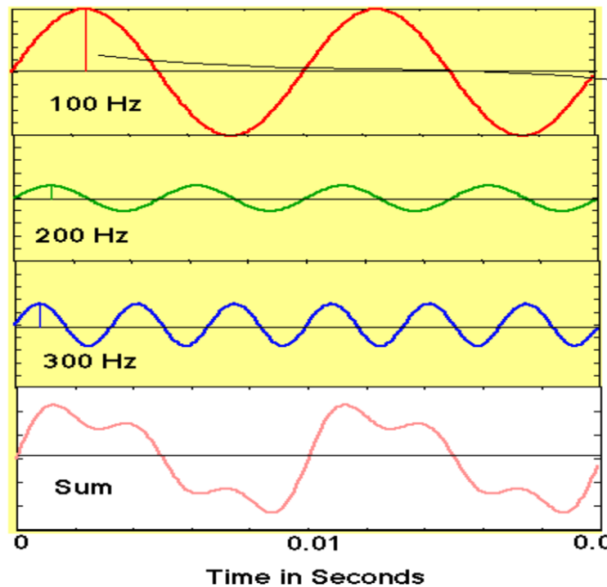
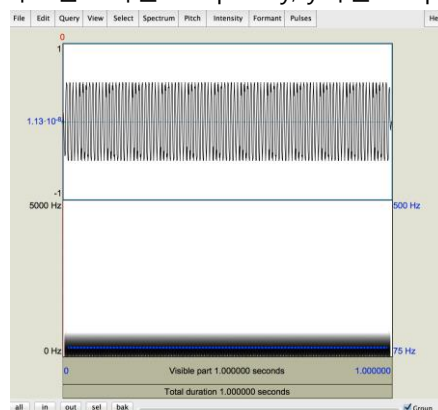


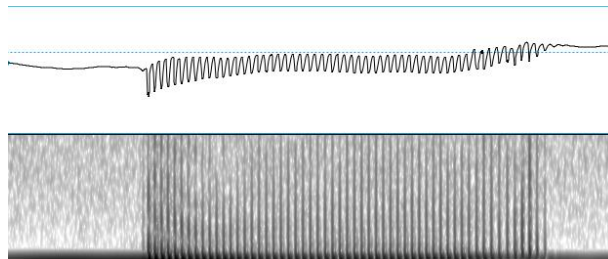
1. 소리는 숫자임. 등간격에 따라 할당된 숫자로 소리를 표현함. 그 점을 이어 그래프로 표현한 것. >>> 첫 수업, Praat을 이용하여 '안녕하세요'를 녹음한 것을 통해 알 수 있음
2. Consonants (자음)
  - A. 소리랑 철자랑은 다름!
  - B. 유의해야 할 표기는 j != 저 / j = 여
3. Vowels (모음)
  - A. monophthong (단모음) / diphthong (이중모음): 6개가 있음
  - B. 모든 모음은 voiced임
4. Phonetics
  - A. A study on speech: speech는 사람과 관련된 발화임. 동물 소리에는 speech라 하지 않음.
  - B. Articulatory (mouth), 조음 / Acoustic (through air): 물리적 영역, 음향 / Auditory (ear), 청각
5. Articulation
  - A. Vocal tract: Nasal tract / oral tract
  - B. Upper VT: lip ~ teeth ~ alveolar ridge ~ hard palate(구개) ~ soft palate(velum) ~ uvula ~ pharynx ~ larynx
  - C. Lower VT: tongue structure (tip, blade 등) ~ epi(뒤편)glottis
  - D. Ex. 코로 숨 쉴 때 velum은 lower → '아' 소리 내면 올라감
  - E. 사람은 기도(식도x)를 이용해서 소리가 남.
  - F. Larynx: Voice box. Voiced/Voiceless: vibration 차이
  - G. lips / tongue tip / tongue body: 메이저 조음에 관련된 것
  - H. Constriction Location (where) / Constriction Degree (how much)
  - I. CD: Upper part ~ Lower part: Stops > fricatives > approximants > vowels
  - J. English 발음은 Constrictors, CD, CL에 따라 달라짐
    - i. Ex. Velum raised, glottis opened, tongue tip, alveolar, stop = [t]
  - K. cf. 모든 모음은 constrictor로 tongue body만 씀
6. Phonemes
  1. individual sounds that form words ex. /s a k ou/
7. Praat
  - A. Duration(sec), Intensity(dB), Pitch(Hz), Formant(Hz)
  - B. 모든 시그널(신호)은 다르게 생긴 여러 사인 웨이브의 합으로 표현됨
  - C. 이 세상에 존재하는 모든 신호는 sine wave = f(frequency, magnitude)
  - D. Magnitude=amplitude



