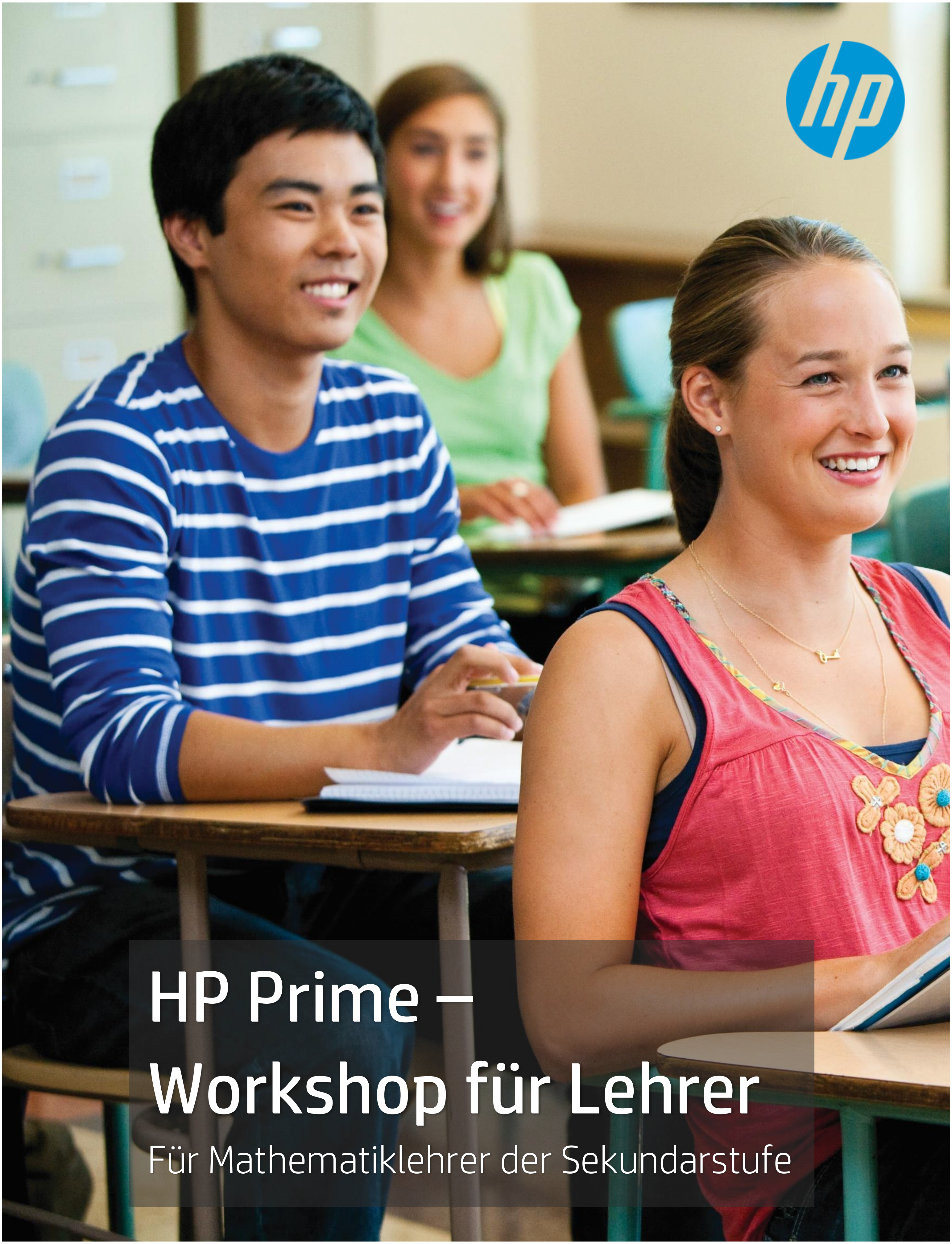


HP Prime – Workshop für Lehrer

Für Mathematiklehrer der Sekundarstufe

Vorwort

Dieses Dokument dient als Grundlage für einen dreitägigen Fortbildungskurs für Lehrer. Dieser Kurs soll Mathematiklehrern der Sekundarstufe ein solides Grundlagenwissen über den HP Prime-Grafiktaschenrechner und dessen Ökosystem vermitteln. Im Rahmen dieses Fortbildungskurses für Lehrer können die Übungen in diesem Buch durch mehrere Übungen in den Lernmaterialien „HP Prime AP Statistics“ und „HP Prime AP Calculus“ ergänzt werden. Die Übungen der letzten beiden Materialien sind nicht in diesem Dokument enthalten, um eine redundante Übersetzung und Drucklegung dieser drei Dokumente zu vermeiden.

Die Übungen in diesem Dokument behandeln interessante mathematische Probleme. Sie enthalten schrittweise Anweisungen zur Untersuchung und Lösung des jeweiligen mathematischen Problems mit dem HP Prime. Die Übungen umfassen Hinweise für Lehrer und einen Lösungsschlüssel. Weiterhin finden Sie ggf. Ideen für weitergehende Übungen. Die Übungen umfassen nach Möglichkeit neue Darstellungen oder neue Betrachtungsweisen alter Darstellungen. Wir möchten, dass die Lehrer diese Übungen genauso wie ihre Schüler durcharbeiten.

Einige Übungen sind „Übungen für Lehrer“ und keine Übungen für Schüler. Obwohl Lehrer diese Übungen zusammen mit Schülern durchführen können, wurden diese Übungen für Lehrer als Zielgruppe konzipiert. Für solche Übungen ist kein Lösungsschlüssel erforderlich (bzw. angegeben).

Das Hauptziel der Übungen besteht darin, die Lehrer dazu zu bringen, über die technologischen Erfahrungen nachzudenken, die sie Schülern vermitteln möchten. Was sind die wichtigsten technologischen Erfahrungen, die Schülern am ehesten helfen, konzeptionelle Kenntnisse der Mathematik zu erlangen und die Verfahren sicher und effizient anzuwenden? Diese technologischen Erfahrungen konzentrieren sich auf mehrere Darstellungen, dynamische Verknüpfungen zwischen Darstellungen und sichere Anwendung im Allgemeinen. Der einzigartige HP Prime-Grafiktaschenrechner und das zugehörige Ökosystem sind so konzipiert, eine Vielzahl dieser technologischen Erfahrungen praktisch umzusetzen und so zugänglich zu machen, dass sie für Lehrer nachvollziehbar und für Schüler motivierend sind.

Ich möchte mich bei Mark Howell, Michael Grasse, Sharon Taylor, Eduardo Basurto, Eduardo Mancera, Amy Yonashiro und allen anderen bedanken, die Ideen oder Vorschläge zur Verbesserung der Unterlagen beigesteuert haben.

Weiterhin danke ich Professor Wang Chang Pei, mich (über einen langen Zeitraum) zu ermutigen, all dies unter einem Dach zu vereinen.

GT Springer
31. Mai 2017

Inhaltsverzeichnis

Kennenlernen des HP Prime

Der HP Prime ist ein Taschenrechner mit einem berührungsempfindlichen Farbdisplay und Multi-Touch-Funktionalität, der ein CAS (Computeralgebrasystem) und mehrere Apps für die Untersuchung mathematischer Konzepte und Lösung von Problemen umfasst. Mit der Erweiterte Grafiken-App können Sie beispielsweise jede Relation zwischen zwei Variablen grafisch darstellen (z. B. $\sin(xy) = \cos(xy)$).

Darüber hinaus gibt es drei Apps für statistische Probleme (Statistiken 1 Var, Statistiken 2 Var und Inferenz). In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie Sie den HP Prime bedienen. Darüber hinaus wird die App-Struktur des HP Prime vorgestellt.

Konventionen in diesem Dokument

In diesem Dokument werden die folgenden Konventionen verwendet:

- Tasten, die eine Hauptfunktion aufrufen, werden durch eine Abbildung der Taste dargestellt: Num Setup, Settings, LN usw.
- Eine Tastenkombination, die eine Alternativfunktion aufruft (oder ein Zeichen einfügt), wird durch die entsprechende Umschalttaste (Shift oder ALPHA) gefolgt von der Taste für die entsprechende Funktion/das entsprechende Zeichen dargestellt.
    - Shift LN gibt die natürliche Exponentialfunktion ein und ALPHA x^2 fügt den Buchstaben F ein.
- Auch der Name der Alternativfunktion wird gegebenenfalls in Klammern nach der Tastenkombination angegeben:
    - Shift Esc (Clear), Shift Plot (Plot Setup)
- Eine Taste, die zum Einfügen einer Zahl dient, wird durch die betreffende Zahl dargestellt:
    - 5, 7, 8 usw.
- Alle unveränderlichen Display-Anzeigen, z. B. Bildschirm- und Feldnamen, werden fettgedruckt dargestellt:
    - **CAS-Einstellungen**, **X-Schrittweite**, **Dezimaltrenner** usw.
- Menüoptionen, die durch Tippen auf das Display ausgewählt werden, werden durch ein Bild der Option dargestellt:
    - Spch ▸, OK, Abbr. usw.
- Cursortasten werden durch ▼, ◀, ▶ und ▲ dargestellt. Mit diesen Tasten bewegen Sie sich auf einem Bildschirm von Feld zu Feld oder in einer Optionsliste von einer Option zur anderen.

HINWEIS: Sie müssen eine Menüoption mit dem Finger auswählen oder zur gewünschten Auswahl navigieren und Enter drücken.

Die ON-OFF-Taste befindet sich unten links auf dem Tastenfeld. Beim ersten Einschalten eines neuen HP Prime wird ein Begrüßungsbildschirm angezeigt, in dem der Benutzer aufgefordert wird, eine Sprache und einige Ersteinrichtungsoptionen auszuwählen. Die meisten Benutzer können ohne Weiteres die Standardeinstellungen übernehmen.

Die Bildschirmhelligkeit kann durch Drücken und Halten von On und + erhöht bzw. durch Drücken und Halten von On und − verringert werden.

Nehmen Sie sich eine Minute Zeit, um das Layout des Tastenfelds zu betrachten. Die obere Tastengruppe mit dem schwarzen Hintergrund dient hauptsächlich zur Navigation von einer Umgebung zur anderen. Wenn Sie drücken, wird die Startansicht für Berechnungen angezeigt. Wenn Sie drücken, wird eine ähnliche Umgebung für symbolische oder exakte Berechnungen angezeigt. Durch Drücken von wird ein Menü angezeigt, in dem Sie eine der Anwendungen im HP Prime auswählen können, z. B. **Erweiterte Grafiken** oder **Funktion**. Die untere Tastengruppe dient hauptsächlich zum Eingeben oder Bearbeiten von mathematischen Ausdrücken. Außerdem gibt es Umgebungen zum Eingeben von Listen, , Matrizen, , und Benutzerprogrammen, .

Dabei wurde besonders auf die Position bestimmter Tasten geachtet. Die Zahl π ist z. B. über erreichbar. Die Listenbegrenzer, {}, werden direkt rechts neben der LISTEN-Taste angezeigt. Die Matrixbegrenzer, [], werden direkt rechts neben der MATRIX-Taste angezeigt.

Sie haben in der CAS-Ansicht und in der Startansicht folgende Möglichkeiten:

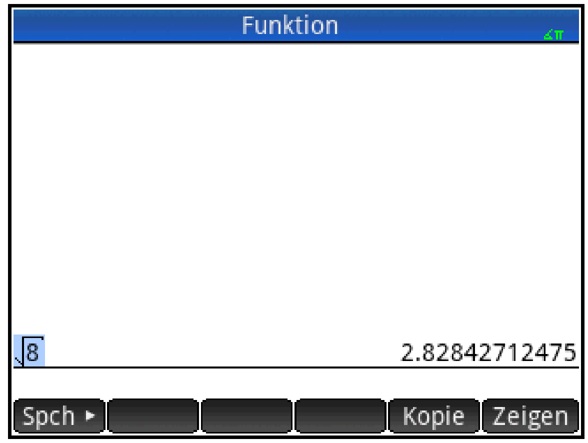
- Durch Tippen auf ein Element, können Sie es auszuwählen; tippen Sie zweimal darauf, um es in dem Befehlszeileneditor zu kopieren.
- Durch Tippen und Ziehen nach oben oder unten können Sie durch den Berechnungsverlauf scrollen.
- Durch Drücken von können Sie einen vorherigen Eintrag oder ein Ergebnis aus einer anderen Ansicht abrufen.
- Durch Drücken der Toolbox-Taste () können Sie die Math- und CAS-Menüs sowie den Katalog anzeigen.
- Durch Drücken von können Sie ein Menü mit benutzerfreundlichen Vorlagen öffnen.
- Durch Drücken von können Sie ein Menü verlassen, ohne eine Auswahl vorzunehmen.
- Sie können auf die Menüschaltflächen Spch ▸, Kopie und Zeigen tippen.

Startansicht

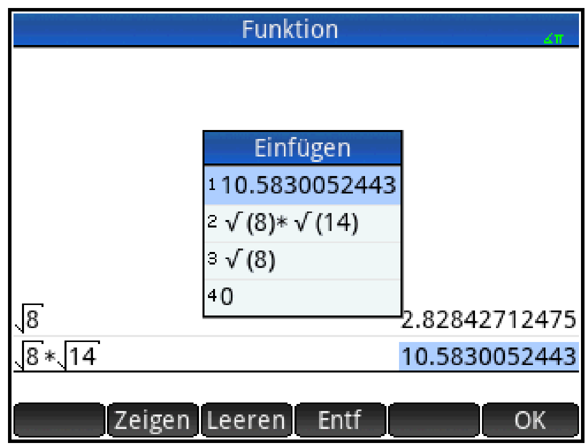
Schalten Sie Ihren HP Prime ein und betrachten Sie die verschiedenen Bildschirmbereiche der **Startansicht**. Das Band am oberen Rand wird Titelleiste genannt. Darin wird die Umgebung angezeigt, in der Sie sich derzeit befinden (z. B. **FUNKTION** oder **FUNKTION SYMBOLISCHE ANSICHT**). Wenn Sie eine Shift-Taste drücken, wird im linken Bereich der Titelleiste ein Indikator angezeigt. Im rechten Bereich werden eine Batteriezustandsanzeige, eine Uhr und der aktuelle Winkelmodus angezeigt. Sie können auf diesen Schnelleinstellungsbereich oben rechts klicken, um einen Kalender anzuzeigen (durch Tippen auf Datum und Uhrzeit), um eine Verbindung zu einem WLAN-Schulnetzwerk herzustellen (durch Tippen auf das WLAN-Symbol) oder um den Winkelmodus zu ändern (durch Tippen auf die Winkelmodusanzeige).

Der mittlere Bereich der **Startansicht** enthält einen Verlauf der bisherigen Berechnungen. Sie können mit den Cursortasten durch den Verlauf navigieren bzw. mit Ihrem Finger eine Auswahl vornehmen (durch Tippen) oder scrollen (durch Wischen). Direkt unter dem Verlauf befindet sich die Bearbeitungszeile. Dort können Sie mathematische Ausdrücke eingeben, die numerisch ausgewertet werden sollen. Am unteren Rand befinden sich Menüschaltflächen, z. B. Spch ▸ in der Ansicht **START**. Diese Menüschaltflächen sind kontextsensitiv. Die jeweilige Beschriftung und Funktion hängt von der Umgebung ab, in der Sie sich befinden.

In der Startansicht können Sie numerische Berechnungen durchführen.



1. Drücken Sie On/Off, um den HP Prime einzuschalten.
2. Drücken Sie Home/Settings, um die Startansicht anzuzeigen.
3. Drücken Sie Shift x^2 8 Enter, um $\sqrt{8}$ auszuwerten.
4. Doppeltippen Sie jetzt im Verlauf auf $\sqrt{8}$, um den Ausdruck in die Befehlszeile zu kopieren. Ja, der HP Prime hat einen Touchscreen!
5. Jetzt multiplizieren wir $\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}$. Geben Sie × Shift x^2 1 4 Enter ein.
6. Tippen Sie auf das letzte Ergebnis, um es auszuwählen, und drücken Sie Shift View/Copy (Copy). Sie haben soeben 10.583... in die Prime-Zwischenablage kopiert. Sie können diesen Wert jetzt überall einfügen, indem Sie Shift Menu/Paste (Paste) drücken. Sie sehen, dass die Zwischenablage auch die letzten Einträge enthält.
7. Drücken Sie Esc/Clear, um die Zwischenablage zu schließen, ohne ein Objekt einzufügen.

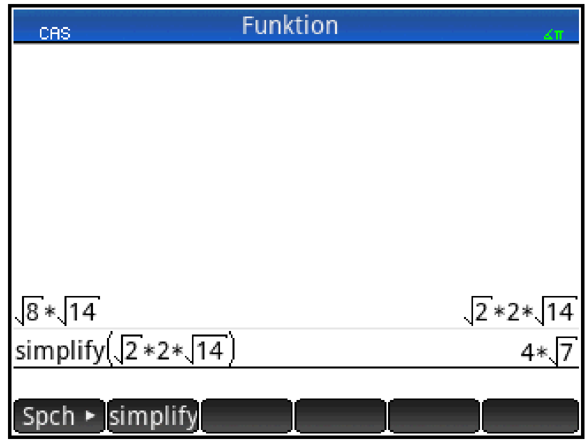


In der Startansicht sind alle Ergebniswerte reelle oder komplexe Zahlen oder eine Matrix, Liste usw. mit reellen und/oder komplexen Zahlen. Sie können im Verlauf auf eine vorherige Eingabe oder auf ein Ergebnis klicken, um den Eintrag auszuwählen. Daraufhin werden zwei zusätzliche Menüschaltflächen angezeigt: Kopie und Zeigen. Über die erste Schaltfläche wird die Auswahl an der Cursorposition in die Befehlszeile kopiert, über die zweite wird die Auswahl im Vollbildmodus im Lehrbuchformat angezeigt.

CAS-Ansicht

Demgegenüber ist die CAS-Ansicht für symbolische oder exakte numerische Ergebnisse vorgesehen. Lassen Sie uns die erste Berechnung in der CAS-Ansicht wiederholen.

1. Drücken Sie [CAS], um die CAS-Ansicht zu öffnen.
2. Drücken Sie [Shift] [Menu], um die Zwischenablage zu öffnen. Tippen Sie auf den Eintrag $\sqrt{8}\cdot\sqrt{14}$, um ihn in die CAS-Befehlszeile einzufügen, und drücken Sie [Enter], um das Ergebnis anzuzeigen.
3. Tippen Sie auf [simplify], um die Ergebnisse zu vereinfachen (abhängig von den CAS-Einstellungen).



In der Startansicht werden immer numerische Näherungen zurückgegeben, in der CAS-Ansicht wird demgegenüber immer versucht, exakte oder symbolische Ergebnisse zurückgegeben. Es liegt an Ihnen, welche Ansicht Sie verwenden. In der Startansicht bzw. CAS-Ansicht können Sie auf einen beliebigen Eintrag oder ein Ergebnis im Verlauf klicken, um den Eintrag bzw. das Ergebnis wieder in die Befehlszeile zu kopieren. Durch Ziehen oder Wischen können Sie durch den Verlauf scrollen.

Kopieren und Einfügen

Wie bereits erwähnt können Sie die Auswahl im Verlauf der CAS- und Startansicht über [Kopie] (oder durch Doppeltippen) in die Befehlszeile kopieren. Darüber hinaus können Sie die Auswahl mit [Shift] [View] (Copy) und [Shift] [Menu] (Paste) in die Prime-Zwischenablage kopieren bzw. aus der Zwischenablage an der Cursorposition einfügen. Diese Funktionalität bietet die Möglichkeit, Einträge in einer Umgebung zu kopieren und an einer beliebigen anderen Stelle im HP Prime einzufügen. Bei Daten können Sie auch auf einen Wert tippen und durch Halten und Ziehen des Fingers einen rechteckigen Wertebereich auswählen, kopieren und an einer anderen Stelle einfügen. Der virtuelle HP Prime-Taschenrechner bietet außerdem die Möglichkeit, die Zwischenablage des Computers zu verwenden, um einen Zellenbereich auf einer Website oder in einem Arbeitsblatt auf Ihrem PC zu kopieren und die numerischen Daten an einer beliebigen Stelle im virtuellen Prime-Taschenrechner einzufügen. Sie können die Daten dann an einen anderen HP Prime senden.

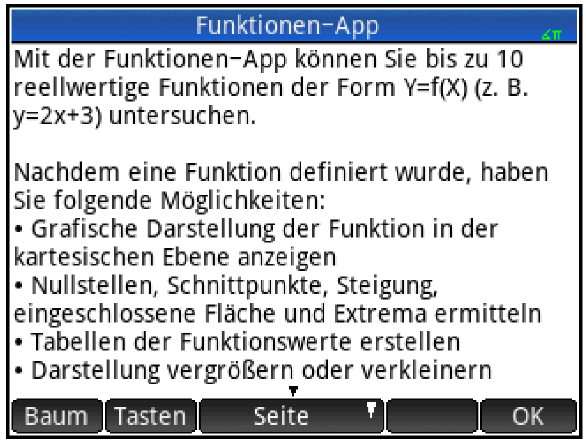
Löschen und Leeren

In der CAS- und Startansicht können Sie einen Eintrag im Verlauf auswählen und [Del] drücken, um ihn zu löschen. Drücken Sie [Shift] [Esc] (Clear), um den gesamten Verlauf zu löschen. In einer Ansicht (symbolische Ansicht, Grafikeinstellungen usw.) werden mit [Shift] [Esc] (Clear) alle Einstellungen in der aktuellen Seite der Ansicht auf die jeweiligen werkseitigen Standardeinstellungen zurückgesetzt (gelöscht).

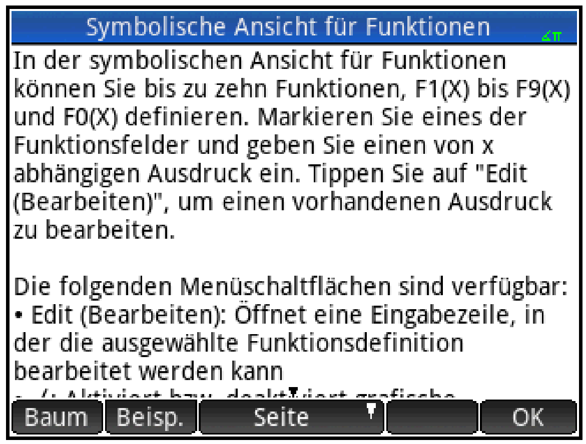
Stets verfügbare Hilfe!

Der HP Prime verfügt rechts auf dem Tastenfeld über eine Hilfetaste: Help. Wenn Sie auf diese Taste klicken, werden hilfreiche Informationen zu Apps sowie den wichtigsten Ansichten der jeweiligen App angezeigt. Sie können auch Hilfeinformationen für Kataloge/Editoren (Programm, Matrix usw.) sowie Befehle oder Funktionen abrufen. In diesem Abschnitt finden Sie eine Einführung in das Hilfesystem.

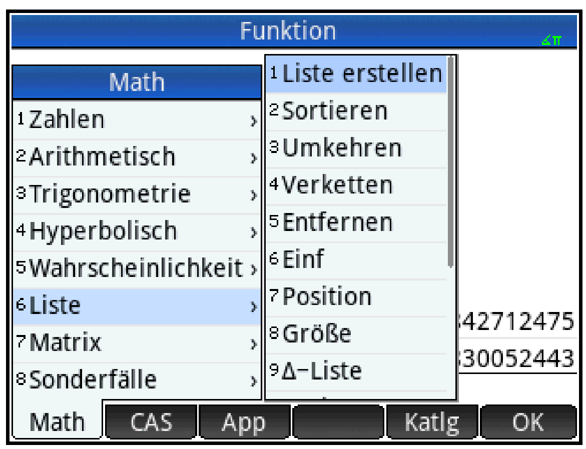
Hilfe zu Apps und deren Ansichten



1. Drücken Sie Apps und wählen Sie mit dem Cursor-Pad eine App aus (z. B. Funktion). Drücken Sie dann Help. Die Hilfeseite für die App wird angezeigt. Scrollen Sie mit dem Finger durch die Hilfeseite. Tippen Sie anschließend auf OK. Es gibt 2 weitere Menüschaltflächen:
   - Baum: Öffnet den gesamten Hilfestrukturbaum.
   - Tasten: Tippen Sie auf diese Schaltfläche und drücken Sie dann eine der Tasten auf dem Tastenfeld, um die Hilfe für die betreffende Taste anzuzeigen.
2. Tippen Sie auf eine App (z. B. Funktion), um sie zu öffnen. Drücken Sie dann Help. Die Hilfeseite für die aktuelle Ansicht (symbolisch, grafisch, numerisch usw.) wird angezeigt. Darin werden der Zweck der Ansicht beschrieben sowie die verschiedenen Menüschaltflächen aufgelistet. Tippen Sie anschließend auf OK.

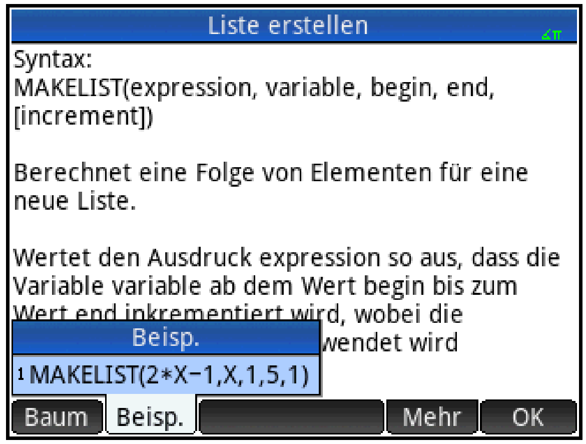


Hilfe zu Befehlen



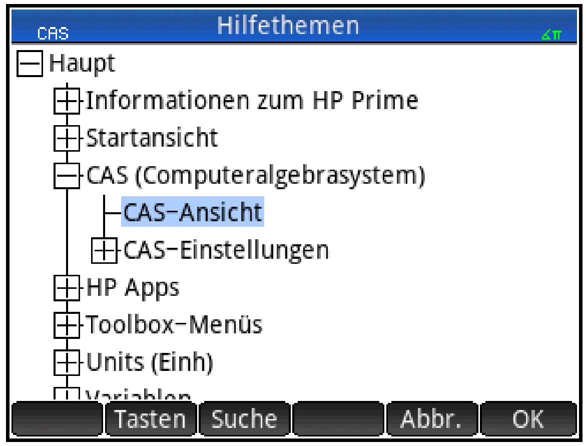
1. Drücken Sie Toolbox, um das Toolbox-Menü zu öffnen. Tippen Sie auf Math, um das Menü häufig verwendeter mathematischer Funktionen zu öffnen. Tippen Sie auf **Liste**, um das Untermenü für Listen zu öffnen. Der erste Eintrag ist **Liste erstellen**. Drücken Sie bei Auswahl von **Liste erstellen** auf Help.
2. Die Hilfeseite für den MAKELIST-Befehl wird angezeigt. Darin werden die Syntax, eine Beschreibung des Zwecks und die Verwendung des Befehls angezeigt. Danach folgen u. U. Beispiele.

3. Tippen Sie auf Mehr, um verwandte Befehle anzuzeigen und die zugehörigen Hilfeseiten zu öffnen.
4. Tippen Sie auf Beisp. und wählen Sie ein Beispiel aus, um es in die Befehlszeile einzufügen. In gezeigten Fall erstellt der MAKELIST-Befehl die Liste {1, 3, 5, 7, 9}.



Untersuchen des Hilfestrukturbaums

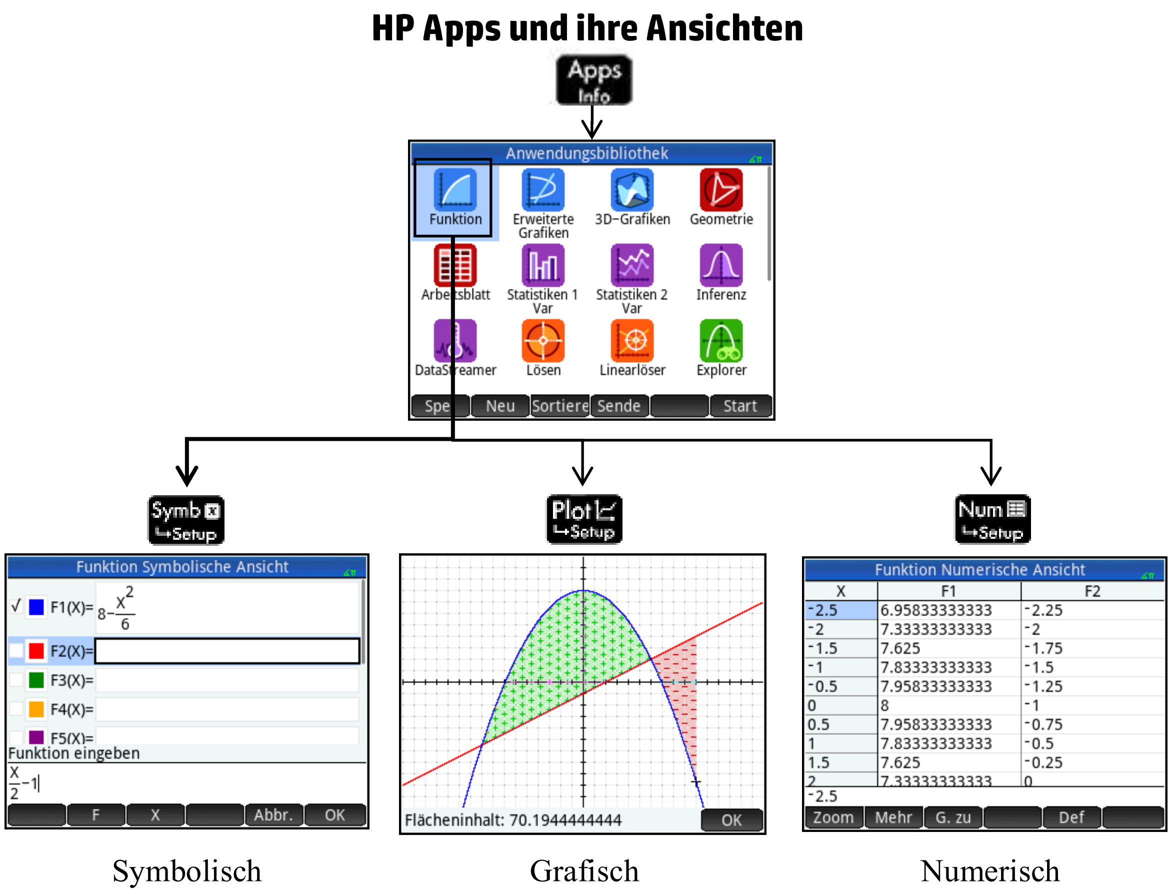
1. Tippen Sie auf Baum, um den gesamten Themenstrukturbaum des Hilfesystems anzuzeigen. Klicken Sie auf das Kästchen mit dem Pluszeichen neben einem Eintrag, um ihn zu erweitern. Tippen Sie auf einen Eintrag und dann auf OK, um die zugehörige Seite anzuzeigen.
2. Tippen Sie auf Tasten und drücken Sie dann eine der Tasten auf dem Tastenfeld, um die Hilfe für die betreffende Taste anzuzeigen.
3. Tippen Sie auf Suche und geben Sie ein Schlüsselwort ein. Der HP Prime zeigt einen Eintrag im Strukturbaum an, der das betreffende Schlüsselwort enthält.



