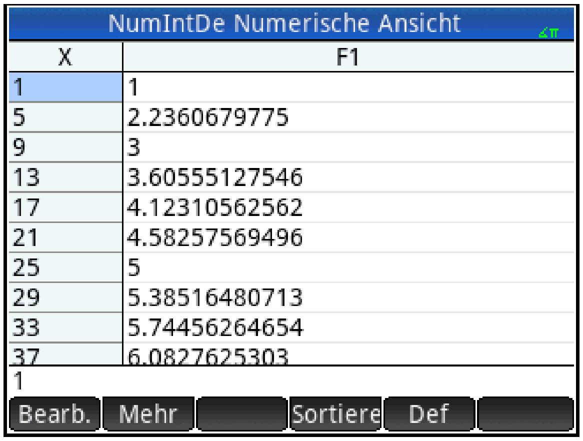
____

14. Nähern sich die Werte der rechtsseitigen Riemann-Summen einem Grenzwert, wenn die Anzahl der Teilintervalle größer wird? ____________________

Wenn ja, wie lautet dieser Wert? __________

Antworten

1.



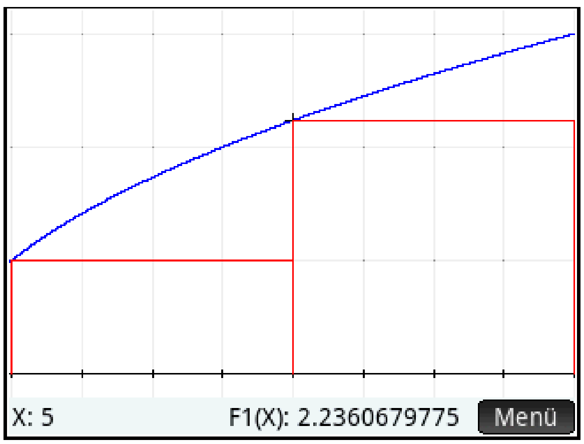
NumIntDe Numerische Ansicht

X	F1
1	1
5	2.2360679775
9	3
13	3.60555127546
17	4.12310562562
21	4.58257569496
25	5
29	5.38516480713
33	5.74456264654
37	6.0827625303

1

Bearb. Mehr Sortiere Def

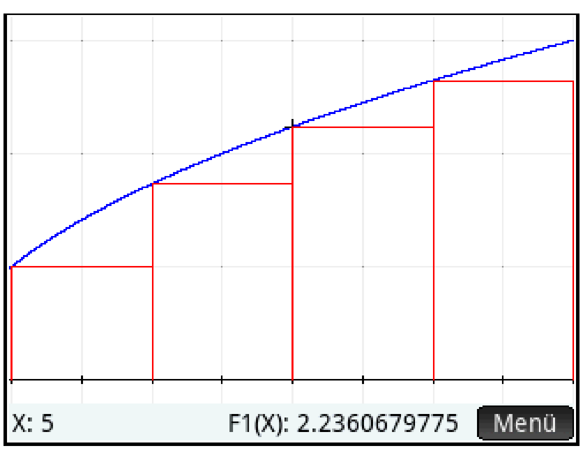
2.



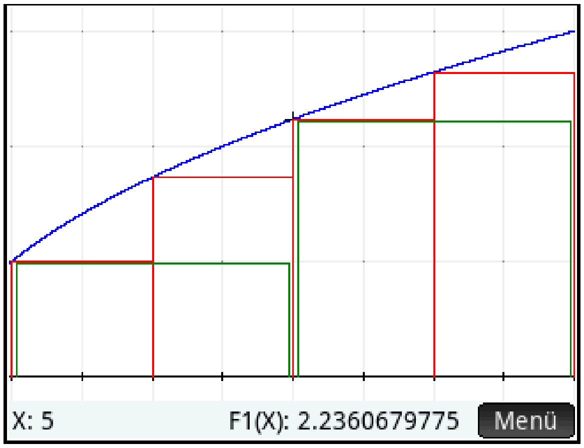
3. $4 \cdot 1 + 4 \cdot \sqrt{5} \approx 12.944$

4. Die Summe ist kleiner als die exakte Fläche unter dem Graphen. Jedes Rechteck lässt einen Bereich unter dem Graphen von F1(X) aus.

6.



7. $2 \cdot 1 + 2 \cdot 1.73205 + 2 \cdot 2.23607 + 2 \cdot 2.64576 \approx 15.228$
8. Kleiner
9. Die Summe der Flächen der 4 Rechtecke ist größer als die Summe der Flächen der beiden Rechtecke. Die nachstehende Abbildung stützt diese Folgerung.



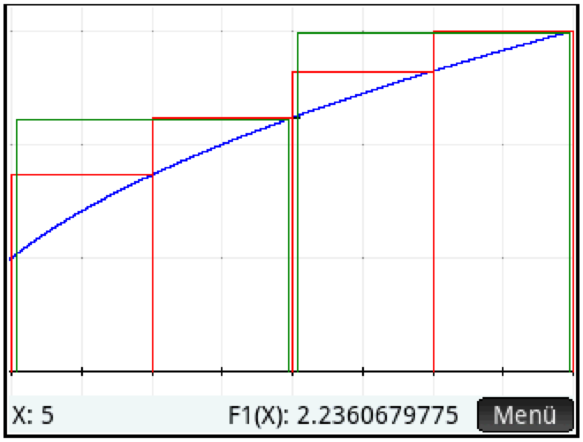
10.

Anzahl der Teilintervalle	Linksseitige Riemann-Summe	Rechtsseitige Riemann-Summe
8	16.306	18.306
16	16.826	17.826
32	17.082	17.582
64	17.208	17.458
128	17.271	17.396
256	17.302	17.365
512	17.318	17.349
1024	17.326	17.341
2048	17.329	17.337

11. Ja, 17.333

12. Die rechtsseitigen Riemann-Summen sind größer als die Fläche unter der Kurve, weil der Integrand größer wird.

13. Wenn wir die Anzahl der Teilintervalle vergrößern, enthalten die rechtsseitigen Rechtecke immer weniger „überschüssige" Fläche. Die nachstehende Abbildung stützt diese Folgerung.



14. Ja; 17.333

Weitergehende Übungen:

E1) Wiederholen Sie die Übung mit der Mittelpunktregel. Lassen Sie die Schüler wie in der vorherigen Übung zuerst eine Tabelle der Eingaben und Ausgaben erstellen. (Wenn 2 Teilintervalle im Intervall von $x = 1$ bis $x = 5$ verwendet werden, müssen die Eingaben $x = 2$ und $x = 4$ sein.) Verwenden Sie **Startwert** = 2 und **Δ-Tabelle** = 2. Ändern Sie dann **Δ-Tabelle** in 0.5. Verwenden Sie danach das Taschenrechnerprogramm und fügen Sie eine weitere Spalte zur Tabelle von Frage 13 hinzu.

E2) Untersuchen Sie eine Funktion, die im Integrationsintervall kleiner wird, z. B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)dx$. Stellen Sie den Schülern die Frage, bei welcher Methode (linksseitige oder rechtsseitige Summe) die Approximation des Integrals größer ist als das exakte Integral. Fordern Sie die Schüler alternativ auf, eine Funktion *g* zu erzeugen, für die die Approximation des Integrals $\int_1^5 g(x)dx$ größer ist als das exakte Integral.

E3) Wiederholen Sie die Übung mit der Trapezregel. Zeigen Sie, dass die Trapezregel der Mittelwertbildung der linksseitigen und rechtsseitigen Summe entspricht. Das NUMINT-Programm hinterlässt die zuletzt berechneten Summen in der Listenvariablen L6. L6(1) ist die linksseitige Summe, L6(2) die rechtsseitige Summe, L6(3) die Mittelpunktsumme und L6(4) die Trapezsumme. Sie können beispielsweise (L6(1) + L6(2))/2 berechnen und das Ergebnis mit L6(4) vergleichen.

E4) Kommen Sie auf das NUMINT-Programm zurück, nachdem die Schüler wissen, wie ein bestimmtes Integral gemäß dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung berechnet wird (sodass der exakte Wert eines Integrals bekannt ist), und verwenden Sie die Werte in L6, um die Fehler der verschiedenen Approximationen zu untersuchen.

Untersuchung des Hauptsatzes

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

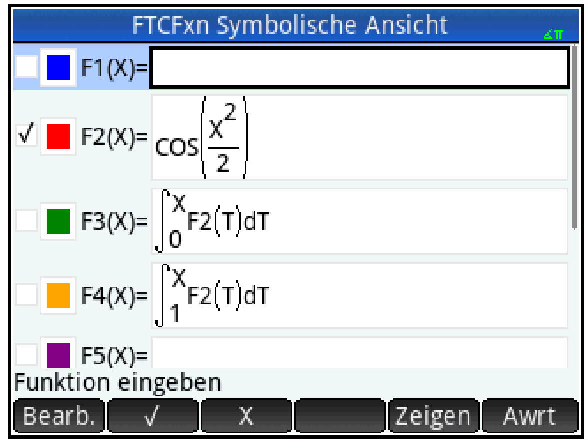
Definieren einer Funktion als Integral; der MAKELIST()-Befehl und andere Listenbefehle

AP Calculus-Inhalt:

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Übung:

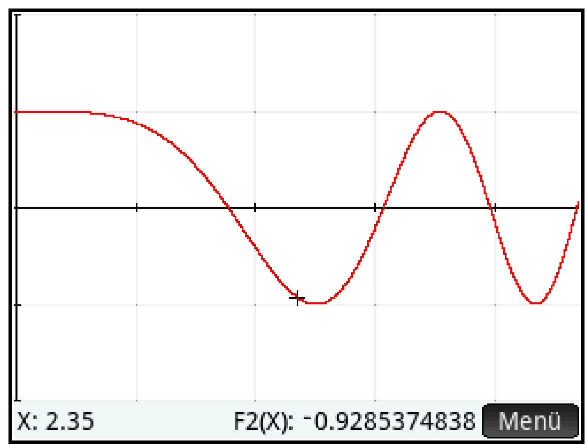
In dieser Übung untersuchen die Schüler den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aus der numerischen und aus der grafischen Perspektive. Die Untersuchung vermittelt den Schülern weitere Praxis im Umgang mit Funktionen der Form $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.