- E. 사인웨이브(SW) 1은 크기는 크지만 freq. 작음 → slow. 1초에 저 모양이 100번 들어감
- F. SW2는 2배 빠름.
- G. Sum SW도 1초에 100번 반복됨.
- H. x축은 시간, y축은 voltage(=value값)
- I. 합쳐서 Sum SW로 만드는 것 = synthesis / 그걸 어떤 것들로 이루어졌는데 스펙트럼으로 표현하는 것 = analysis
- J. 막대그래프로 만들면 스펙트럼: x축은 frequency, y축은 amplitude

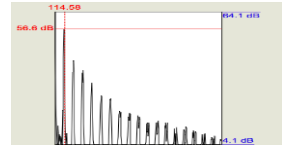


- K. 검게 칠해진 것: spectrogram. 스펙트럼을 time으로 visualize한 것임. 스펙트럼 자체는 시간 개념이 없기 때문.
- L. Human voice는 여러 사인 웨이브가 합해져 있음



- M. Source의 filter를 어떻게 만드느냐에 따라 '아' 소리도 만들고 '이' 소리도 만들.

- N. Source만 가지고도 spectral analysis 가능
- O. F0 = fundamental frequency
- P. 스펙트럼의 x축: time, y축: frequency
- Q. 진한 것이 amp가 큰 것임
- R. 이걸 gradually decrease harmonics. 저주파에서만 에너지가 강함.
- S. Human voice source consists of harmonics!
- T. Vocal tract의 shape에 의해서 소리가 만들어지는데 이걸 filtered된다고 말함
- U. Peak / Mountain
- V. 어디에 산맥이 나타나는가는 입모양에 따라 달라짐. 특정 높이의 소리는 특정한 입모양과 맞춰질 수밖에 없음. 그치만 같이 '아' 소리 내는 김씨, 이씨, 박씨의 산맥 패턴은 같음
- W. 첫 번째 산맥 = f1 ( $\neq$  f0)
- X. Praat을 통해 synthesize, combine source하는 법 배움



#### <Starting Python from Oct. 01<sup>st</sup>, 2019>

##### A. Variable

- A. 모든 language는 '단어'와 '문법'(어떻게 combine 하느냐)이 있음. '단어'는 그릇. '사과'라는 정보를 담으면 >> 사과가 됨. -> 컴퓨터 언어에서 이것은 Variable(변수). 숫자, 문자 등을 담을 수 있음.
- B. 문법: 1) 변수라는 그릇에 어떤 정보를 assign 하는 것 2) conditioning 하는 것=if절 3) 여러 번 반복하게 하는 것=for절 (loop) 4) 함수 (어떤 입력을 넣으면 어떤 출력이 나오는 것).
- C. Directory 가려면 anaconda prompt >> jupyter notebook >> 원하는 directory를 browse >> New >> Python3
- D. = 표시는 오른쪽에 있는 정보를 왼쪽에 있는 variable로 assign한다는 뜻
- E. Print 함수는 ( )에 변수를 넣으면 그 정보를 print out 하는 것 ex. Print(a) 에서 입력은 a
- F. Variable은 unique 하기 때문에 처음에 a=1하고 다음 셀에 a=2 쓰면 a=2로 overwrite됨. 근데 a=1셀을 클릭하고 run하면 그 아래 a=2 셀 있어도 print(a)=1 나옴
- G. 문자는 그냥 쓰면 무조건 변수취급임. 그래서 정보값으로 하고 싶으면 ' ' 해야 함
- H. Shift+enter = 실행
- I. Love = 2 / b = love / print(b) = 2 : love라는 변수에 2값을 넣고, 다시 b라는 변수에 love가 가진 정보값을 도출하게 b=love라는 식을 세우면, print(b)하면 love의 정보값인 2가 나옴. 그리고 엔터 대신에 a=1; b=2; c=3도 가능
- J. 한 셀에 a=1 엔터 b=2 엔터 c=3 하고 같은 셀에 엔터 c 이렇게 쓰면 마지막 c는 print(c)랑 같은 뜻임
- K. [ ] 이거는 리스트를 표현하는 것

