

Università degli Studi di Milano
Corso di Laurea Triennale in Fisica
Esperienza di Millikan
Misura della carica dell'elettrone

Carlo Moroni, Enco Musa, Matteo Pasolini
Turno: LU4

14 Ottobre 2024

Abstract

Abbiamo determinato la carica dell'elettrone misurando la velocità limite di goccioline di olio minerale cariche elettricamente, sia in assenza che in presenza di un campo elettrico.

Il valore sperimentale ottenuto è $e_{mis}^- = (1.64 \pm 0.03) \cdot 10^{-19}C$, con una discrepanza di 1.27σ rispetto al valore universalmente accettato.

1 Introduzione e modalità

L'esperimento di Millikan si propone di misurare con precisione la carica elementare dell'elettrone, un parametro fondamentale per comprensione di numerosi fenomeni fisico-chimici. Questa esperienza ha inoltre fornito l'opportunità di osservare come le particelle cariche interagiscono con i campi elettrici.

Utilizzando un normale spruzzatore, sono state prodotte goccioline d'olio microscopiche, caricate elettricamente per strofinio, all'interno di una cameretta dotata di un condensatore. Attraverso un microscopio, dotato di reticolo, è stato possibile osservare le gocce e determinarne la velocità di sedimentazione, misurando il loro tempo di volo e la distanza percorsa. Per ogni goccia, le misurazioni sono state effettuate inizialmente senza il campo elettrico, così da determinarne il raggio, e successivamente in presenza di campo elettrico, del quale si poteva invertire il vero, al fine di calcolare la carica elettrica depositata.

Per brevità verrà chiamato campo elettrico positivo, quello che attira le gocce verso l'elettrodo inferiore e negativo quello che le attira verso l'elettrodo superiore.

2 Esposizione dei risultati

Alcuni valori delle gocce sono stati misurati o calcolati una sola volta e, ove possibile, lasciati invariati per tutta la misurazione della goccia stessa. Per la resistenza, misurata con l'ohmetro, è stato preso come sigma ± 1 sull'ultima cifra significativa (si stavano misurando i $M\Omega$, quindi si parla di $\pm 1 k\Omega$), in quanto il valore era molto costante e poco soggetto a fluttuazioni.

Per la temperatura, ottenuta con l'apposita tabella di conversione da $M\Omega$ a $^{\circ}C$, si è tenuta un'incertezza di $\pm 1^{\circ}C$, in quanto era la minima quantità apprezzabile con la tabella, oltre al fatto che i dati della resistenza ottenuti, molto spesso, non combaciano perfettamente con il valore tabulato, quindi abbiamo approssimato al valore più vicino.

Anche i valori del voltaggio fornito al sistema non venivano cambiati durante la raccolta dati per una goccia, inoltre, l'incertezza tenuta per questa misura è stata scelta di $\pm 2 V$ in quanto il generatore di tensione mostrava valori oscillanti e se ne è presa una media, tenendo conto dell'escursione massima.

Nella prima tabella di ogni goccia vengono anche riportati differenza di potenziale e campo elettrico. Essi sono di valore positivo in quanto, per ottenere il valore per il campo elettrico negativo, bisogna semplicemente moltiplicare questi valori per -1 .

2.1 Goccia 1

Resistenza $[M\Omega]$	2.058
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.473E-05$
$\Delta V [V]$	348
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	46072

Table 1: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
2.0	$2.53E-04$	$4.59E-19$
1.5	$3.33E-04$	$6.14E-19$
1.8	$2.75E-04$	$5.02E-19$
1.7	$2.98E-04$	$5.46E-19$
2.1	$2.42E-04$	$4.38E-19$

Table 3: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
46.4	$1.078E-05$	$2.878E-07$
46.2	$1.083E-05$	$2.886E-07$
45.8	$1.092E-05$	$2.900E-07$
29.1	$1.720E-05$	$3.731E-07$
29.0	$1.725E-05$	$3.738E-07$