1. Drücken Sie und wählen Sie die App **FTCFxn** aus. Schauen Sie sich die Funktionsdefinitionen in der symbolischen Ansicht an.

F3(X) und F4(X) sind Funktionen, die durch ein bestimmtes Integral definiert werden, d. h., die unabhängige Variable der Funktionen ist die obere Integrationsgrenze. Beachten Sie weiterhin, dass F2(X) die einzige Funktion ist, die grafisch dargestellt wird.

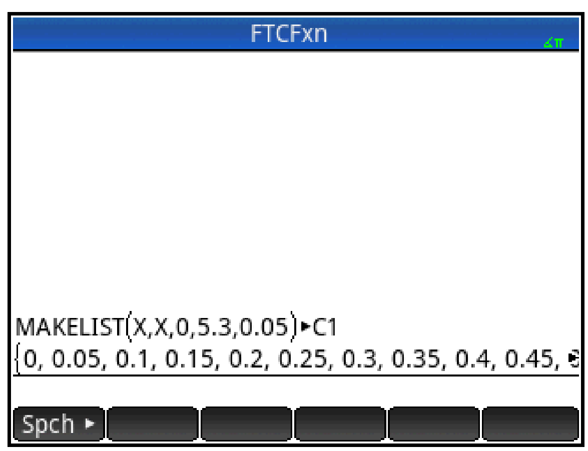
2. Drücken Sie , um den Graphen zu betrachten. Der Graph sollte wie in der Abbildung gezeigt aussehen.



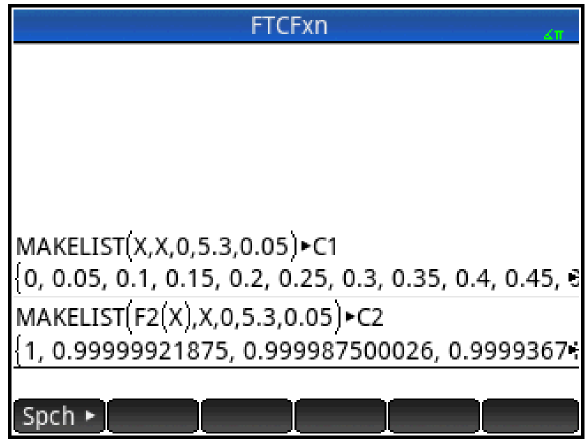
Als Nächstes erstellen Sie drei Listen. Die erste Liste, C1, umfasst die Werte der unabhängigen Variablen X aus der Grafikanzeige. Diese dienen als Eingaben für F3(X). Führen Sie die folgenden Schritte aus, um die Listen zu erstellen:

3. Drücken Sie und tippen Sie auf Math. Wählen Sie dann **Liste erstellen** in der Gruppe **Liste** aus.

- Geben Sie die in der Abbildung rechts gezeigten Argumente ein.
- Tippen Sie auf die Menüschaltfläche Spch ▸.
- Drücken Sie , um die Liste in C1 zu speichern.

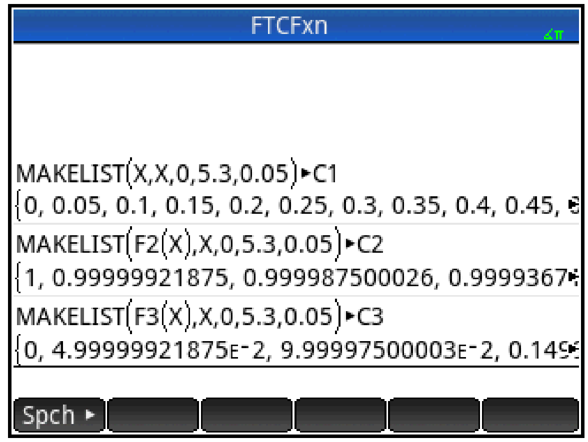


Jetzt werten Sie F2(X) an den einzelnen Eingaben in C1 aus und speichern die Ergebnisse in der Liste C2.



4. Tippen Sie mit dem Finger auf den MAKELIST-Befehl, den Sie soeben eingegeben haben, um ihn auszuwählen, und tippen Sie dann auf Kopie. Navigieren Sie zum ersten Argument, X, und ersetzen Sie es durch F2(X). Navigieren Sie dann zum Ende der Bearbeitungszeile und ersetzen Sie C1 durch C2. Drücken Sie Enter, um die Liste der Ausgaben von F2(X) zu generieren und in C2 zu speichern.

5. Wiederholen Sie diese Schritte, um F3(X) an den einzelnen Eingaben auszuwerten und die Ergebnisse in der Liste C3 zu speichern (siehe Abbildung).



Beachten Sie, dass jedes Element von C3 aus der Auswertung eines bestimmten Integrals resultiert. Bei der Berechnung von F3(X) bei 0.05 (dem zweiten Wert von C1) ist der berechnete Wert

$\int_0^{0.05} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT = 0.04999992$ (der zweite Wert in C3).

6. Erläutern Sie, warum der erste Wert in C3, der bei der Auswertung von F3(0) entsteht, 0 ist.

____

7. Drücken Sie Plot Setup und betrachten Sie den Graphen des Integranden, F2(X). Beantworten Sie die Fragen 8 und 9 anhand des Graphen.

8. Warum ist der zweite Wert in C3 größer als 0? ______________________________

____

9. Warum ist der dritte Wert in C3, der $F3(0.1) = \int_0^{0.1} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT$ darstellt, größer als der zweite Wert in C3, der $F3(0.05) = \int_0^{0.05} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT$ darstellt? ______________________________

____

10. Drücken Sie Apps Info und wählen Sie **Statistiken 2 Var** aus, um eine Tabelle der Eingaben und Ausgaben anzuzeigen. Beachten Sie, dass C1 die *X*-Werte, C2 die Werte des Integranden, $\cos\left(\frac{T^2}{2}\right)$, und C3 die Werte des Integrals, $\int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$, enthält. Navigieren Sie mit den Cursortasten oder durch Wischen mit dem Finger in der Spalte C3 nach unten.

11. Ermitteln Sie anhand der Liste der in C3 gespeicherten Datenwerte, für welchen Wert *X* (gespeichert in C1) $F3(X) = \int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$ das erste lokale Maximum zu erreichen scheint. ____________________

12. Erläutern Sie, warum der 38. Wert kleiner als der 37. Wert in C3 ist. Das heißt, warum gilt $\int_0^{1.85} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT < \int_0^{1.8} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$?

13. Ermitteln Sie anhand der Liste der in C3 gespeicherten Datenwerte, für welchen positiven Wert *X* $F3(X) = \int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$ das erste lokale Minimum zu erreichen scheint. ____________________

14. Drücken Sie Apps Info und wählen Sie FTCFxn aus, um zur FTCFxn-App zurückzukehren. Betrachten Sie erneut die grafische Darstellung des Integranden. Bewegen Sie den Cursor in die Nähe des kleinsten Schnittpunkts mit der *x*-Achse im Graphen von F2(X). Tippen Sie auf Menü, Fkt und wählen Sie **Nullstelle** aus.

15. Zeichnen Sie den x-Schnittpunkt auf. ____________________

16. Bewegen Sie den Cursor in die Nähe des nächst größten x-Schnittpunkts und ermitteln Sie diesen mit dem Befehl „Nullstelle“.

Zeichen Sie den nächst größten x-Schnittpunkt auf. ____________________

17. Vergleichen Sie diese Nullstellen mit Ihren Antworten auf die Fragen 11 und 13.

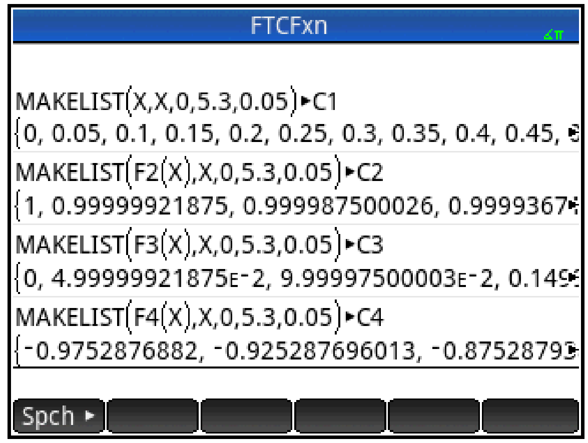
18. Ermitteln Sie den nächsten positiven *X*-Schnittpunkt des Graphen von F2(X) (in der Nähe von *X* = 4).