Der HP Prime verfügt über ein umfangreiches integriertes Hilfesystem, das die ersten Schritte erleichtert und Sie bei der Untersuchung von mathematischen Konzepten sowie bei der Lösung von Problemen unterstützt.

HP Prime-Apps und deren Ansichten

Der HP Prime verwendet eine App-basierte Architektur, um die Komplexität zu verringern. Alle HP Prime-Apps weisen eine ähnliche Struktur auf und nutzen die Tasten Symb, Plot und Num, um eine einfache Bedienung zu ermöglichen und die Erlernbarkeit zu verbessern. Über diese Tasten werden die symbolische Ansicht, grafische Ansicht und numerische Ansicht für die jeweils entsprechende symbolische, grafische bzw. numerische Form mathematischer Darstellungen geöffnet. Das Schema der Prime-Apps ist in der folgenden Abbildung dargestellt.



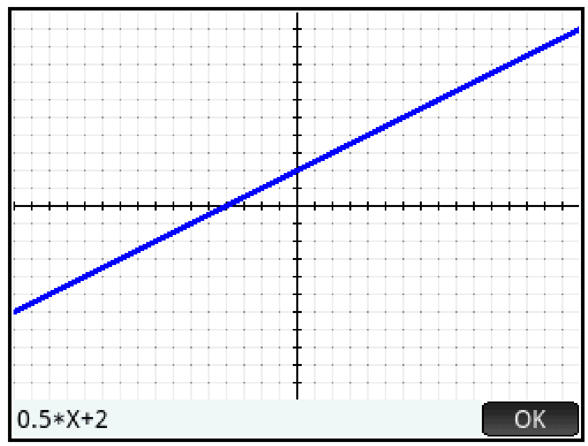
Drücken Sie Apps, um die App-Bibliothek zu öffnen. Tippen Sie auf eine App, um sie zu starten, oder navigieren Sie mit dem Cursor-Pad durch die Bibliothek und tippen Sie auf Start, um die App zu starten.

Geben Sie die Arbeitsdaten für die App ein. Sie können jederzeit zu dieser App zurückkehren. Alle Daten werden automatisch gespeichert! Sie können eine App mit einem leicht zu merkenden Namen speichern. Setzen Sie dann die ursprüngliche App zurück, damit Sie sie für andere Berechnungen verwenden können. HP Apps verfügen über App-Funktionen und App-Variablen, die Sie in der App, in der CAS-Ansicht, in der Startansicht oder in Programmen verwenden können.

Einführung in lineare Funktionen

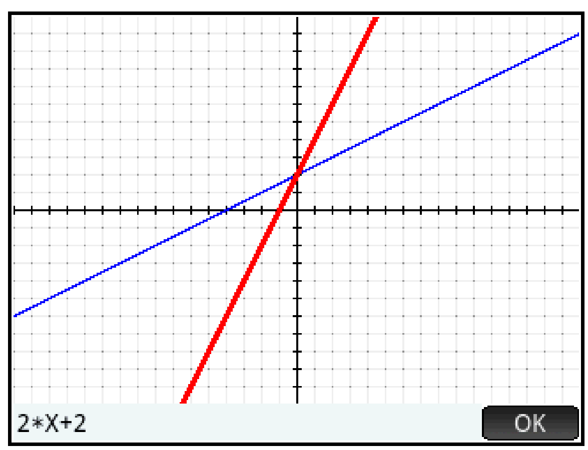
Punkte in der Ebene können als geordnete Paare (x, y) ausgedrückt werden. Wird durch mindestens 2 Punkte in der Ebene eine Gerade gezeichnet, kann die Gerade symbolisch als Gleichung in x und/oder y ausgedrückt werden. In dieser Übung wird gezeigt, wie Sie diese linearen Gleichungen mit dem HP Prime handhaben können.

1. Drücken Sie Apps Info und tippen Sie auf das App-Symbol **Funktion**. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet. Durch Drücken von Symb Setup können Sie jederzeit zu dieser Ansicht zurückkehren. Hier können Sie Funktionen eingeben und eine Farbe für die Darstellung der jeweiligen Funktion auswählen.
2. Drücken Sie Plot Setup, um die grafische Ansicht zu öffnen. Daraufhin wird eine Meldung mit dem Hinweis angezeigt, dass keine darzustellenden Funktionen vorhanden sind. Klicken Sie auf OK, um fortzufahren.
3. Tippen Sie auf Menü, um das Menü der grafischen Ansicht zu öffnen. Tippen Sie auf Skizzier und skizzieren Sie mit dem Finger eine Gerade, die die y-Achse bei y=2 schneidet (siehe Abbildung rechts).



Der Ausdruck für die Gerade wird unten links angezeigt. Die Gleichung der Geraden in der Abbildung rechts ist also Y=0.5*X+2.

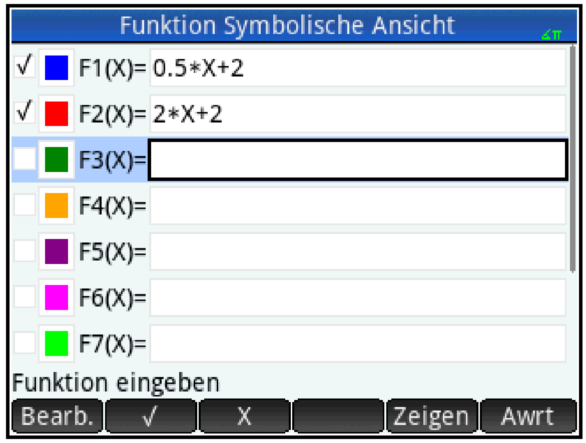
4. Tippen Sie auf OK, um die Gerade zu akzeptieren und die zugehörige Gleichung in die symbolische Ansicht zu übernehmen.
5. Zeichnen Sie jetzt eine andere Gerade, die die y-Achse am selben Punkt schneidet wie die erste Gerade. Falls es beim ersten Versuch nicht klappt, können Sie mit dem Finger einfach eine neue Gerade zeichnen. Diese ersetzt die erste.



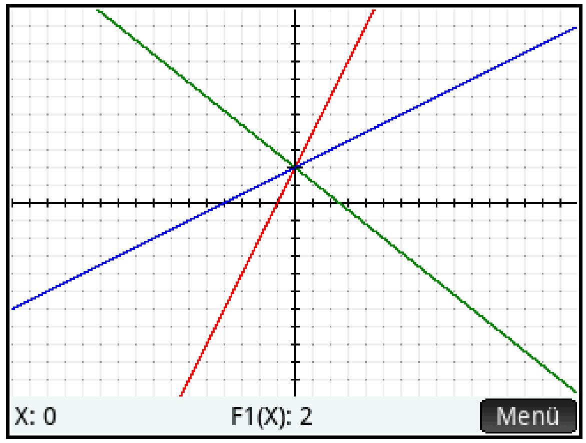
Was fällt Ihnen bei den Gleichungen dieser beiden Geraden auf? Was ist gleich und was ist anders?

____

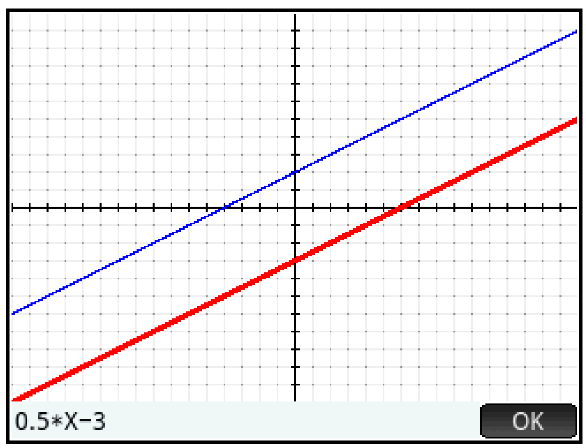
____



6. Tippen Sie auf OK, nachdem Sie die lineare Gleichung erfasst haben. Tippen Sie dann erneut auf OK, um den Skizzenmodus zu beenden.
7. Drücken Sie Symb, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren. Dort werden die Gleichungen der beiden Geraden angezeigt.
8. Geben Sie in F3(X) einen neuen Ausdruck ein, dessen Graph eine Gerade ist, die die y-Achse am selben Punkt wie die anderen beiden Geraden schneidet.
9. Drücken Sie Plot, um festzustellen, ob Sie richtig liegen!
10. Tragen Sie unten die Gleichungen der drei Geraden ein. Denken Sie daran, jeweils Y= anstelle von F1(X)= usw. zu verwenden. Die erste Gleichung im Screenshot rechts oben wird beispielsweise als Y=0.5*X+2 erfasst.



11. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und löschen Sie F2(X) und F3(X).
12. Drücken Sie Plot, um zur grafischen Ansicht zurückzukehren. Tippen Sie auf Menü und Skizzier. Skizzieren Sie jetzt eine Gerade, die parallel zur ersten Geraden verläuft.
13. Tragen Sie die beiden linearen Gleichungen unten ein und erläutern Sie, was dieses Mal gleich und was anders ist.



Hinweise für Lehrer zu „Einführung in lineare Funktionen“

In dieser Übung wird eine mehr grafisch orientierte Vorgehensweise für lineare Gleichungen der Form y=mx+b erläutert. Anstatt lineare Funktionen symbolisch einzugeben und dann deren Graphen zu untersuchen, wird diese Methode in dieser Übungen umgekehrt, d. h. die Schüler skizzieren Geraden mit ihrem Finger und untersuchen dann die resultierenden Gleichungen.

In dieser Übung soll Schülern Folgendes vermittelt werden:

1. Lineare Funktionen weisen die Form y=*m*x+*b* auf, wobei *m* und *b* reelle Zahlen sind.
2. *b* bezieht sich auf den Punkt, an dem die Gerade die y-Achse schneidet.
3. *m* bezieht sich auf die Steigung der Geraden.

Formale mathematische Definitionen von y-Schnittpunkt und Steigung werden später behandelt.

Weitergehende Übungen

1. Lassen Sie die Schüler Geraden zeichnen, die nach rechts unten, nach rechts oben und gerade nach rechts verlaufen. Lassen Sie die Schüler ihre Beobachtungen zu den möglichen Werten für die Steigung einer nicht vertikalen Geraden aufzeichnen.
2. Lassen Sie die Schüler Geraden zeichnen, die durch den Ursprung gehen, und eine Vermutung zu den möglichen Werten des Schnittpunkts mit der y-Achse *b* anstellen.
3. Lassen Sie die Schüler senkrechte Geraden zeichnen und deren Steigungswerte untersuchen.
4. Fordern Sie die Schüler auf, vertikale Geraden zu zeichnen und eine Vermutung anzustellen, warum dies in der Funktionen-App nicht möglich ist.

Lösungsschlüssel

5. Beide Gleichungen haben den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse.

10. Die Antworten variieren, weisen aber die gleiche Form auf:

$Y=m_1X+c$
$Y=m_2X+c$
$Y=m_3X+c$

13. Die Antworten variieren, weisen aber die gleiche Form auf:

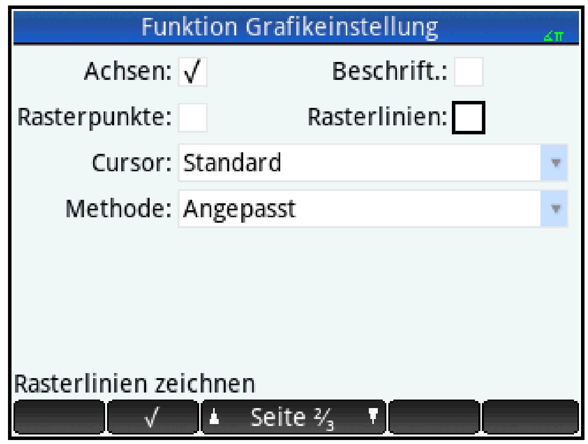
$Y=mX+c_1$
$Y=mX+c_2$

Die Geraden haben die gleiche Steigung, aber verschiedene y-Schnittpunkte.

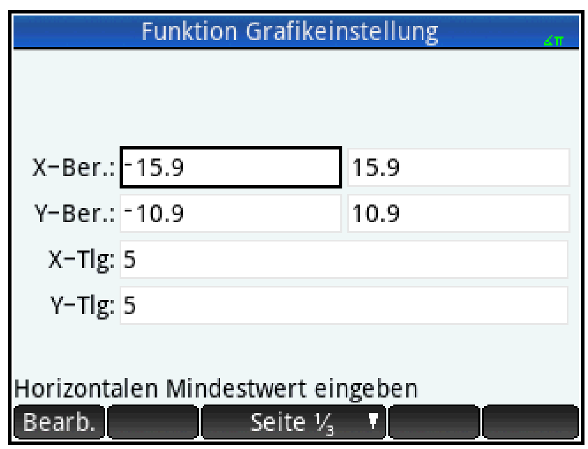
Eine Brücke zu quadratischen Funktionen

In dieser Übung betrachten wir zunächst das Bild einer Brücke als Hintergrund. Anschließend skalieren und verschieben wir die Achsen, skizzieren den Bogen der Brücke und untersuchen die zugehörige Gleichung.

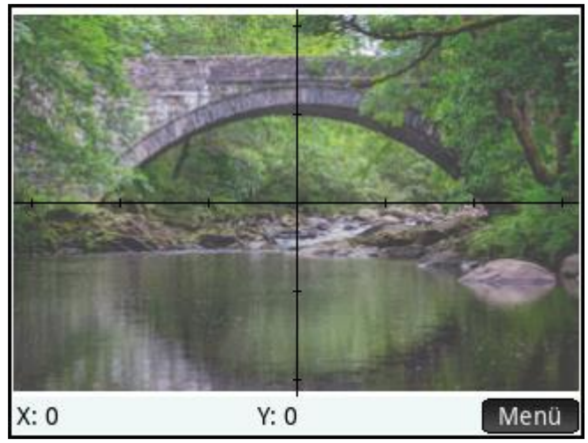
1. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen. Wählen Sie die App **Funktion** aus und tippen Sie auf Neu, um die App zurückzusetzen. Wenn Sie möchten, können Sie auch zuerst Ihre Arbeit speichern, indem Sie auf Spei tippen, einen Namen eingeben und dann zweimal auf OK tippen.
2. Drücken Sie Shift Plot Setup, um die Grafikeinstellungen zu öffnen. Scrollen Sie zu Seite 3 (oder tippen Sie auf die Menüschaltfläche „Seite ▼“).
3. Wählen Sie auf Seite 3 **Optimale Größe** aus und scrollen Sie dann durch die Liste der Bilder, bis **Stream.jpg** angezeigt wird (siehe Abbildung rechts).
4. Scrollen Sie zurück zu Seite 2 und deaktivieren Sie **Rasterpunkte** und **Rasterlinien** (siehe Abbildung).



5. Scrollen Sie dann zurück zu Seite 1 und legen Sie „X-Tlg“ und „Y-Tlg“ auf 5 fest.



6. Drücken Sie Plot, um die grafische Ansicht mit dem Bild der Brücke als Hintergrund anzuzeigen. Daraufhin wird eine Meldung mit dem Hinweis angezeigt, dass keine Funktionen ausgewählt sind. Tippen Sie auf OK, um die Meldung zu schließen.

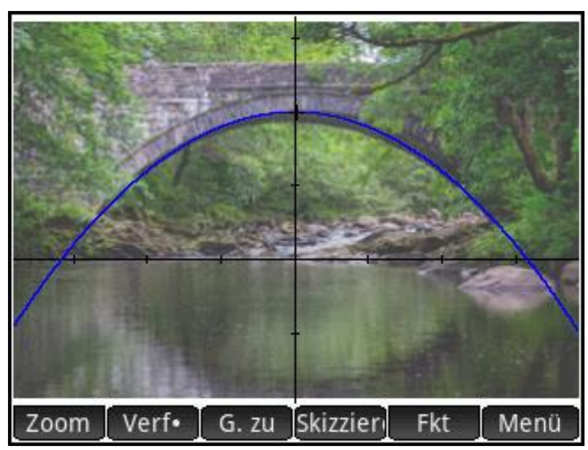


Es ist bekannt, dass der Bogen der Brücke am höchsten Punkt ungefähr 10 Meter über dem Wasser liegt. Wir sind an der Weite des Bogens interessiert.

7. Verschieben Sie die Achsen durch Ziehen mit dem Finger an die gewünschte Stelle. Führen Sie die Finger diagonal auseinander/ zusammen, bis die Breite am Fuß des Bodens korrekt ist. Sie müssen dies u. U. mehrmals durchführen, bis Achsen und Maßstab stimmen.
8. Tippen Sie an den Schnittpunkten des Bogens mit der x-Achse auf die x-Achse und verwenden Sie diese Werte als Schätzung für die Weite des Bogens. Tragen Sie Ihre Antwort ein:

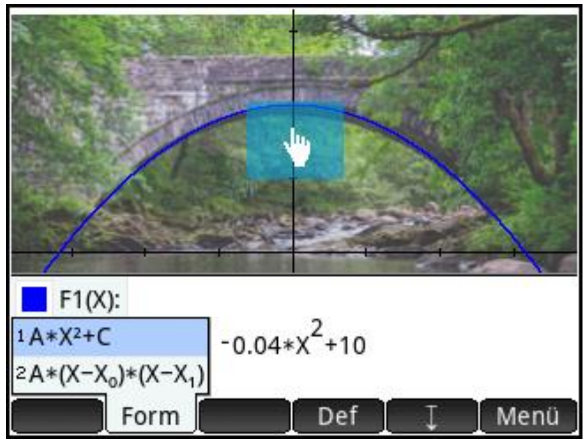
____

9. Tippen Sie auf Menü, um das Menü der grafischen Ansicht zu öffnen, und tippen Sie auf Skizzier. Zeichnen Sie jetzt den Bogen der Brücke mit dem Finger. Falls der erste Versuch verbesserungswürdig ist, können Sie den Bogen erneut mit dem Finger zeichnen, bis Sie eine zufriedenstellende Kurve erhalten. Tippen Sie anschließend zwei Mal auf OK.
10. Tippen Sie auf Fkt und wählen Sie **Transfo…** aus, um die Gleichung des Bogens anzuzeigen, den Sie mit dem Finger gezeichnet haben. Die Gleichung weist die Form Y=A*X²+C auf, wobei *A* und *C* reelle Zahlen sind. Welche kommt der Höhe des Bogens am nächsten?



____

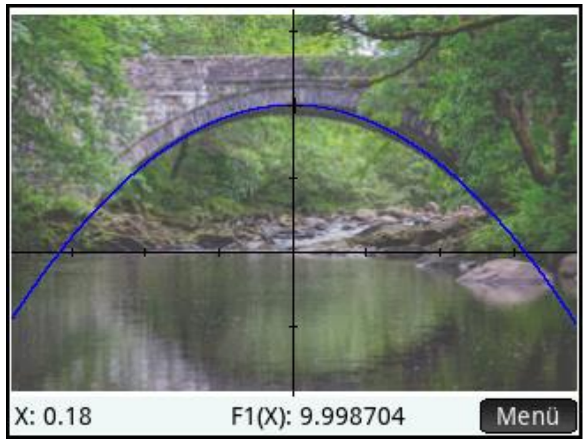
11. Verschieben Sie den Graphen durch Ziehen und ziehen Sie die Finger horizontal auseinander, um den Graphen zu strecken, bis er so gut wie möglich mit dem Bogen übereinstimmt. Sie können auch die Zahlen im Ausdruck direkt bearbeiten.
12. Tippen Sie auf Form und wählen Sie **$A*(X-X_0)*(X-X_1)$** aus. Erfassen Sie die Werte von X_0 und X_1. Was fällt Ihnen bei diesen Werten auf?



X_0 =

X_1 =

Meine Beobachtung:



13. In der Abbildung wird ein Großteil des Bogens der Brücke im Wasser gespiegelt. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und legen Sie F2(X) als Spiegelung von F1(X) fest. Wechseln Sie dann zur grafischen Ansicht, um die Darstellung der Spiegelung anzuzeigen.

Hinweise für Lehrer zu „Eine Brücke zu quadratischen Funktionen“

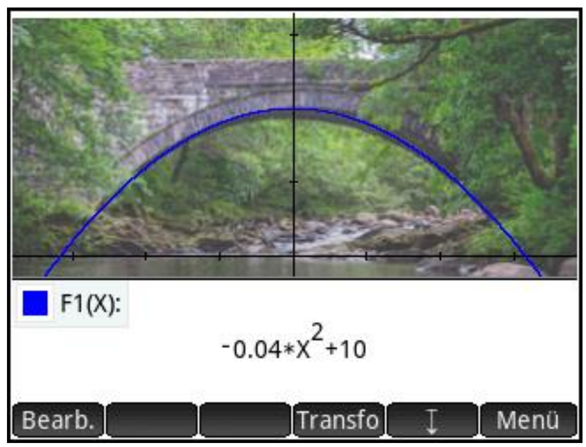
Diese Übung dient als motivierende Einführung in quadratische Funktionen, indem die Parameter in der Gleichung mit der Form des Graphen in Beziehung gesetzt werden. Wie in der Übung *Einführung in lineare Funktionen* werden die Achsen zunächst ausgehend von einer Grafik skaliert und verschoben, um die bekannten Abmessungen der Brücke abzubilden. Anschließend wird der Bogen mit dem Finger skizziert, um den Ausdruck zu erstellen. Danach wird der Graph so gut wie möglich transformiert und die Form des Ausdrucks geändert.

Lösungsschlüssel

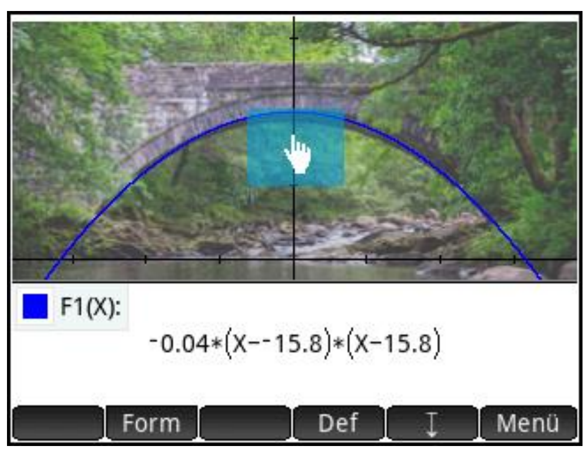
7. In der Abbildung liegt der Bogen der Brücke ungefähr 10 Meter über der Wasseroberfläche. Der exakte numerische Wert ist hier ohne Bedeutung.

8. Die Weite des Bogens beträgt ca. 30 m.

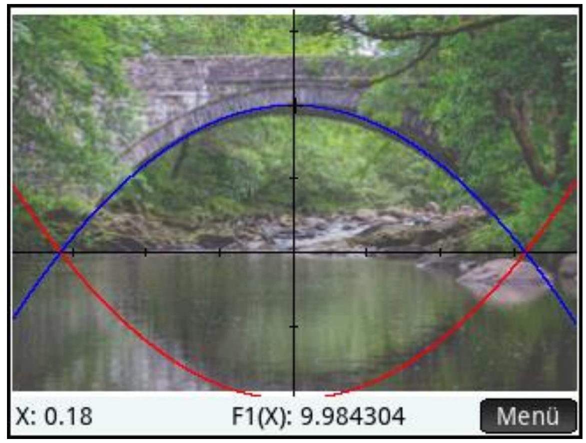
10. Die Antworten variieren, das ist in Ordnung. Wir haben den Graphen und die zugehörige Gleichung hier ein wenig versetzt erstellt, um zu verdeutlichen, dass der Graph eine Näherung ist. In der Abbildung lautet die Gleichung Y= $-0.04*X^2 + 10$. Die Höhe in Metern wird durch die Konstante 10 bestimmt.



12. Die Antworten variieren wiederum, das ist in Ordnung. Hier sind $X_0 = -15.8$ und $X_1 = 15.8$, sodass die Weite des Bogens ungefähr 31.6 m beträgt. Entscheidend hierbei ist, dass die Differenz zwischen den Nullstellen als Schätzung für die Weite des Bogens verwendet wird.



13. Drücken Sie , um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren, und definieren Sie F2(X) als -F1(X). Das Ergebnis ist in der Abbildung dargestellt.



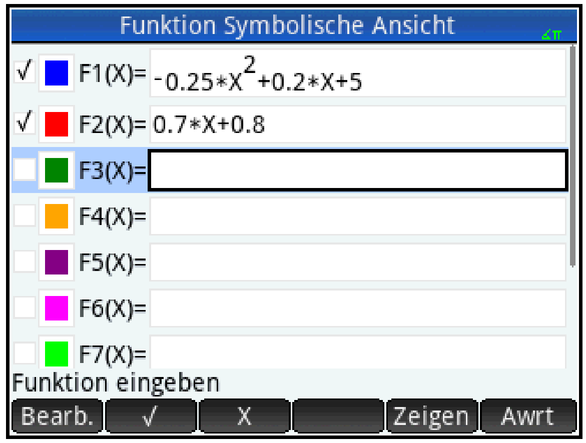
Weitergehende Übung

Beachten Sie, dass X_0 und X_1 $\pm\sqrt{\frac{C}{-A}}$ sind. Lassen Sie von den Schülern die Äquivalenz von AX^2+C und A(X-X_0)(X-X_1) bestätigen, indem sie X_0 und X_1 abhängig von C und A ausdrücken.

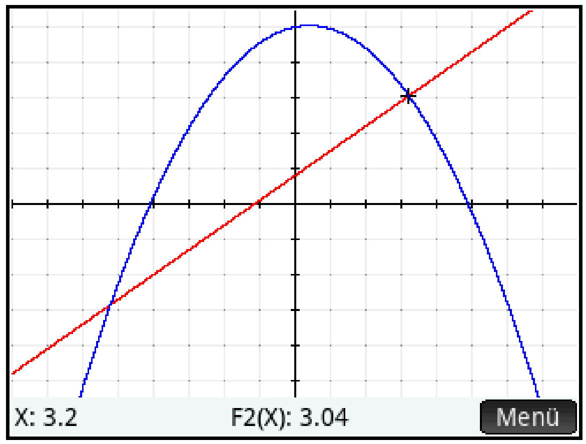
Der Schnittpunkt von zwei Kurven

Für unser nächstes Beispiel zeichnen wir eine Parabel und eine Gerade. Anschließend verwenden wir drei verschiedene Verfahren, um deren Schnittpunkte zu ermitteln.

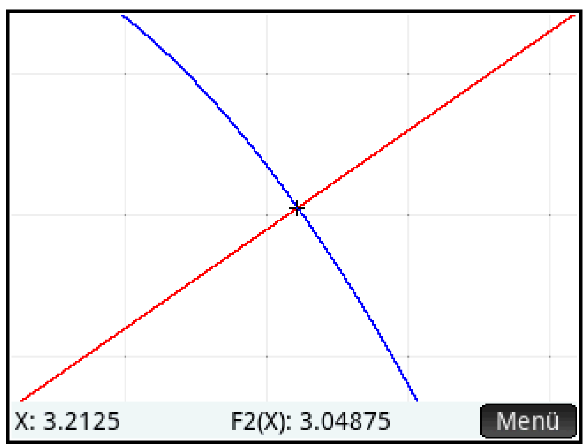
1. Drücken Sie [Apps Info] und tippen Sie auf das App-Symbol **Funktion**. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet, in der Sie bis zu zehn Funktionen eingeben können. Geben Sie F1(X)=-0.25*X^2+0.2*X+5 und F2(X)=0.7*X+0.8 ein (siehe Abbildung).



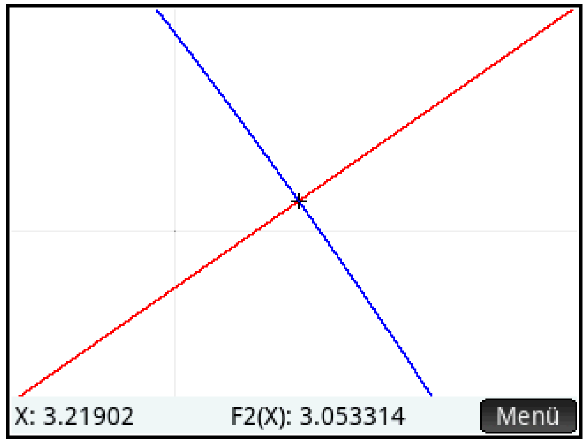
2. Drücken Sie [Plot Setup], um die Graphen anzuzeigen. Drücken Sie [+], um die Ansicht zu vergrößern, und verschieben Sie den Mittelpunkt der Ansicht durch Ziehen.
3. Tippen Sie auf einen Schnittpunkt, um den Tracer an diesen Punkt zu bewegen. In der Abbildung rechts gibt es einen Schnittpunkt in der Nähe von (3.2, 3.04).



4. Drücken Sie jetzt zwei Mal [+], um den Bereich um den Cursor zu vergrößern. In der Abbildung rechts wurde der Bereich um den Cursor zweimal vergrößert und der Cursor anschließend näher an den Schnittpunkt bewegt. Die neue Schätzung für den Schnittpunkt ist (3.2125, 3.04875).