- L. Type( )하면 각 변수가 무슨 타입인지 알려줌 ex. a=1 → type(a): int / a=1.2 → type(a)=float 실수 / a=[1,2,3] → type(a)=list / a='love' → type(a)=str 스트링 / a=[1,2,3,'love'] → type(a)=list 즉, 리스트는 숫자만일 필요는 없음 / [ ] 이거를 ( ) 애로 바꿔도 됨. Type은 tuple임. Tuple과 list은 완전 똑같은데, 다만 보안에 더 강함.
- M. Dictionary ex. a = ('a': 'apple', 'b': 'banana') 여기엔 2개가 들어있는 것, 표제어 : 설명 쌍으로 되어있음. → type(a) = dict
- N. Variable 이름 적고 대괄호 쓰고 안에 index 쓰면 그 값을 가져옴. a=[1,2,3]. Print(a[1])=2
- O. Dict의 정보를 access 할 때는, 페어에서 앞부분을 인덱스로 씬. 그니까 0,1,2 안 씬. Ex. a={"a":"apple", "b":"orange"}; print(a["a"]) = apple
- P. S='abcdef' ; print(s[1:3]) = bc(1번부터 3번 직전까지)
- Q. #을 붙이면 그 뒤가 실행이 안 됨. 쓰고 싶은 노트 쓰면 됨. / Code대신에 markdown으로 바꾸면 노트로 쓸 수 있음

#### <10.29 시험 리뷰>

- A. 영어의 nasal consonant는 발화할 때 velum이 lowered 되어서 nasal tract으로 air flow가 있지만, oral tract는 막혀서 air flow가 없다. (True)
- B. 일반적으로 영어 모음 /a/를 발화할 때, nasal tract의 air flow는 차단된다. (T)
- C. 다음 중 발화시 air pressure와 가장 관계가 있는 것은? (Intensity)
- D. 영어의 자음 중 코를 막고 숨을 쉴 때와 가장 유사한 articulation 상태인 음소는? (h)
- E. 영어 /h/는 다음 중 어떤 articulator에서 constriction을 가지는가? (lips/tongue tip/tongue body/**none**)
- F. 영어 음소 중에서 tongue body에서 constriction을 가지며 constriction degree는 fricative, constriction location은 velar인 자음의 개수는? (0개)
- G. 영어 자음 /v/의 articulator의 constriction location을 bilabial로 바꾸고 constriction degree로 approximant로 바꾸면 어떤 음소가 되는지 쓰시오. (w)
- H. /s/, /l/은 major articulators (lips, tongue tips, tongue body) 중에서 공통적으로 **tongue tip**에서 조음된다.
- I. 어떤 모음의 pitch가 128Hz이다. F1은 128Hz보다 반드시 크다. (T)
- J. 어떤 화자의 /j/ 모음을 120Hz의 pitch로 발화했다. 같은 화자가 똑같은 pitch로 /a/ 모음을 발화했다. /i/와 /a/ 모음에 대해, 0Hz~5000Hz 사이에 몇 개의 harmonics가 존재하는지 구하고, 각각의 개수를 a와 b라고 할 때, b-a는? (0)
- K. a=[[1],[2,3],[4,5,6]]  
n=0  
for bin a:  
    for d in b:  
        n+=1  
print(n)  
답: 6

L. 12-13번 총 몇 개의 unique한 함수가 있는가? (3개)

M. 몇 번 실행 되는가? (6번)

```
n=[1,2,3,4]
```

```
for i in range(len(n)):
```

```
    print(i)
```

N. 14-16번

```
a=[1,2,[3,4]]
```

위의 코드를 실행하면 결과가 4이다.

```
b=[1,'a',{'a':[3,6], 'b':[d]}, 'b']
```

```
print(b[-2]['b'][-1])
```

O. C=[1,'a',{'a':'abc', 'b':'def'}]

```
Print(c[-1]['b'][-2])
```

답은 2

P. 비슷한 문제

#### <중간고사 이후>

A. 숫자열을 가리켜 벡터라고 함.

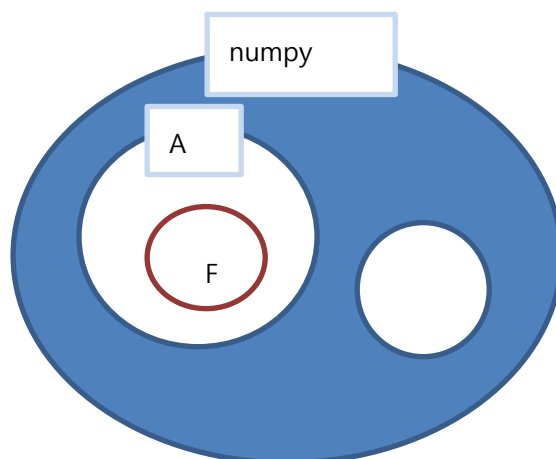
B. 사진을 픽셀로 나누면 숫자 값을 넣을 수 있음. 직사각형의 형태로 행과 열: 행렬