____

19. Was passiert mit F3(X) an dem in Frage 18 ermittelten Punkt? ______________________________

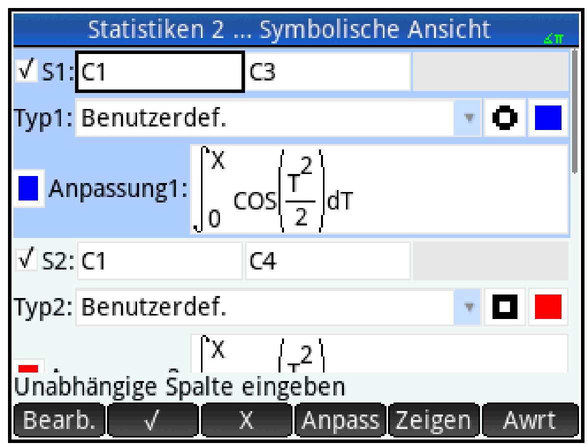
____

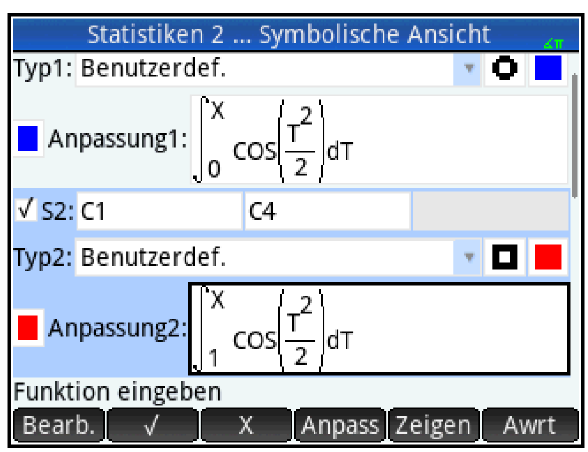
20. Überprüfen Sie Ihre Antwort numerisch, indem Sie zur Statistiken 2 Var-App zurückkehren und die Wertetabelle für F3(X) in C3 betrachten.
21. Drücken Sie , kopieren Sie den letzten MAKELIST-Befehl in die Bearbeitungszeile und ändern Sie die Argumente wie gezeigt, um F4(X) an allen Eingaben in C1 auszuwerten und die Ergebnisse in C4 zu speichern.



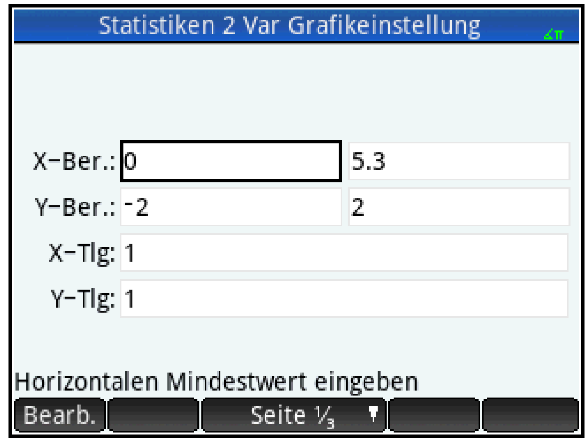
Jetzt erstellen Sie Streudiagramme von C3 über C1 und von C4 über C1.

22. Drücken Sie und wählen Sie **Statistiken 2 Var** aus. Drücken Sie , um die symbolische Ansicht aufzurufen. Geben Sie die Definitionen für S1 und S2 wie in den Abbildungen gezeigt ein.

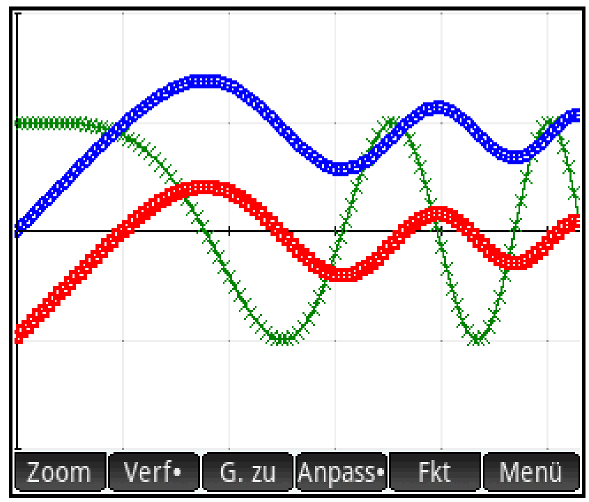




23. Drücken Sie Shift Plot Setup, um zu den Grafikeinstellungen zu wechseln. Geben Sie die gezeigten Einstellungen ein.



24. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen anzuzeigen.



Beachten Sie, dass das erste Element von C4 $F4(0)=\int_1^0 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT=-\int_0^1 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$ darstellt.

25. Warum liegt der Graph von C4 über C1 (im Streudiagramm S2) unter dem Graphen von C3 über C1 (im Streudiagramm S1)? (Beachten Sie, dass der einzige Unterschied der Definitionen von F3 und F4 die Integrationsuntergrenze ist.)

26. Die entsprechenden Werte von C4 und C3 scheinen eine konstante Differenz aufzuweisen, d. h., F4(X) – F3(X) ist für alle Werte von X identisch. Ermitteln Sie den Wert dieser Konstanten.

(Es gibt mehrere verschiedene Berechnungsmöglichkeiten. Versuchen Sie, F4(X) – F3(X) als Integral auszudrücken, wenn Sie nicht weiterkommen.)

27. Erläutern Sie, warum die Grafiken S1 und S2 die gleiche Form aufweisen.

28. Drücken Sie Num Setup und betrachten Sie die Wertetabelle für C3 und C4. Beachten Sie, dass die Positionen der Extrema für beide Funktionen identisch sind (wie anhand der Streudiagramme zu erwarten war).

29. Betrachten Sie die Positionen der lokalen Minima und der lokalen Maxima im Graphen von F2(X). Beschreiben Sie, was bei diesen X-Werten in Bezug auf die Konkavität der Graphen von S1 und S2 passiert.

30. Schreiben Sie eine Gleichung mit einer Ableitung auf einer Seite auf, die zeigt, wie F2(X) und F3(X) zusammenhängen.

31. Beachten Sie dabei, dass die Ableitung einer Funktion *f* bei *x* = *a* definiert werden kann als $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Approximieren Sie F3'(1), indem Sie den Ausdruck (F3(1.1) – F3(1))/0.1 auswerten. ___________________. Ihre Antwort sollte in der Nähe des Werts von F2(1) liegen. Warum?

32. Approximieren Sie F4'(1), indem Sie den Ausdruck (F4(1.1) – F4(1))/0.1 auswerten. ___________________.

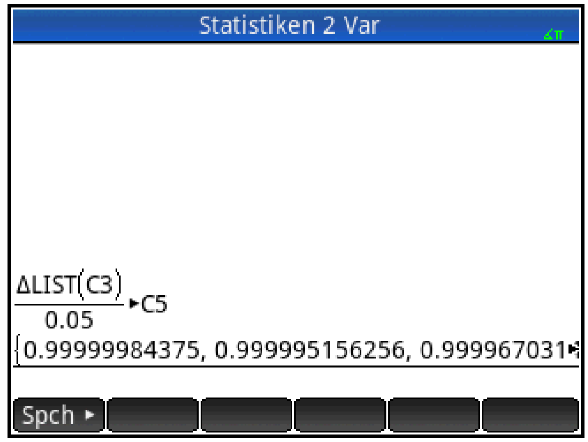
Ihre Antwort sollte wiederum in der Nähe des Werts von F2(1) liegen. Warum?

Weitergehende Übung

Diese weitergehende Übung ist Pflicht! Nachdem die Schüler gesehen haben, dass $\frac{d}{dX}F3(X)=F2(X)$ bzw. $\frac{d}{dX}\int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT=\cos\left(\frac{X^2}{2}\right)$ gilt, müssen natürlich weitere Beweise erbracht werden, die diese Folgerung stützen. Da wir Eingabe- und Ausgabedaten für F3 zusammengesetzt haben und die Formel für F2 bekannt ist, ist es relativ einfach, Differenzenquotienten für F3 zu bilden und sie mit den Ausgaben von F2 zu vergleichen. Dies wurde in Frage 16 für einen einzelnen Wert von X erledigt. Im Folgenden wird eine Möglichkeit beschrieben, dies für alle berechneten Werte von F3 durchzuführen.

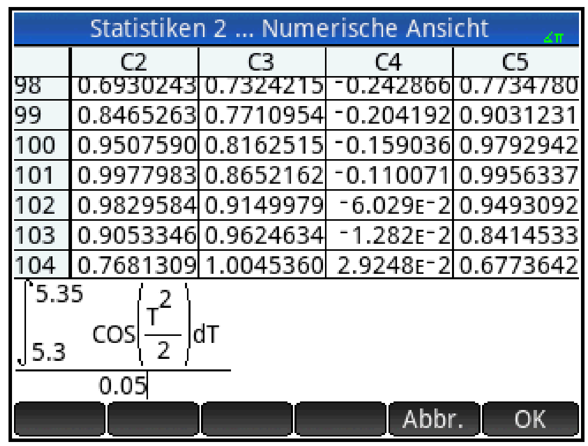
Sie bilden die Differenzenquotienten mit dem Befehl „Δ-Liste“ des Taschenrechners. Dieser Befehl generiert eine neue Liste, in der die einzelnen Einträge durch Subtraktion angrenzender Paare des Arguments gebildet werden.

1. Drücken Sie in der Startansicht , tippen Sie dann auf Math **Liste** und wählen Sie **Δ-Liste** aus. Geben Sie den Befehl ΔList(C3)/0.05 Spch ▸ C5 ein. Durch Anwendung des Befehls „Δ-Liste“ auf die Liste C3 und anschließende Division dieser Liste durch die Differenzen in der Eingabeliste (0.05) entsteht eine Liste von Differenzenquotienten.



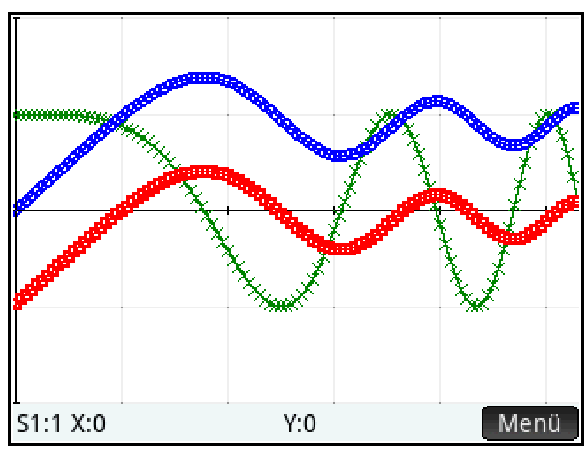
Die Liste C5 enthält einen Eintrag weniger als C1, C2, C3 und C4. Daher müssen Sie den fehlenden Wert am Ende von C5 manuell berechnen und eingeben. Dieser sollte die durchschnittliche Änderungsrate von F3 im Intervall von X = 5.3 bis X = 5.35 darstellen, also

$$\frac{\int_0^{5.35}\cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT-\int_0^{5.30}\cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT}{0.05} \text{ oder } \frac{\int_{5.30}^{5.35}\cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT}{0.05}$$



	C2	C3	C4	C5
98	0.6930243	0.7324215	-0.242866	0.7734780
99	0.8465263	0.7710954	-0.204192	0.9031231
100	0.9507590	0.8162515	-0.159036	0.9792942
101	0.9977983	0.8652162	-0.110071	0.9956337
102	0.9829584	0.9149979	-6.029E-2	0.9493092
103	0.9053346	0.9624634	-1.282E-2	0.8414533
104	0.7681309	1.0045360	2.9248E-2	0.6773642

2. Positionieren Sie den Cursor in die Zelle für C5(107) und geben Sie den gezeigten Ausdruck ein.
3. Erstellen Sie dann ein Streudiagramm von C5 über C1 und schauen Sie sich das Ergebnis an!