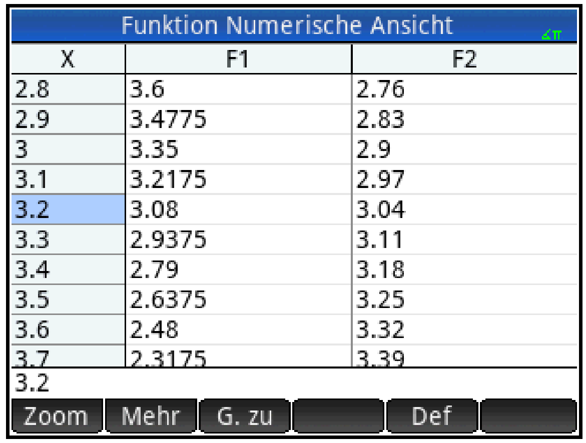


5. Vergrößern und verschieben Sie den Tracer näher an den Schnittpunkt.
6. In der Abbildung rechts ist die neue Näherung für den Schnittpunkt nach einigen Zoomvorgängen (3.219, 3.053).

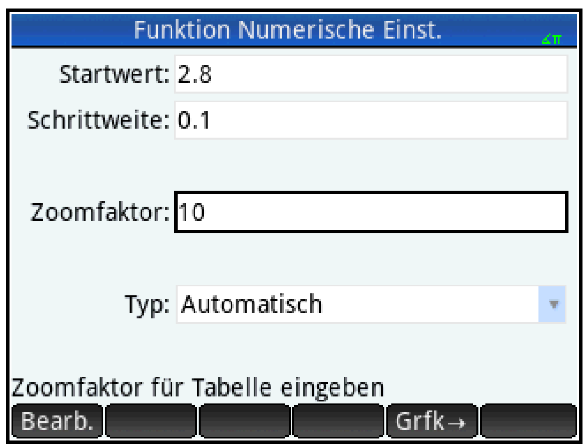


Beachten Sie die technologische Erfahrung, die die Schüler hier gewinnen. Sie können den Bereich um den Schnittpunkt übrigens auch durch Spreizen der Finger vergrößern.

7. Drücken Sie , um den Bereich um den Tracer wieder auf das ursprüngliche Fenster zu verkleinern.
8. Drücken Sie , um die numerische Ansicht aufzurufen. Setzen Sie den Cursor in die x-Spalte und geben Sie 3 ein, um die Werte in der Nähe von x=3 anzuzeigen. Tippen Sie auf den x-Wert 3.2, da dieser dem Schnittpunkt am nächsten liegt.



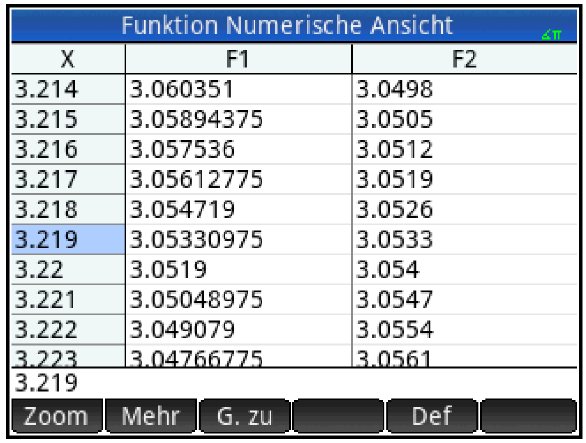
9. Drücken Sie , um die numerischen Einstellungen zu öffnen, und ändern Sie den **Zoomfaktor** in 10.



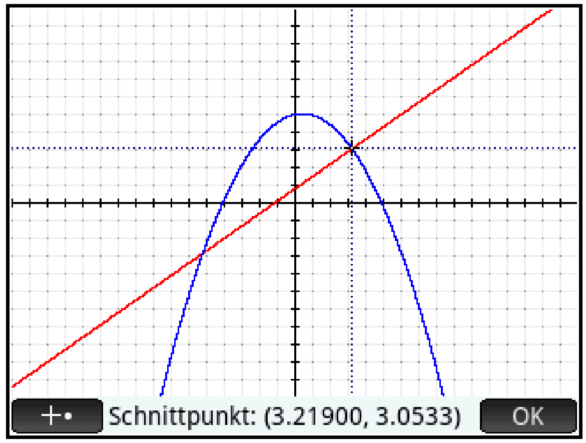
10. Drücken Sie , um den Bereich um diesen Wert zu vergrößern. Tippen Sie nach jedem Zoomvorgang auf den x-Wert, der dem Schnittpunkt am nächsten liegt, bevor Sie erneut zoomen.

In der Abbildung rechts wurde der Bereich um den Schnittpunkt mehrmals vergrößert, um die Schätzung (3.219, 3.053) zu erhalten.

Sie können eine Zeile in der Tabelle auch durch Spreizen/Zusammenführen der Finger vergrößern oder verkleinern.

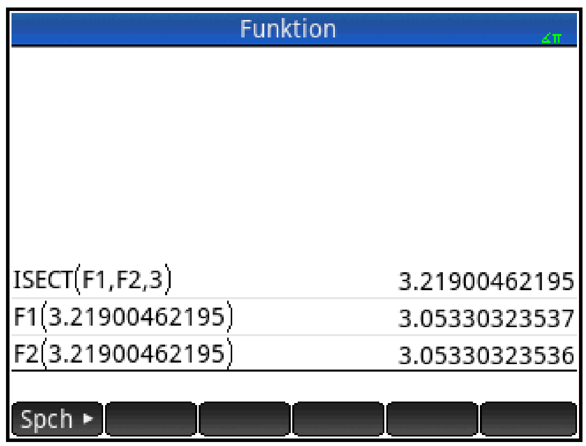


11. Drücken Sie , um zur grafischen Ansicht zurückzukehren. Tippen Sie dann auf Menü, um das Menü der grafischen Ansicht zu öffnen. Tippen Sie anschließend auf Fkt und wählen Sie **Schnittpunkt** aus. Sie werden aufgefordert, die andere Funktion auszuwählen. Tippen Sie auf OK, um den Schnittpunkt bei (3.219, 3.0533) anzuzeigen.



Alle in der grafischen Ansicht unter Fkt verfügbaren Funktionen sind als App-Funktionen in der Startansicht verfügbar.

12. Drücken Sie , um die Startansicht anzuzeigen.
13. Drücken Sie , um das Toolbox-Menü zu öffnen und wählen Sie App aus.
14. Tippen Sie auf **Funktion** und wählen Sie **ISECT** aus.
15. Vervollständigen Sie den Befehl wie gezeigt, um den Schnittpunkt von F1 und F2 in der Nähe von 3 zu ermitteln. Der x-Wert des Schnittpunkts wird zurückgegeben. Der Unterschied von F1 und F2 bei diesem x-Wert ist 1 in der letzten Dezimalstelle.



Durch mehrere verschiedene, aber parallele technologische Erfahrungen, die alle auf ein Schlüsselkonzept fokussieren, können die Schüler ein starkes konzeptuelles mathematisches Verständnis entwickeln. Der HP Prime unterstützt darüber hinaus mehrere Möglichkeiten, um häufige Aufgaben durchzuführen, sodass die Schüler die Möglichkeit auswählen können, die ihnen am natürlichsten erscheint.

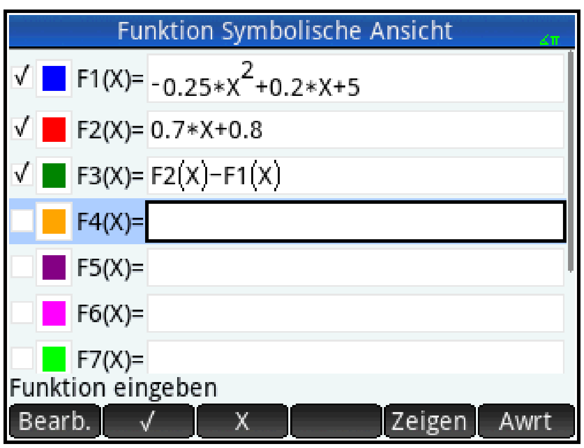
Hinweise für Lehrer zu „Der Schnittpunkt von zwei Kurven“

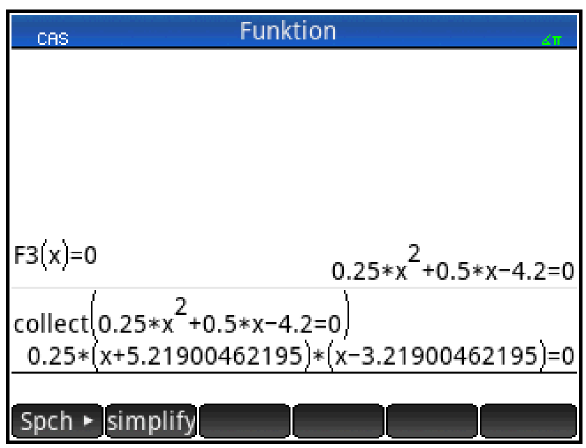
Diese Übung konzentriert sich darauf, den Schülern mehrere technologische Erfahrungen zu vermitteln, um den Schnittpunkt von zwei Kurven zu ermitteln. In der grafischen Perspektive sollen die Schüler zuerst zwei Funktionen erstellen, die sich schneiden. Anschließend sollen sie die Kurven am Schnittpunkt vergrößern und den Cursor so nah wie möglich an diesen Punkt verschieben. Dieser Vorgang wird dann wiederholt, um den Schnittpunkt so genau wie möglich abzuschätzen. In der numerischen Perspektive vergrößern die Schüler dann eine Zeile in einer Wertetabelle der beiden Funktionen, um den x-Wert zu ermitteln, an dem die beiden Funktionen den gleichen Wert aufweisen. Nach dem Zoomen muss der Schüler die Zeile in der Tabelle ermitteln und auswählen, die den Schnittpunkt am besten darstellt. Der Vorgang wird solange wiederholt, bis die gleiche Schätzung wie in der grafischen Perspektive ermittelt wurde. Nach diesen Erfahrungen werden die Schnittpunktbefehle vorgestellt.

Diese Übung ist eine Übung für Lehrer und keine Übung für Schüler. Das Ziel besteht darin, die Lehrer dazu zu bringen, über die technologischen Erfahrungen nachzudenken, die sie Schülern vermitteln möchten. In diesem Fall sollen parallele grafische und numerische Erfahrungen die wesentlichen Elemente zur Schätzung des Schnittpunkts von zwei Kurven unterstreichen. Darüber hinaus lernen die Lehrer die Befehle unter Fkt kennen, die in der Startansicht verfügbar sind. Die Ergebnisse dieser Befehle sind auch in Variablen verfügbar, die dieselben Namen aufweisen wie die Funktionen.

Weitergehende Übungen

1. Legen Sie F3(X)=F2(X)-F1(X) fest und ermitteln Sie grafisch und numerisch die Nullstelle von F3(X).
2. Wechseln Sie nach der Definition von F3(X) zu CAS und geben Sie F3(x)=0 ein. Verwenden Sie dann den collect-Befehl, um das Ergebnis in Faktoren zu zerlegen. Einer der Faktoren ist (x-3.219…).





Eine unendliche Reihe

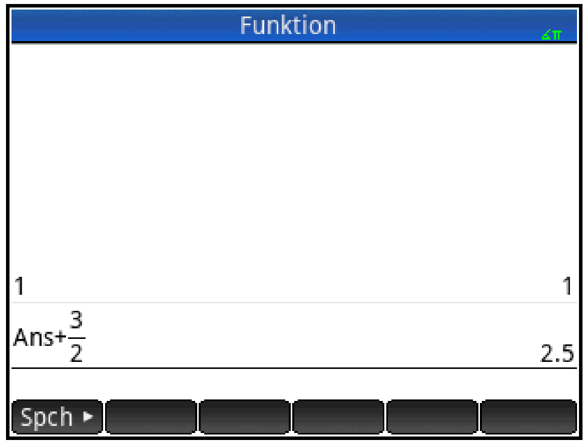
Angenommen, wir möchten die Summe der folgenden unendlichen Reihe ermitteln: $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}\ldots$

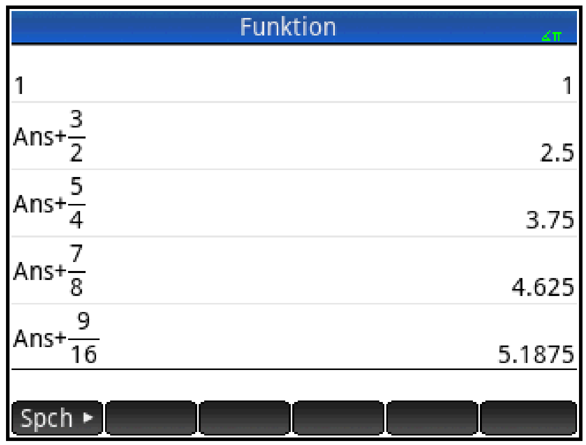
Dazu berechnen wir zunächst die ersten Partialsummen in der Startansicht.

1. Drücken Sie , um die Startansicht aufzurufen.
2. Geben Sie den ersten Term ein: Drücken Sie
3. Drücken Sie
4. Drücken Sie , um die Dezimal-, Bruch- und unechte Bruchdarstellung zu durchlaufen.

Wenn in der Startansicht kein Eintrag ausgewählt ist, wird auf das letzte Ergebnis angewendet. Wenn Sie auf einen Eintrag im Verlauf klicken und diesen auswählen, wird auf die betreffende Auswahl angewendet.

5. Fahren Sie wie rechts gezeigt fort, bis die ersten 10 Partialsummen berechnet wurden. Verwenden Sie , um die Dezimal- und Bruchdarstellung der Partialsummen zu vergleichen. Geben Sie die Liste der Partialsummen in die folgende Tabelle ein.





N	Summe
1	1/1 oder 1
2	5/2 oder 2.5
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

5a. Glauben Sie, dass es mit größer werdendem N einen Summengrenzwert gibt? Schreiben Sie Ihre Vermutung unten auf.

____

____

6. Betrachten Sie die Reihe erneut genauer: $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}...$

6a. Was fällt Ihnen bei den Zählern auf? Stellen Sie sich 1 als 1/1 vor. Schreiben Sie Ihre Antwort unten auf.

____

6b. Was fällt Ihnen bei den Nennern auf? Schreiben Sie Ihre Antwort wieder unten auf.

____

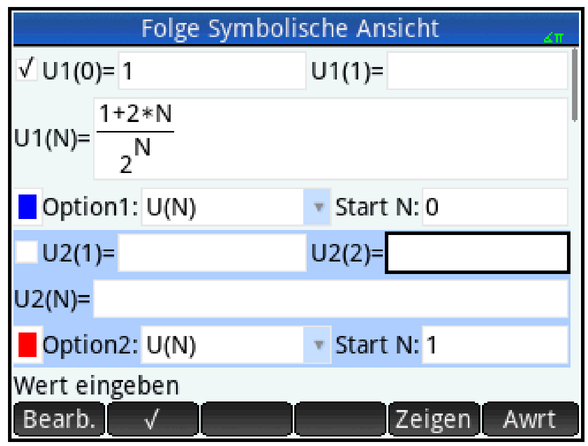
6c. Sei A(N) die Funktion, die die einzelnen Terme in der Reihe für N=0, 1, 2, 3, ... erstellt. Geben Sie die Formel in N ein, die A(N) definiert.

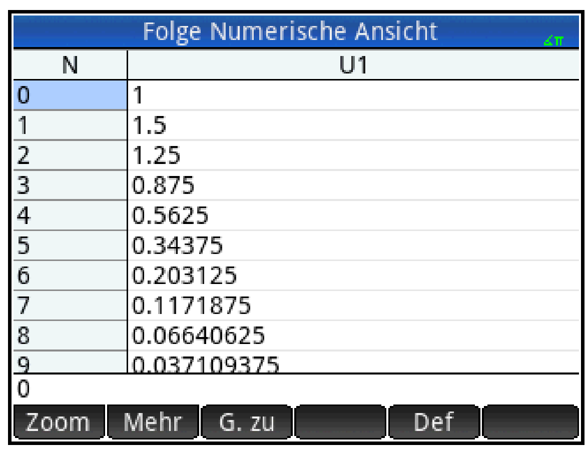
A(N) = ____

7. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen. Scrollen Sie nach unten und starten Sie die Folge-App.
8. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet, in der Sie bis zu 10 Reihen definieren können: U1-U9 und U0.
9. Ändern Sie **Start N** in 0 anstelle von 1 und legen Sie U1(0)=1 fest.
10. Geben Sie schließlich die Formel für den N-ten Term in U1(N) ein.

Tipp: Drücken Sie Units und wählen Sie zuerst die Bruchvorlage aus.

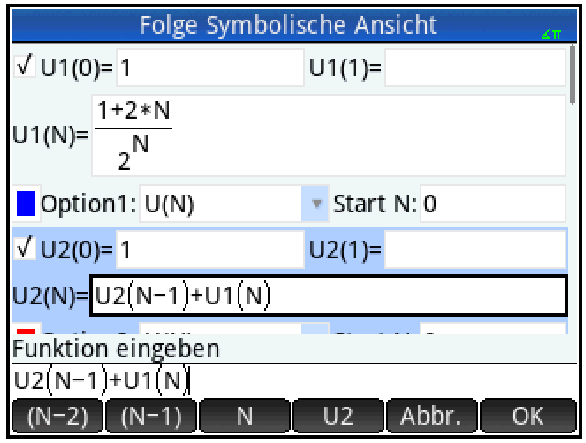
11. Drücken Sie Num Setup, um eine Wertetabelle für die Reihe anzuzeigen. Vergewissern Sie sich, dass die ersten Einträge mit den Brüchen 1/1, 3/2, 5/4, 7/8 und 9/16 am Anfang dieser Übung für diese Reihe übereinstimmen.

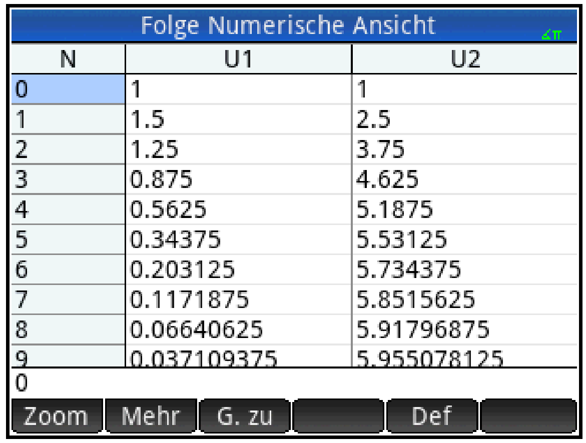




Wir erstellen jetzt eine zweite Reihe, um die Partialsummen der ersten Reihe darzustellen.

12. Drücken Sie Symb Setup, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren. Legen Sie in U2(N) „Start N“ wie in U1(N) auf 0 fest.
13. U2(1)=1 ist die erste Partialsumme.
14. U2(N)=U2(N-1)+U1(N). Das heißt, jede Partialsumme ist die vorherige Partialsumme plus den n-ten Wert der Reihe U1.
15. Drücken Sie Num Setup, um die Wertetabelle anzuzeigen. Vergewissern Sie sich, dass die ersten 10 Partialsummen mit der Tabelle in Schritt 5 übereinstimmen.
16. Scrollen Sie nach durch die Wertetabelle. Was ist Ihrer Meinung nach der Grenzwert dieser Partialsummen? Mit anderen Worten: Wie groß ist die Summe unserer unendlichen Reihe?



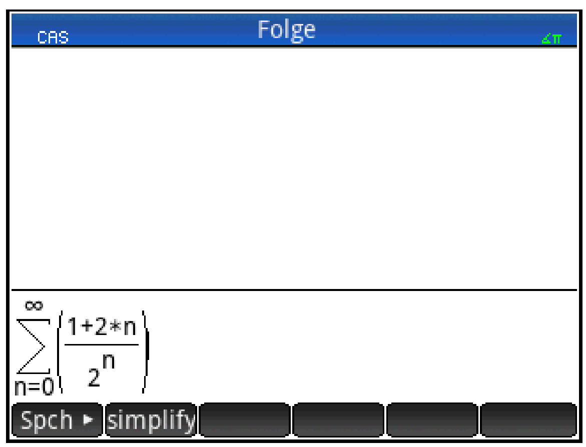


N	U1	U2
0	1	1
1	1.5	2.5
2	1.25	3.75
3	0.875	4.625
4	0.5625	5.1875
5	0.34375	5.53125
6	0.203125	5.734375
7	0.1171875	5.8515625
8	0.06640625	5.91796875
9	0.037109375	5.955078125

Der Grenzwert ist __________________________.

Wie lautet der Grenzwert, wenn sich n ∞ nähert? Ermitteln Sie mit CAS $1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}+\frac{7}{8}+\frac{9}{16}\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+2n}{2^n}$

17. Drücken Sie CAS Settings, um die CAS-Ansicht zu öffnen. Drücken Sie Units, um das Vorlagenmenü zu öffnen, und wählen Sie die Additionsvorlage aus.
18. Drücken Sie zur Eingabe von 0 die Tasten ALPHA alpha, ( ) N, ▶, 0 Notes
19. Tippen Sie zur Eingabe von ∞ oben in der Vorlage auf das obere Quadrat. Drücken Sie Shift 9 und tippen Sie dann auf ∞.
20. Tippen Sie in das rechte Feld der Vorlage und geben Sie den rationalen Ausdruck ein. Tipp: Verwenden Sie den Bruch aus dem Menü für Vorlagen.
21. Drücken Sie danach Enter und erfassen Sie den zurückgegebenen Wert.



Die Summe ist: _________________________

Hinweise für Lehrer zu „Eine unendliche Reihe“

In dieser kurzen Übung werden zunächst die Partialsummen einer unendlichen Reihe in der Startansicht untersucht. Anschließend wird die Folge-App vorgestellt, um den Vorgang zu automatisieren. Sobald der vermutete Grenzwert der Partialsummen erreicht wird, wird CAS aufgerufen, um die Vermutung zu bestätigen.

Lösungsschlüssel

5.

N	Summe
1	1
2	5/2 oder 2.5
3	37/8 oder 4.625
4	83/16 oder 5.1875
5	177/32 oder 5.53125
6	367/64 oder 5.734375
7	749/128 oder 5.8515625
8	1515/256 oder 5.91796875
9	3049/512 oder 5.955078125
10	6119/1024 oder 5.9755859375

5a. Der Grenzwert scheint 6 zu sein.

6a. Alle Zähler sind ungerade Zahlen.

6b. Alle Nenner sind Potenzen von 2.

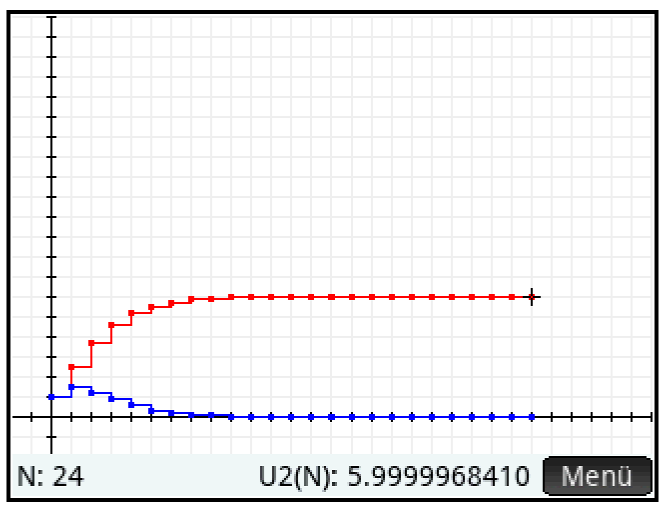
6c. A(N)=(1+2*N)/(2^N) für N=0, 1, 2, …

15. Der Grenzwert ist 6.

20. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2n}{2^n} = 6$

Weitergehende Übungen

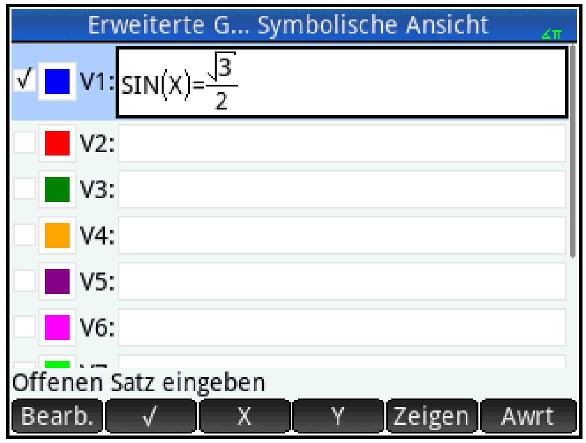
1. Verwenden Sie die grafische Ansicht, um den Schülern eine visuelle Darstellung beider Reihen zu geben. In der Abbildung sind die ersten 24 Terme dargestellt.



Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Wie viele Lösungen der Gleichung $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ gibt es und welche sind diese? Anhand dieser Übung können Sie diese Fragen selbst beantworten.

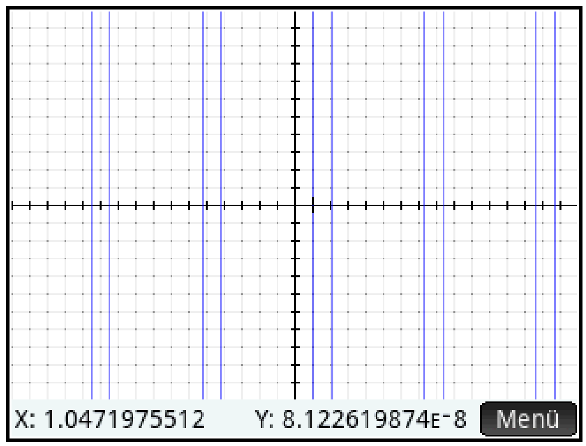
1. Drücken Sie Apps Info und tippen Sie auf das Symbol der Erweiterte Grafiken-App. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet.



Hier können Sie 10 Gleichungen oder Ungleichungen eingeben.

2. Geben Sie in V1 Folgendes ein: $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

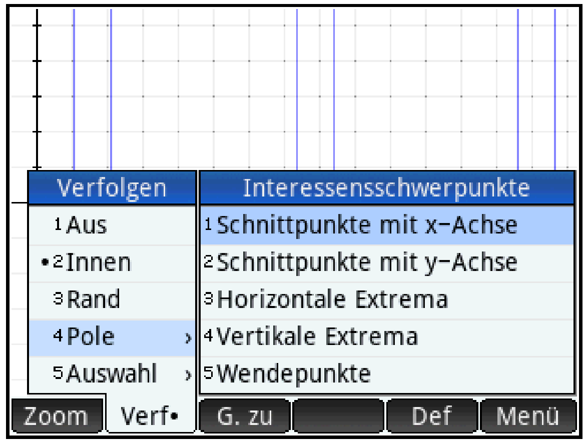
3. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen anzuzeigen.



4. Der Graph besteht aus mehreren vertikalen Geraden. Zeichnen Sie Ihre Beobachtungen zu diesen vertikalen Geraden auf. Geben Sie insbesondere an, wie viele Linien vorhanden sind und ob ein Muster erkennbar ist. Sie können die Ansicht durch Spreizen/Zusammenführen der Finger vergrößern bzw. verkleinern oder die Linien durch Ziehen untersuchen.

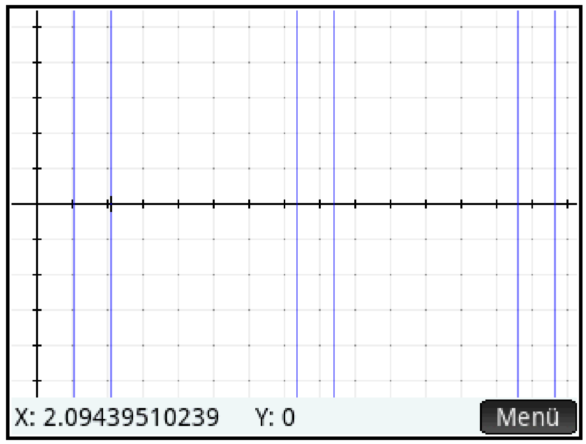
Die vertikalen Geraden lassen Lösungen in der Form *x=c* vermuten, wobei c eine reelle Zahl ist. Wir trainieren jetzt den Tracer so, dass er von einem x-Schnittpunkt zum nächsten springt.

5. Tippen Sie auf Verf• und dann auf **Pole** (spezielle Punkte) und wählen Sie **Schnittpunkte mit x-Achse** aus. Standardmäßig befindet sich der Tracer am ersten positiven x-Schnittpunkt bei X=1.047.... Drücken Sie diesen Wert abhängig von π aus und geben Sie die Gleichung der ersten vertikalen Geraden an.



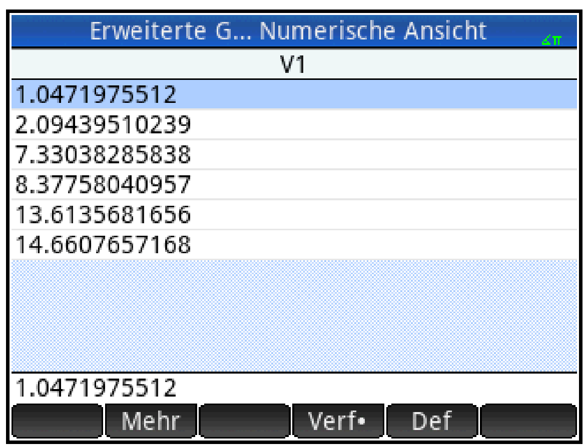
Die erste vertikale Gerade ist X=______________.

6. Drücken Sie die Nach-rechts-Cursortaste oder tippen Sie auf die zweite vertikale Gerade rechts neben der y-Achse. Der Tracerwert ist jetzt *x*=2.094... Dieser ist eindeutig doppelt so groß wie der vorherige Wert. Drücken Sie diesen Wert abhängig von π aus und geben Sie die Gleichung der zweiten vertikalen Geraden an.



Die zweite vertikale Gerade ist X=______________.

7. Drücken Sie Num, um die numerische Ansicht der App aufzurufen. Tippen Sie dann auf Verf• und auf **Pole** und wählen Sie **Schnittpunkte mit x-Achse** aus, damit in der Tabelle nur die x-Schnittpunkte angezeigt werden.