Table 2: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
2.0	$2.50E-04$	$5.06E-19$
2.1	$2.40E-04$	$4.87E-19$
2.0	$2.46E-04$	$4.99E-19$
2.2	$2.29E-04$	$4.66E-19$
2.3	$2.22E-04$	$4.52E-19$

Table 4: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.2 Goccia 2

Resistenza $[M\Omega]$	2.060
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.494E-05$
$\Delta V [V]$	404
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	53486

Table 5: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
0.8	$6.17E-04$	$1.10E-18$
0.9	$5.81E-04$	$1.03E-18$
0.9	$5.88E-04$	$1.05E-18$
0.9	$5.56E-04$	$9.86E-19$
0.9	$5.81E-04$	$1.03E-18$

Table 7: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
35.0	$1.429E-05$	$3.369E-07$
36.4	$1.375E-05$	$3.297E-07$
29.5	$1.698E-05$	$3.705E-07$
32.3	$1.548E-05$	$3.521E-07$
33.6	$1.489E-05$	$3.446E-07$

Table 6: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
1.0	$5.00E-04$	$9.39E-19$
1.0	$4.95E-04$	$9.30E-19$
0.9	$5.81E-04$	$1.09E-18$
0.9	$5.68E-04$	$1.06E-18$
0.9	$5.81E-04$	$1.09E-18$

Table 8: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.3 Goccia 3

Resistenza $[M\Omega]$	2.058
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.499E-05$
$\Delta V [V]$	306
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	40512

Table 9: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

Le misurazioni di questa goccia in presenza di campo elettrico positivo non sono state possibili dal momento che la goccia è scomparsa dal piano di osservazione.

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
37.1	$1.348E-05$	$3.262E-07$
33.5	$1.493E-05$	$3.451E-07$
27.5	$1.817E-05$	$3.845E-07$
37.5	$1.334E-05$	$3.243E-07$
28.0	$1.789E-05$	$3.812E-07$

Table 10: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
5.1	$9.84E-05$	$2.79E-19$
4.6	$1.09E-04$	$3.06E-19$
4.6	$1.08E-04$	$3.02E-19$
4.5	$1.12E-04$	$3.11E-19$
3.6	$1.39E-04$	$3.78E-19$

Table 11: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.4 Goccia 4

Resistenza $[M\Omega]$	2.023
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.589E-05$
$\Delta V [V]$	340
$E [\frac{N}{C}]$	45013

Table 12: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
3.7	$1.35E-04$	$3.52E-19$
4.0	$1.25E-04$	$3.20E-19$
3.9	$1.28E-04$	$3.27E-19$
3.6	$1.41E-04$	$3.72E-19$
4.1	$1.23E-04$	$3.14E-19$

Table 14: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$r [m]$
17.0	$2.948E-05$	$4.999E-07$
16.5	$3.023E-05$	$5.067E-07$
18.4	$2.720E-05$	$4.787E-07$
16.2	$3.092E-05$	$5.129E-07$
15.1	$3.311E-05$	$5.321E-07$

Table 13: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
7.3	$6.84E-05$	$3.32E-19$
7.3	$6.89E-05$	$3.33E-19$
7.1	$7.06E-05$	$3.39E-19$
7.2	$6.96E-05$	$3.36E-19$
7.2	$6.98E-05$	$3.36E-19$

Table 15: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.5 Goccia 5

Resistenza $[M\Omega]$	2.024
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.624E-05$
$\Delta V [V]$	410
$E [\frac{N}{C}]$	54281

Table 16: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
1.2	$4.17E-04$	$1.27E-18$
1.8	$2.86E-04$	$8.28E-19$
1.7	$2.91E-04$	$8.45E-19$
1.6	$3.13E-04$	$9.19E-19$
1.7	$3.03E-04$	$8.87E-19$

Table 18: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$r [m]$
12.6	$3.978E-05$	$5.868E-07$
11.9	$4.205E-05$	$6.044E-07$
12.2	$4.085E-05$	$5.951E-07$
11.9	$4.216E-05$	$6.052E-07$
11.4	$4.378E-05$	$6.175E-07$