Antworten

6. Der erste Wert in C3 stellt $\int_0^0 Y2(T)dT$ dar und ist daher null. Es gibt keine Fläche von 0 bis 0.

8. Der zweite Wert in C3 ist positiv, da der Integrand für alle *T* im Intervall [0, 0.1] positiv ist.

9. Der dritte Wert in C3 ist größer als der zweite, da der Integrand für alle *T* im Intervall [0.1, 0.2] positiv ist.

11. X=1.8

12. $\int_0^{1.9} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT < \int_0^{1.8} \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT$ da der Integrand für alle *T* im Intervall [1.8, 1.9] negativ ist. Die Funktion fällt daher.

13. X=3.1

In den Fragen 15-17 sollten die Schüler feststellen, dass die Funktion F3 dort ein Maximum hat, wo sich das Vorzeichen des Integranden von plus in minus ändert, sowie ein Minimum dort, wo sich das Vorzeichen des Integranden von minus in plus ändert. Dieser Zusammenhang soll die Schüler daran erinnern, dass es eine Beziehung zwischen dem Maximum und dem Minimum und dem Vorzeichen der Ableitung gibt. Diese Frage lässt sich auch formulieren als: „Haben Sie jemals eine Situation gesehen, in der etwas ein Maximum erreicht, wenn ein anderes Etwas das Vorzeichen von plus nach minus ändert? Worum handelt es sich jeweils?“ Die Schüler stellen diesen Zusammenhang explizit in Frage 15 her.

15. X=1.77245

16. X=3.06998

17. Beim ersten *x*-Schnittpunkt bei 1.77245 ändert sich das Vorzeichen des Integranden von plus nach minus. Daher weist die Funktion F3 dort ein lokales Maximum auf. Ab diesem Punkt werden keine positiven Werte mehr zu F2 hinzugefügt, sondern negative Werte. Bei *x* = 3.06998 ändert sich das Vorzeichen des Integranden von minus in plus. Ab diesem Punkt werden keine negativen Werte mehr hinzugefügt, sondern positive Werte, sodass im Graphen von F3 ein lokales Minimum entsteht.

18. X=3.963327

19. F3 weist ein Maximum bei X=3.963327 auf. Durch Betrachtung der Werte für C1, C2 und C3 ist erkennbar, dass dieses Maximum in der Nähe von X = 4 liegt.

25. Die Antworten variieren. Bei X = 0 ist $F3(0) = \int_0^0 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT$ null, da Ober- und Untergrenze der Integration gleich sind. Demgegenüber gilt $F4(0) = \int_1^0 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT = -\int_0^1 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right) dT$ < 0, da das Integral positiv ist. Dadurch liegt der Graph von C4 unter dem Graphen von C3. Siehe auch Antwort zu Frage 12.

26. Die Differenz ist konstant. Berechnen Sie einfach F4(0) – F3(0) = –0.975288. Die Schüler stellen u. U. fest, dass F4(X)-F3(X) = $\int_1^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT - \int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT = -\int_0^1 \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT$ ist und werten das letzte Integral aus. Möglicherweise stellen Sie aber auch fest, dass die Differenz der negative Wert von C4(1) ist.

Der entscheidende Punkt wird in Frage 27 klar! Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt, dass die beiden Funktionen F3 und F4 die gleiche Ableitung F2 haben. Die Ableitung einer Funktion gibt die Steigung des Funktionsgraphen an und Graphen, die überall die gleiche Steigung haben, weisen die gleiche Form auf. In der Tat sind S1 und S2 Mitglieder der Familie der Stammfunktionen von F2. Zwei Stammfunktionen einer Funktion unterscheiden sich immer durch eine Konstante.

27. S1 und S2 weisen die gleiche Form auf, da sie den gleichen Flächeninhalt des Graphen von F2 bilden, wenn X zunimmt. Beide Funktionen steigen daher mit derselben Rate, wenn der Integrand positiv ist, und fallen mit derselben Rate, wenn der Integrand negativ ist.

Wenn Sie den Zusammenhang von Wendepunkten und Extrema der ersten Ableitung (zusätzlich zur gebräuchlicheren Definition als Punkte, bei denen sich das Vorzeichen der zweiten Ableitung ändert) behandelt haben, sollten die Schüler Frage 27 als weiteres Indiz dafür ansehen, dass F2 tatsächlich die Ableitung von F3 ist.

29. Beide Graphen von S1 und S2 scheinen die Konkavität an den Punkten zu ändern, an denen der Graph von F2 ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum aufweist. Die Wendepunkte liegen bei X = 2.506629, X = 3.544908 und X = 4.341608. Dabei handelt es sich um die Extrema im Graphen von F2.

30. $\frac{d}{dX}F3(X) = F2(X)$ oder besser ausgedrückt $\frac{d}{dX}\int_0^X \cos\left(\frac{T^2}{2}\right)dT = \cos\left(\frac{X^2}{2}\right)$.

Die Fragen 31 und 32 führen die Schüler dazu, die Ableitung von F3 durch Bildung von Differenzenquotienten zu approximieren. Die Antworten stimmen nicht exakt mit der Ausgabe von F2 überein. Um eine bessere Übereinstimmung zu erreichen, können Sie die Schüler auffordern, wie folgt einen Differenzenquotienten mit einer kleineren Schrittgröße zu bilden:

Werten Sie $\frac{F3(1.0001) - YF3(1)}{0.0001}$ aus und vergleichen Sie das Ergebnis mit F2(1). Die Werte stimmen auf vier Dezimalstellen genau überein!

31. (F3(1.1) – F3(1))/0.1 = 0.851261. F2(1) = 0.877583

32. (F4(1.1) – F4(1))/0.1 = 0.851261. F2(1) = 0.877583

Beachten Sie, dass die Differenzenquotienten identisch sind. F3 und F4 ändern sich exakt um den gleichen Betrag. Dieser Betrag wird durch die Größe von F2 bestimmt.

Differentialgleichungen und Richtungsfelder

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

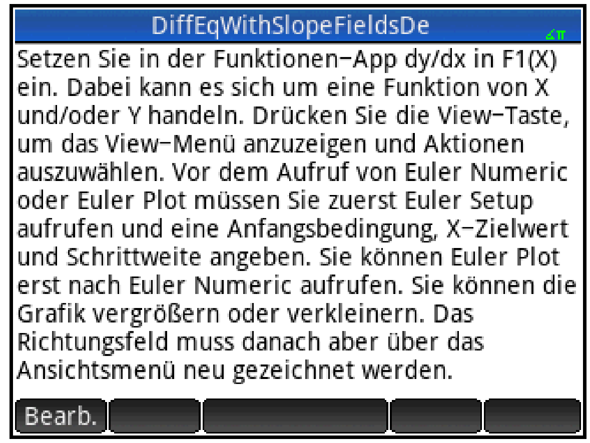
Lösen einer Differentialgleichung mit CAS

AP Calculus-Inhalt:

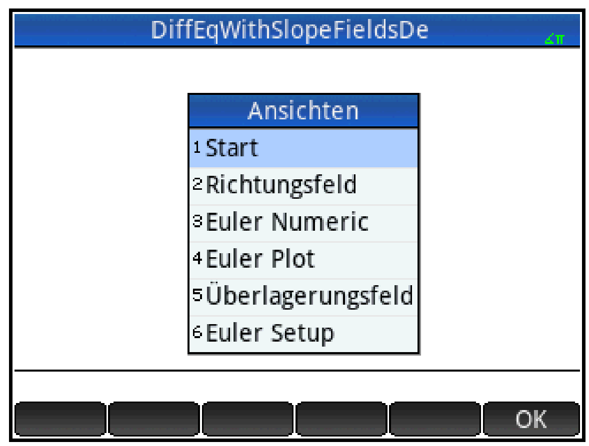
Differentialgleichungen, Richtungsfelder, Euler-Verfahren

Übung:

Die Schüler stellen eine Verbindung zum HP Schulnetzwerk her und der Lehrer verteilt die DiffEqWithSlopeFieldsDe-App. Drücken Sie , nachdem Sie die App erhalten haben, und wählen Sie DiffEqWithSlopeFieldsDe aus. Die App basiert auf der integrierten Statistiken 2 Var-App. Drücken Sie und wählen Sie **Start** aus, um einen Hinweis mit einer Beschreibung der Verwendung der App anzuzeigen. Viele Benutzerinteraktionen finden im Ansichtsmenü statt. Die App verwendet für die Steigung einen Ausdruck in X und/oder Y, der in der Funktion-App als F1(X) definiert ist.



1. Drücken Sie und wählen Sie **Funktion** aus. Definieren Sie $F1(X)=\sqrt{X}$. Dies bewirkt, dass in der DiffEqWithSlopeFieldsDe-App die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=\sqrt{x}$ verwendet wird. Drücken Sie und wählen Sie **DiffEqWithSlopeFieldsDe** aus. Drücken Sie dann . Die DiffEqWithSlopeFieldsDe-App bietet die Möglichkeit, Differentialgleichungen grafisch, numerisch und symbolisch zu untersuchen.