In der Tabelle werden die gleichen x-Schnittpunkte wie in der grafischen Ansicht angezeigt. Beginnend beim ersten Wert lautet die Folge 1.047, 7.330, 13.613, ... Diese Folge stellt die ersten Linien in den einzelnen Linienpaaren dar. Ist die Folge arithmetisch (d. h., weisen die Terme einen einheitlichen Abstand auf)? Können Sie den einheitlichen Abstand abhängig von π ausdrücken?

____

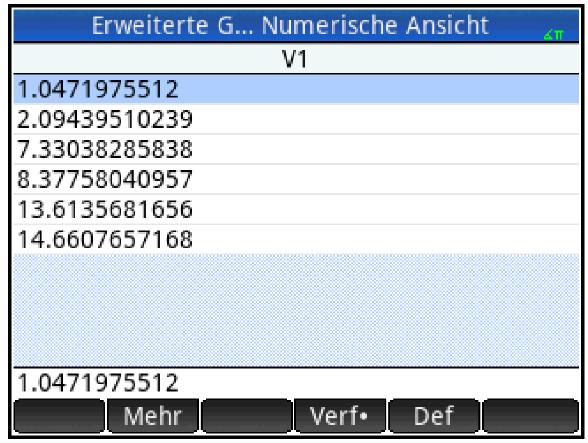
8. Wir können die ganze Folge der Lösungen durch einen einzigen Ausdruck der Form

$$x = c + d*n$$

ausdrücken, wobei *c* der erste Term der Folge, *d* der einheitliche Abstand und n eine beliebige Ganzzahl ist. Geben Sie diesen Ausdruck mit den Werten von *c* und *d* ausgedrückt abhängig von π an.

____

9. Was ist mit den restlichen x-Schnittpunkten: 2.0943, 8.3775, 14.6607, ...? Bilden diese Werte eine arithmetische Folge? Wenn ja, wie groß ist der einheitliche Abstand ausgedrückt abhängig von π?

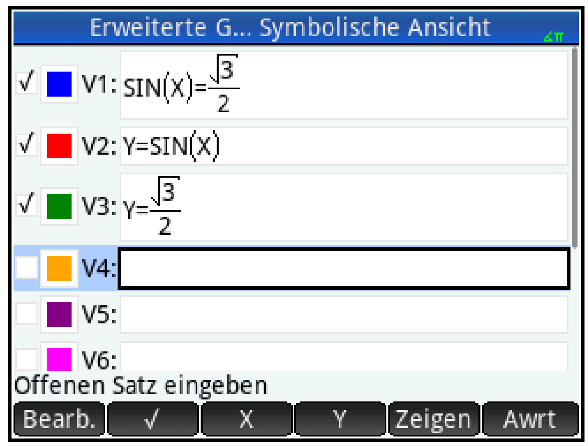


____

10. Drücken Sie die zweite Lösungsmenge durch einen einzigen Ausdruck der Form x=c+d*n aus.

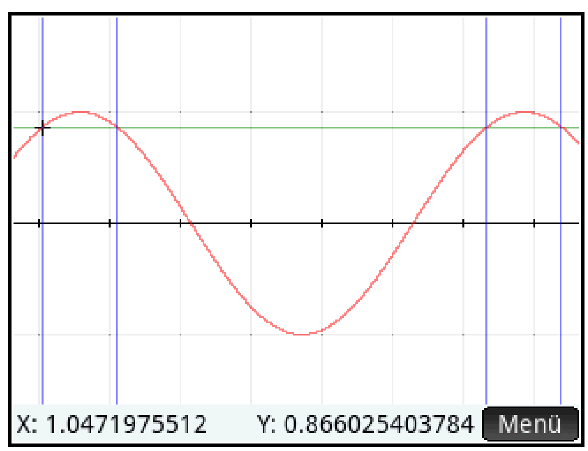
---

11. Drücken Sie jetzt die Gesamtmenge der Lösungen aus, indem Sie die beiden Ausdrücke in einer OR-Anweisung kombinieren.



---

12. Warum zeigte die Gleichung $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ die einzelnen vertikalen Geraden als Lösungen an? Drücken Sie Symb Setup, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren und fügen Sie Y=sin(X) und $Y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ in V2 und V3 hinzu. Drücken Sie dann Plot Setup, um ein größeres Bild anzuzeigen.



Hinweise für Lehrer zu „Lösen von trigonometrischen Gleichungen“

In dieser Übung erhalten Schüler eine Einführung in die Lösung trigonometrischer Gleichungen. Als Beispiel wird die Gleichung $\sin(x)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ verwendet. Was wollen wir den Schülern hauptsächlich zeigen, wenn wir diese Gleichung als Einführung in die Lösung trigonometrischer Gleichungen verwenden? Zuerst und hauptsächlich gibt es drei wesentliche Aspekte der Lösungsmenge:

1. Es gibt unendlich viele Lösungen.
2. Diese Lösungen umfassen zwei Zweige.
3. Diese beiden Zweige der unendlich vielen Lösungen können kurz und bündig konventionell ausgedrückt werden.

In dieser Übung konzentrieren sich die Schüler auf diese drei Hauptbereiche. Die Regeln, um Lösungen kurz in Gleichungen mit Sinus und Cosinus auszudrücken, können später entwickelt werden.

Lösungsschlüssel

4. Der Graph scheint eine unendliche Anzahl von vertikalen Geraden zu enthalten. Die Linien sind paarweise angeordnet und alle Paare weisen scheinbar den gleichen Abstand auf. Bisher macht diese grafische Darstellung die ersten beiden, oben genannten Anforderungen gut deutlich.

5. Die Gleichung der ersten Linie ist X=π/3.

6. Die Gleichung der zweiten Linie ist X=2π/3.

7. Ja. Der einheitliche Abstand ist 6.28… oder 2π.

8. Der Ausdruck lautet X = π/3 + 2πn.

9. Die andere Folge (2.094, 8.377, 14.660, …) weist ebenfalls einen einheitlichen Abstand von 2π auf.

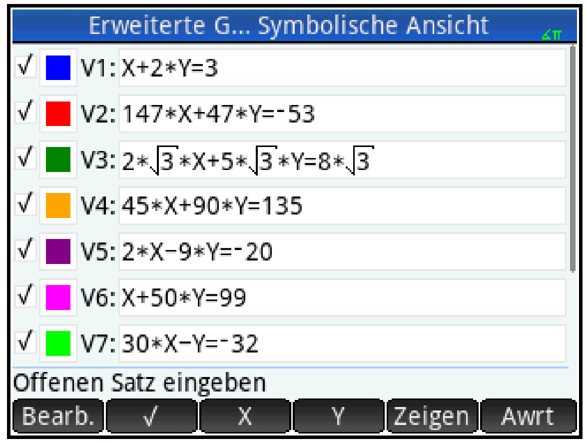
10. X = 2π/3 + 2πn

11. Die Lösungen sind X = π/3 + 2πn oder X = 2π/3 + 2πn.

Ein spezielles lineares Gleichungssystem

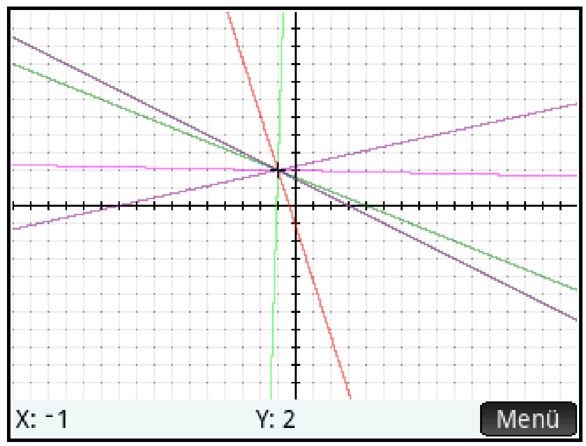
Angenommen, Sie haben ein lineares Gleichungssystem in der Standardform: Ax + By = C. Nehmen Sie weiterhin an, dass die Koeffizienten der einzelnen Gleichungen (A, B und C) eine arithmetische Folge bilden. Welche überraschende Eigenschaft haben sie alle gemeinsam?

1. Drücken Sie , um die App-Bibliothek zu öffnen, und wählen Sie die **Erweiterte Grafiken**-App aus.
2. Erstellen Sie mehrere lineare Gleichungen, deren Koeffizienten jeweils eine arithmetische Folge bilden. Die Abbildung rechts zeigt 7 solche Gleichungen.



Ich möchte die Schüler motivieren, sich eigene ausgefallene Beispiele auszudenken und zu verwenden!

3. Drücken Sie , um die Graphen anzuzeigen.



Auf den ersten Blick ist es überraschend, dass alle Geraden im Punkt mit den Koordinaten (-1, 2) zusammenfallen! Die Schüler sind neugierig, warum dies mathematisch gesehen der Fall sein muss!

Wie können wir die Gleichung AX+BY=C so umschreiben, dass die Tatsache erkennbar wird, dass A, B und C eine arithmetische Folge bilden? Beginnen Sie mit AX. B muss dann die Summe von A in einem beliebigen Wert sein. Wir schreiben dies als AX + (A+B)Y. Die Konstante C muss B größer sein als die Summe im Klammern, d. h. A+2B. Wir haben jetzt AX + (A+B)Y = A+2B.

Damit dies stimmt, d. h. auf beiden Seiten 2B steht, muss Y=2 sein. Wir erhalten somit:

AX+2(A+B)=A+2B oder

AX + 2A + 2B = A + 2B

Wir haben jetzt 2A auf der linken Seite aber nur 1A auf der rechten Seite. X= -1 ist somit die einzige Möglichkeit, damit die Gleichung stimmt. Daher enthält jede Gleichung mit dieser Eigenschaft den Punkt (-1, 2)! Erstaunlich!

Hinweise für Lehrer zu „Ein spezielles lineares Gleichungssystem“

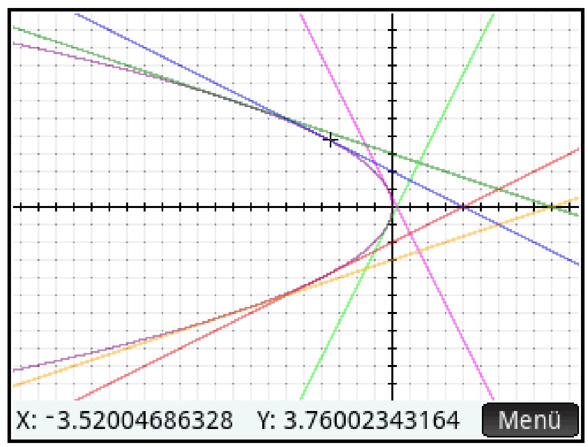
Das mathematische Problem in dieser Übung wurde auf einer NCTM National Conference-Unterrichtsstudie von Dan Kennedy vorgestellt. Da die Erweiterte Grafiken-App lineare Gleichungen in der Standardform darstellen kann, ist sie für diese Übung optimal geeignet. Die Tatsache, dass eine Gerade, deren Parameter in der Standardform aufeinander folgende Terme in einer arithmetischen Folge sind, den Punkt (-1, 2) enthalten muss, ist wirklich überraschend!

Obwohl diese Übung als Übung für Lehrer konzipiert wurde, veranschaulicht sie das Hauptrezept, um in der Mathematikdidaktik eine gute, interessante Übung für Schüler zu erstellen:

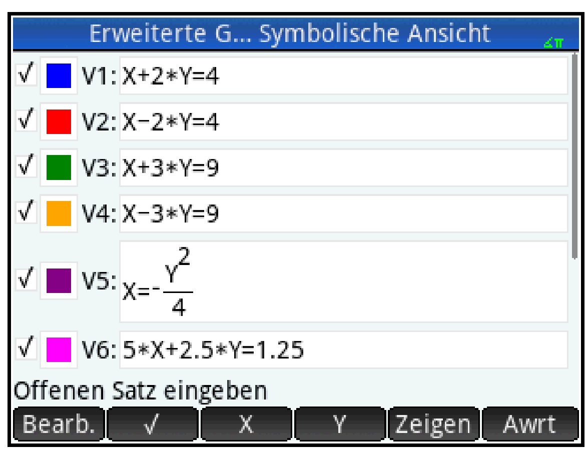
1. Die Übung behandelt ein Problem, das einfach genug ist, damit es von allen Schülern verstanden wird.
2. Das Ergebnis ist überraschend.
3. Die einzige Möglichkeit, das überraschende Ergebnis zu erklären, sind eine einwandfreie mathematische Argumentation, Beweisführung und Abhandlung.

Weitergehende Übungen

1. Was passiert, wenn die Parameter stattdessen aufeinander folgende Terme einer geometrischen Folge sind?



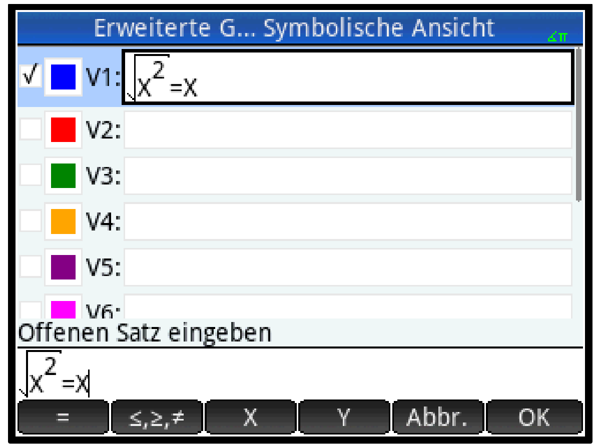
In diesem Fall weisen alle Geraden die Form $AX+ABY=AB^2$ auf, wobei $B\neq 0$ ist. Jede Gerade dieser Form hat einen y-Schnittpunkt bei B und eine Nullstelle bei B^2. Stellen Sie sich eine unendliche Anzahl von Geradenpaaren vor. Die Geraden in jedem Paar weisen eine gemeinsame Nullstelle bei B^2 sowie y-Schnittpunkte bei ±B auf. Diese Geraden bilden ein Bündel von Geraden, die scheinbar tangential zur Parabel $x=-\frac{1}{4}y^2$ sind. Es bleibt dem Leser überlassen, diese Vermutung zu beweisen.



Identitäten, Äquivalenz und Bedingungen

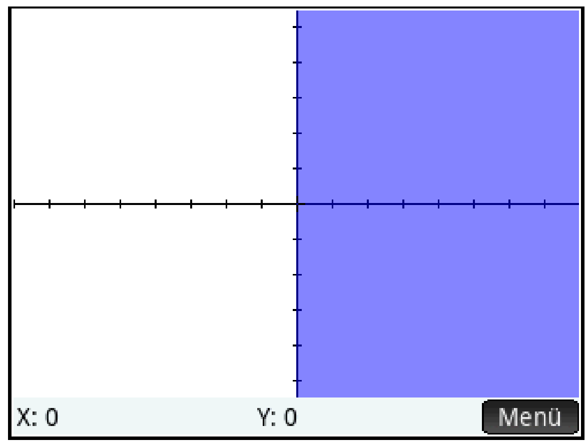
Schüler neigen im Allgemeinen dazu, sich lediglich einfache Identitäten zu merken. Der HP Prime verfügt jedoch über eine App, mit der Sie mathematische Aussagen in 1 oder 2 Variablen prüfen können!

1. Drücken Sie , um die App-Bibliothek zu öffnen, und wählen Sie die Erweiterte Grafiken-App aus. Die App wird in der symbolischen Ansicht geöffnet, in der Sie bis zu zehn mathematische Aussagen eingeben können. Dabei kann es sich um Gleichungen oder Ungleichungen handeln.
2. Geben Sie in V1 $\sqrt{X^2} = X$ ein. Tippen Sie auf , um ein Gleichheitszeichen einzugeben.



Wie sieht der Graph dieser Gleichung aus?

3. Drücken Sie , um den Graphen anzuzeigen. Die Aussage ist eine Gleichung, der Graph sieht aber aus wie der Graph einer Ungleichung, in diesem Fall X≥0.

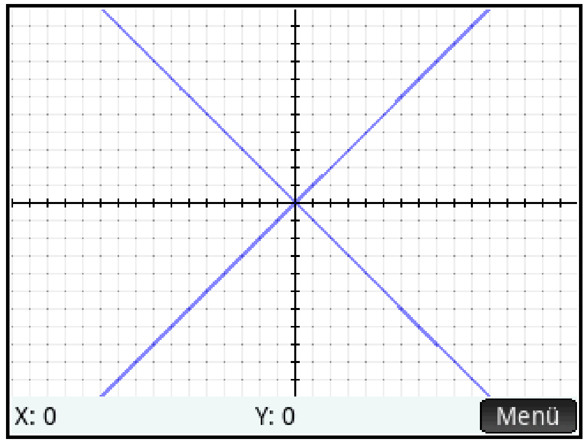


Die Schüler müssen erkennen, dass der Graph $\sqrt{X^2} = X \textit{ iff } X \geq 0$ bedeutet. Wenn sie dies erkannt haben, verfügen sie über eine relativ einfache Möglichkeit, um die meisten Identitäten zu prüfen, die in der Mathematik der Sekundarstufe vorkommen.

4. Probieren Sie folgende Gleichungen aus:
   - $\sqrt{X^2} = |X|$
   - $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
   - $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

Aussagen in zwei Variablen

Wenn $X^2 = Y^2$ ist, folgt daraus, dass *X*=*Y* ist? Das heißt, sind $X^2 = Y^2$ und X=Y äquivalente Ausdrücke?

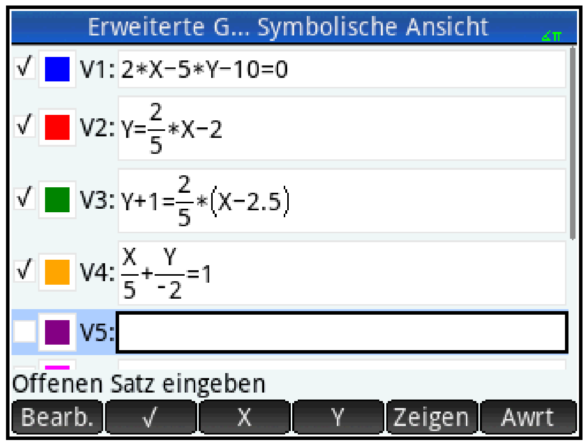


5. Drücken Sie und wählen Sie die Erweiterte Grafiken-App aus.
6. Geben Sie $X^2 = Y^2$ in V1 ein.
7. Drücken Sie . Der Graph ist rechts abgebildet.

Es gibt scheinbar 2 Möglichkeiten, eine davon ist X=Y. Die Schüler müssen den anderen Zweig als X= -Y erkennen.

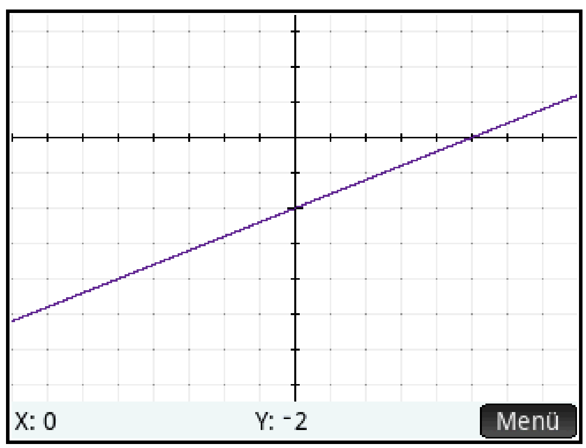
Wenn $X^2 = Y^2$ gilt, dann ist *X*=*Y* oder *X*= -*Y*.

8. Probieren Sie folgende Gleichungen aus:
   - Wenn $X^3=Y^3$ ist, folgt daraus, dass X=Y ist?
   - $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$
   - |X| + |Y| = |X+Y|
   - |X+Y|=X+Y



Flexible Graphendarstellung

In der Abbildung rechts wird eine einzelne Gerade in den 4 symbolischen Formen dargestellt, die Schüler normalerweise in der Sekundarschule antreffen. In der Erweiterte Grafiken-App werden all diese Formen als gültig angesehen.



Drücken Sie , um lediglich den Graphen einer Geraden anzuzeigen.

Diese unvergleichliche Flexibilität in der Erweiterte Grafiken-App bietet Schülern die Möglichkeit, eine Identität oder die Äquivalenz von zwei verschiedenen Ausdrücken zu prüfen. Schüler können damit auch eigene Problemlösungen entwickeln, ohne an die Strukturen gebunden zu sein, die von Maschinen auferlegt werden.

Hinweise für Lehrer zu „Identitäten, Äquivalenz und Bedingungen“

Diese Übung ist eine weitere Übung für Lehrer und keine Übung für Schüler. Die meisten Übungen mit Grafiktaschenrechnern fokussieren auf Funktionen. In Bezug auf die Erweiterte Grafiken-App muss darauf hingewiesen werden, dass Äquivalenz jetzt in einem allgemeineren Sinn untersucht werden kann.

In dieser Übung werden zwei Vorstellungen für grafische Darstellungen dargelegt:

1. Äquivalenz: die Vorstellung, dass zwei verschiedene Ausdrücke für alle reellen Zahlen gleich sind
2. Bedingte Äquivalenz: die Vorstellung, dass zwei verschiedene Ausdrücke für eine Teilmenge der reellen Zahlen gleich sind

Obwohl die Graphen für solche Aussagen keine Beweise für eine Äquivalenz oder bedingte Äquivalenz sind, bieten Sie Schülern sofort visuelle Einblicke, um eigene Vermutungen anzustellen und zu beweisen.

Lösungsschlüssel

2-3. In der kartesischen Ebene ist der Graph von $\sqrt{X^2} = X$ die Halbebene, in der X≥0 ist. Lehrer und Schüler, die es gewohnt sind, nur Funktionen grafisch darzustellen, haben möglicherweise keine klare Erwartung an den Graphen eines Ausdrucks, der nur X enthält. Die Tatsache, dass der Graph einer Gleichung der Graph einer Ungleichung zu sein scheint, führt direkt zur Vorstellung der bedingten Äquivalenz, nämlich dass $\sqrt{X^2} = X$ nur dann gilt, wenn X≥0 ist.

4. Alle folgenden Gleichungen sind Identitäten:

- $\sqrt{X^2} = |X|$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

7. Ein Beispiel für eine bedingte Äquivalenz in zwei Variablen ist: X^2 = Y^2, wenn X=Y ODER wenn X= -Y.

8.

- Wenn X^3=Y^3 ist, folgt daraus, dass X=Y ist? Ja, dies ist eine Identität.
- $\sqrt{x^2 + y^2} = x + y$ Für diese Gleichung sollten Sie die Achsen ausblenden. Die Aussage ist wahr, wenn x=0 und y≥0 gilt oder wenn y=0 und x≥0 gilt.
- |X| + |Y| = |X+Y| ist wahr, wenn X und Y im ersten und im dritten Quadranten liegen. Das heißt, die Aussage ist nur dann wahr, wenn X und Y das gleiche Vorzeichen haben.
- |X+Y|=X+Y ist nur dann wahr, wenn Y≥-X ist. Der Graph ist die obere Halbebene begrenzt durch Y=-X.

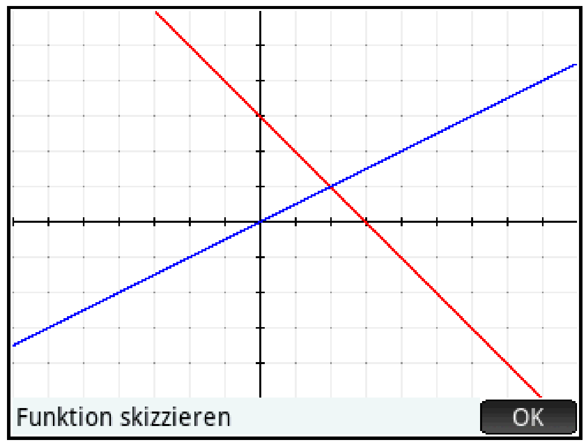
Arbeiten mit Funktionen

In dieser Übung untersuchen wir zwei lineare Funktionen und ermitteln deren Summe und Differenz.

1. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die Funktionen-App. Geben Sie F1(X)=0.5*X und F2(X)= -X+3 ein (siehe Abbildung).
2. Drücken Sie Plot Setup, um die Graphen dieser beiden linearen Funktionen anzuzeigen.

Wir möchten die Summe dieser beiden linearen Funktionen zeichnen.

3. Tippen Sie auf Menü, um das Menü der grafischen Ansicht zu öffnen, und tippen Sie auf Skizzieren.



Überlegen Sie gründlich, wie die Summe dieser beiden Funktionen aussieht, bevor Sie sie zeichnen. Betrachten Sie für jeden x-Wert die entsprechenden y-Werte und addieren Sie sie. Für welche x-Werte ist dies am einfachsten? Wie viele x-Werte brauchen Sie, damit Sie den Graphen zeichnen können?

4. Zeichnen Sie die Differenz mit dem Finger. Tippen Sie dann zweimal auf OK. Die Gleichung für die Summe befindet sich jetzt in F3(X).
5. Beantworten Sie die Fragen und tragen Sie die Gleichung der Summe unten ein.

5.1 Bei welchen x-Werten ist die Addition der y-Werte am einfachsten?

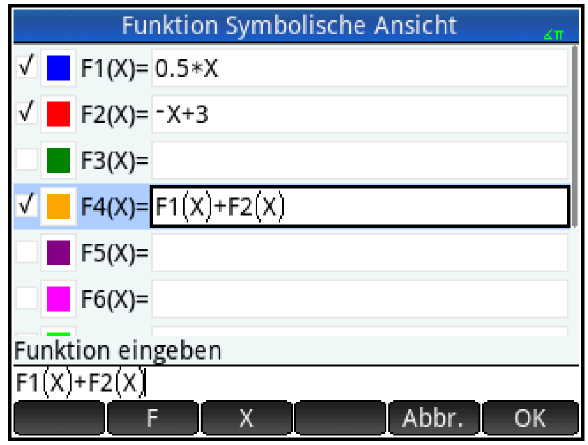
____

5.2 Wie viele Punkte brauchen Sie, damit Sie die Summe zeichnen können?

____

5.3 Wie lautet die Gleichung der Summe? F3(X) = ____

6. Drücken Sie Symb, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren. Die Summe befindet sich in F3(X). Geben Sie F4(X)=F1(X)+F2(X) ein. Drücken Sie Plot, um die dargestellte Summe mit Ihrer Schätzung zu vergleichen. Waren Sie nah an der Lösung dran?



7. Wie lautet die Gleichung der Summe?

F1(X)+F2(X)=_________________________

Als nächstes wollen wir die Differenz der beiden Funktionen, F1(X)-F2(X), untersuchen.

8. Drücken Sie Symb, um die symbolische Ansicht aufzurufen, und deaktivieren Sie F3(X) und F4(X), damit sie nicht dargestellt werden.
9. Drücken Sie Plot, um die grafische Ansicht aufzurufen. Tippen Sie auf Menü, um das Menü der grafischen Ansicht zu öffnen, und dann auf Skizzier.

Überlegen Sie erneut gründlich, wie die Differenz dieser beiden Funktionen aussieht, bevor Sie sie zeichnen. In diesem Fall ist dies der blaue Graph abzüglich des roten Graphen. Betrachten Sie für jeden x-Wert die entsprechenden y-Werte und subtrahieren Sie sie in der entsprechenden Reihenfolge. Für welche x-Werte ist dies am einfachsten? Wie viele x-Werte brauchen Sie, damit Sie den Graphen zeichnen können?

10. Zeichnen Sie die Differenz mit dem Finger. Tippen Sie dann zweimal auf OK. Die Gleichung für die Differenz befindet sich jetzt in F5(X).
11. Beantworten Sie die Fragen und tragen Sie die Gleichung der Differenz rechts ein.

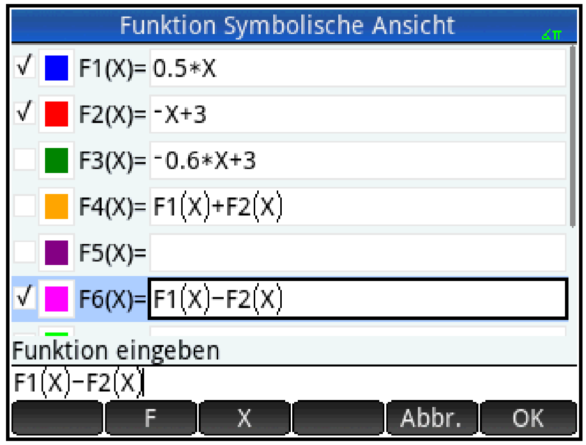
11.1 Bei welchen x-Werten ist die Subtraktion der y-Werte am einfachsten?

11.2 Wie viele Punkte brauchen Sie, damit Sie die Differenz zeichnen können?

11.3 Wie lautet die Gleichung der Differenz?

F5(X)=____________________________________

12. Drücken Sie Symb, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren. Die Differenz befindet sich in F5(X). Geben Sie F6(X)=F1(X)-F2(X) ein. Drücken Sie Plot, um die dargestellte Differenz mit Ihrer Schätzung zu vergleichen. Waren Sie nah an der Lösung dran?



13. Wie lautet die Gleichung der Differenz?

F1(X)-F2(X)=________________________________

14. Können Sie anhand des Gelernten die Gleichung von F2(X)-F1(X) angeben, ohne sie zu skizzieren?

F2(X)-F1(X)=________________________________

Hinweise für Lehrer zu „Arbeiten mit Funktionen“

Diese Übung stammt von Eduardo Basurto und Eduardo Mancera bei SIRVE in Mexiko. Sie ist eine gute Möglichkeit, um die Vorstellungskraft der Schüler von Operationen mit Zahlen auf Operationen mit Funktionen zu erweitern. Die grafische Vorgehensweise hat den Vorteil, dass sich die Schüler mehr auf die Operationen und nicht auf die Symbole konzentrieren. Hier werden Summe und Differenz von zwei linearen Funktionen untersucht. Die weitergehenden Übungen für Produkt und Quotient sind aber auch ein Muss!

Lösungsschlüssel

5.1 Die beiden Punkte, an denen eine Gerade die x-Achse schneidet, ermöglichen die einfachste Visualisierung der Summe (da ein Element der Summe null ist).

5.2 Anhand der symbolischen Form AX+B sollten die Schüler erkennen, dass die Summe weiterhin dieselbe Form aufweist. Eine andere Vorgehensweise wäre, die Schüler die Koordinaten von 3 oder 4 Punkten der Summe berechnen zu lassen. Danach sollten sie erkennen können, dass diese Punkte kollinear sind.