Table 17: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
2.1	$2.44E-04$	$9.69E-19$
2.4	$2.07E-04$	$8.43E-19$
2.1	$2.40E-04$	$9.57E-19$
2.7	$1.89E-04$	$7.82E-19$
2.4	$2.08E-04$	$8.49E-19$

Table 19: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.6 Goccia 6

Resistenza $[M\Omega]$	2.028
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} [\frac{Ns}{m^2}]$	$1.676E-05$
$\Delta V [V]$	380
$E [\frac{N}{C}]$	50309

Table 20: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
1.4	$3.50E-04$	$1.41E-18$
1.5	$3.38E-04$	$1.35E-18$
1.7	$2.98E-04$	$1.14E-18$
1.7	$2.98E-04$	$1.14E-18$
1.5	$3.42E-04$	$1.37E-18$

Table 22: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$r [m]$
6.8	$7.386E-05$	$8.134E-07$
7.2	$6.983E-05$	$7.899E-07$
6.5	$7.692E-05$	$8.309E-07$
6.3	$7.937E-05$	$8.446E-07$
7.2	$6.983E-05$	$7.899E-07$

Table 21: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v [\frac{m}{s}]$	$Q [C]$
3.3	$1.50E-04$	$1.14E-18$
3.3	$1.53E-04$	$1.16E-18$
2.9	$1.74E-04$	$1.27E-18$
3.4	$1.49E-04$	$1.14E-18$
2.7	$1.87E-04$	$1.33E-18$

Table 23: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.7 Goccia 7

Resistenza $[M\Omega]$	2.028
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.672E-05$
$\Delta V [V]$	380
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	50309

Table 24: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
1.3	$3.85E-04$	$1.56E-18$
1.6	$3.07E-04$	$1.17E-18$
1.6	$3.23E-04$	$1.25E-18$
1.6	$3.13E-04$	$1.20E-18$
1.5	$3.38E-04$	$1.33E-18$

Table 26: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
7.6	$6.579E-05$	$7.655E-07$
7.2	$6.944E-05$	$7.876E-07$
7.2	$6.954E-05$	$7.881E-07$
6.6	$7.610E-05$	$8.263E-07$
7.0	$7.184E-05$	$8.017E-07$

Table 25: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
2.7	$1.87E-04$	$1.28E-18$
2.9	$1.74E-04$	$1.22E-18$
2.5	$2.02E-04$	$1.35E-18$
2.8	$1.79E-04$	$1.24E-18$
2.5	$2.04E-04$	$1.37E-18$

Table 27: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.8 Goccia 8

Resistenza $[M\Omega]$	2.029
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.633E-05$
$\Delta V [V]$	410
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	54281

Table 28: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
0.9	$4.95E-04$	$1.60E-18$
0.8	$4.95E-04$	$1.60E-18$
0.8	$4.95E-04$	$1.60E-18$
0.9	$4.95E-04$	$1.60E-18$
0.8	$4.95E-04$	$1.60E-18$

Table 30: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
11.4	$4.390E-05$	$6.183E-07$
11.7	$4.292E-05$	$6.110E-07$
10.7	$4.686E-05$	$6.401E-07$
9.5	$5.258E-05$	$6.803E-07$
12.0	$4.156E-05$	$6.006E-07$

Table 29: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
1.0	$4.95E-04$	$1.93E-18$
1.0	$4.95E-04$	$1.93E-18$
1.0	$4.95E-04$	$1.93E-18$
1.0	$4.95E-04$	$1.93E-18$
1.0	$4.95E-04$	$1.93E-18$

Table 31: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.9 Goccia 9

Resistenza $[M\Omega]$	2.025
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.609E-05$
$\Delta V [V]$	306
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	40512

Table 32: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
4.0	$1.24E-04$	$3.64E-19$
2.5	$2.04E-04$	$6.98E-19$
3.0	$1.67E-04$	$5.43E-19$
3.3	$1.52E-04$	$4.80E-19$
2.6	$1.90E-04$	$6.40E-19$

Table 34: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
16.8	$2.971E-05$	$5.020E-07$
12.9	$3.891E-05$	$5.799E-07$
13.9	$3.597E-05$	$5.561E-07$
13.0	$3.849E-05$	$5.766E-07$
13.3	$3.754E-05$	$5.689E-07$