Lassen Sie uns zuerst das Richtungsfeld betrachten. Denken Sie über die Differentialgleichung nach, bevor Sie das Richtungsfeld zeichnen.

1. Sie die Steigungssegmente im Richtungsfeld positiv oder negativ?

   ____

2. Was sollte das Richtungsfeld für $X < 0$ zeigen? ____

Wählen Sie „2 Richtungsfeld“ aus und betrachten Sie das Richtungsfeld.

3. Was passiert mit den Steigungen, wenn *X* größer wird? ________________________________

Beachten Sie, dass die Steigungen in einer Spalte gleich sind und sich ändern, wenn Sie sich durch das Feld bewegen. (Das heißt: Die Steigung hängt nur von *X* ab.) Später sehen Sie ein Beispiel, in dem die Steigungen in einer Zeile gleich sind und sich die Steigungen ändern, wenn Sie sich im Feld aufwärts oder abwärts bewegen. (Die Steigung hängt nur von *Y* ab.) In anderen Beispielen ändern sich die Steigungen, wenn Sie sich vertikal oder horizontal im Feld bewegen. (Die Steigung hängt sowohl von *X* als auch von *Y* ab.)

Lassen Sie und jetzt kurz anschauen, wie das Euler-Verfahren funktioniert. Obwohl dieses Thema nicht in AP Calculus AB behandelt wird, können wir damit ein numerisches Verfahren zum Lösen von Differentialgleichungen untersuchen. Darüber hinaus werden Sie sehen, dass das Euler-Verfahren in Wirklichkeit eine laufende linksseitige Riemann-Summe ist. (Dieses Thema ist Bestandteil von AP Calculus AB.)

Das Konzept des Euler-Verfahrens ist wie folgt. An jedem Punkt in der Ebene können wir die Steigung mit einer Differentialgleichung berechnen. (Wir beginnen dabei an einem beliebigen Punkt, der Anfangsbedingung der Differentialgleichung.) Mit diesem Punkt und dessen Steigung ermitteln wir die Gleichung einer Geraden, deren Gleichung wir dann verwenden, um einen anderen Punkt in einem Abstand von ΔX zu finden (d. h., ΔX bleibt konstant). Am neuen Punkt verwenden wir wiederum die Differentialgleichung, um die Steigung zu berechnen, und ermitteln dann die Gleichung für eine weitere Gerade. Wir verwenden dann diese Gerade, um einen dritten Punkt in einem Abstand von ΔX zu finden. Wir wiederholen den Prozess, bis wir einen vordefinierten Endwert von *X* erreichen.

Über eine lineare Gleichung für die Berechnung eines neuen Werts für *Y* erhalten wir jedes Mal folgende Formel: $Y_{new} = Y_{old} + slope \cdot \Delta X$.

Lassen Sie uns diesen Prozess mit der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}$ und der Anfangsbedingung $(1,0)$ verwenden. Wir approximieren *y* bei *x* = 9 mit zwei gleich großen Schritten. Dadurch wird Δx = 4. Wir beginnen bei $(1,0)$.

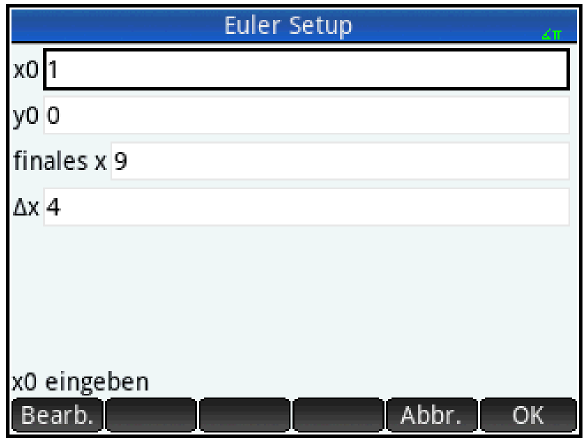
4. Wie groß ist die Steigung bei $(1,0)$? ____________________

Mit der Formel $Y_{new} = Y_{old} + slope \cdot \Delta X$ zum Berechnen des neuen *y* ergibt sich $Y_{new} = 0 + 1 \cdot 4 = 4$. Der neue Punkt ist $(5,4)$.

5. Wie groß ist die Steigung bei $(5,4)$? ____________________

Wir berechnen wiederum mit der Formel $Y_{new} = Y_{old} + slope \cdot \Delta X$ das neue *y*. Berechnen Sie das neue *Y* in der Startansicht.

6. Wie groß ist der angenäherte Wert von *Y*, wenn *X* = 9 ist?______________________________



Drücken Sie und wählen Sie **Euler Setup** aus. Geben Sie die in der Abbildung rechts gezeigten Parameter ein. Diese wurden anhand der Anfangsbedingung, (1, 0), dem endgültigen X, 9, und der Anzahl der Schritte, 2, ermittelt. Wählen Sie dann **Euler Numeric** aus. Vergleichen Sie den angezeigten Wert mit Ihrer Antwort auf Frage 6. Sie sollten übereinstimmen. Wählen Sie **Euler Plot** aus, um ein Streudiagramm der drei Punkte anzuzeigen. Setzen Sie den Verfolgungscursor in das Streudiagramm. Daraufhin werden die Koordinaten der drei Punkte angezeigt.

Wenden Sie erneut das Euler-Verfahren mit der gleichen Differentialgleichung und Anfangsbedingung an. Verwenden Sie aber dieses Mal 4 Schritte anstelle von zwei.

7. Vervollständigen Sie diese Tabelle. Der erste Schritt wurde bereits eingetragen.

(X_{old}, Y_{old})	Steigung	$Y_{new} = Y_{old} + slope \cdot \Delta X$	(X_{new}, Y_{new})
$(1,0)$	1	$Y_{new} = 0 + 1 \cdot 2$	$(3,2)$
$(3,2)$			

Drücken Sie und wählen Sie **Euler Setup** aus. Ändern Sie $\Delta \boldsymbol{x}$ in 2 und wählen Sie dann **Euler Numeric** aus. Vergleichen Sie den angezeigten Wert mit dem endgültigen *y*. Sie sollten übereinstimmen. Wählen Sie **Euler Plot** aus, um ein Streudiagramm der Punkte anzuzeigen. Passen Sie das Anzeigefenster geeignet an, drücken Sie und wählen Sie dann **Überlagerungsfeld** aus. Über der Euler-Grafik wird ein Richtungsfeld angezeigt. Setzen Sie den Verfolgungscursor in das Streudiagramm, um Ihre Antworten zu überprüfen.

Gehen Sie jetzt zurück zur Übung zu den Riemann-Summen und vergleichen Sie diese Berechnungen mit den Antworten auf die Fragen 3 und 7.

8. Was stellen Sie fest? ____

Lösen Sie die Differentialgleichung durch Variablenseparation analytisch.

9. Wie lautet die Lösung? ____

Drücken Sie und geben Sie die Lösung in „Anpassung1“ ein. Drücken Sie Anpass• und wählen Sie **Überlagerungsfeld** aus. Das Ergebnis ist eine grafische, numerische und analytische Betrachtung der Lösung einer Differentialgleichung!

Drücken Sie , um die Regression zu verfolgen. Drücken Sie dann 9 , um zum Punkt zu springen, an dem $x = 9$ ist.

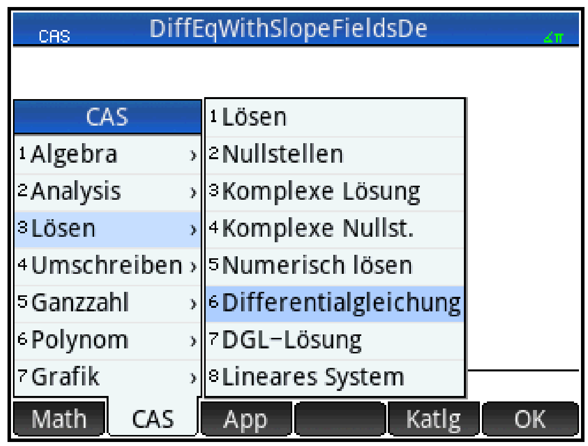
10. Wie groß ist der exakte Wert von y, wenn $x = 9$ ist? ______________________________

Die Steigungsfunktion steigt im Intervall von $x = 1$ bis $x = 9$, d. h., die Lösungskurve ist konvex.

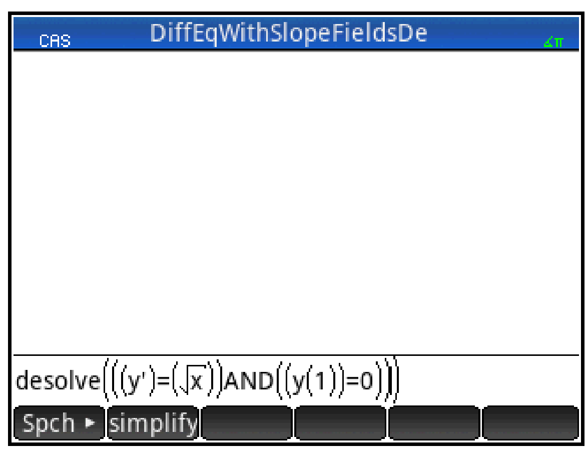
11. Führt das Euler-Verfahren bei einer konvexen Lösungskurve immer zu einer zu großen oder zu kleinen Approximation des exakten Funktionswerts? ____________________________

Erinnern Sie sich, dass in der Übung zu Riemann-Summen festgestellt wurde, dass linksseitige Summen eine zu kleine Approximation für die exakte Fläche unter der Kurve ergeben, wenn der Integrand größer wird. Beachten Sie den Zusammenhang!

Der HP Prime kann Differentialgleichungen analytisch lösen. Drücken Sie . Drücken Sie und tippen Sie auf CAS. Tippen Sie dann auf **Lösen** und wählen Sie **Differentialgleichung** aus.