C. 모든 데이터는 벡터의 형태로 되어야 함

D. 사진 흑백은 행렬데이터가 1장, 컬러는 3장(RGB)로 이루어짐

E. Array는 계산 가능한 것으로 바뀌 줌

#### <Numpy>



- Import numpy as np #넘파이를 줄여쓰기 위해

- Import matplotlib.pyplot as plt 애는

```
from matplotlib import pyplot as plt
```

애로 바뀌서 쓸 수 있음

- Per sec의 개념이 들어가면 항상 Hz 단위를 써야 함. Sampling rate(1초에 몇 개 조각으로 나누는가)도 그러함.

```
In [9]: np.empty([2,3], dtype='int')
# [2,3] 2x3 2행 3열의 가드로 리 것

Out [9]: array([[72683148, 0, 0],
               [ 0, 1, 0]])
```

```
In [10]: np.zeros([2,3])
# 0으로 채워진 행렬 리스트가 만들어짐

Out [10]: array([[0., 0., 0.],
                [0., 0., 0.]])
```

```
In [11]: #(0, 0, 0), (0, 0, 0) 배열 2by3의 리스트를 만들고 싶으면
# 재 자치는 계산이 안 되니까 쓸모가 없음. 그래서 계산 가능한 형태로 만드는 것
np.array([[0,0,0],[0,0,0]])

Out [11]: array([[0, 0, 0],
                [0, 0, 0]])
```

```
In [12]: np.ones([2,3])
# ones, zeros의 default type은 float이니까 1, 이렇게 나올 것

Out [12]: array([[1., 1., 1.],
                [1., 1., 1.]])
```

```
In [13]: np.ones([2,3], dtype='int')
# 이러면 소수점 사라짐!

Out [13]: array([[1, 1, 1],
                [1, 1, 1]])
```

```
In [19]: np.arange(5)
```

```
In [25]: np.linspace(0,10,6)
# 예는 arange랑 다르게 0, 10 포함. 뜻은 0,10 포함하여 6개로 똑같이 나눠준다

Out [25]: array([ 0., 2., 4., 6., 8., 10.] )
```

```
In [26]: np.linspace(0,10,7)

Out [26]: array([ 0., 1.66666667, 3.33333333, 5., 6.66666667,
                8.33333333, 10.] )
```

```
In [31]: x=np.array([[1,2],[3,4],[5,6]])
x

Out [31]: array([[1, 2],
                [3, 4],
                [5, 6]])
```

```
In [33]: #3차원도 표기가 가능함. 2차원은 대괄호가 위치함 양옆이 2개씩 들어있음. 3차원은 3개씩.
#2차원 행들이 2개 나오면서 3차원이 됨
x=np.array([[[1,2],[3,4],[5,6]],[[7,8],[9,10],[10,11]]])
x

Out [33]: array([[[ 1, 2],
                  [ 3, 4],
                  [ 5, 6]],

                 [[ 7, 8],
                  [ 9, 10],
                  [10, 11]])])
```

```
In [34]: x.ndim
# 3차원이라는 것을 알려줌

Out [34]: 3
```

```
In [37]: x.astype(np.float64)
# 원래는 int32 data type인데 이걸 바꾸고 싶으면 astype함수를 씀
```

```
Out [37]: array([[[ 1., 2.],
                  [ 3., 4.],
                  [ 5., 6.]],

                 [[ 7., 8.],
                  [ 9., 10.],
                  [10., 11.]])])
```

```
In [38]: np.zeros_like(x)
# 형태를 유지하고 내용물을 0으로 바꾸고 싶을 때: zeros_like함수
# 근데 이것은 x=0 이렇게 해도 됨
```

```
Out [38]: array([[[0, 0],
                  [0, 0],
                  [0, 0]],

                 [[0, 0],
                  [0, 0],
                  [0, 0]])])
```

```
In [46]: #numpy 안의 random 패키지 안의 normal이라는 함수
# from numpy import random 이런 식으로도 쓸 수 있음?

data=np.random.normal(0,1,100)
# 정규분포 모양의 데이터를 만들어주는 것임 // shape 자체를 만들어주는 게 아니라
# normal(mean, standard deviation, data size)
```

```
In [52]: data=np.random.normal(0,1,100)
print(data)
plt.hist(data, bins=10)
plt.show()
```