Table 33: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
8.8	$5.66E-05$	$3.85E-19$
3.8	$1.31E-04$	$6.96E-19$
5.8	$8.64E-05$	$5.09E-19$
5.3	$9.38E-05$	$5.40E-19$
3.9	$1.28E-04$	$6.83E-19$

Table 35: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

2.10 Goccia 10

Resistenza $[M\Omega]$	2.028
Temperatura $[^{\circ}C]$	24
$\eta \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.843E-05$
$\eta_{eff} \left[\frac{Ns}{m^2}\right]$	$1.661E-05$
$\Delta V [V]$	410
$E \left[\frac{N}{C}\right]$	54281

Table 36: Tabella dei valori costanti all'interno della misurazione

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
2.1	$2.36E-04$	$7.42E-19$
1.9	$2.70E-04$	$8.88E-19$
2.1	$2.42E-04$	$7.66E-19$
1.7	$2.92E-04$	$9.82E-19$
2.1	$2.40E-04$	$7.61E-19$

Table 38: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico positivo

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$r [m]$
8.7	$5.760E-05$	$7.139E-07$
8.5	$5.896E-05$	$7.227E-07$
7.7	$6.468E-05$	$7.587E-07$
7.5	$6.693E-05$	$7.725E-07$
8.5	$5.910E-05$	$7.236E-07$

Table 37: Tabella dei tempi, velocità e raggi, misurati in assenza di campo elettrico

$\Delta t [s]$	$v \left[\frac{m}{s}\right]$	$Q [C]$
4.1	$1.23E-04$	$7.84E-19$
3.9	$1.29E-04$	$8.11E-19$
3.9	$1.27E-04$	$8.03E-19$
3.8	$1.32E-04$	$8.21E-19$
3.9	$1.28E-04$	$8.07E-19$

Table 39: Tabella dei tempi, velocità e cariche, misurati in presenza di campo elettrico negativo

3 Analisi dei dati

Attraverso un'analisi preliminare dei dati, è possibile evidenziare alcuni aspetti significativi che hanno caratterizzato la misurazione della carica dell'elettrone.

In primo luogo, è importante sottolineare che le misurazioni sono risultate particolarmente complesse, principalmente a causa dalla poca familiarità con lo strumento utilizzato. Inoltre, le difficoltà sono state aggravate dal comportamento imprevedibile delle gocce d'olio: in alcune occasioni, ne cadevano troppe simultaneamente, rendendo difficile la misurazione, mentre, in altre, nessuna gocciolina era visibile, probabilmente a causa di un'ostruzione nel passaggio all'interno della camera di Millikan. In altri casi, alcune goccioline non rispondevano al campo elettrico, sembrando quindi prive di carica, oppure risultavano troppo piccole e perciò soggette a moti irregolari e non rettilinei.

Le cariche misurate per le gocce numero 2 e numero 8, sia con campo positivo che negativo, non sono state incluse nel calcolo della carica dell'elettrone. Questo perché, analizzando i tempi di discesa e risalita registrati per entrambe le gocce, è emerso che tali valori risultavano imprecisi, essendo, spesso, inferiori a un secondo. Poiché il tempo di reazione umana è di circa 200 millisecondi e tendo conto anche del tempo necessario per comunicare l'avvio e l'arresto del cronometro, queste misurazioni non sono risultate affidabili.

È stata riscontrata la stessa problematica anche nella prima misurazione della carica della goccia 9 (sia col campo elettrico positivo che negativo). Infatti, confrontando i valori di carica ottenuti, essi presentano una discrepanza troppo elevata con gli altri risultati. Ciò può essere ricondotto alle discrepanze stesse tra gli intervalli di tempo.

Infine, per quanto riguarda la goccia numero 3, non è stato possibile ottenere misurazioni con campo elettrico positivo, poiché la goccia stessa, dopo la misurazione in presenza di campo elettrico negativo, è scomparsa dal piano di osservazione, probabilmente interagendo con altre goccioline presenti.