5.3 F3(X)= -X/2+3 ist die Summe. Die Antworten können schwanken. Sie hängen von der jeweiligen Fähigkeit der Schüler ab, Geraden mit dem Finger zu zeichnen.

6. Die Geraden der Schüler sollten allerdings in der Nähe der in F4(X) definierten Summe liegen. Nutzen Sie andernfalls die Gelegenheit, um Fehler zu erörtern.

7. Die Summe ist F1(X)+F2(X)= -X/2+3

11.1 Der einfachste Punkt für die grafische Darstellung ist der Schnittpunkt der Geraden, da die Differenz null ist. Diese Erkenntnis ist übrigens auch ein wichtiges Konzept, das Schüler begreifen müssen, und ein wichtiges Element bei der Untersuchung von Schnittpunkten im Allgemeinen. Danach sind die beiden Nullstellen am einfachsten.

11.2 Die Schüler sollten erneut erkennen, dass auch die Differenz linear ist (mit der Möglichkeit einer Steigung von null). Andernfalls müssen sie die Koordinaten von 3-4 Punkten berechnen, damit sie die Kollinearität erkennen.

11.3 Die Differenz sollte in der Nähe von F5(X)=1.5X-3 liegen.

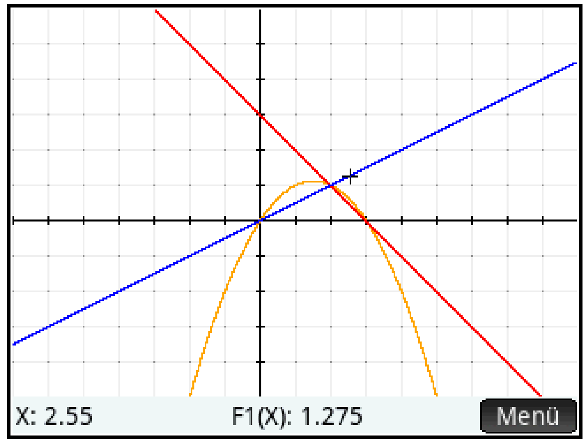
12. Die Skizzen der Schüler sollten in der Nähe der obigen Gleichung liegen. Nutzen Sie andernfalls wieder die Gelegenheit, um Fehler zu erörtern.

13. F1(X)-F2(X)=1.5X-3

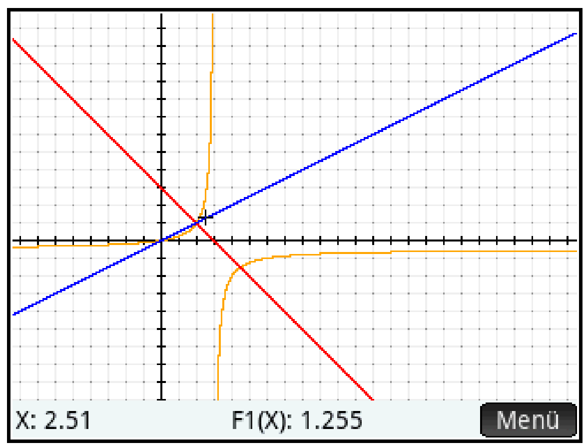
14. F2(X)-F1(X)= -1.5X+3. Sie sollten die Schüler anregen, die Gleichungen für F1(X) und F2(X) zu betrachten und diese mit den Gleichungen für F1(X)+F2(X) und F1(X)-F2(X) zu vergleichen, bevor sie sich mit F2(X)-F1(X) beschäftigen, ohne eine Skizze zu erstellen.

Weitergehende Übungen

1. Lassen Sie die Schüler F1(X)*F2(X) skizzieren. Hier sind die Nullstellen von Bedeutung, da das Produkt ebenfalls diese Nullstellen aufweist. Dies ist eine gute Möglichkeit, um die multiplikative Eigenschaft von null im Kontext zu erkennen. Lassen Sie die Schüler dann den Bereich zwischen den Nullstellen untersuchen sowie das Vorzeichen der einzelnen Funktionen und das Vorzeichen des Produkts angeben. Lassen Sie die Schüler dann beide Seiten der Nullstellen untersuchen sowie das Vorzeichen der einzelnen Funktionen und das Vorzeichen des Produkts angeben. Die Skizzen der Schüler stimmen wie bei Summe oder Differenz u. U. nicht mit dem wirklichen Graphen überein. Aber auch dies ist lehrreich.



2. F1(X)/F2(X) ist kniffliger, kann aber auch zu einigen wichtigen Beobachtungen führen:
   a. Der Quotient nähert sich -1/2, wenn x gegen ±∞ geht. Dies kann durch Zoomen festgestellt werden.
   b. Der Wert des Quotienten am Schnittpunkt der Geraden ist Eins.
   c. Wenn sich x von beiden Seiten dem Wert 3 nähert, geht der Nenner gegen Null, sodass der absolute Wert des Quotienten extrem groß wird.



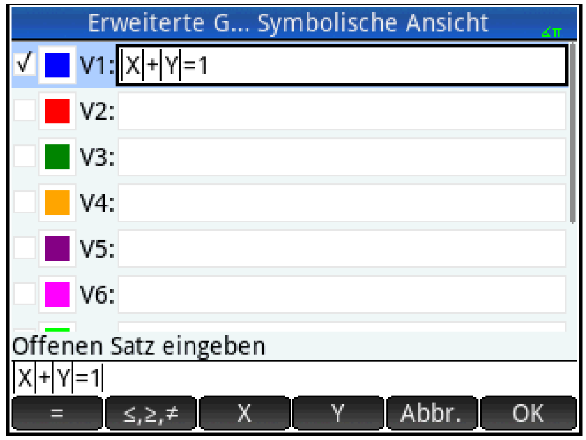
All dies sind wichtige mathematische Erkenntnisse!

Mathematische Kunst

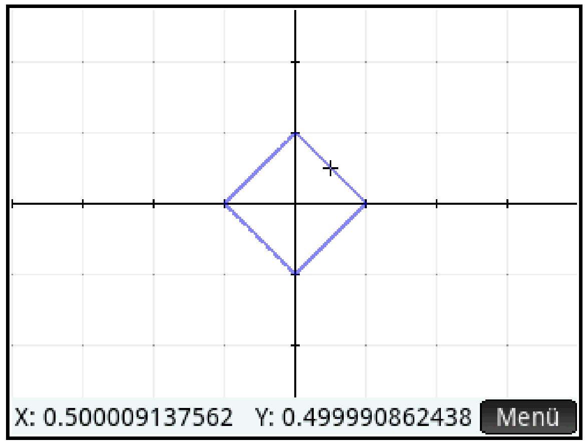
In dieser Übung finden Sie einige Tipps und Tricks zur Verwendung der Erweiterte Grafiken-App.

Erstellen einer Grundform

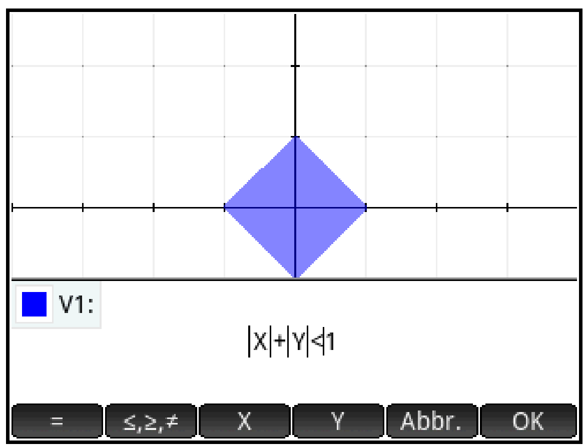
1. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen. Setzen Sie die Einstellungen zurück und starten Sie die App **Erweiterte Grafiken**. Geben Sie in V1 |X| + |Y| = 1 ein. Wie sieht der Graph dieser Gleichung aus?



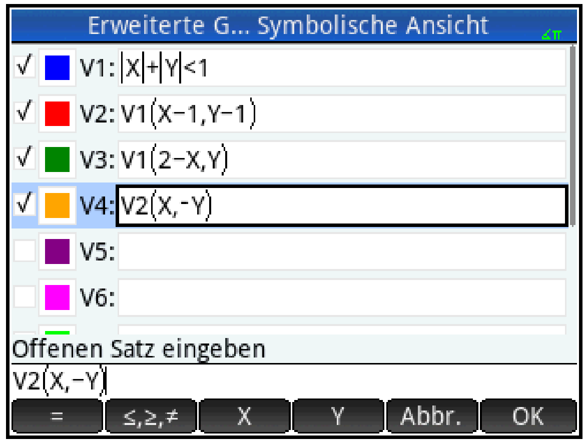
2. Der Graph ist eine Raute (Quadrat)!



3. Tippen Sie auf Menü und dann auf Def. Tippen Sie in die Definition und ändern Sie = in <. Tipp: Tippen Sie auf ≤,≥,≠, um das Kleinerzeichen anzuzeigen. Tippen Sie auf OK, um die gefüllte Raute anzuzeigen.



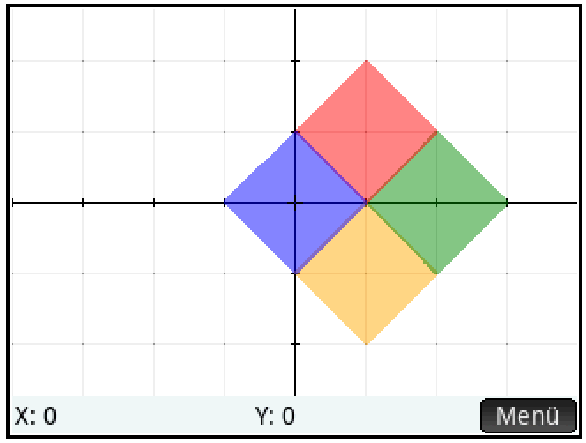
Verwendung geometrischer Transformationen



Wir können V1 als Grundform verwenden, um alle möglichen Designs zu erstellen. In der Abbildung rechts wurde V2 als Verschiebung von V1 um 1 Einheit nach oben und 1 Einheit nach rechts definiert. V3 wurde als Spiegelung von V1 um die vertikale Gerade X=1 und V4 als Spiegelung von V2 um die x-Achse definiert.

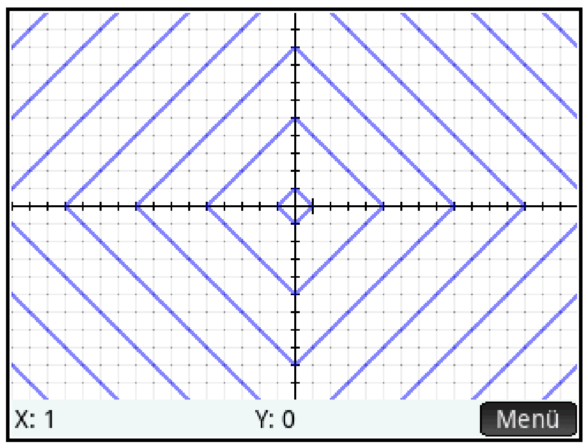
4. Definieren Sie V2, V3 und V4 wie gezeigt.

5. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen anzuzeigen.



Mein Lieblingstrick

6. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und löschen Sie V2, V3 und V4. Definieren Sie jetzt V1 als $SIN\left(\frac{\pi}{2}(|X|+|Y|)\right)=1$. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen anzuzeigen. Jetzt sind die Rauten konzentrisch! Die auf der positiven x-Achse liegenden Eckpunkte sind (1, 0), (5, 0), (9, 0), (13, 0), ... Warum ist das so?



Dieses Verfahren kann auf beliebige Ausdrücke in X und Y erweitert werden: $SIN\left(\frac{\pi}{2}(F(X,Y))\right)=1$

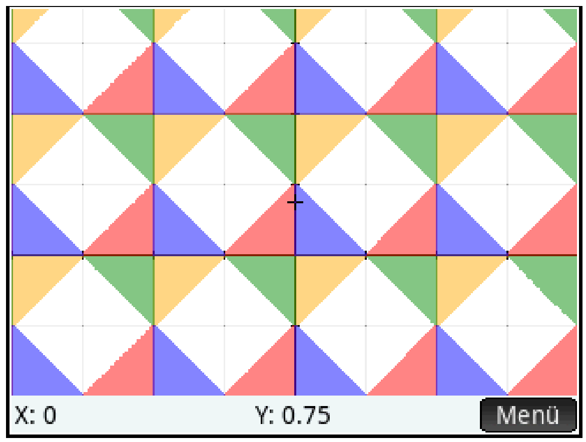
7. Probieren Sie $SIN\left(\frac{\pi}{2}\left(X^2+Y^2\right)\right)=1$ aus und beschreiben Sie den Graphen.

---

8. Geben Sie F(X, Y) = $\left(X^2+\left(Y-\sqrt[3]{X^2}\right)^2\right)$ ein. Können Sie den Graphen beschreiben?

Ein weiterer Trick

9. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und ändern Sie V1 in |X MOD 2| + |Y MOD 2| < 1. Können Sie sich vorstellen, wie V2, V3 und V4 definiert werden müssen, um den gezeigten Graphen zu erhalten?



V2:____

V3:____

V4:____

Hinweise für Lehrer zu „*Mathematische Kunst*“

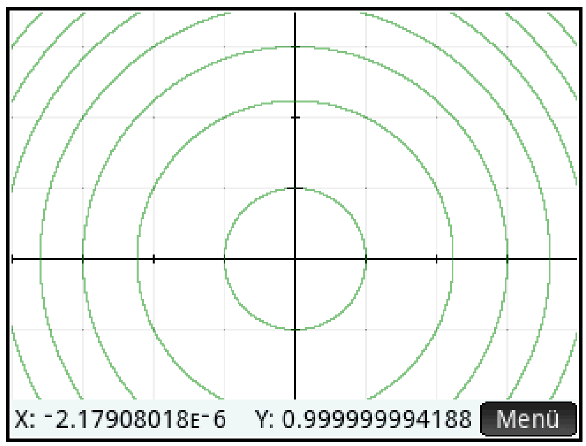
In dieser Übung werden Verfahren beschrieben, mit denen in der Erweiterte Grafiken-App grafische Designs erstellt werden können. Im ersten Verfahren wird eine Grundform erstellt. Anschließend werden geometrische Standardtransformationsverfahren verwendet. Wenn V1 die Definition der Grundform enthält, können Sie in V2-V9 folgende Transformationen (oder Kombinationen davon) eingeben:

- V1(Y, X) stellt die Inverse von V1 dar.
- V1(2A-X, Y) stellt die Spiegelung von V1 um die vertikale Gerade X=A dar.
- V1(X, 2B-Y) stellt die Spiegelung von V1 um die horizontale Gerade Y=B dar.
- V1(X-A, Y-B) verschiebt V1 um A Einheiten horizontal und um B Einheiten vertikal.
- V1(AX, BY) streckt V1 horizontal um den Skalierungsfaktor A und vertikal um B.

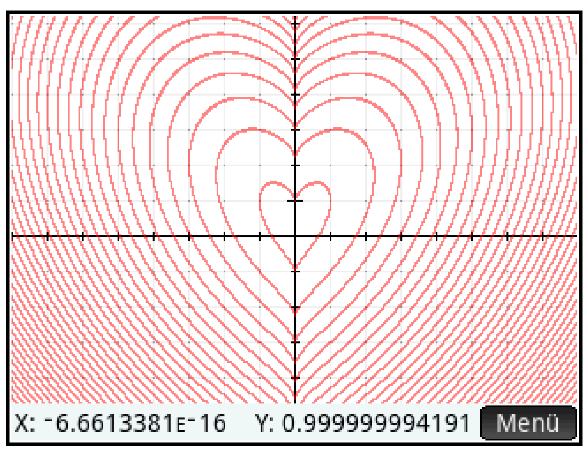
HINWEIS: Obwohl diese Schreibweise u. U. nicht üblich ist, ist leicht erkennbar, wie damit das gewünschte Design erstellt werden kann.

6. sin(x) weist bei x= π/2, 5π/2, 9π/2, … den Wert 1 auf. Daher ist $SIN\left(\frac{\pi}{2}\left(|X|+|Y|\right)\right)=1$ richtig, wenn |X|+|Y|= 1, 5, 9, 13, … ist. |X|+|Y|=1 ist jedoch eine Raute, sodass |X|+|Y|=5, |X|+|Y|=9 usw. ist. So entstehen konzentrische Rauten!

7. Analog entstehen mit $SIN\left(\frac{\pi}{2}\left(X^2+Y^2\right)\right)=1$ konzentrische Kreise. In diesem Fall sind die Radien der Kreise $1, \sqrt{5}, 3, \sqrt{13}, \ldots$. Daher ist auch hier das Muster 1, 5, 9, 13, …, 4N+1, … (wobei N eine positive Ganzzahl ist) zutreffend.



8. Dieses Design wurde mit freundlicher Genehmigung von Mark Howell zur Verfügung gestellt. Geben Sie für V1 SIN((π/2)*(X^2+(Y-((3) NTHROOT (X^2)))^2))=1 ein. Sie können die Formel auch kopieren und in den virtuellen HP Prime einfügen!



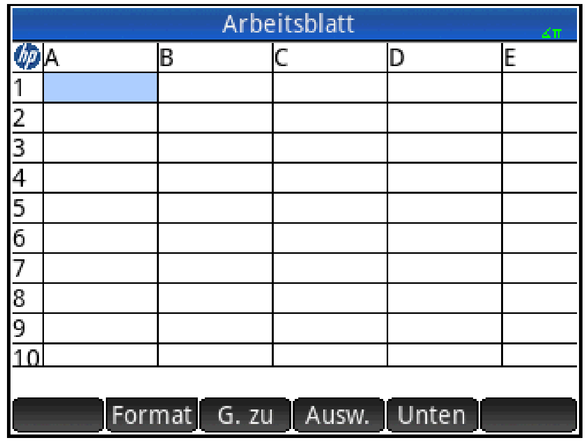
9. Durch die folgenden Definitionen entstehen dreieckige Muster. Die MOD-Anweisung beschränkt die ursprüngliche Raute auf das Dreieck im ersten Quadranten, wiederholt das Dreieck aber auch alle 2 Einheiten vertikal und horizontal.

- V1: |X MOD 2| + |Y MOD 2| < 1 (gegeben)
- V2: V1(2-X, Y)
- V3: V2(X, 2-Y)
- V4: V3(2-X, Y)

Kuriose Parabeln

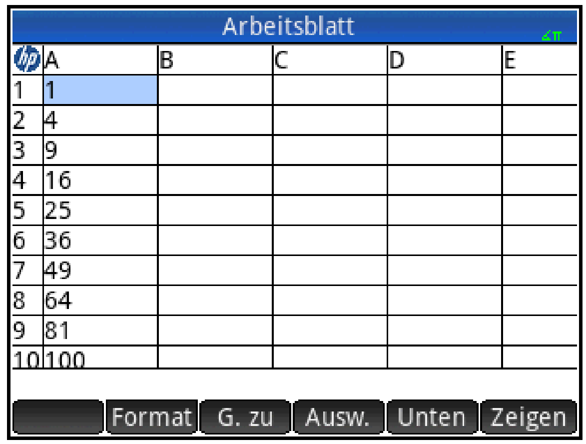
In dieser Übung versuchen wir, eine Parabel mit der Eigenschaft zu konstruieren, dass kein Punkt der Parabel Ganzzahlen für beide Koordinaten aufweist. Denken Sie, das ist möglich?

Zunächst wissen wir, dass die Parabel einen x^2- oder einen y^2-Term aufweisen muss.



1. Drücken Sie , um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die Spreadsheet-App. Tippen Sie auf den Kopf der Spalte A, um die ganze Spalte mit einem einzigen Befehl zu definieren.

In diesem Fall soll Spalte A $(\text{Row})^2$ anzeigen, wobei „Row“ eine Variable ist, die die Zeilennummer der jeweiligen Zelle darstellt.



2. Drücken Sie , um ein Gleichheitszeichen einzufügen. Drücken Sie , um das Menü für Variablen zu öffnen, und tippen Sie auf App. Tippen Sie jetzt auf **Spreadsheet**, **Numerisch** und wählen Sie **Row** aus. Drücken Sie , um die Variable „Row“ zu quadrieren, und drücken Sie , um die Spalte A mit den quadrierten Zeilennummern anzuzeigen.
3. Scrollen Sie in der Spalte nach unten. Was beobachten Sie in Bezug auf die letzten Ziffern aller Quadrate der positiven Ganzzahlen? Welche Zahlen von 0-9 können die letzte Ziffer eines Quadrats sein und welche nicht?

3.1 Quadrate von Ganzzahlen müssen mit einer der folgenden Ziffern enden:

3.2 Quadrate von Ganzzahlen können nicht mit folgenden Ziffern enden:

____

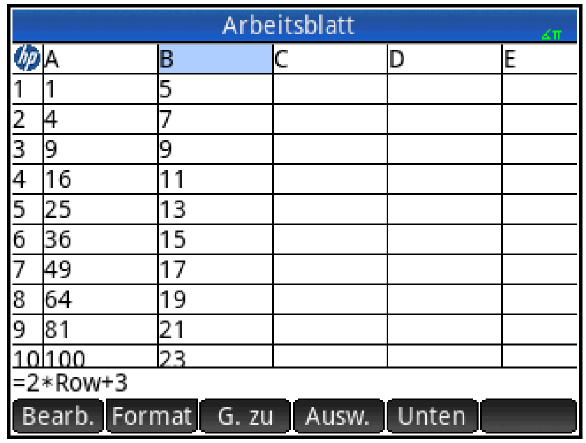
Angenommen, wir beginnen mit Y^2 = A*X+B als Gleichung für unsere Parabel. Wir wissen, dass Y^2 – wie oben festgestellt – nur mit bestimmten Ziffern enden kann. Wenn wir A*X+B so gestalten, dass die letzte Ziffer eine der anderen Ziffern ist, können wir sicherstellen, dass unsere Parabel keine Koordinatenpaare aufweist, die nur ganzzahlig sind! Lassen Sie uns annehmen, dass A und B einstellige Ganzzahlen sind, und die Suche beginnen.

4. Tippen Sie auf den Kopf von Spalte B. Drücken Sie Shift =, um ein Gleichheitszeichen einzufügen. Geben Sie einen Wert für A ein und drücken Sie ×. Drücken Sie Vars, um das Menü für Variablen zu öffnen, und tippen Sie auf App. Tippen Sie jetzt auf **Spreadsheet**, **Numerisch** und wählen Sie **Row** aus. Drücken Sie + und geben Sie eine weitere einstellige Ziffer ein. Drücken Sie Enter, um die Spalte B mit Werten zu füllen. Tippen Sie bei Bedarf auf den Kopf von Spalte B und dann auf Bearb., um die Werte von A und B zu ändern. In der Abbildung rechts können A=2 und B=3 nicht richtig sein, da die Zahlen in Spalte B mit 1, 5 oder 9 enden und diese Ziffern auch Endziffern von Quadratzahlen sein können.
5. Nachdem Sie die richtigen Werten für A und B gefunden haben (es gibt zwei Lösungen!), drücken Sie Apps, um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die Erweiterte Grafiken-App. Geben Sie die Gleichung in V1 ein und drücken Sie Plot, um den Graphen anzuzeigen, bzw. Num, um eine Wertetabelle anzuzeigen. Geben Sie die Gleichung unten ein.

____

Ich habe auch die zweite Lösung gefunden:

____

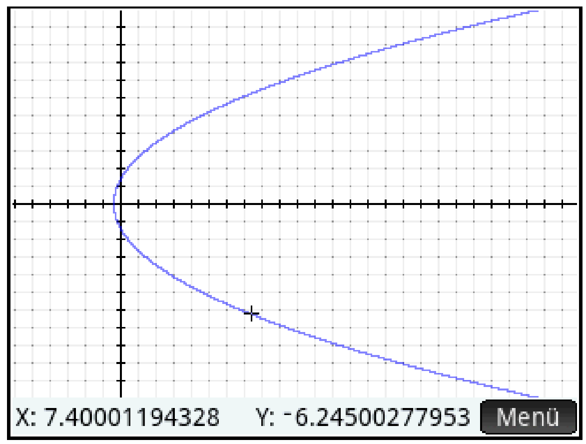


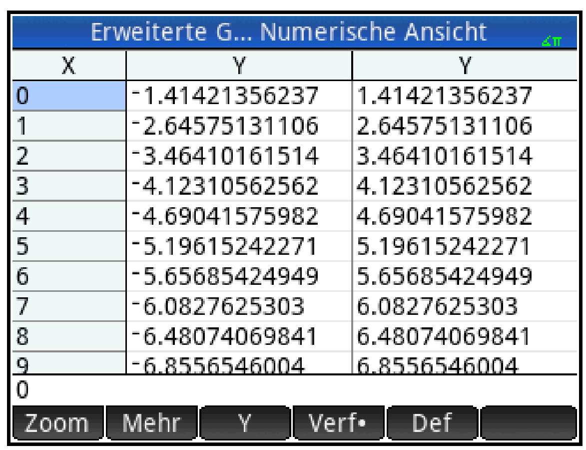
Arbeitsblatt

	A	B	C	D	E
1	1	5			
2	4	7			
3	9	9			
4	16	11			
5	25	13			
6	36	15			
7	49	17			
8	64	19			
9	81	21			
10	100	23			

=2*Row+3

Bearb. Format G. zu Ausw. Unten





Erweiterte G... Numerische Ansicht

X	Y	Y
0	⁻1.41421356237	1.41421356237
1	⁻2.64575131106	2.64575131106
2	⁻3.46410161514	3.46410161514
3	⁻4.12310562562	4.12310562562
4	⁻4.69041575982	4.69041575982
5	⁻5.19615242271	5.19615242271
6	⁻5.65685424949	5.65685424949
7	⁻6.0827625303	6.0827625303
8	⁻6.48074069841	6.48074069841
9	⁻6.8556546004	6.8556546004

0

Zoom Mehr Y Verf• Def

Hinweise für Lehrer zu „*Kuriose Parabeln*“

Dieses Problem entstammt *Challenging Problems in Algebra* von Alfred S. Posamentier und Charles T. Salking (Dover 1996). Das Problem beinhaltet etwas Zahlentheorie. Die Herausforderung besteht darin, eine Parabel mit der Eigenschaft zu finden, dass es keine Punkte auf der Parabel gibt, deren beiden Koordinaten jeweils ganzzahlig sind. Das Verfahren besteht darin, dafür zu sorgen, dass die linke Seite der Gleichung nur Quadratzahlen enthält (Y^2), sodass wir wissen, dass nur die Zahlen der Menge {0, 1, 4, 5, 6, 9} als letzte Ziffer infrage kommen. Wir legen die rechte Seite jetzt als linearen Ausdruck A*X+B fest, sodass die Endziffern der Ergebnisse in der Menge {2, 3, 7, 8} enthalten sind. Dadurch wird sichergestellt, dass Y^2 und A*X+B niemals gleich sein können, wenn X und Y Ganzzahlen sind.

Lösungsschlüssel

3.1 Quadrate von Ganzzahlen enden mit folgenden Ziffern: {0, 1, 4, 5, 6, 9}

3.2 Quadrate können nicht mit folgenden Ziffern enden: {2, 3, 7, 8}

5. Wenn X eine Ganzzahl ist, endet 5*X+2 mit 2 oder 7 und 5*X+3 immer mit 3 oder 8. Das heißt, für die Parabel kommt $Y^2 = 5*X+2$ oder $Y^2 = 5*X+3$ infrage.

Um die Tabelle in der letzten Abbildung anzuzeigen, drücken Sie Shift Num Setup. Ändern Sie in den numerischen Einstellungen **X-Startwert** in 0 und **X-Schrittweite** in 1. Drücken Sie jetzt Num Setup, um die numerische Ansicht zu öffnen. Tippen Sie auf Verf• und wählen Sie **Rand** aus. Tippen Sie auf X, um die Tabelle basierend auf den x-Werten anzuzeigen. Die Tabelle ist natürlich kein Beweis, aber eine Bestätigung für die Untersuchung der Schüler in Frage 5.

Weitergehende Übungen

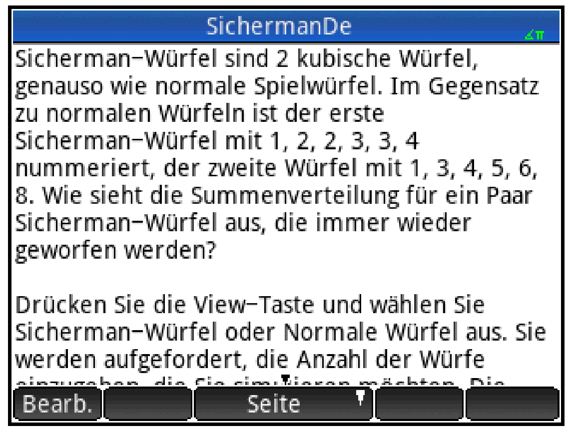
1. Vertauschen Sie die Rollen von x und y, um zwei neue Gleichungen mit derselben Eigenschaft zu erhalten.
2. Lassen Sie die Schüler 5*X+2, 5*X+7, 5*X-3 usw. untersuchen. Wie viele solche Parabeln gibt es?

Sicherman-Würfel

Bei dieser Übung aus dem Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung wird untersucht, was passiert, wenn Sie die Ziffern auf einem Würfelpaar ändern. Die Sicherman-Würfel weisen wie normale Würfel eine kubische Form auf und sind mit positiven Ganzzahlen nummeriert. Im Gegensatz zu normalen Würfeln ist der erste Sicherman-Würfel mit 1, 2, 2, 3, 3 und 4 nummeriert und der zweite Sicherman-Würfel mit 1, 3, 4, 5, 6, 8. Wie sieht die Verteilung der Summe der einzelnen Würfe aus, wenn die Sicherman-Würfel wiederholt geworfen werden?