Geben Sie den in der Abbildung rechts gezeigten Befehl ein. Verwenden Sie die Umschalttaste , um y einzugeben, und (Chars), um das Zeichen ' zu finden. Das Wort „and“ kann in Kleinbuchstaben eingegeben werden. Geben Sie es manuell ein oder drücken Sie , um ein Menü mit booleschen Operatoren zu öffnen.



Weitergehende Übung

Untersuchen und lösen Sie mit der *DiffEqWithSlopeFieldsDe*-App die folgende Differentialgleichung

12. $\frac{dy}{dx} = \frac{1-y}{2}$ mit der Anfangsbedingung (-3, -3).

    (a) Approximieren Sie y, wenn $x = 3$ ist, mit dem Euler-Verfahren mit 12 gleichen Schritten. ________

    (b) Lösen Sie die Differentialgleichung analytisch und überlagern Sie Lösung, Richtungsfeld und Euler-Grafik.

    ____

    (c) Führt das Euler-Verfahren zu einer zu großen oder zu kleinen Approximation der Lösung? Warum?

    ____

    ____

    ____

Antworten

1. Positiv.

2. Da $\frac{dy}{dx}$ bei x < 0 nicht definiert ist, sollten dort keine Steigungssegmente vorhanden sein.

3. Mit zunehmenden x werden die Steigungen größer.

4. Bei $(1,0)$ ist die Steigung 1.

5. Bei $(5,4)$ ist die Steigung $\sqrt{5} \approx 2.2361$.

6. Bei X = 9 ist Y näherungsweise 12.9443.

7.

(X_{old}, Y_{old})	Steigung	$Y_{new} = Y_{old} + slope \cdot \Delta X$	(X_{new}, Y_{new})
$(1,0)$	1	$Y_{new} = 0 + 1 \cdot 2$	$(3,2)$
$(3,2)$	$\sqrt{3}$	$Y_{new} = 2 + \sqrt{3} \cdot 2$	$(5,5.4641)$
$(5,5.4641)$	$\sqrt{5}$	$Y_{new} = 5.4641 + \sqrt{5} \cdot 2$	$(7,9.9362)$
$(7,9.9362)$	$\sqrt{7}$	$Y_{new} = 9.9362 + \sqrt{7} \cdot 2$	$(9,15.2277)$

8. Die Berechnung der linksseitigen Riemann-Summe zum Approximieren von $\int_1^9 \sqrt{x}dx$ mit 4 Rechtecken stimmt mit den Berechnungen mit dem Euler-Verfahren in der Tabelle überein.

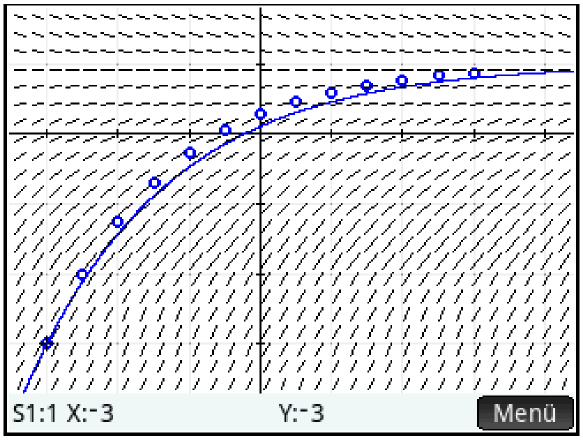
9. Die Lösung lautet $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}$.

10. Bei x = 9 ist y = 17.3333. (Dies entspricht $\int_1^9 \sqrt{x}dx$.)

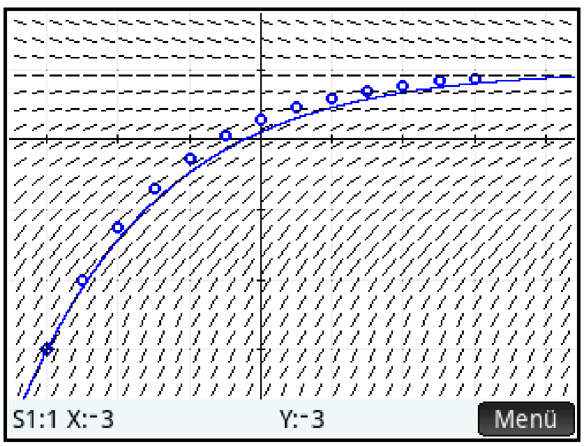
11. Bei einer konvexen Lösungskurve führt das Euler-Verfahren immer zu einer zu kleinen Approximation des exakten Funktionswerts.

12. (a) Die Approximation ist 0.8733.

(b) Die Lösung lautet $y = 1 - 4 \cdot e^{-\frac{X}{2} - \frac{3}{2}}$. Der Graph sieht folgendermaßen aus:



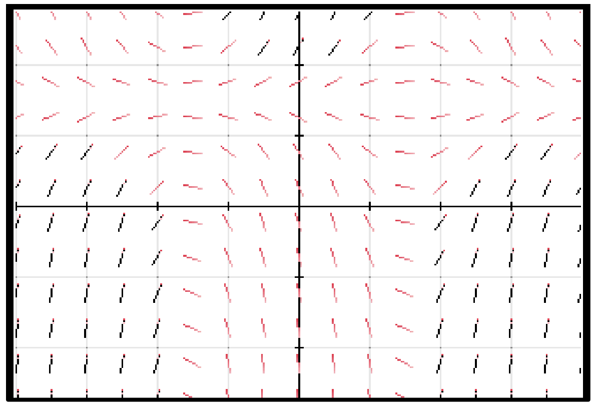
(c) Das Euler-Verfahren führt zu einer zu großen Approximation der Lösung, weil der Graph der Lösung konkav ist.



Freie Übung 2 zur AP-Examensprüfung

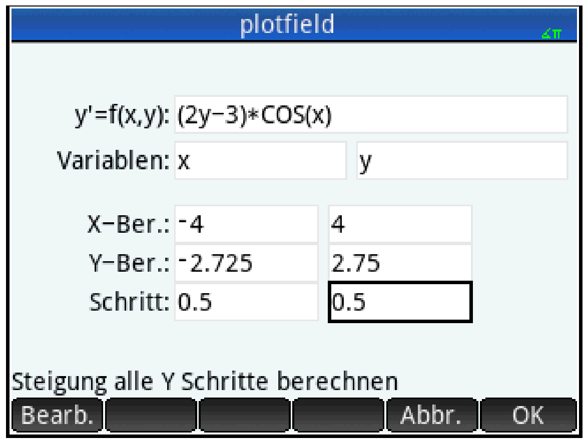
Betrachten Sie die Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = (2y-3)\cos(x)$. Sei $y = f(x)$ die partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung, sodass $f(0)=2$ ist. Die Funktion f ist für alle reellen Zahlen definiert.

a) Ein Teil des Richtungsfelds der Differentialgleichung ist rechts abgebildet. Skizzieren Sie die Lösungskurve durch den Punkt (0, 1).



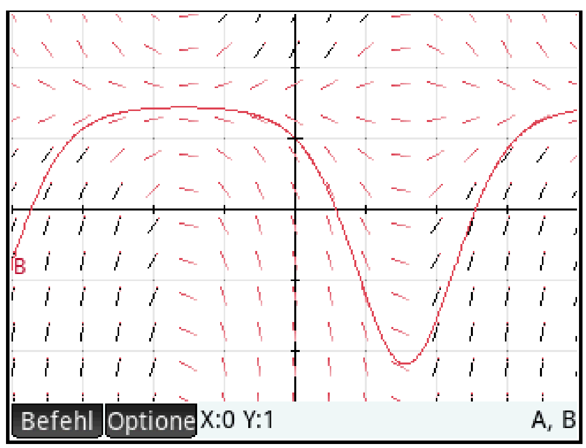
Lassen Sie uns sehen, wie wir das Richtungsfeld mit dem HP Prime zeichnen können.

1. Drücken Sie Apps Info, um die Anwendungsbibliothek zu öffnen, und wählen Sie die Geometrie-App aus. Die App wird in der grafischen Ansicht geöffnet. Drücken Sie zweimal +, um die Ansicht zu vergrößern.
2. Tippen Sie auf Befehl und wählen Sie **Grafik** sowie **Richtungsfeld** aus. Daraufhin wird ein Assistent geöffnet, der Sie durch die Definition des Richtungsfelds führt. Geben Sie (2y-3)*COS(x) im Feld für y'=f(x, y) ein.



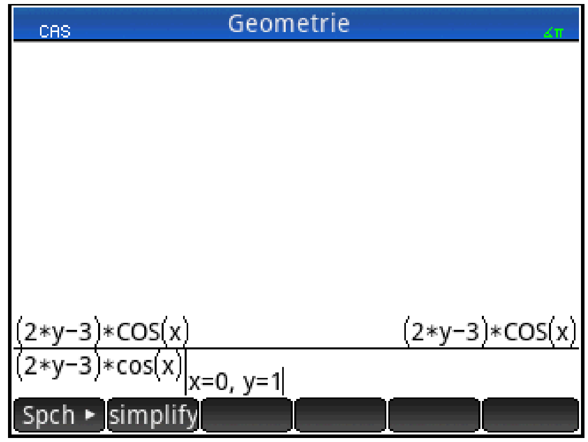
Beachten Sie, dass Sie hier ALPHA Shift × drücken müssen, um ein kleines x einzugeben. Ebenso müssen Sie ALPHA Shift 1 drücken, um ein kleines y zu erhalten.

3. Legen Sie beide Schritte auf 0.5 fest. Tippen Sie auf OK, um das Richtungsfeld anzuzeigen.
4. Bewegen Sie den Cursor auf den Punkt (0, 1) und drücken Sie Enter, um die partikuläre Lösung durch den Punkt (0, 1) zu zeichnen. Die partikuläre Lösung durch diesen Punkt wird gezeichnet.