### 3.Numpy I/O

```
In [59]: a=np.random.randint(0,10,[2,3])
          b=np.random.random([2,3])
          np.savez('test',a,b)
          #test라고 적으면 파일로 저장됨

In [58]: !ls -al test*
          #위의 파일이 만들어졌는지 확인하는것
          'ls'은(는) 내부 또는 외부 명령, 실행할 수 있는 프로그램, 또는
          배치 파일이 아닙니다.

In [60]: del a,b          #variable이 assign 안 된 상태로 없어짐
          %who             #지금 available variable

data      np      plt      x      y

In [61]: npzfiles=np.load('test.npz')          #이러면 불러올 수 있을 앞에 npzfiles는 variable이름이니까 뭔가 바꿔도 됨
          npzfiles.files

Out [61]: ['arr_0', 'arr_1']

In [62]: npzfiles['arr_0']

Out [62]: array([[7, 5, 4],
                 [9, 8, 9]])

In [ ]: data=np.loadtxt('regression.csv', delimiter=',',skiprows=1, dtype={'type':('x':'y'), 'formats'})
          #skiprows 1번씩 줄 뺌다
          #csv는 comma separated value 형태로 분류되어 있는 것.
          #regression file을 깃합에서 가져와서 해볼 것!!!
          #그 파일을 다른 받아서
```

- Phasor: 우리가 아는 것은 사인, 코사인 function. Sin(radian)임. Function input값에 넣는 것은 degree가 아니라 radian임.  
+)0도~2파이(360도). 이 도는 degree라고 함. 각도를 파이로 표현하는 것을 radian이라고 함. Radian은 theta  $\theta$  로 표현. Ex.  $\theta=3/2\pi$ 면 cos값은 0.  
 $\Theta = 0, 1/2\pi, \pi, 3/2\pi, 2\pi(=0)$   
+)사인, 코사인 함수.



+)오일러공식:  $\cos(\theta) + \sin(\theta)I = e^{\theta i}$

I는 imaginary. 실수의 반대말, 허수.  $\sqrt{-1}$

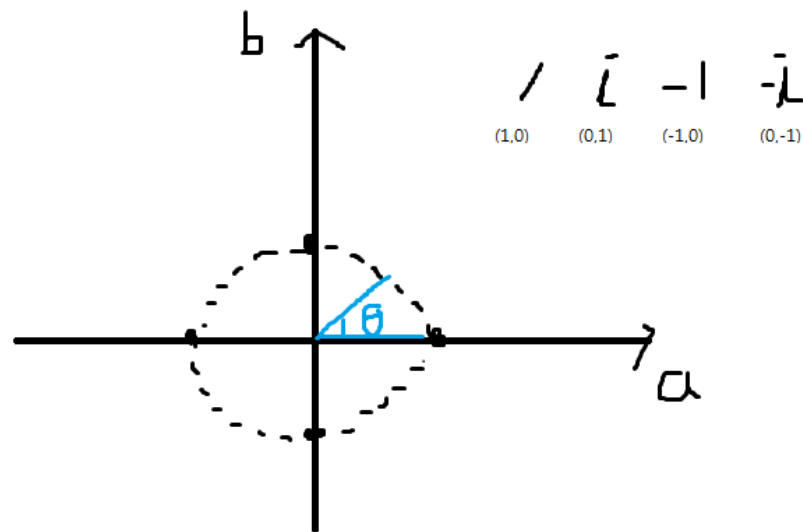
$F(\theta) = e^{\theta i}$  = 숫자(왜냐면 e도 2.71, i도 루트 마이너스, 전부 수로 표현 가능)

복소수:  $a+bi$  복소수로 우리가 생각하는 모든 수를 표현할 수 있음.

즉, 위의 식  $F(\theta) = e^{\theta i}$ 도  $a+bi$ 로 표현할 수 있음.

$\Theta = 0, 1/2\pi, \pi, 3/2\pi, 2\pi \rightarrow 1, i, -1, -i$

- Projection



실수만 보고 싶으면(cos함수) a축에서 왔다 갔다, 허수만 보고(sin함수) 싶으면 b축에서 왔다갔다.