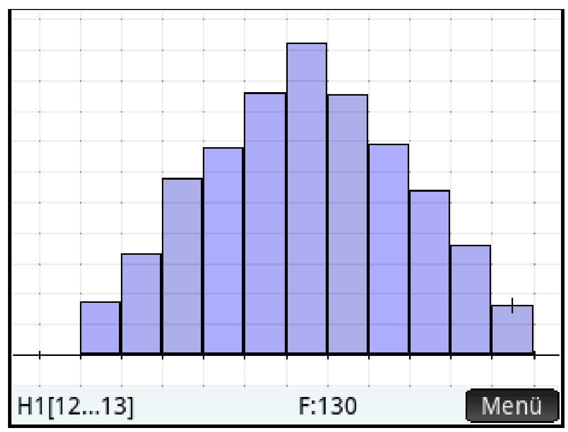
Um das Werfen von normalen Würfeln und Sicherman-Würfeln zu simulieren, haben wir eine App namens *Sicherman* erstellt. Sie erhalten die Sicherman-App von Ihrem Kursleiter.

1. Drücken Sie Apps Info und tippen Sie auf das Symbol für die **Sicherman**-App



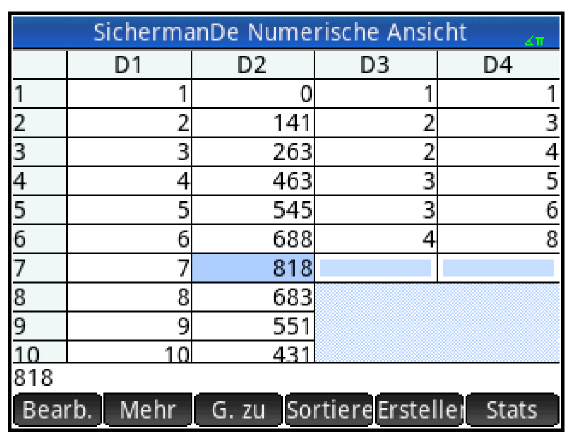
Die App ist so programmiert, dass sie mit der Infoansicht geöffnet wird (mehr dazu weiter unten). Sie können jederzeit Shift Apps Info (Info) drücken, um zu dieser Ansicht zurückzukehren. In dieser Ansicht wird die App allgemein beschrieben und der Schüler angewiesen, View Copy zu drücken, um die Simulation zu starten.

2. Drücken Sie View Copy und wählen Sie **Regular Dice** aus. Sie werden aufgefordert, die Anzahl der Würfe einzugeben. Geben Sie 5000 ein und drücken Sie Enter.
3. Die Simulation wird ausgeführt und das Histogramm der Summen der Würfe wird angezeigt.



Wie in der Abbildung rechts gezeigt, ist die Verteilung wie erwartet symmetrisch mit dem Mittelwert 7.

4. Drücken Sie Num Setup, um die Daten anzuzeigen.



	D1	D2	D3	D4
1	1	0	1	1
2	2	141	2	3
3	3	263	2	4
4	4	463	3	5
5	5	545	3	6
6	6	688	4	8
7	7	818		
8	8	683		
9	9	551		
10	10	431		

Die Spalte D1 enthält die möglichen Summen. Die Spalte D2 enthält die entsprechende Häufigkeit für die einzelnen Summen in D1. Die Spalten D3 und D4 stellen die Ziffern der beiden Würfel dar, die in der Simulation verwendet werden.

5. Drücken Sie jetzt und wählen Sie **Sicherman Dice** aus. Führen Sie eine Simulation mit 5000 Würfen mit diesen Würfeln aus. Beschreiben Sie, was Sie anhand der Daten und im Histogramm feststellen.

6. Füllen Sie die nachstehende Tabelle der Summen aus. Die erste Zeile enthält die Ziffern auf einem der Würfel. Die erste Spalte enthält die Ziffern auf dem anderen Würfel. Alle anderen Zellen in der Tabelle enthalten die Summe der jeweiligen Zeilen- und Spaltenköpfe. Die erste Zeile wurde bereits ausgefüllt.

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3						
4						
5						
6						
8						

7. Verwenden Sie jetzt die obige Tabelle, um die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Summen von 2-12 einzutragen. Die Wahrscheinlichkeit einer 2 wurde bereits eingetragen.

Summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36										

Was stellen Sie zur Wahrscheinlichkeitsverteilung der Summe eines Sicherman-Würfelpaars fest?

Hinweise für Lehrer zu „*Sicherman-Würfel*“

Sicherman-Würfel sind nach ihrem Erfinder, George Sicherman, benannt. Sie wurden erstmals 1978 bei der Beantwortung der Frage beschrieben, ob es möglich ist, ein Würfelpaar zu erdenken, das standardmäßig die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung für deren Summen aufweist. Wie bei normalen Würfeln ist die Summe der Zahlen auf gegenüberliegenden Seiten gleich. Bei normalen Würfeln beträgt die Summe auf gegenüberliegenden Seiten 7. Bei Sicherman-Würfeln beträgt die Summe auf gegenüberliegenden Seiten beim ersten Würfel 5 und 9 beim zweiten. Diese Übung ist hervorragend als Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung geeignet. Normalerweise habe ich mehrere Sicherman-Würfel zur Verfügung (die oftmals als verrückte Würfel vermarktet werden), mit denen die Schüler spielen können.

Hinweis: Wenn Schüler diese App zum ersten Mal starten, MÜSSEN sie Shift 1 Program (Program) drücken, um die Programmbibliothek aufzurufen, dann das Programm „Sicherman“ auswählen und auf Bearb. tippen, um das Programmlisting zu öffnen. Anschließend müssen sie Settings drücken, um die Startansicht anzuzeigen und die Simulation durchzuführen. Durch diese Schritte wird das App-Programm beim System registriert.

Lösungsschlüssel

In den Fragen 1-4 führen die Schüler eine Simulation mit 5000 Würfen eines normalen Würfelpaars aus. Das Ergebnis ist erwartungsgemäß: Die Verteilung der Summen ist sehr symmetrisch, wobei die Zahl 7 am häufigsten vorkommt.

5. Wenn die Schüler die Simulation mit 5000 Würfen eines Sicherman-Würfelpaars wiederholen, sind sie in der Regel sehr überrascht, dass das Ergebnis sehr ähnlich ist: eine symmetrische Verteilung, wobei 7 am häufigsten vorkommt. Wie kann das sein?

6. Nachstehend finden Sie eine Tabelle mit den möglichen Summen.

	1	2	2	3	3	4
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

7. Hier ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung dargestellt. Die Brüche wurden nicht vereinfacht.

Summe	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Weitergehende Übungen

1. Wechseln Sie zurück zur numerischen Ansicht (die die Daten der Sicherman-Simulation enthält) und vergleichen Sie die theoretischen Wahrscheinlichkeiten mit den experimentellen Wahrscheinlichkeiten. In der Abbildung für unsere Simulation weist die experimentelle Wahrscheinlichkeit einer Summe von 7 beispielsweise den Wert 849/5000 auf (ungefähr 0.1698). Die theoretische Wahrscheinlichkeiten ist 1/6 (0.1666…). Diese beiden Werte liegen ziemlich nah beieinander!

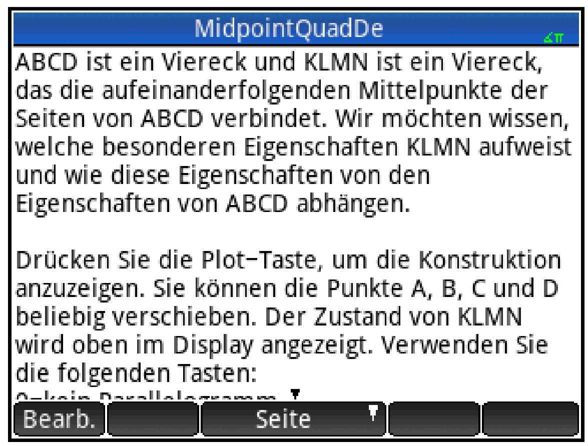
Vermutung und Beweis: Mittelpunktvierecke

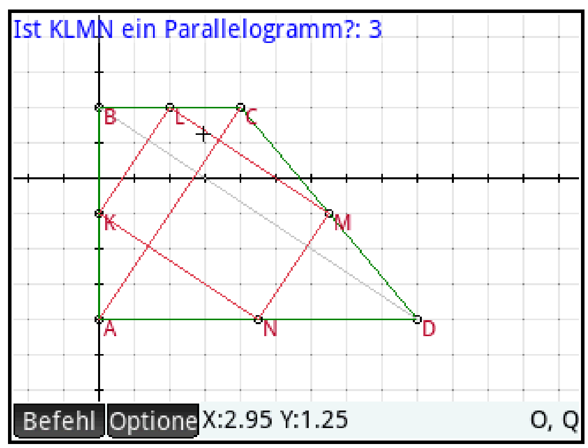
Die geometrische Konstruktion, die die Grundlage dieser Übung bildet, besteht aus einem Viereck ABCD. Die Mittelpunkte der Seite dieses Vierecks werden ermittelt und KLMN genannt. Anschließend wird das Viereck KLMN konstruiert. Wir haben eine App namens *MidpointQuad* erstellt, die diese Konstruktion enthält. Sie basiert auf der integrierten HP Prime Geometrie-App. Die App verwendet daher die in der folgenden Tabelle aufgeführten Tasten der Primär-App.

Taste	Ansichtsname	Beschreibung
Apps Info	App-Bibliothek	Zeigt die App-Bibliothek an.
Symb Setup	Symbolische Ansicht	Zeigt die Definitionen der einzelnen geometrischen Objekte an.
Plot Setup	Grafische Ansicht	Zeigt die geometrische Konstruktion an.
Num Setup	Numerische Ansicht	Zeigt all Berechnungen oder Messungen in der Konstruktion an.
Shift Apps Info	Infoansicht	Zeigt eine Beschreibung des Zwecks der App und deren Verwendung an.

Erste Schritte

1. Drücken Sie Apps Info und tippen Sie auf das Symbol für die **MidpointQuad**-App Die App wird mit der Infoansicht geöffnet, die Informationen zur App und deren Verwendung enthält. Drücken Sie Shift Apps Info (Info), um zu dieser Ansicht zurückzukehren.
2. Drücken Sie Plot Setup, um die Konstruktion in der grafischen Ansicht anzuzeigen.





Das grüne Viereck ABCD bildet die Grundlage der Konstruktion. Durch Tippen und Ziehen können Sie die Eckpunkte oder Seiten verschieben. Das blaue Viereck entsteht durch Verbindung der Mittelpunkte der Seiten von ABCD. Darüber hinaus wurden die Diagonalen AC und BD gezeichnet, um Vermutung und Beweisführung zu erleichtern. Am oberen Rand der Ansicht befindet sich ein Test, der ermittelt, ob KLMN ein Parallelogramm ist oder nicht. Es gibt 2 Möglichkeiten, Objekte wie Punkte zu bewegen.

- Tippen Sie auf den Punkt und ziehen Sie dann den Finger.
- Tippen Sie auf den Punkt und drücken Sie Enter. Jetzt können Sie den Punkt mit den Cursor-Tasten pixelweise verschieben. Drücken Sie Esc Clear, um die Auswahl des Punkts aufzuheben.

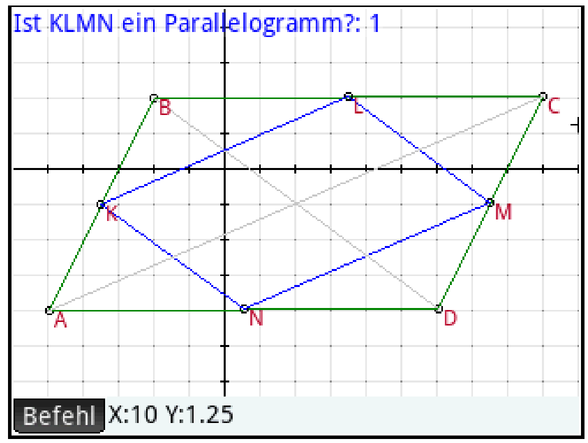
Der Test kann einen der folgenden fünf Werte zurückgeben:

- 0: KLMN ist kein Parallelogramm.
- 1: KLMN ist ein Parallelogramm.
- 2: KLMN ist eine Raute.
- 3: KLMN ist ein Rechteck.
- 4: KLMN ist ein Quadrat.

Nehmen Sie sich einen Augenblick Zeit und experimentieren Sie mit der Konstruktion, indem Sie die Punkte A, B, C oder D verschieben. Sie werden feststellen, dass der Test niemals null zurückgibt. Selbst dann, wenn Sie ABCD konkav machen, gibt der Test weiterhin einen Wert von mindestens eins zurück. Dies führt uns zur unseren ersten Vermutung, der allgemein als Satz von Varignon bekannt ist:

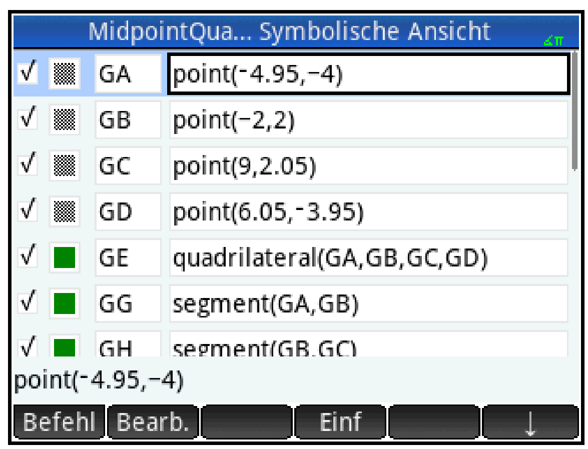
Das Viereck, das durch die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen anderen Vierecks gebildet wird, ist ein Parallelogramm.

Die Vorgehensweise



Konstruieren Sie ABCD als Parallelogramm.

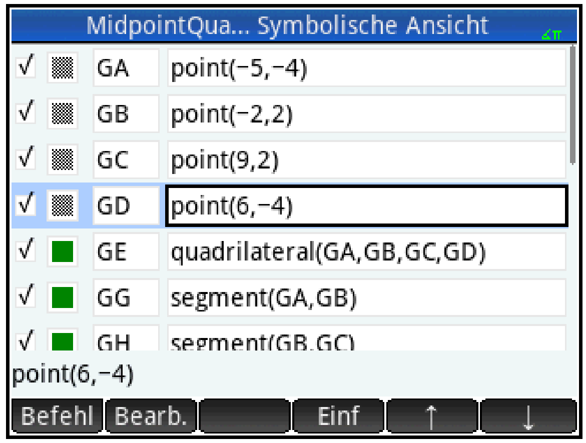
3. Verschieben Sie die Punkte A, B, C und D so, dass sie annähernd ein Parallelogramm bilden. In der Abbildung rechts scheinen die gegenüberliegenden Seiten von ABCD nahezu gleich lang und parallel zu sein.
4. Drücken Sie Symb, um die symbolische Ansicht der App zu öffnen und betrachten Sie die Definitionen der Punkte A, B, C und D.



Wie Sie sehen können, liegen die Punktkoordinaten ein wenig daneben. Wir bearbeiten die Koordinaten dieser Punkte, damit sie exakt den Koordinaten eines Parallelogramms entsprechen. In unserem Fall (aber nicht unbedingt in Ihrem) nehmen wir die folgenden Änderungen vor:

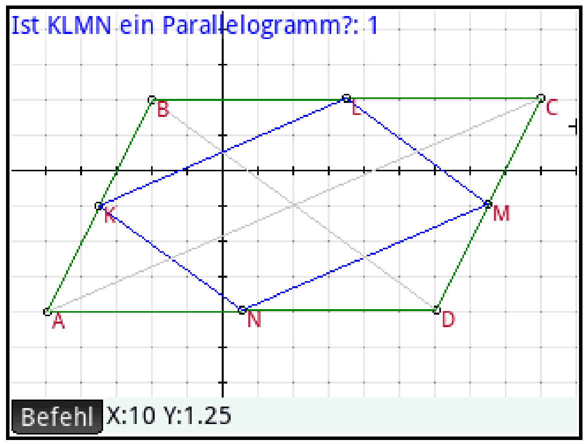
- GA: point(-5, -4)
- GB: point(-2, 2)
- GC: point(9, 2)
- GD: point(6, -4)

5. Tippen Sie auf die Definition von GA, um sie auszuwählen.
6. Tippen Sie auf Bearb., um die Definition zu bearbeiten.
7. Löschen Sie die aktuellen Koordinaten und geben Sie Ihre eigenen ein. Drücken Sie Enter oder tippen Sie auf OK, wenn Sie damit fertig sind.



In der Abbildung rechts wurden die Definitionen von A, B, C und D entsprechend bearbeitet.

8. Drücken Sie Plot, um zur grafischen Ansicht zurückzukehren und zu sehen, was sich geändert hat.

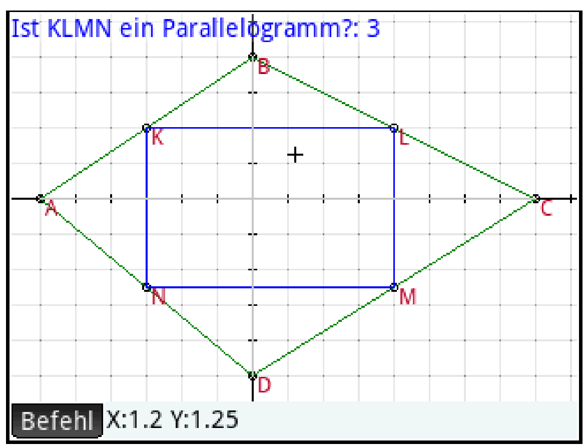


In diesem Fall hat sich nichts geändert. Die Konstruktion von ABCD als Parallelogramm hat keine Auswirkung auf KLMN. Dieses Beispiel sollte lediglich die Vorgehensweise veranschaulichen:

- Verschieben Sie A, B, C oder D so, dass annähernd ein bestimmtes Viereck entsteht.
- Wechseln Sie zur symbolischen Ansicht und bearbeiten Sie die Definitionen, um die Koordinaten exakt zu machen.
- Kehren Sie zur grafischen Ansicht zurück, um die Auswirkungen zu sehen.

Probieren Sie es selbst aus

9. Konstruieren Sie ABCD mit der oben beschriebenen 3-stufigen Vorgehensweise als drachenförmiges Viereck. Wählen Sie dann einen Eckpunkt des Drachens aus und drücken Sie Enter. Jetzt können Sie den Eckpunkt vorsichtig mit dem Richtungstastenblock pixelweise verschieben. Verschieben Sie den Eckpunkt so, dass ABCD weiterhin einen Drachen bildet. In der Abbildung rechts können Sie z. B. A oder C horizontal verschieben.

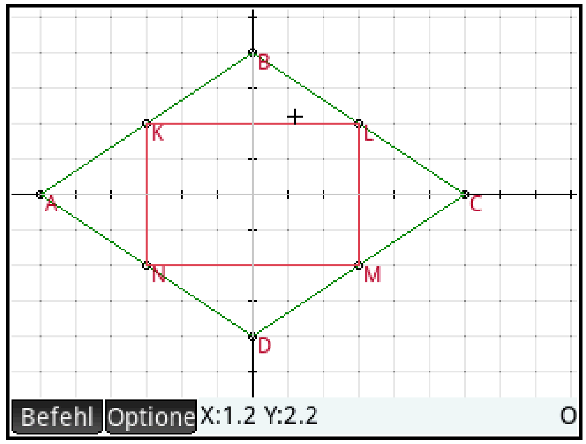


10. Drücken Sie danach Esc, um die Auswahl von Punkt A oder C aufzuheben. Stellen Sie basierend auf ihrer Erfahrung eine zweite Vermutung an.

Eigenständige Übungen

Nachdem Sie jetzt die Vorgehensweise kennen, können Sie die folgenden Übungen durchführen und jeweils eine eigene Vermutung anstellen. In den Abbildungen zu den Fragen 11-14 wurde der Test ausgeblendet.

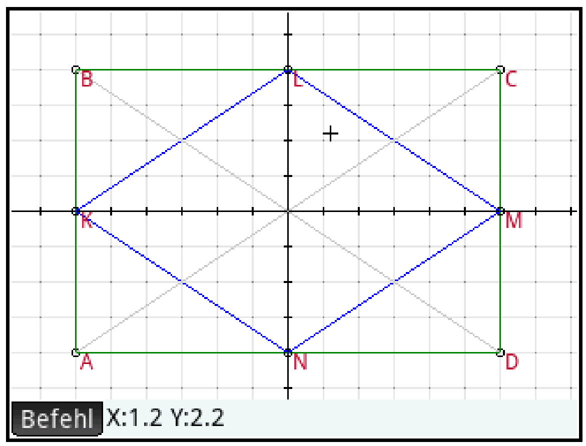
11. Konstruieren Sie ABCD als Raute. Stellen Sie eine Vermutung zu KLMN an, wenn ABCD eine Raute ist.



____

____

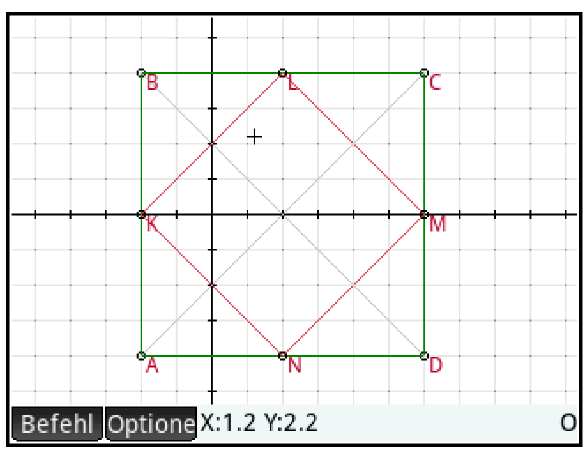
12. Konstruieren Sie ABCD als Rechteck. Stellen Sie jetzt eine Vermutung zu KLMN an, wenn ABCD ein Rechteck ist.



____

____

13. Konstruieren Sie ABCD als Quadrat. Stellen Sie eine Vermutung zu KLMN an, wenn ABCD ein Quadrat ist.

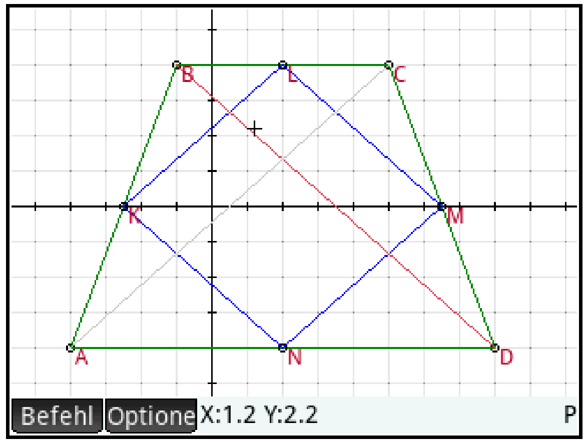


____

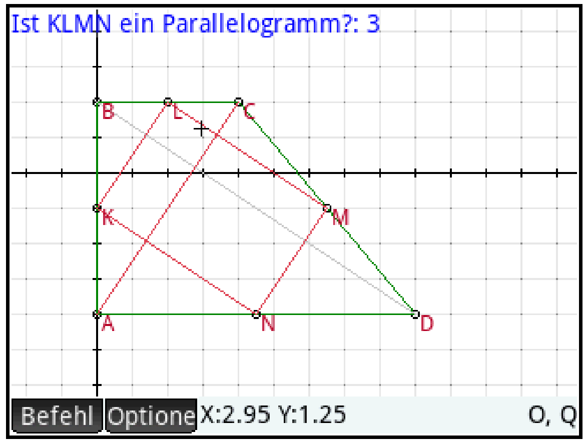
____

Weitergehende Übungen: Trapeze sind interessant!

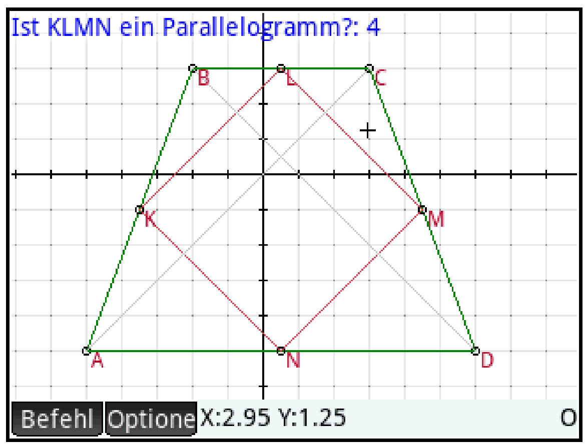
14. Konstruieren Sie ABCD als gleichschenkliges Trapez. Stellen Sie eine Vermutung zu KLMN an, wenn ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist.



15. Sie können sogar noch weiter gehen. In der Abbildung rechts ist ABCD ein spezielles Trapez und der Test zeigt an, dass KLMN ein Rechteck ist. Welche Eigenschaft oder Eigenschaften muss ein trapezförmiges ABCD aufweisen, damit KLMN ein Rechteck ist?



16. In der Abbildung rechts ist ABCD ein sehr spezielles gleichschenkliges Trapez und der Test zeigt an, dass KLMN ein Quadrat ist. Welche Eigenschaft oder Eigenschaften muss ein gleichschenkliges trapezförmiges ABCD aufweisen, damit KLMN ein Quadrat ist?



Hinweise für Lehrer zu „Vermutung und Beweis“

In diesen Übungen wurde eine einfache Konstruktion verwendet, um mehrere zu beweisende Vermutungen anzustellen. Die numerische, symbolische und grafische Ansicht der HP Prime Geometrie-App regen zu endlosem Experimentieren, Anstellen von Vermutungen und Untersuchen von Beweismöglichkeiten an. Die Vorstellung ist, dass die Klasse diese Konstruktion in Gruppen gemeinsam untersucht und jede Gruppe eigene Vermutungen und Beweise erarbeitet. Wenn die Schüler eigene Vermutungen anstellen, wächst bei einem nachvollziehbaren Problem das Interesse, überzeugende Beweise zu entwickeln. Anstatt die Schüler eigene Konstruktionen erstellen zu lassen (was zwar möglich ist, hier aber aus Zeitgründen nicht gemacht wurde), haben wir eine App namens *MidpointQuad* erstellt, die auf der integrierten HP Prime Geometrie-App basiert. Die meisten Beweise bauen auf der Rechtwinkligkeit oder Kongruenz der Diagonalen des ursprünglichen Vierecks auf. Andere beruhen auf der Rechtwinkligkeit der Seiten. Einer basiert auf einer Kombination der beiden oben genannten Beweise.

Bei den Fragen 11-14 werden in der grafischen Ansicht keine Testergebnisse angezeigt. Drücken Sie zum Ein-/Ausblenden von Tests und Messungen Num Setup, um die numerische Ansicht aufzurufen. Tippen Sie dort auf das Kontrollkästchen, um den Test zu aktivieren. Tippen Sie erneut darauf, um ihn zu deaktivieren. (Sie können auch auf √ tippen.) Die numerische Ansicht dient zum Erstellen von Tests, Messungen und anderen Berechnungen. Die aktivierten Einträge werden in der grafischen Ansicht angezeigt.

Lösungsschlüssel

10. Wenn ABCD drachenförmig ist, ist KLMN ein Rechteck. Dies folgt aus der Tatsache, dass ein Drache senkrecht aufeinander stehende Diagonalen hat. Wir wissen bereits, dass KLMN ein Parallelogramm ist. Wir möchten beweisen, dass es einen rechten Winkel enthält. Im ΔABC verläuft KL parallel zu AC. Im ΔBCD verläuft LM parallel zu BD. Aber es gilt $AC \perp BD$, sodass $KL \perp LM$ sein muss.

11. Wenn ABCD eine Raute ist, ist KLMN ein Rechteck. Dies folgt ebenfalls daraus, dass die Raute senkrecht aufeinander stehende Diagonalen hat. Die Beweisführung erfolgt genauso wie bei einem drachenförmigen ABCD!

12. Wenn ABCD ein Rechteck ist, ist KLMN eine Raute. Dies ergibt sich aus den rechten Winkeln in ABCD. Wir wissen bereits, dass KLMN ein Parallelogramm ist. Wir möchten beweisen, dass zwei aufeinander folgende Seiten die gleiche Länge haben. Zeigen Sie, dass $\Delta KBL \cong \Delta MCL$ (SSS) ist, d. h. KL=LM.

13. Wenn ABCD ein Quadrat ist, ist KLMN ebenfalls ein Quadrat. Fügen Sie einfach die beiden Argumente in 11 und 12 zusammen! Da ABCD sowohl eine Raute als auch ein Rechteck ist, ist KLMN ebenfalls eine Raute und ein Rechteck!

Weitergehende Übungen

14. Wenn ABCD ein gleichschenkliges Trapez ist, ist KLMN eine Raute. Durch den Satz von Varignon wissen wir bereits, dass KLMN ein Parallelogramm ist. Wir möchten beweisen, dass es zwei aufeinander folgende Seiten mit gleicher Länge aufweist. Im ΔABC ist KL halb so lang wie AC. Ebenso ist LM im ΔBCD halb so lang wie BD. In einem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen AC und BD aber gleich lang, sodass dies auch für KL und LM gilt. Ein Parallelogramm mit gleichen aufeinander folgenden Seiten ist jedoch eine Raute.

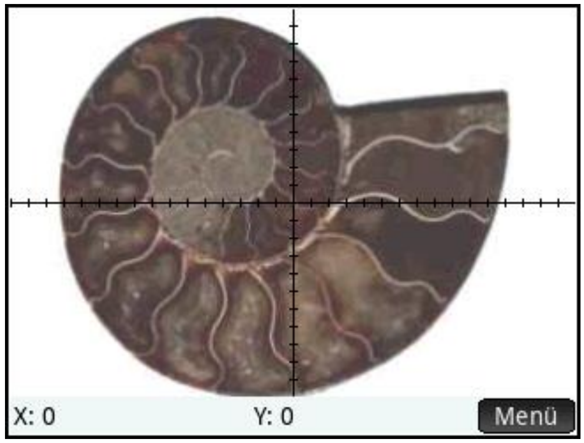
15. ABCD weist zwei aufeinander folgende rechte Winkel auf und die Längen der Seiten AB, BC und AD wurden so gewählt, dass $\Delta LBK \sim \Delta KAN$ ist. Daher sind $\measuredangle BLK$ und $\measuredangle BKL$ komplementär, da sie die spitzen Winkel im rechten ΔBLK sind. Aufgrund der Ähnlichkeit gilt $\measuredangle BLK = \measuredangle AKN$. Daher sind $\measuredangle AKN$ und $\measuredangle BKL$ komplementär, sodass $\measuredangle LKN$ ein rechter Winkel ist. Beachten Sie weiterhin, dass die Diagonalen senkrecht aufeinander stehen.