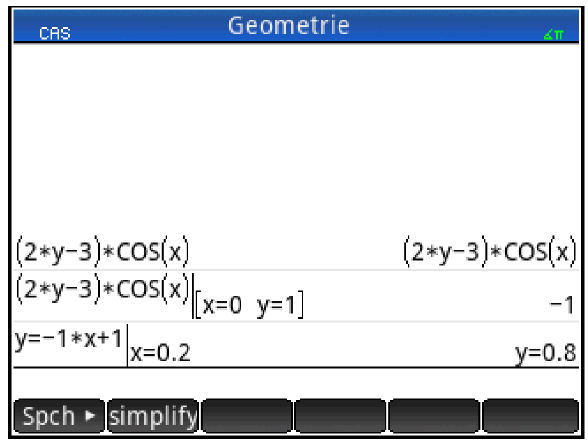


b) Schreiben Sie eine Gleichung für die Tangenten zur Lösungskurve in Teil (a) am Punkt (0, 1) auf. Verwenden Sie die Gleichung, um f(0.2) zu approximieren.

5. Drücken Sie CAS, um die CAS-Ansicht zu öffnen. Geben Sie unseren Ausdruck für dy/dx ein. Drücken Sie und wählen Sie den Wo-Befehl aus: . Geben Sie die Bedingungen wie in der Abbildung rechts gezeigt ein.

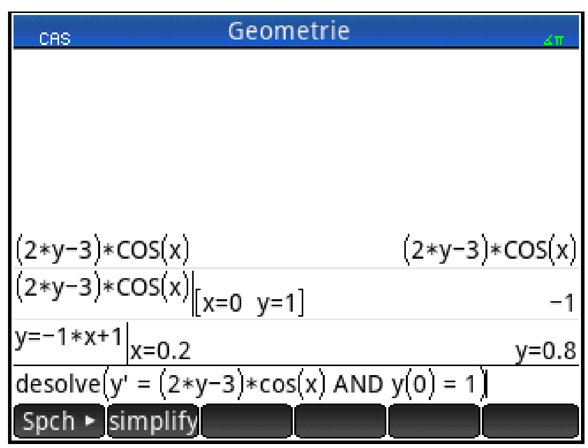


6. Das Ergebnis zeigt, dass die Steigung der Tangente -1 ist und die Tangente auch den Punkt (0, 1) enthält. Die Gleichung lautet dann y= -1x+1, wenn x = 0.2 und y = 0.8 ist.

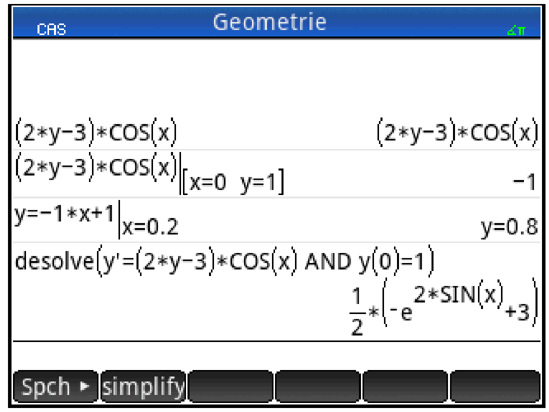


c) Ermitteln Sie y=f(x), d. h. die partikuläre Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung f(0)=1.

7. Kehren Sie zur CAS-Ansicht zurück. Drücken Sie , um die Toolbox-Menüs zu öffnen. Tippen Sie auf CAS, um das CAS-Menü zu öffnen. Tippen Sie auf **Lösen** und wählen Sie **Differentialgleichung** aus. Geben Sie die Differentialgleichung in der Form y'=f(x, y) und die Anfangsbedingungen mit AND dazwischen ein. Drücken Sie Shift Vars, um das Symbol für ' zu finden. Drücken Sie Shift 6, um den booleschen Operator AND zu finden.

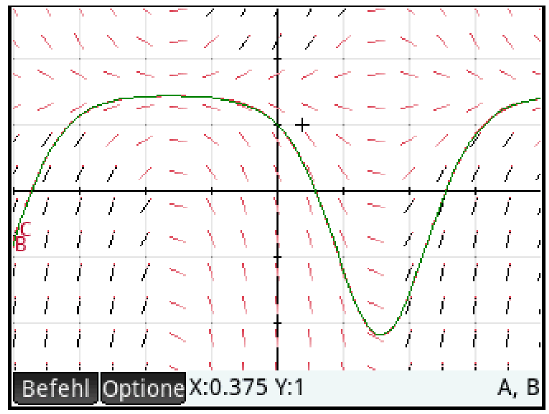


8. Drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen.

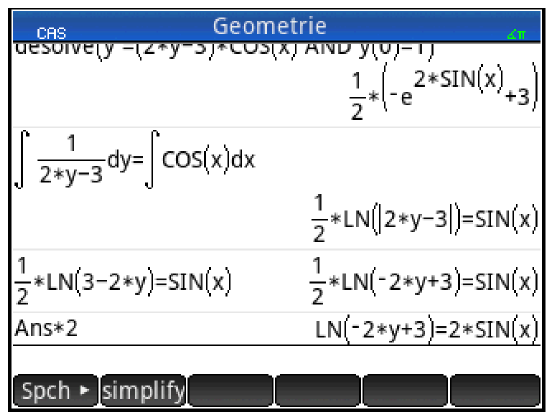


Wir stellen jetzt den Graphen unserer Lösung über dem Richtungsfeld dar.

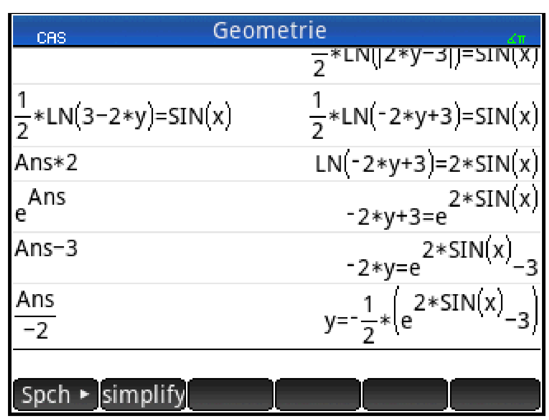
9. Tippen Sie auf den Lösungsausdruck, um ihn auszuwählen. Drücken Sie Shift View (Copy), um den Lösungsausdruck in die Zwischenablage zu kopieren.
10. Drücken Sie Symb, um die symbolische Ansicht zu öffnen. Tippen Sie in die dritte Zeile (die erste leere Zeile) und dann auf Neu. Tippen Sie auf Befehl und wählen Sie **Grafik** sowie **Funktionen** aus. Setzen Sie den Cursor zwischen die Klammern und drücken Sie Shift Menu (Paste), um unsere Lösung in den plotfunc-Befehl einzufügen. Tippen Sie auf OK.



11. Wählen Sie eine Farbe für den Graphen unserer Funktionsdarstellung aus und drücken Sie dann Plot, um den Graphen anzuzeigen.
12. Wir können die Differentialgleichung auch Schritt für Schritt in CAS lösen. Durch Separation der Variablen erhalten wir $\int \frac{dy}{2y-3} = \int \cos(x)dx$. Geben Sie die Gleichung in CAS ein und drücken Sie Enter, um das Ergebnis anzuzeigen. Drücken Sie × 2, um beide Seiten der Gleichung mit 2 zu multiplizieren (siehe Abbildung).



13. Bei y=1 gilt |2*y-3| = 3 – 2*y. Kopieren Sie den Ausdruck in die Befehlszeile und führen Sie die obige Ersetzung durch. Löschen Sie in diesem Fall einfach |2*y-3| und geben Sie (3-2*y) ein.
14. Potenzieren Sie *e* mit Ans. (Drücken Sie Shift LN für *e*^ und Shift + für Ans.) Subtrahieren Sie dann 3 vom Ergebnis und teilen Sie das Ergebnis durch -2. Das Endergebnis stimmt mit unseren Erwartungen überein.



Verwendung des Prime für AP Calculus-Examen

Vorgestellte HP Prime-Funktionen:

Numerische Auswertung von Ableitungen und Integralen; Speichern von Schnittwerten in globalen Variablen

AP Calculus-Inhalt:

Fläche eines Bereichs; lokale Extrema; Wendepunkte

Übung:

Bei den AP Calculus-Examen wird davon ausgegangen, dass die Schüler über einen Taschenrechner mit den folgenden Funktionen verfügen:

- Darstellung des Graphen einer Funktion in einem beliebigen Fenster
- Numerische Lösung einer Gleichung
- Numerische Auswertung einer Ableitung
- Numerische Auswertung eines Integrals

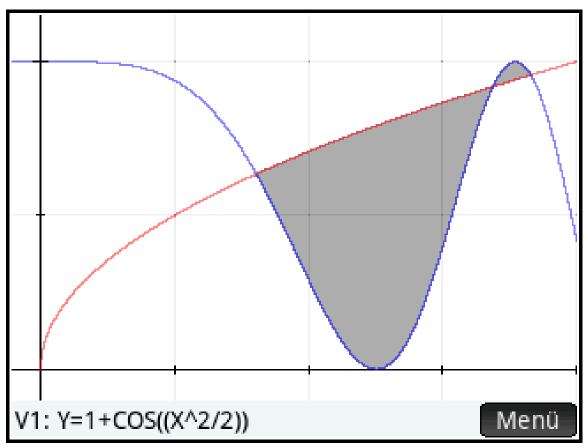
In dieser Übung wird veranschaulicht, wie diese Funktionen effizient mit dem HP Prime realisiert werden.

Die erste Anforderung, Darstellung des Graphen einer Funktion in einem beliebigen Fenster, ist eine echte Stärke des Prime. Wenn in einem Problem ein Fenster verwendet wird, müssen die Schüler Shift Plot (Plot Setup) drücken, um die Werte für das Anzeigefenster einzugeben. Bei anderen Problemen sollten sie normalerweise im Standardfenster, View **Dezimal**, beginnen und die Ansicht durch Scrollen und Zoomen mit den Fingern auf dem Touchscreen je nach Bedarf anpassen.