- 소리라는 실체는 각도뿐만 아니라 시간의 개념이 반드시! 들어가 있어야 함.

```
In [27]: from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
import IPython.display as ipd
import numpy as np
%matplotlib notebook
from scipy.signal import lfilter

In [28]: #parameter setting
amp=1
sr=10000
dur=0.5
freq=200.0

In [29]: theta = np.arange(0,2*np.pi) #단위는 radian
theta

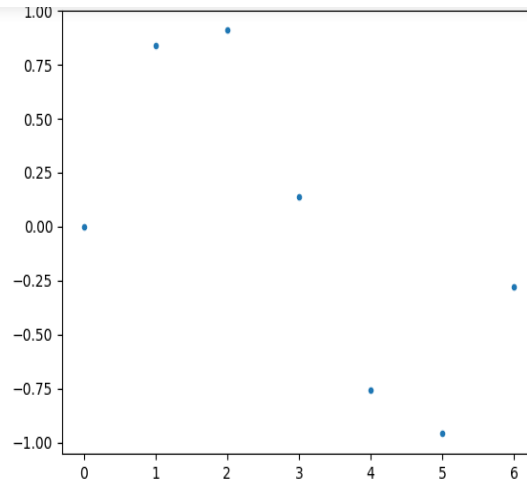
Out[29]: array([0., 1., 2., 3., 4., 5., 6.])

In [30]: s=np.sin(theta)
s

Out[30]: array([ 0.          ,  0.84147098,  0.90929743,  0.14112001, -0.7568025 ,
        -0.95892427, -0.2794155 ])
```

```
In [18]: fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111) #figure는 화면 전체.
ax.plot(theta, s, '. ') #7개의 theta 값이 있으니 corresponding 값도 7개
                        #s는 sin함수
```





Out [18]: [matplotlib.lines.Line2D at 0x93012c8]

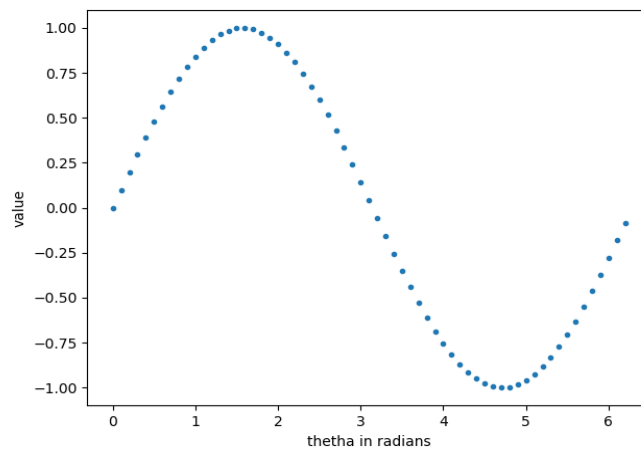
#221= 2행 2열, 1,2,3,4 subplot. 왼쪽 위1, 오른쪽 위2, 왼쪽 아래3, 오른쪽 아래4

```
fig=plt.figure() ax=fig.add_subplot(221) ax.plot(theta, s, '.') ax=fig.add_subplot(222) ax.plot(theta, s, '.') ax=fig.add_subplot(223) ax.plot(theta, s, '.')
ax=fig.add_subplot(224) ax.plot(theta, s, '.')
```

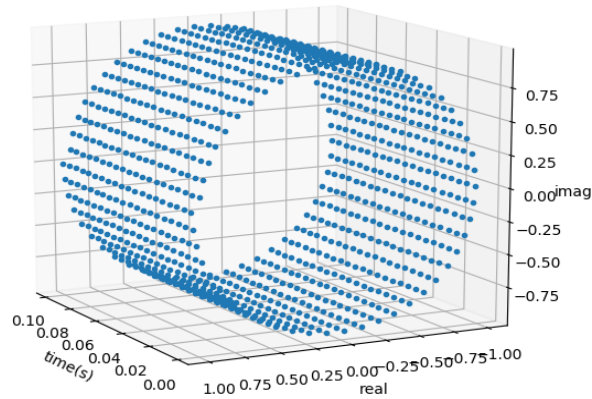
In [34]: #더 백백하게 만들려면  
theta = np.arange(0,2\*np.pi, 0.1) #뒤에거는 np.arange(0,2\*np.pi) --> 1 단위로 쪼갬, 바꾼 식은 0.1씩 쪼갬  
theta

Out [34]: array([0. , 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1. , 1.1, 1.2,  
1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2. , 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5,