4 Elaborazione dei dati

Durante l'esperienza, si raccoglievano i dati di tempo, resistenza interna al sistema e differenza di potenziale generata. Tutti i dati ottenuti derivano da queste variabili e diverse costanti già conosciute a priori.

Uno dei primi dati ricavati è stata la velocità, che si ottiene dalla formula:

$$v = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (1)$$

Dove Δz è una costante ($0.5 \cdot 10^{-3} m$) ed è la distanza tra due linee spesse del reticolo visualizzato col microscopio, mentre Δt è l'intervallo di tempo che la goccia ha impiegato per percorrere un Δz .

Per ottenere la relativa incertezza, è bastato compiere la derivata parziale della velocità lungo l'intervallo di tempo

($\frac{\partial v}{\partial \Delta t} = -\frac{\Delta z}{(\Delta t)^2}$) per poi utilizzarla¹ nella propagazione degli errori:

$$\sigma_v = v \sqrt{\left(-\frac{\sigma_{\Delta t}}{\Delta t}\right)^2} \quad (2)$$

Dove $\sigma_{\Delta t}$ è l'incertezza sui tempi, stimata di ± 0.3 s, dato che era dovuta ai tempi di reazione per comunicare la partenza della goccia e la ricezione da parte dell'altra persona e la conseguente presa del tempo.

Grazie alla resistenza ed ai valori tabulati, è stato possibile ottenere facilmente la temperatura, la cui σ è stata presa di ± 1 °C in quanto la tabella lasciava apprezzare quelle variazioni di temperatura. Si noti che i valori della resistenza non coincidono con quelli della tabella, ma si è deciso di approssimare alla temperatura più vicina, che compatibile con l'incertezza in esame.

Dalla temperatura è stato ricavato il valore di η , coefficiente di viscosità dell'aria, per mezzo della formula:

$$\eta = [1.800 + (T - 15) \cdot 4.765 \cdot 10^{-3}] \cdot 10^{-5} \quad (3)$$

Dove l'unica variabile è T della temperatura e tutte le altre sono costanti.

Ne è risultato semplice calcolarne la σ in quanto vi è una sola dipendenza dal valore della temperatura e, facendo la propagazione degli errori, è possibile ottenere la seguente:

$$\sigma_\eta = 4.765 \cdot \sigma_T \cdot 10^{-8} \quad (4)$$

Dove σ_T è l'incertezza della temperatura.

Dalla velocità e dal coefficiente di viscosità, è stato possibile calcolare il raggio della goccia per mezzo della relazione:

$$r = \sqrt{\left(\frac{b}{2p}\right) + \frac{9\eta v_o}{2g(\rho_o - \rho_a)}} - \frac{b}{2p} \quad (5)$$

Dove b è la costante di correzione di viscosità, p la pressione atmosferica, g l'accelerazione di gravità a Milano, ρ_o la densità dell'olio, ρ_a la densità dell'aria, mentre v e η sono i due valori ottenuti con le relazioni (1) e (3).

Guardando le tabelle, si può notare come l'ordine di grandezza delle gocce sia lo stesso del raggio tipico delle gocce ($r \sim 0.1 \div 1 \cdot 10^{-6}$ m).

L'incertezza sui raggi è stata calcolata derivando parzialmente lungo le uniche due variabili all'interno dell'equazione che sono v_o e η . Le due derivate sono state ricondotte alla formula per il raggio al fine di semplificare la notazione.

$$\sigma_r = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \frac{9v/[2g(\rho_o - \rho_a)]}{r + \frac{b}{2p}} \sigma_\eta\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{9\eta/[2g(\rho_o - \rho_a)]}{r + \frac{b}{2p}} \sigma_v\right)^2} \quad (6)$$

Dove σ_η è l'incertezza del coefficiente di viscosità ricavato con la relazione (4) e σ_v è l'incertezza della velocità ricavato con la formula (2).