16. ABCD weist aufeinander stehende Diagonalen auf. Wir wissen bereits aus 14, dass KLMN eine Raute ist. Wir möchten beweisen, dass es 2 senkrechte Seiten aufweist. Im ΔABC verläuft KL parallel zu AC. Im ΔBCD verläuft LM ebenso parallel zu BD. Wenn jedoch $AC \perp BD$ gilt, muss $KL \perp LM$ sein.

Eine Nautilusmuschel

In dieser Übung passen wir eine logarithmische Spirale in ein Foto ein, das den Querschnitt einer Versteinerung zeigt! Sie erhalten von Ihrem Kursleiter eine HP Prime-App namens *NautilusShell*.

1. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die **NautilusShell**-App.
2. Drücken Sie Plot Setup und tippen Sie auf OK, um das Foto mit dem Querschnitt der Versteinerung anzuzeigen (siehe Abbildung rechts).



Die Abmessung der Versteinerung an der breitesten Stelle beträgt 10.5 cm. Beachten Sie die gleichmäßige Spirale, die das Wachstum dieses vorzeitlichen Lebewesens kennzeichnet. Wir möchten eine mathematische Polarkurve in diese Spirale einpassen.

3. Ihre erste Aufgabe besteht darin, die Größe zu ändern und die Achsen so zu verschieben, dass der Ursprung geeignet liegt und die Breite der Versteinerung 10.5 Einheiten entlang der x-Achse beträgt. Führen Sie die Finger diagonal auseinander/zusammen, damit das Ansichtsverhältnis der beiden Achsen gleich bleibt. Erfassen Sie den Definitionsbereich und den Fensterbereich des Fensters, wenn Sie dies so gut wie möglich erledigt haben.

X verläuft ungefähr von ________ bis

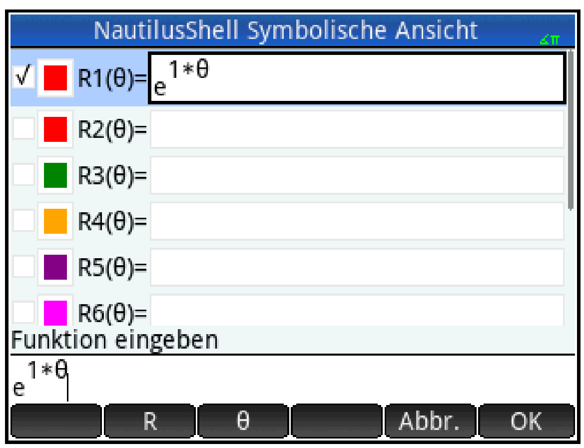
________ und Y ungefähr von

________ bis _______.

Die mathematische Kurve, mit der wir die Spirale approximieren möchten, wird logarithmische Spirale genannt. Dabei handelt es sich im Grunde um die Exponentialkurve $Y = e^{bX}$ in polarer Form:

$R = e^{b\theta}$ oder $R = e^{\frac{\theta}{b}}$.

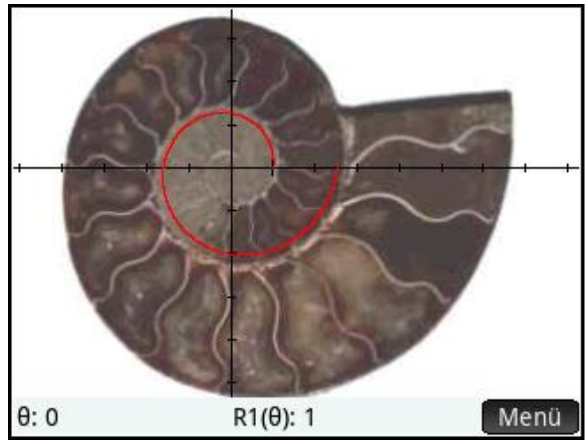
4. Drücken Sie Symb Setup, um zur symbolischen Ansicht zurückzukehren, und geben Sie eine Definition in R1(θ) ein. Sie müssen den Wert von *b* ermitteln, der die Spirale optimal approximiert. In der Abbildung rechts wurde als Anfangswert b=1 verwendet. Geben Sie unten Ihre Gleichung an.



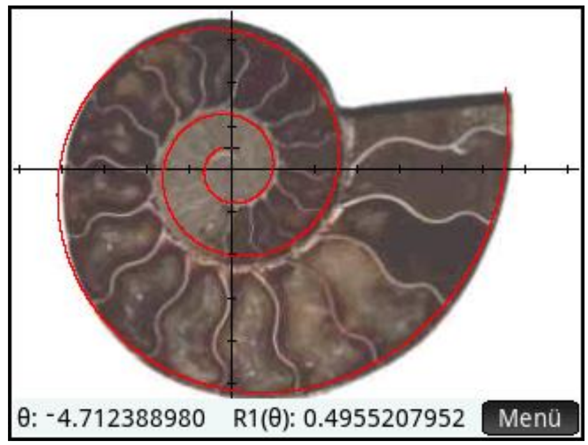
Hinweis: Sie sollten unbedingt eine Farbe für Ihre Spirale auswählen! Tippen Sie auf die Farbauswahl links neben R1(θ).

R1(θ) = ______________________

Nachdem Sie die bestmögliche Passform erreicht haben, müssen Sie Anfangs- und Endwert für θ anpassen, damit die ganze Spirale gezeichnet wird.



5. Drücken Sie  , um die Grafikeinstellungen anzuzeigen. Passen Sie dort die beiden Werte in **θ-Ber.** an, bis die Spirale an den gewünschten Stellen beginnt und endet. Geben Sie den θ-Bereich unten ein.



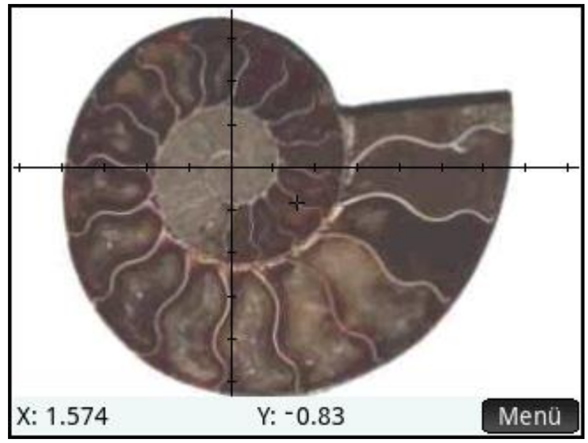
θ verläuft von ________ bis __________.

Damit ist das Problem gelöst: Ein einfacher mathematischer Ausdruck in zwei Variablen approximiert die Wachstumsspirale eines Lebewesens, das vor vielen Millionen Jahren gelebt hat, und vieler Lebewesen, die heute existieren!

Hinweise für Lehrer zu „*Eine Nautilusmuschel*“

Diese Übung eignet sich hervorragend als Einführung in Polargleichungen für Schüler. Sie finden derartige Versteinerungen in jedem Geschäft, in dem Sie Versteinerungen kaufen können. Nehmen Sie ein eigenes Foto auf. Normalerweise überlasse ich meine Versteinerung als Anschauungsmaterial zur sorgfältigen Begutachtung den Schülern.

Lösungsschlüssel

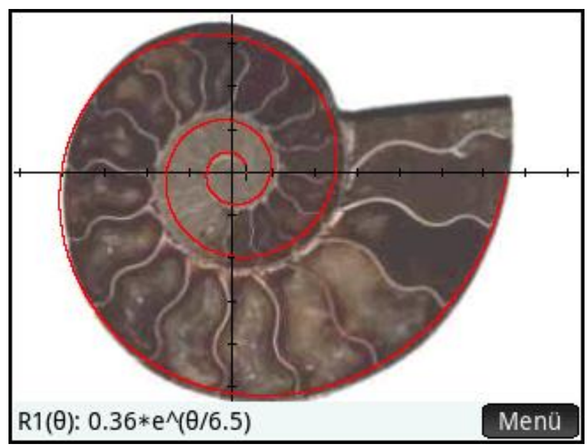


3. X verläuft ungefähr von -5 bis 8, während Y von -5 bis ungefähr 3.6 verläuft. Die Antworten variieren hier, das ist in Ordnung.

4. In unseren Abbildungen ist R1(θ) = θ/6.71 oder R1(θ) = 0.149*θ. Die Antworten variieren hier ebenfalls.

5. In unseren Abbildungen verläuft θ von -3π/2 bis ungefähr 4.1π. Die Antworten variieren hier ebenfalls.

Weitergehende Übungen



1. Die Positionierung des Ursprungs hat erhebliche Auswirkungen auf die Gleichung der Spirale. Der Versuch, den Anfang der Spirale auf den positiven Strahl der x-Achse zu setzen, kompliziert den Kurveneinpassungsprozess erheblich. Betrachten Sie dazu die Abbildung rechts. Die Gleichung lautet jetzt $R1(\theta) = a * e^{b\theta}$

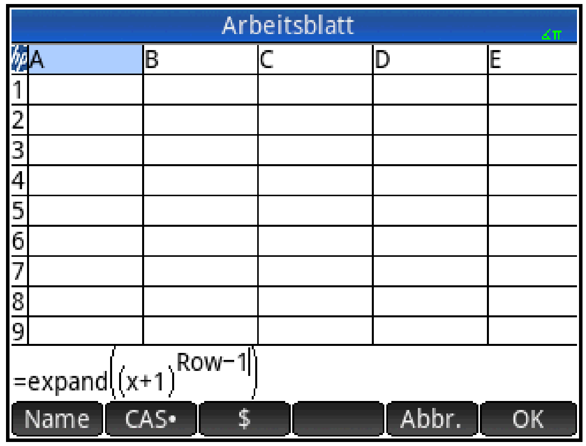
Hier verläuft θ von 0 bis 6π.

2. Da wir am Anfang gesagt haben, dass die logarithmische Spirale das polare Äquivalent der Exponentialkurve y=e^x ist, stellt sich natürlich die Frage, was das polare Äquivalent der linearen Funktion y=ax+b ist und wie der zugehörige Graph aussieht.
3. Setzen Sie diesen Gedankengang mit einem noch einfacheren Ausdruck wie R=θ und R=C fort, wobei C eine Konstante ist.

Pascalsches Dreieck

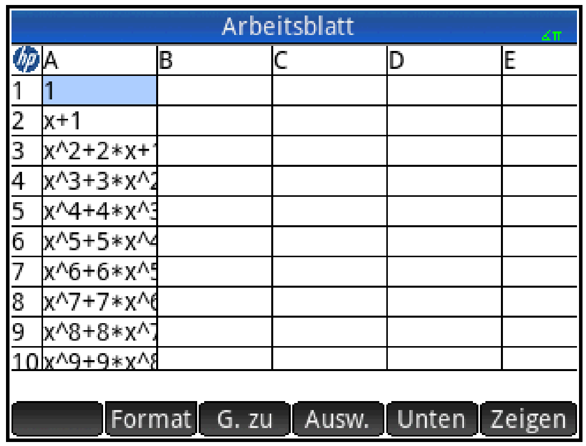
In dieser Übung untersuchen wir das Pascalsche Dreieck und dessen Anwendung auf die Entwicklung von $(X+1)^N$ für N=0, 1, 2, 3, …

1. Drücken Sie Apps Info und starten Sie die **Spreadsheet**-App.

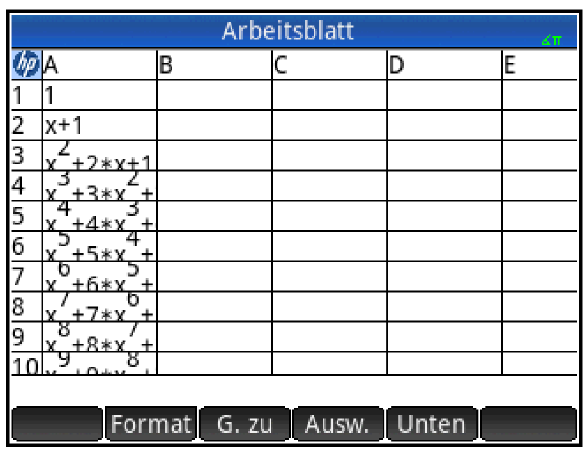


Wir definieren die Spalte A als Entwicklung von $(x+1)^{n-1}$, wobei *n* die Zeilennummer der jeweiligen Zelle in Spalte A ist.

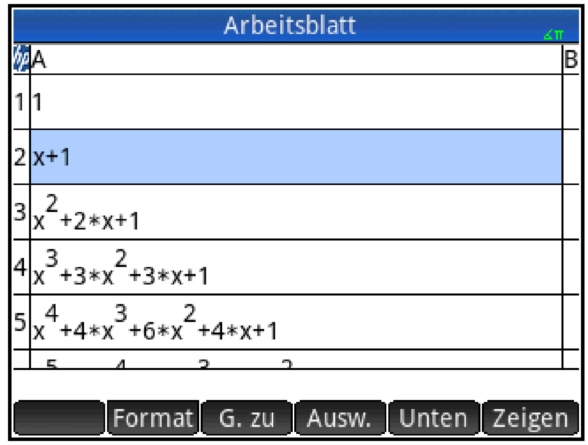
2. Tippen Sie auf den Kopf von Spalte A. Drücken Sie Shift $\vdots$ (=), um ein Gleichheitszeichen einzufügen und die Spaltendefinition zu beginnen. Drücken Sie Mem und tippen Sie auf CAS. Tippen Sie dann auf **Algebra** und wählen Sie **Erweitern** aus. Drücken Sie ( ), um ein Klammernpaar einzugeben. Drücken Sie ALPHA Shift x, um ein kleines x einzugeben, und dann + 1, um die Binomeingabe zu beenden. Drücken Sie ▶, um den Cursor hinter die rechte Klammer zu bewegen. Drücken Sie auf x^y, um den Exponenten einzugeben. Hier verwenden wir die Variable *Row* anstelle von *n*. Drücken Sie Vars, um das Menü für Variablen zu öffnen. Tippen Sie auf App, dann auf **Spreadsheet**, **Numerisch** und wählen Sie **Row** aus. Drücken Sie + 1, um die Eingabe des Exponenten zu beenden. Tippen Sie auf CAS, um den Ausdruck mit CAS auszuwerten. Drücken Sie jetzt Enter, um das Ergebnis anzuzeigen.



3. Lassen Sie uns die Ergebnisse lesbarer machen. Klicken Sie oben links auf das HP Logo. Dadurch wird alles ausgewählt. Tippen Sie auf Format, scrollen Sie nach unten zu **Lehrbuch (2D)** und wählen Sie **Ja** aus. Die Ausdrücke sind jetzt besser lesbar. Wir müssen aber Höhe und Breite der Zellen in Spalte A vergrößern.



4. Tippen Sie bei weiterhin ausgewähltem HP Logo erneut auf Format, wählen Sie **Zeilen** ↕ aus und ändern Sie den Wert in 30. Tippen Sie jetzt auf eine Zelle in Spalte A, um sie auszuwählen, und vergrößern Sie die Breite der Zelle durch Spreizen der Finger. Das Ergebnis ist rechts abgebildet. Diese Visualisierung ist gut für Untersuchungen der Schüler geeignet.

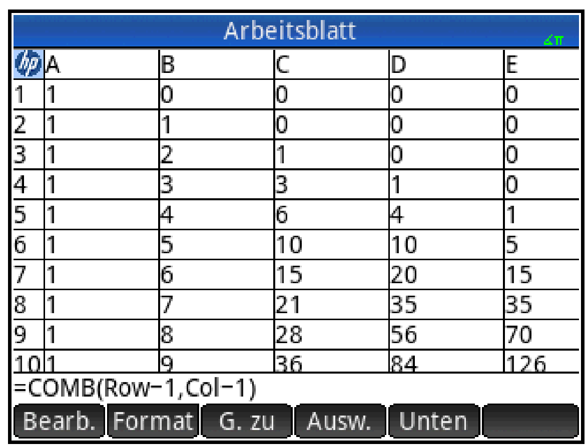


Sie können diese App für die spätere Verwendung speichern und an Ihre Schüler senden.

5. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen. Die Spreadsheet-App ist ausgewählt. Tippen Sie auf Spei und geben Sie einen aussagekräftigen Namen ein. Wir verwenden *Pascal1*. Drücken Sie zweimal Enter. Die neue App wird in der Bibliothek angezeigt.

Wir erstellen jetzt eine weitere Visualisierung des Pascalschen Dreiecks.

6. Scrollen Sie nach oben zur Spreadsheet-App und setzen Sie sie zurück. Starten Sie die App und tippen Sie oben auf das HP Logo, um das ganze Arbeitsblatt auszuwählen.
7. Drücken Sie Shift (=), um ein Gleichheitszeichen einzufügen und die Spaltendefinition zu beginnen. Drücken Sie Mem und tippen Sie auf Math. Tippen Sie dann auf **Wahrscheinlichkeit** und wählen Sie **Kombination** aus. Geben Sie *Row -1* ein und drücken Sie dann , um ein Komma einzugeben. Geben Sie dann *Col -1* ein. Beachten Sie, dass *Row* (und *Col*) durch Drücken von Vars und Tippen auf App, **Spreadsheet** sowie **Numerisch** ermittelt werden können. Drücken Sie Enter, um jetzt lediglich die Koeffizienten anzuzeigen.



Die Kombination von Spreadsheet-App und CAS eröffnet völlig neue Visualisierungsmöglichkeiten, die einfach erstellt und für die spätere Verwendung gespeichert werden können.

Hinweise für Lehrer zu „Pascalsches Dreieck“

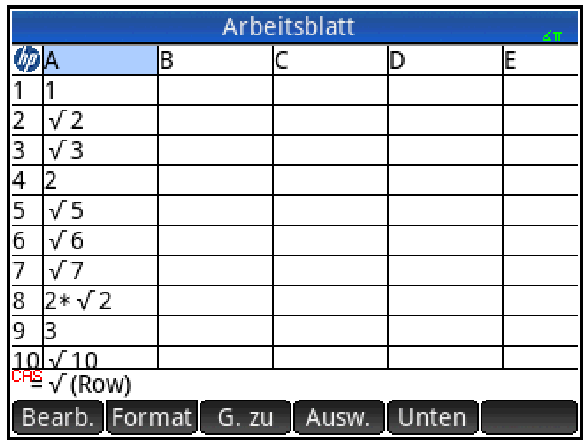
Diese Übung ist eine Übung für Lehrer und keine Übung für Schüler. Diese Übung verfolgt folgende Ziele:

1. Veranschaulichen der Mächtigkeit der App-Variablen *Row* und *Col* (siehe auch *Cell*)
2. Veranschaulichen der leistungsfähigen Möglichkeit, CAS von der Spreadsheet-App aus aufzurufen
3. Ansporen der Lehrer, sich neue Visualisierungen von exakten numerischen oder symbolischen Mustern auszudenken, die Schüler untersuchen können, um den Lernerfolg zu verbessern

Wir haben als Beispiel das Pascalsche Dreieck verwendet, um die obigen Methoden zu veranschaulichen. Der Vorteil für Schüler liegt darin, dass sie die Gelegenheit erhalten, Muster zu untersuchen und frühzeitig Vermutungen anzustellen. Der Lehrer kann dann auf den Erkenntnissen der Schüler aufbauen und einen entsprechenden mathematischen Diskurs anregen.

Weitergehende Übungen und Variationen

1. Definieren Sie Spalte A als $=\sqrt{Row}$ und rufen Sie CAS auf. Die Schüler verfügen dann über eine Visualisierung der Quadratwurzeln der Zählnummern. Sie können dann feststellen, dass es drei Fälle gibt:
   i. Die Quadratwurzel wird in eine Ganzzahl aufgelöst, wie in $\sqrt{4}=2$
   ii. Die Quadratwurzel wird gar nicht aufgelöst, wie in $\sqrt{5}$
   iii. Die Quadratwurzel wird partiell aufgelöst, wie in $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

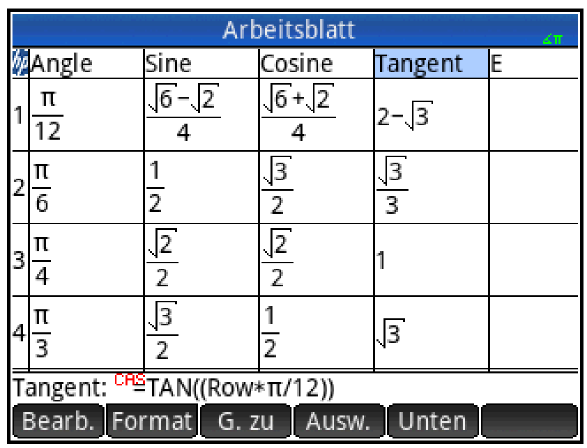


2. Definieren Sie die Spalte A als =simplify(Row*π/12).

   Definieren Sie dann Spalte B als $=SIN\left(\frac{Row*\pi}{12}\right)$,

   Spalte C als $=COS\left(\frac{Row*\pi}{12}\right)$ sowie Spalte D als

   $=TAN\left(\frac{Row*\pi}{12}\right)$ und rufen Sie dann CAS für alle Spalten auf. Die Schüler verfügen so über eine exakte Tabelle mit grundlegenden trigonometrischen Werten.



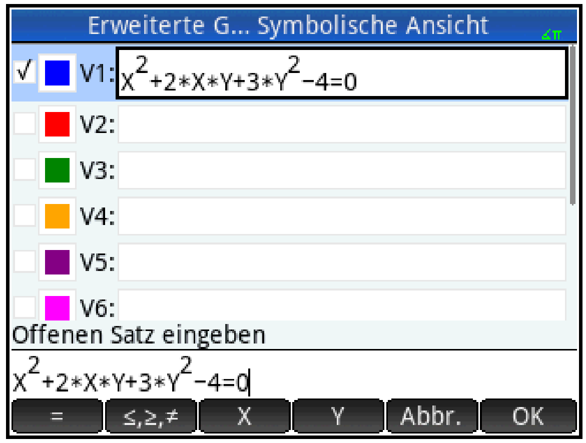
Hinweis: Tippen Sie auf Format, um einer Spalte einen Namen zu geben, und wählen Sie **Name** aus.

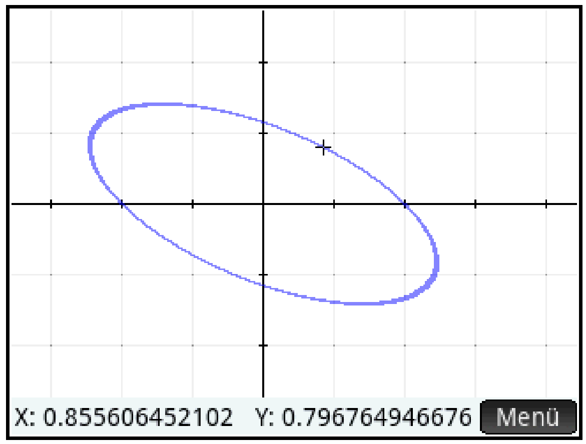
Sie können diese Visualisierungen speichern und bei Bedarf jederzeit nutzen!

Drehung von Achsen

In dieser Übung untersuchen wir den Graphen von $x^2+2xy+3y^2-4=0$.

1. Drücken Sie Apps Info, um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die **Erweiterte Grafiken**-App.
2. Geben Sie die Gleichung für die obige Ellipse in V1 ein.

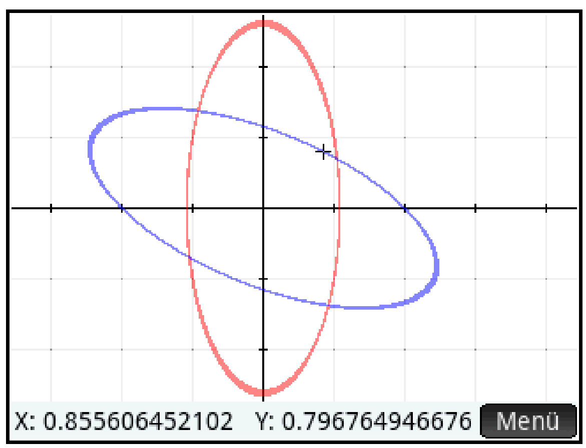




3. Drücken Sie Plot Setup, um den Graphen eines gedrehten Kegelschnitts anzuzeigen. Vergrößern Sie die Ansicht durch Spreizen der Finger und verschieben Sie den Mittelpunkt des Graphen durch Ziehen, wie in der Abbildung rechts gezeigt.

4. Um welchen Winkel müssen wir diesen Kegelschnitt drehen, um den xy-Term zu eliminieren?

Θ= ______________________________



5. Ermitteln Sie Sinus und Cosinus des Winkels mit CAS.

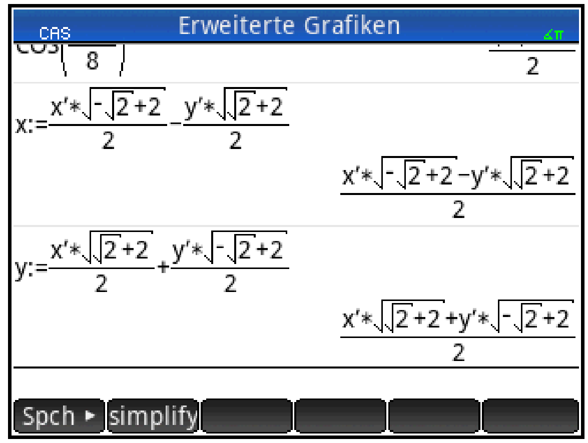
Sin(θ)= ______________________________

Cos(θ)= ______________________________

6. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und definieren Sie V2 als Drehung von V1 um den ermittelten Winkel. Definieren Sie V2 als

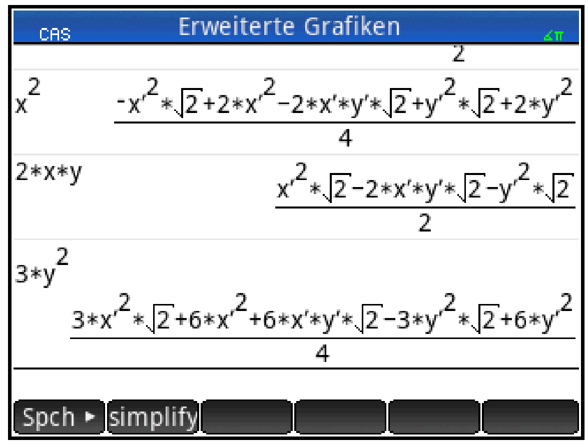
$$V1(X*\cos(\theta)-Y*\sin(\theta), X*\sin(\theta)+Y*\cos(\theta))$$

Durch visuelle Kontrolle können Sie sehen, dass der Drehwinkel richtig zu sein scheint. Wir möchten jetzt überprüfen, ob der xy-Term durch die Drehung tatsächlich aus der symbolischen Definition entfernt wurde.



7. Definieren Sie im CAS x und y abhängig von den exakten Werten für sin(θ) und cos(θ).

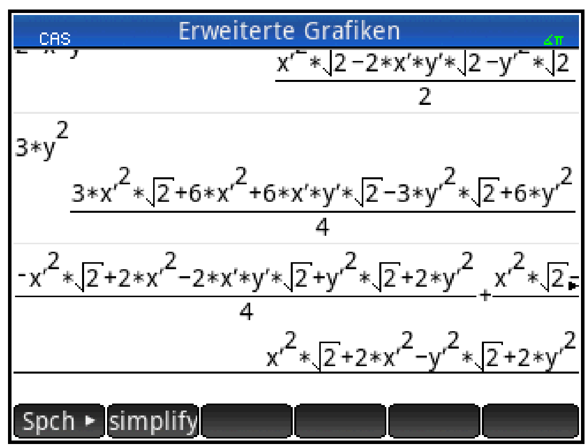
Drücken Sie [Shift] [9], um das Symbol ‘ einzugeben.



8. Werten Sie jetzt x^2, 2xy und $3y^2$ aus. Die Terme enthalten alle einen x'y'-Term. Was fällt Ihnen bei diesen drei Termen auf?

____

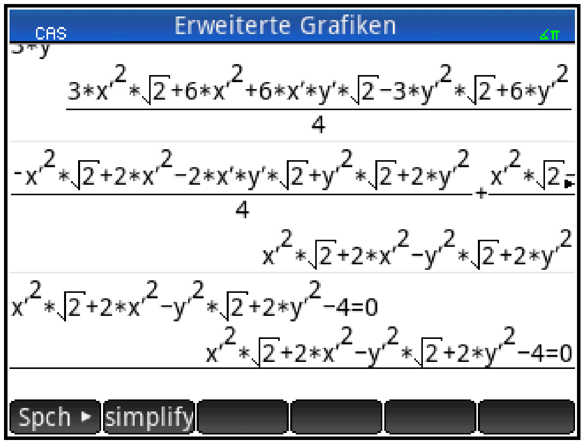
____



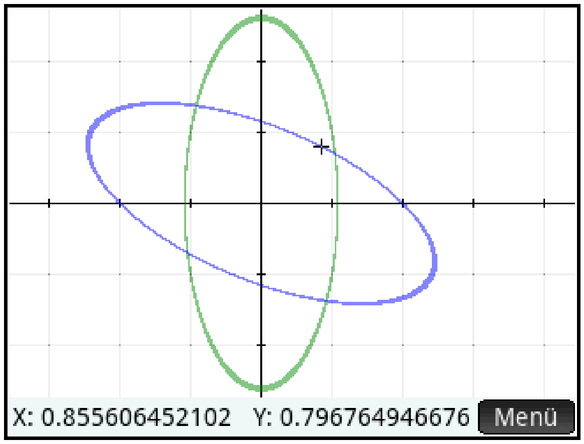
9. Addieren Sie jetzt die drei Terme. Doppeltippen Sie auf den ersten Term und drücken Sie dann [+]. Doppeltippen Sie auf den zweiten Term und drücken Sie dann erneut [+]. Doppeltippen Sie schließlich auf den dritten Term und drücken Sie [Enter]. Stimmt die Summe mit der Antwort in Schritt 8 überein?