In [35]: s=np.sin(theta)  
  
fig=plt.figure()  
ax=fig.add\_subplot(111)  
ax.plot(theta,s, '.')  
ax.set\_xlabel('theta in radians')  
ax.set\_ylabel('value')



```
In [45]: fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(t[0:1000],c.real[0:1000],c.imag[0:1000],'.')
ax.set_xlabel('time(s)')
ax.set_ylabel('real')
ax.set_zlabel('imag')
```



<11.12&11.14>

```
In [14]: from matplotlib import pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
from mpl_toolkits.axes_grid1 import make_axes_locatable
import IPython.display as ipd
import numpy as np
from matplotlib notebook
from scipy.signal import lfilter
```

```
In [15]: #parameter setting
amp=1 #진폭
sr=10000
dur=0.5
freq=440.0
```

```
In [16]: #t=np.arange(1,sr*dur) #매는 시간 개념을 먼저 넣어준 것. 근데 여기는 time tic을 준 거고, '몇 초'로 만들려면 sr로 나눌
t=np.arange(1,sr*dur+1)/sr #마지막까지 포함해줬고 더하기 일 함으로서, sr로 나눠주면서 초 개념 생성
```

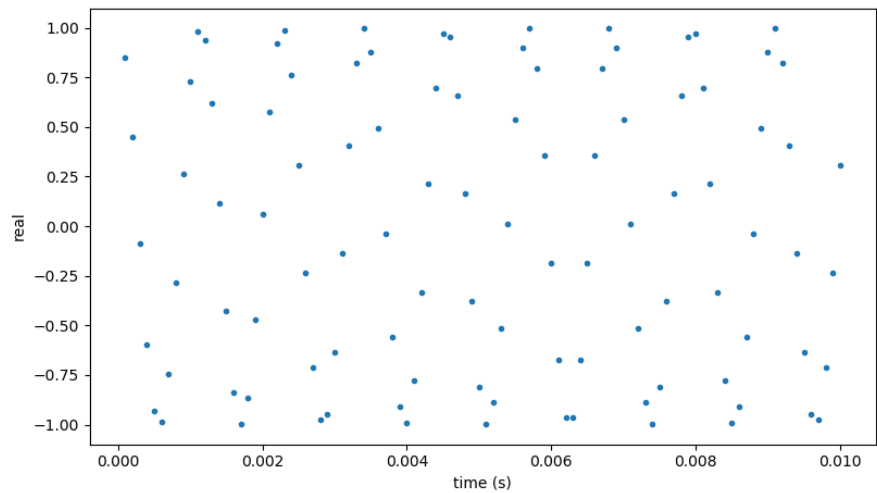
```
In [21]: #generate signal by cosine-phasor
s=amp*np.cos(theta)
#sin, cos 둘다 소리 똑같은, 귀가 phase(각도)에는 sensitive하지 않다. 우리는 phase shift 인식하지 못함.
#우리는 frequency에 민감
```

```
In [22]: theta=t*2*np.pi*freq #freq는 몇 바퀴인지
```

```
In [20]: fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111)
ax.plot(t[0:100],s[0:100],'.') #0~100만 정하면 너무 뻑뻑해서 대략 모양이 안 보임
ax.set_xlabel('time (s)')
ax.set_ylabel('real')
```

#2차원 벡터로 표현, 여기있는 점들의 개수는 1000개.

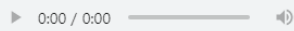
<IPython.core.display.Javascript object>



Out [20]: Text(0, 0.5, 'real')

In [23]: ipd.Audio(s,rate=sr)

Out [23]:

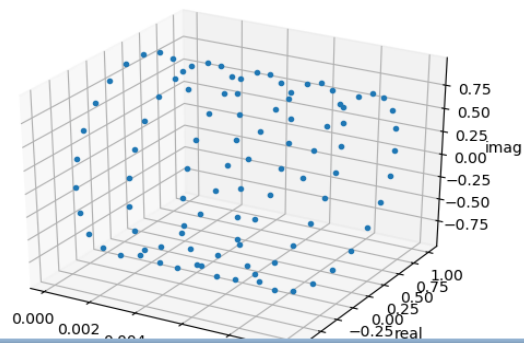


```
c=amp*np.exp(theta*1j) #np.exp = e라고 생각하면 됨. 오일러식에 나오는. 1j는 i임. 허수 뜻하는;
c
```

Out [24]: array([0.96202767+2.72951936e-01j, 0.85099448+5.25174630e-01j,  
0.67533281+7.37513117e-01j, ..., 0.85099448-5.25174630e-01j,  
0.96202767-2.72951936e-01j, 1. +3.13806691e-14j])

```
In [26]: fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111, projection='3d')
ax.plot(t[0:100],c.real[0:100],c.imag[0:100], '.')
```