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Gleichung mit dem HP Prime auszuwerten. Die Schüler können die Lösen-App, den solve()-Befehl im CAS bzw. die Optionen für Nullstellen oder Schnittpunkte in der Grafikumgebung für Funktionen verwenden. Hier wird die letztere Möglichkeit zum Ermitteln der Fläche eines Bereichs veranschaulicht.

Problem 1

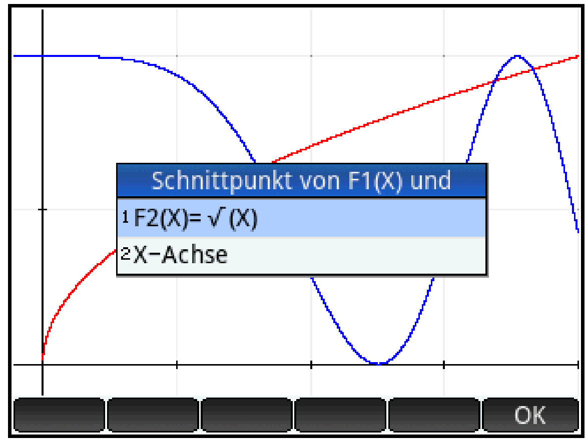
Der schattierte Bereich *R* im Graphen in der Abbildung rechts wird durch die Graphen von $f(x)=1+\cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ und $g(x)=\sqrt{x}$ begrenzt. Ermitteln Sie die Fläche von *R*.



Lösung mit dem Prime

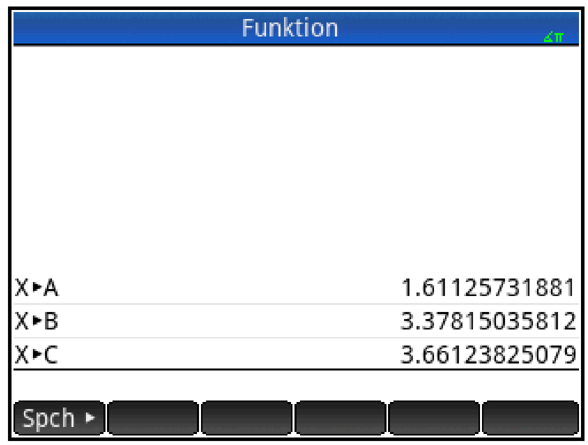
1. Starten Sie ggf. die Funktion-App und drücken Sie Shift Plot (Plot Setup). Richten Sie das Ansichtsfenster so ein, dass es zu den untersuchten Graphen passt. Geeignet ist eine horizontale Ansicht von [-0.2, 4] und eine vertikale Ansicht von [-0.2, 2.3].

2. Drücken Sie Symb, geben Sie $f(x) = 1 + \cos\left(\frac{x^2}{2}\right)$ für F1(X) sowie $g(x) = \sqrt{x}$ für F2(X) ein und drücken Sie dann Plot.

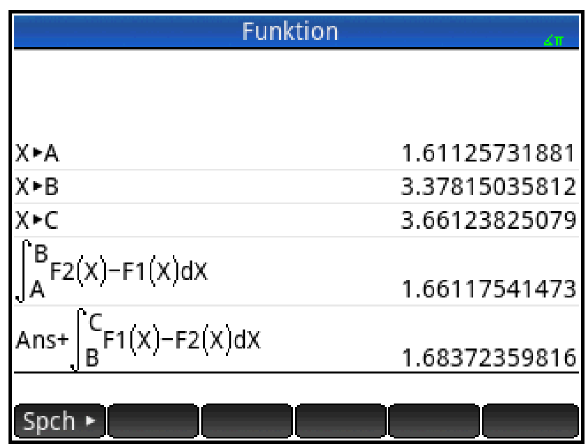


Um die Fläche zu ermitteln, müssen wir die x-Koordinaten der drei Punkte ermitteln, an denen sich die Graphen schneiden. Wir speichern diese in globalen Variablen, damit wir sie später verwenden können.

3. Tippen Sie auf dem Bildschirm in die Nähe des Schnittpunkts ganz links, um den Verfolgungscursor dorthin zu bewegen. Tippen Sie dann auf Menü, Fkt und wählen Sie **Schnittpunkt ...** aus. Wählen Sie in der Aufforderung den Schnittpunkt von F1(X) und F2(X) aus. Der HP Prime ermittelt den Schnittpunkt, der dem Cursor am nächsten liegt (hier: X = 1.61126).
4. Drücken Sie Home, nachdem der Schnittpunkt ermittelt wurde, und dann ALPHA x Spch ▸ ALPHA Vars, um den ersten Schnittpunkt in A zu speichern.
5. Drücken Sie Plot und tippen Sie auf dem Bildschirm in die Nähe des zweiten Schnittpunkts. Wiederholen Sie die Schritte 3 und 4 und speichern Sie die ermittelte X-Koordinate in B. Speichern Sie den dritten Schnittpunkt in C.



Jetzt werten wir die Integrale aus, um die Fläche zu berechnen. Dies ist in der grafischen Ansicht oder in der Startansicht möglich. Wir verwenden hier die Startansicht, da die Schüler im AP-Examen ihre Vorgehensweise aufschreiben müssen.



6. Drücken Sie die Vorlagen-Taste und tippen Sie auf die Vorlage für bestimmte Integrale (zweite Zeile, vierte Spalte). Verwenden Sie die Cursortasten, um sich in der Vorlage zu bewegen, und geben Sie das Integral ein (siehe Abbildung). Drücken Sie ▶, um den Cursor hinter die erste Integralvorlage zu verschieben, und drücken Sie +. Wählen Sie erneut die Integralvorlage aus und geben Sie das Integral zum Bestimmen der Fläche des zweiten Teilbereichs ein (siehe Abbildung rechts). Falls Ihre Antwort kleiner ist als 1.661 haben Sie den Integranden möglicherweise in der falschen Reihenfolge subtrahiert.

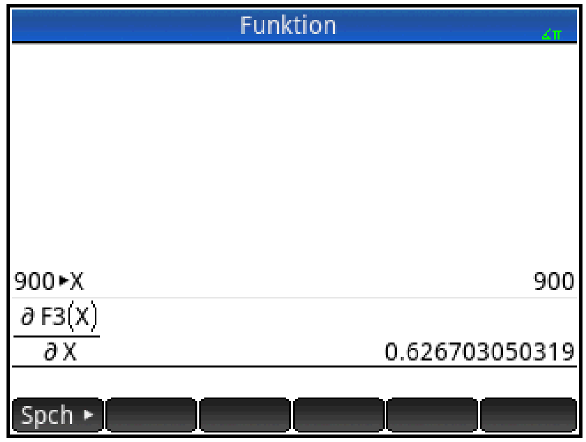
Problem 2

Nachstehend finden Sie in kurzes Problem, das die numerische Auswertung einer Ableitung mit dem HP Prime veranschaulicht. Erinnern Sie sich an die Funktion der Übung zu Sonnenaufgangs-/Sonnenuntergangsdaten (Elementarmathematik), mit der die Tageslichtdauer in Minuten als Funktion der Anzahl von Tagen nach der Wintersonnenwende modelliert wurde. Die Funktion lautet $L(x)=170.5\cdot\sin\left(0.0172142\cdot(x-91.25)\right)+730.5$.

Nimmt die Tageslichtdauer am 900. Tag nach der Wintersonnenwende zu oder ab? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung mit dem Prime

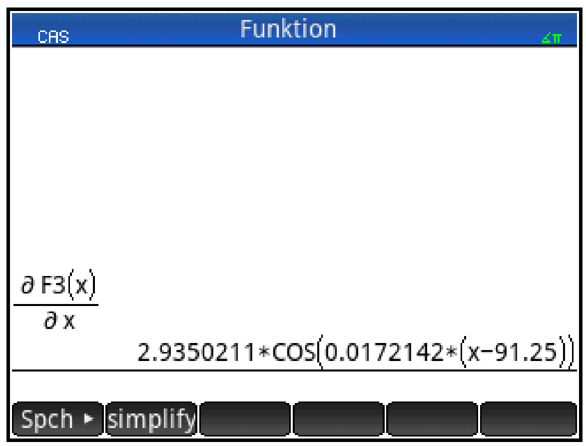
1. Geben Sie die Formel für $L(x)$ in der Funktion-App als F3(X) ein.
2. Speichern Sie in der Startansicht den Wert 900 in der Variablen X, indem Sie 900 Spch ▸ X drücken.
3. Drücken Sie Units und tippen Sie auf die Vorlage für Ableitungen (erste Zeile, vierte Spalte). Geben Sie im oberen Kästchen F3(X) und im unteren X ein. Drücken Sie Enter. um den Wert zu ermitteln.



Wir sehen, dass $L'(900)=0.627>0$ ist. Da dieser Wert positiv ist, nimmt die Tageslichtdauer am Tag 900 zu.

Der HP Prime kann die Ableitung auch symbolisch berechnen. Dazu wird CAS verwendet. Durch Kopieren und Einfügen können wir die Ergebnisse zurück in die Funktion-App kopieren.

4. Drücken Sie CAS und geben Sie den in der Abbildung rechts gezeigten Ausdruck ein. Beachten Sie, dass in CAS kleingeschriebene Variablen verwendet werden.



Erinnern Sie sich noch an die Übung zu Sonnenaufgangs-/ Sonnenuntergangsdaten (Analysis)? Der ermittelte Wert für die Amplitude der Regression im Streudiagramm mit den durchschnittlichen Änderungsraten von L(X) über X war A=2.625. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Wert, der sich ergibt, wenn wir unser Modell mit der Kettenregel differenzieren, L(X) = 2.935. Die beiden Werte liegen ziemlich nah beieinander!