____

10. Vervollständigen Sie die Definition. Drücken Sie [–] [4] [=] [0] [Enter].



11. Geben Sie die Definition in V3 ein. Sie können Kopieren und Einfügen verwenden. Sie müssen aber x' in X und y' in Y ändern.
12. Deaktivieren Sie V2 und drücken Sie [Plot], um den Graphen des gedrehten Kegelschnitts ohne den XY-Term anzuzeigen.



Hinweise für Lehrer zu „Drehung von Achsen“

Die Drehung von Achsen zum Eliminieren des xy-Terms in einem allgemeinen Kegelschnitt ist in Zukunft u. U. eine wichtige Fähigkeit. Der HP Prime ermöglicht eine einfache grafische Darstellung dieser allgemeinen Kegelschnitte. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie CAS und die Erweiterte Grafiken-App zusammenwirken können, um den Prozess aus mehreren Blickwinkeln zu betrachten. In der grafischen Sicht können Schüler durch Definition von V2 als Drehung von V1 schnell und einfach feststellen, ob die Drehung funktioniert und ob der Winkel richtig ist. In der symbolischen Perspektive bietet CAS den Schülern die Möglichkeit, x und y abhängig von x' und y' und anschließend den Kegelschnitt schrittweise abhängig von x' und y' zu definieren und zu beobachten, wie die x'y'-Terme wegfallen.

Lösungsschlüssel

4. Der Drehwinkel ist gegeben durch $\cot(2\theta) = \frac{1-3}{2}$. Der positive Hauptwert ist $\theta = \frac{3\pi}{8}$.

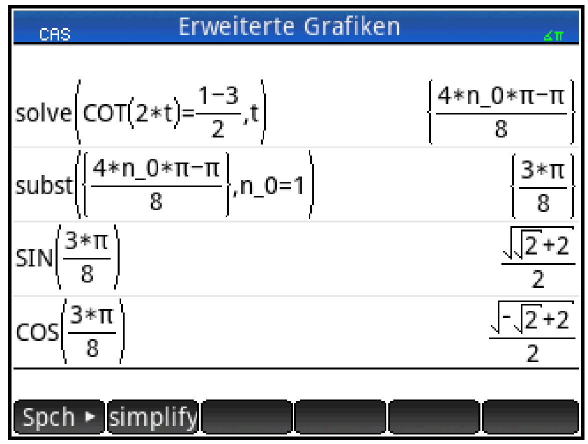
5. $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$ und $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{-\sqrt{2}+2}}{2}$

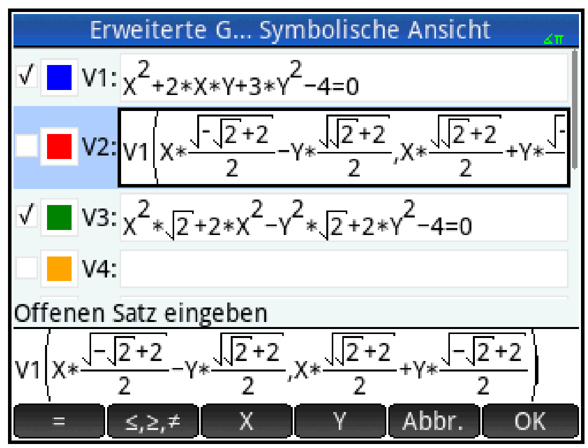
6. Die Definition von V2 ist in der Abbildung rechts dargestellt. Sie könnten genauso einfach sin(3π/8) und cos(3π/8) in der Definition verwenden.

8. Die Summe der drei Terme ist null.

9. Ja

10-12. Die Definition von V3 ist ebenfalls in der Abbildung rechts dargestellt. V2 und V3 erzeugen den gleichen Graphen.

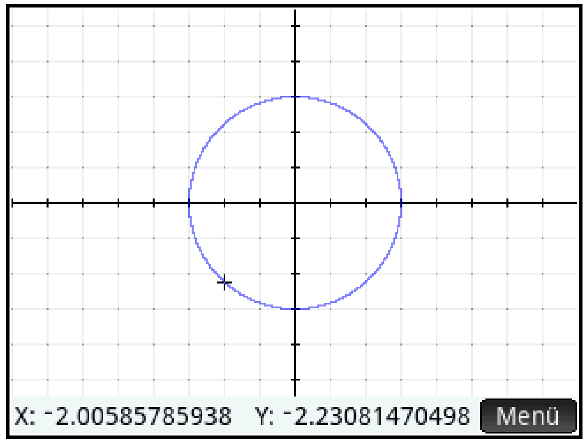




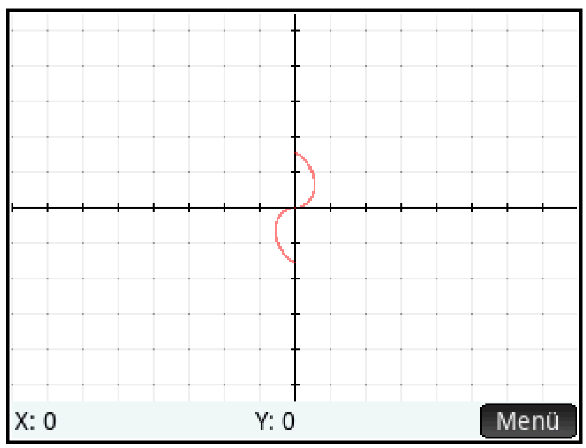
Polare und kartesische Graphen

Die Umwandlung zwischen polaren und kartesischen Koordinaten erfolgt im Allgemeinen mit den Gleichungen $r=\sqrt{x^2+y^2}$ und $\theta=a\tan\left(\frac{y}{x}\right)$. Wir nutzen diese Gleichungen in dieser Übung, um mit der Erweiterte Grafiken-App Kreise, Spiralen und Rosetten zu zeichnen.

Lassen Sie uns mit einem einfachen Beispiel beginnen. *r* =3 ist eine polare Gleichung, deren Graph ein Kreis mit dem Radius 3 ist, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt.



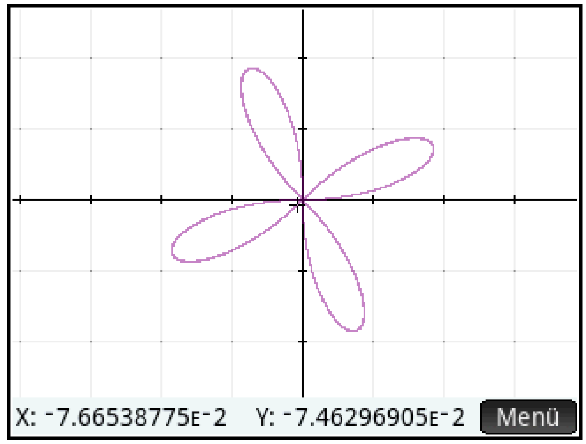
1. Ermitteln Sie mit den oben aufgeführten Gleichungen eine Gleichung in X und Y.
2. Drücken Sie , um die App-Bibliothek zu öffnen, und starten Sie die **Erweiterte Grafiken**-App. Geben Sie Ihre Gleichung in V1 ein.
3. Drücken Sie , um den Graphen anzuzeigen. Ist das der erwartete Graph?



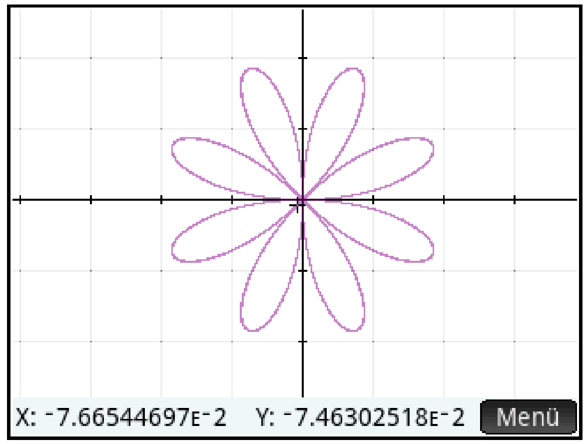
4. Wiederholen Sie jetzt die Schritte 1-3 für die Spirale r=θ. Geben Sie Ihre Gleichung in V2 ein und deaktivieren Sie V1, damit sie nicht dargestellt wird.

5. Es scheint, als würde der Graph unvollständig dargestellt und nicht die ganze Spirale. Bilden Sie den Tangens beider Seiten Ihrer Gleichung und vereinfachen Sie das Ergebnis. Geben Sie diese neue Gleichung in der symbolischen Ansicht in V3 ein. Drücken Sie jetzt , um die Graphen von V2 und V3 anzuzeigen. Was fällt Ihnen auf?

6. Probieren Sie jetzt das gleiche Verfahren für die polare Rosette r=2*sin(4*θ) aus. Wandeln Sie sie zuerst in eine Gleichung in X und Y um und geben Sie die Gleichung dann als V4 ein. Deaktivieren Sie V2 und V3, damit sie nicht dargestellt werden. Drücken Sie Plot, um den Graphen anzuzeigen. Der Graph weist 4 Blätter auf, sollte aber 8 Blätter haben.



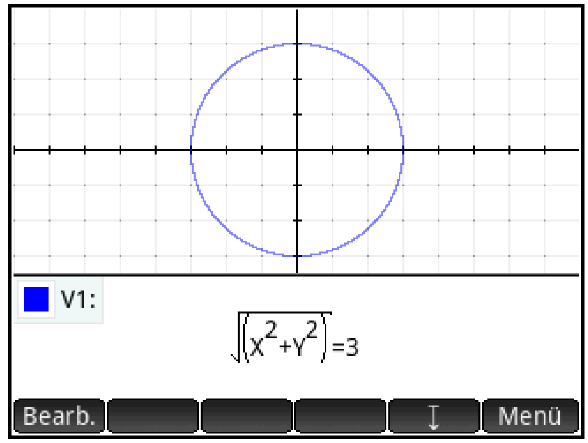
7. Können Sie V4 so transformieren, dass die anderen 4 Blätter dargestellt werden?



Hinweise für Lehrer zu „Polare und kartesische Graphen“

Diese Übung greift erneut die fundamentalen Vorstellungen von Äquivalenz und Bedingungen auf, die bereits früher behandelt wurden, hier allerdings auf einem viel höheren Niveau.

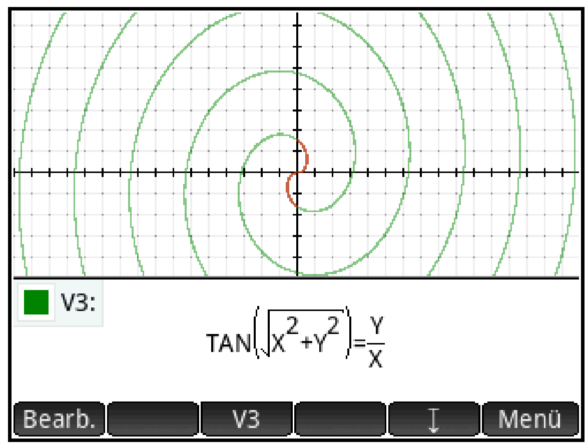
1. V1 ist $\sqrt{X^2+Y^2}=3$. Der Graph ist rechts abgebildet.



3. Ja, der Graph ist ein Kreis mit dem Radius 3, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt.

4. Die Gleichung von V2 ist $\sqrt{X^2+Y^2}=a\tan\left(\frac{Y}{X}\right)$.

5. Die Gleichung in V3 ist $\tan\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\frac{Y}{X}$

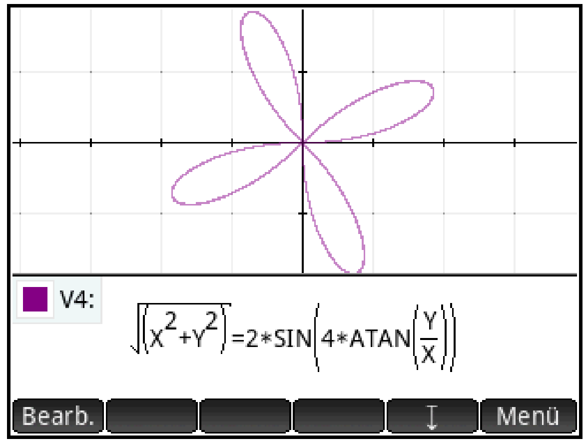


Der Graph ist eine archimedische Doppelspirale.

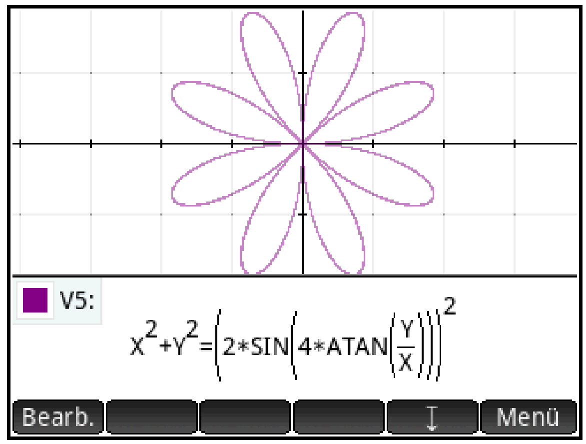
Die linke Seite von V2 kann nur nicht negative reelle Zahlen zurückgeben. Die rechte Seite kann nur reelle Zahlen zwischen –π/2 und π/2 zurückgeben. Daher kann die Gleichung V2 nur stimmen, wenn beide Seiten Zahlen im Intervall [0, π/2) ergeben. Die rechte Seite kann aber nur dann nicht negative Werte zurückgeben, wenn Y/X positiv ist, d. h., wenn X und Y das gleiche Vorzeichen haben.

Der Graph wird daher nur im 1. und 3. Quadranten und nur in der ersten Schleife angezeigt. Danach gilt $\sqrt{X^2+Y^2}\geq\frac{\pi}{2}$. Wenn Sie jedoch den Tangens beider Seiten bilden, lautet das Ergebnis $\tan\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)=\frac{Y}{X}$. Beide Seiten dieser Gleichung können jede beliebige gewünschte reelle Zahl zurückgeben. X und Y müssen nicht mehr das gleiche Vorzeichen haben. Beachten Sie jedoch, dass X≠0 ist, sodass es keine Schnittpunkte mit der y-Achse gibt. Jeder scheinbare y-Schnittpunkt ist eine hebbare Unstetigkeit.

6. V4 ist $\sqrt{X^2+Y^2}=2\cdot\sin\left(4\cdot a\tan\left(\frac{Y}{X}\right)\right)$. Der Graph ist eine 4-blättrige Rosette, das polare Äquivalent weist jedoch 8 Blätter auf. Hier kann die linke Seite nur nicht negative Werte zurückgeben, die rechte Seite kann aber Werte im Intervall [-2, 2] zurückgeben. Daher werden Werte auf der rechten Seite, bei denen sin(4*atan(Y/X)) in einem Intervall liegt (z. B. π/4<Y/X<π/2), in dem die Ergebnisse negativ sind, ausgeschlossen.



7. Wenn wir beide Seiten quadrieren, liefern die rechte Seite und die linke Seite nur nicht negative Ergebnisse. Dadurch wird die Einschränkung aufgehoben, sodass die anderen 4 Blätter dargestellt werden.



Beachten Sie erneut, dass X≠0 ist, sodass im Mittelpunkt der Rosette ein Loch vorhanden ist.

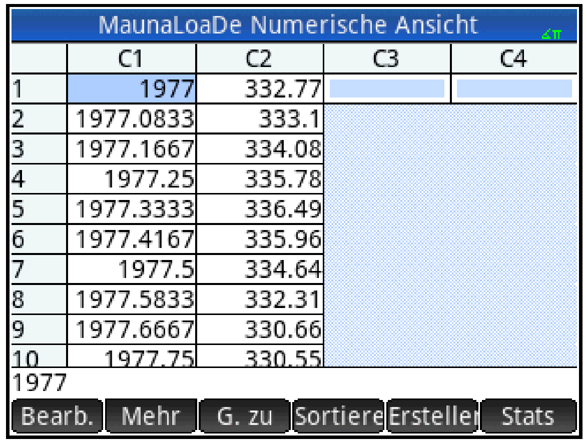
Weitergehende Übungen

1. Fordern Sie die Schüler auf, zu erklären, warum V3 eine Doppelspirale und keine einfache Spirale darstellt.

CO_2 in der Atmosphäre: Eine Untersuchung

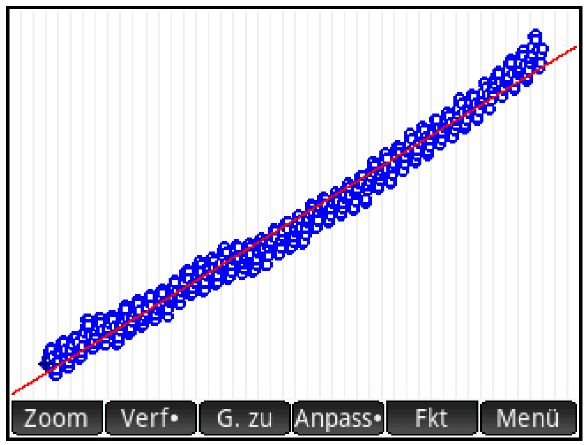
In dieser Übung betrachten wir die Änderung der CO_2-Konzentration in der Atmosphäre von 1977 bis 2016. Die HP Prime-App „MaunaLoa“ enthält die mittleren CO_2-Konzentrationen der Station in Mauna Loa auf Hawaii in den USA[1]. Sie erhalten die MaunaLoa-App von Ihrem Kursleiter.

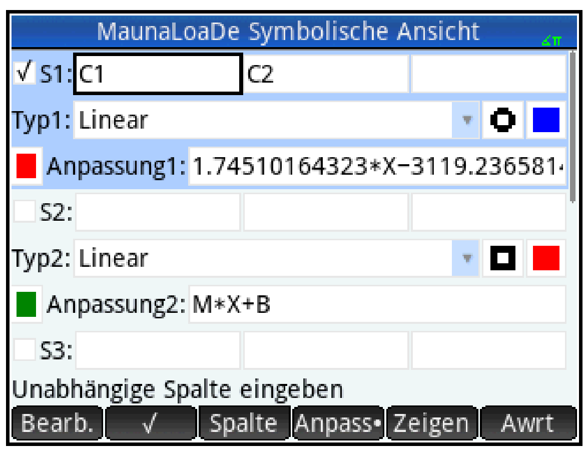
1. Drücken Sie Apps Info und wählen Sie die App **MaunaLoa** aus. Die App wird in der numerischen Ansicht geöffnet, in der Sie die Daten sehen können. Es gibt insgesamt 480 Datenpunkte.



Die Spalte C1 enthält die Zeitangaben (der erste Datenpunkt stellt Januar 1977 dar). Die Spalte C2 enthält die CO_2-Konzentrationen (in µmol CO_2-Gas pro Mol trockener Luft).

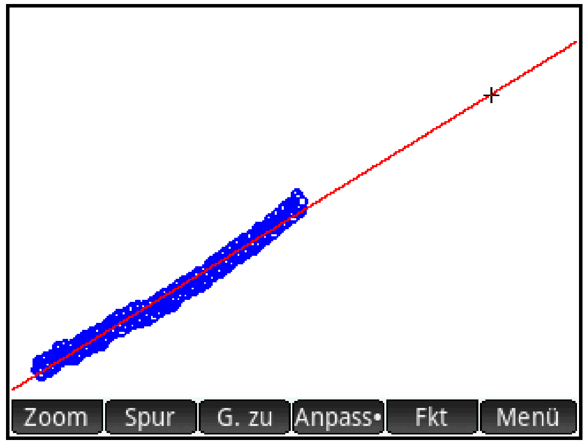
2. Drücken Sie View Copy und wählen Sie **Automat. Skalierung** aus, um die Datenmenge grafisch darzustellen.
3. Tippen Sie auf Menü und Anpass, um die lineare Regression anzuzeigen.
4. Drücken Sie Symb Setup, um die Regressionsgleichung anzuzeigen.





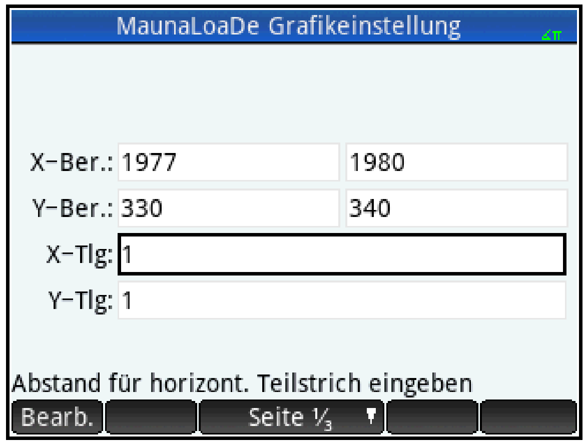
5. Welche Einheiten weist die Steigung der Geraden auf und was sagt der Wert der Steigung über die Änderung der CO_2-Konzentration in der Atmosphäre aus?

Eine Konzentration von 450 wird oft mit einer globalen Erwärmung von 2°C in Verbindung gebracht. Dieser Schwellenwert wird von vielen Experten als katastrophal für die Biosphäre angesehen.



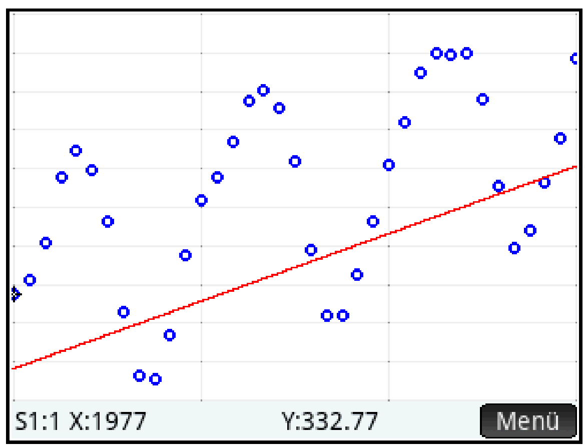
6. Kehren Sie zur grafischen Ansicht zurück. Zoomen und scrollen Sie dort mit dem Finger, bis Sie das Datum gefunden haben, an dem unser lineares Modell eine Überschreitung dieses Schwellenwerts vorhersagt. Schreiben Sie das Darum unten auf.

____



Sie haben vielleicht bemerkt, dass das Streudiagramm wie ein breites Band erscheint. Lassen Sie uns die Daten einiger Jahre genauer betrachten.

7. Drücken Sie   (Plot Setup). Ändern Sie **X-Ber.** und **Y-Ber.**, wie in der Abbildung gezeigt.

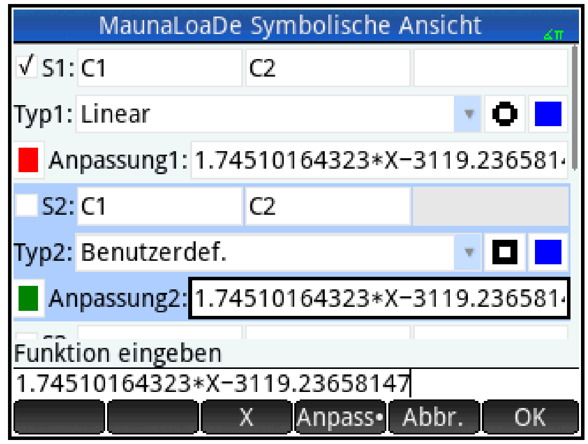


8. Drücken Sie , um die Daten von 1977 bis 1979 anzuzeigen. Die Daten weisen deutlich erkennbar ein sinusförmiges Muster auf. Die Rasterlinien weisen darauf hin, dass das Muster jahreszeitlich bedingt ist und sich jährlich wiederholt. Schätzen Sie anhand der Rasterlinien Periode und Amplitude der Sinuskurve ab.

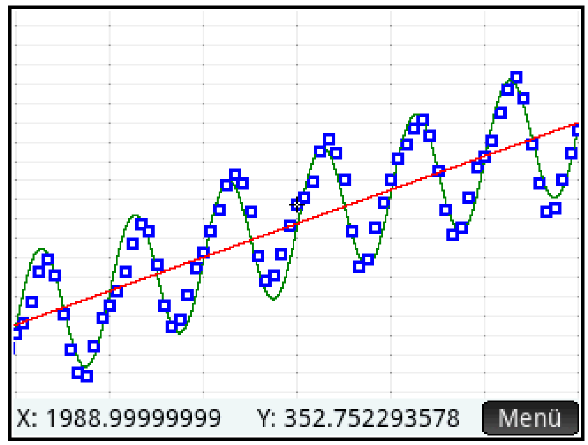
Periode: _______________

Amplitude: _______________

9. Kehren Sie zur Symbolansicht zurück. Markieren Sie „Anpassung1“ und drücken Sie Shift View/Copy (Copy), um den Ausdruck zu kopieren.
10. Legen Sie in „S2“ die Spalte C1 als unabhängige Datenspalte und C2 als abhängige Datenspalte fest. Tippen Sie auf „Anpassung2“ und drücken Sie Shift Menu/Paste (Paste), um die Zwischenablage zu öffnen. Tippen Sie dort auf den ersten Eintrag, um unsere Regressionsgleichung in „Anpassung2“ zu kopieren.



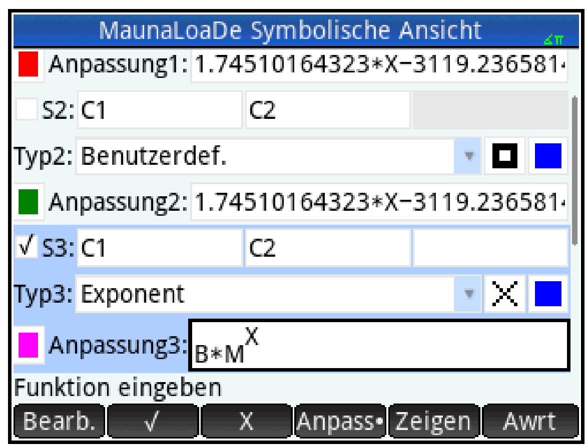
11. Verwenden Sie jetzt unser Wissen über das sinusförmige Muster, um eine benutzerdefinierte Regression zu erstellen, die die Saisonabhängigkeit berücksichtigt. Unsere Schätzung wird zusammen mit dem Streudiagramm und der linearen Regression in der Abbildung angezeigt. Schreiben Sie die benutzerdefinierte Regression unten auf:



Y = ____

____

12. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und deaktivieren Sie S2.
13. Legen Sie in „S3“ die Spalte C1 als unabhängige Datenspalte und C2 als abhängige Datenspalte fest. Tippen Sie auf „Anpassung3“ und wählen Sie **Exponent** aus.
14. Drücken Sie Num/Setup und tippen Sie auf Stats. Was stellen Sie zu den Werten von *r* und R^2 für die lineare und die exponentielle Regression fest? Tippen Sie auf OK, um zur numerischen Ansicht zurückzukehren.



____

____

15. Drücken Sie View Copy und wählen Sie **Automat. Skalierung** aus. Die beiden Regressionen sehen ziemlich ähnlich aus. Tippen Sie in die Mitte des Streudiagramms. Drücken Sie jetzt mehrmals − Base, um den Bereich um den Cursor zu verkleinern. Was fällt Ihnen bei den beiden Regressionen auf?

16. Wann sagt die exponentielle Regression voraus, dass der Schwellenwert von 450 ppm überschritten wird?

17. Kehren Sie zur symbolischen Ansicht zurück und betrachten Sie die Basis der exponentiellen Regression in S3. Was fällt Ihnen bei der Basis auf?

Hinweise für Lehrer und Lösungsschlüssel

Hinweise

Diese Übung verfolgt die folgenden Lernziele:

1. Die Schüler sollen mit relativ umfangreichen, relevanten, realen Datenmenge arbeiten.
2. Die Schüler sollen lineare und exponentielle Regressionen erstellen und die Bedeutung der Regressionsparameter interpretieren.
3. Die Schüler sollen basierend auf den Regressionen Prognosen machen.
4. Die Schüler sollen eigene benutzerdefinierte Regressionen erstellen.

Die Daten stammen vom NOAA ESRL Mauna Loa Observatorium in Hawaii. Die URL für die Daten ist:

https://www.esrl.noaa.gov/gmd/dv/data/index.php?site=mlo&parameter_name=Carbon%2BDioxide&type=Flask&frequency=Monthly%2BAverages

Die Daten sind in folgender Quelle zitiert:

Atmospheric Carbon Dioxide Dry Air Mole Fractions from the NOAA ESRL Carbon Cycle Cooperative Global Air Sampling Network, 1968-2016

Version: 2017-07-28

Dlugokencky, E.J., P.M. Lang, J.W. Mund, A.M. Crotwell,
M.J. Crotwell und K.W. Thoning (2017), Atmospheric Carbon Dioxide
Dry Air Mole Fractions from the NOAA ESRL Carbon Cycle
Cooperative Global Air Sampling Network, 1968-2016, Version: 2017-07-28,
Pfad: ftp://aftp.cmdl.noaa.gov/data/trace_gases/co2/flask/surface/.

Lösungsschlüssel

5. Die Einheit der Steigung ist µmol pro Mol pro Monat. Bei einem idealem Gas ist dies äquivalent mit ppm/Monat (Teile pro Million pro Monat). Die CO_2-Konzentration hat in den letzten 40 Jahren durchschnittlich um 1.745 ppm pro Monat zugenommen!
6. Im März 2045 wird voraussichtlich der Schwellenwert von 450 ppm überschritten.
8. Die Amplitude liegt zwischen 3 und 4 (wir haben 3.5 verwendet). Die Periode ist 1.
11. Unsere benutzerdefinierte Regression war Y=1.745*X-3119+3.5*SIN(6.28*X).

14. Für die lineare Regression lauten die Werte r =0.99032… und R^2=0.9807…, für die exponentielle Regression r =0.99189… und R^2=0.9838. Die Werte liegen eng beieinander, obwohl das exponentielle Modell hier etwas besser zu passen scheint.

15. Die beiden Regressionen divergieren schnell, wobei das exponentielle Modell wesentlich schneller größer wird.

16. Das exponentielle Modell prognostiziert, dass der Schwellenwert im Oktober 2040 überschritten wird, d. h. mehrere Jahre früher als beim linearen Modell.

17. Die Basis des exponentiellen Modells ist 1.00477… Dieser Wert liegt angesichts der Graphendarstellung für die Schüler überraschenderweise nah bei 1. Dies ist eine zentrale Erkenntnis über das Wesen eines exponentiellen Modells.