<IPython.core.display.Javascript object>



```

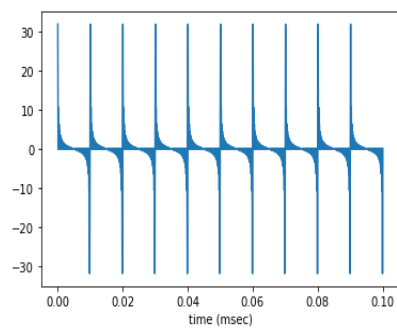
In [13]: F0=100
Fend = int(sr/2) #nyquist frequency
s=np.zeros(len(t))
#time은 위에서 만들었으니 이미 만들었다고 가정.
for freq in range(F0, Fend+1, F0):
    theta = t*2*np.pi*freq
    tmp=amp*np.sin(theta)
    s=s+tmp
    #제일 처음 s가 무엇인가 정의를 해줘야 함, s=tmp니까 저 s가 먼저 정의되어야 저 수식의 첫 s가 나올.
    #그게 위에 있는 s=np.zeros(len(t)) 해의 의미
fig = plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111)
ax.plot(t[0:1000],s[0:1000])
ax.set_xlabel('time (msec)')
ipd.Audio(s, rate=sr)

#애는 spectrum0이 아님.(녹음)

```

Out [13]:

▶ 0:00 / 0:00 🔊 ⋮



```

In [29]: def hz2w(F,ar):
NyFreq = sr/2
w = F/NyFreq *np.pi
return w #출력

def resonance(sr,F,BW):
a2=np.exp(-hz2w(BW,sr))
omega=F*2*np.pi/sr
a1=-2*np.sqrt(a2)*np.cos(omega)
a=np.array([1,a1,a2])
b=np.array([sum(a)])
return a,b

```

```

In [30]: RG=0
BWG=100
a,b=resonance(sr,RG,BWG) #Bandwidth 산책이 얼마나 뚱뚱하나, 뾰족하나
s=filter(b,a,s,axis=0)
ipd.Audio(s,rate=sr)

#decreasing한 효과가 있음.

```

Out [30]:

▶ 0:00 / 0:00 🔊

```

In [31]: RG=500
BWG=60
a,b=resonance(sr,RG,BWG) #Bandwidth 산책이 얼마나 뚱뚱하나, 뾰족하나
s=filter(b,a,s,axis=0)
ipd.Audio(s,rate=sr)

```

Out [31]:

▶ 0:00 / 0:00 🔊

## Linear Algebra

- <데이터> (((기계: 인공지능))) <데이터>

벡터                  함수(행렬)                  벡터

Ex. 음성 인식, 음성 합성, 기계 번역 등

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- M by n 행렬

- To become a vector space: linear combinations( $C*V + D*W$ ) still stay in the space

- 무수히 많은 여러 벡터들이 만들어내는 공간을 'vector space'라고 함

- N차원의 공간은 n개의 컴포넌트로 이루어진 벡터로 채워진 것

- 칼럼 벡터들의 리니어 컴비네이션으로 만들어 내는 공간 (= 칼럼 벡터가 스패닝 해서 만들어내는 공간). 원점만 있으면 0차원

- col1 & 2 NOT on a line -> independent

- Whole space: 벡터 자체가 갖고 있는 스페이스.

Column space: 스패닝 했을 때

- col1 & 2 on a line -> dependent: 라인만 확장되고 스페이스 전부 채울 수 없음

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

- 칼럼3 = (칼럼1\*1)+(칼럼2\*1). Independent는 1,2뿐

- Null space: whole이 3차인데, column space가 1차. 남은 2차가 null space

- Spanning해서 만들어진 space의 수직이 되는 orthogonal한 것을 null space라고 부름

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix}$$

- Linear Transformation:  $Ax = b$

- Detransformation: inverse matrix 역행렬:  $A^{-1}b = x$

$$\begin{bmatrix} 0.9 & -0.4 \\ 0.4 & 0.9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 하지만 invert 할 수 없는 것도 있음

- Eigenvector

given matrix의 아이겐벡터는 매트릭스의 transformation 하고 난 후의 것과 하기 전의 점이 일직선상에 놓임

$Av=b$ ; A transforms v to b

- Among all v, some v is parallel to Av: Eigenvector