Siccome la goccia in esame era una sola e non può avere più raggi e più velocità limite, sono stati, pertanto, presi i valori medi tra i raggi e tra le velocità. Pur avendo a disposizione sia le incertezze per le velocità che quelle per i raggi, si è deciso di non compiere una media pesata in quanto tempi² maggiori conducono a incertezze minori e, di conseguenza, pesi maggiori, facendo quindi propendere la media pesata verso questi valori.

Siccome non è stato possibile stabilire se tempi maggiori siano necessariamente valori migliori, si è deciso di condurre una media semplice tra i valori delle velocità e dei raggi, prendendo come incertezza una deviazione standard sul campione e dividendo per la radice del numero di elementi.

Per ottenere i valori dei raggi per ogni intervallo di tempo, in realtà, è stato utilizzato anche un valore efficace per il coefficiente di viscosità dell'aria η_{eff} calcolato con la seguente formula:

$$\eta_{eff} = \frac{\eta}{1 + \frac{b}{pr}} \quad (7)$$

Dove η è il coefficiente di viscosità dell'aria, p la pressione atmosferica, b il fattore di correzione di viscosità e r è il raggio medio. Per ricavare i valori dei singoli raggi non si poteva conoscere a priori il valore di η_{eff} , pertanto ci si è dovuti ricondurre all'utilizzo di η , ma, come visto nella formula (5), anche dei valori di b e di p .

¹Nella formula della σ_v è stata usata una formula leggermente diversa, ma equivalente, in quanto si è preferito ricondursi alla velocità, anziché utilizzare il Δz

²Si sta parlando di tempi in quanto sia le velocità che i raggi dipendono da essi, o meglio, le velocità dipendono direttamente dai tempi e i raggi dipendono direttamente dalle velocità quindi, per transitività, anch'essi dipendono dai tempi

È stato anche interessante calcolare la variazione percentuale di η_{eff} rispetto a η , per comprendere quanto fosse il miglioramento grazie ad un valore raffinato per mezzo della formula:

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{(\eta - \eta_{eff})}{\eta} \quad (8)$$

Da questo valore ne è stata semplicemente ricavata la percentuale moltiplicando per un fattore 100.

I valori dei moduli dei campi elettrici sono stati calcolati con la relazione:

$$E = \frac{\Delta V}{d} \quad (9)$$

Dove ΔV è la differenza di potenziale tra i due elettrodi e d è la distanza tra essi.

La distanza tra i due elettrodi d è stata semplicemente ottenuta facendo la media tra i valori misurati con un calibro del separatore dei due elettrodi. Siccome tutte le misure avevano la stessa incertezza, è stato semplice calcolarne la media e come errore è stato preso quello del calibro ($\pm 0.01 \text{ mm}$). Il valore ottenuto è $d = (7.55 \pm 0.01) \cdot 10^{-3} \text{ m}$.

Siccome ambedue i valori presentano un'incertezza, per calcolare quella del campo è bastato derivare lungo entrambe le variabili e sommarle in quadratura. Le due derivate sono state ricondotte a formule in cui compariva anche il valore E .

$$\sigma_E = E \cdot \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta V}}{\Delta V}\right)^2 + \left(-\frac{\sigma_d}{d}\right)^2} \quad (10)$$

Dove $\sigma_{\Delta V}$ è l'incertezza sulla differenza di potenziale e σ_d è l'incertezza sulla distanza tra i due elettrodi.

La quantità di cariche Q presenti su ogni goccia è stata ricavata con la seguente formula che differisce a seconda che la goccia stesse scendendo o risalendo il reticolo.

$$Q_{\downarrow} = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_o - \rho_a)\frac{g}{E}\left(1 - \frac{v}{v_o}\right) \quad (11)$$

$$Q_{\uparrow} = -\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_o - \rho_a)\frac{g}{E}\left(1 + \frac{|v|}{v_o}\right) \quad (12)$$

Dove tutte le costanti sono come sopra, ma si sta considerando il valore medio r per i raggi, il valore medio v_o per le velocità, mentre i valori v sono le velocità calcolate sempre con l'equazione (1), ma i tempi si riferiscono a quanto tempo la carica ha impiegato a discendere o risalire il reticolo.

L'incertezza per le varie Q è stata calcolata nel seguente modo³:

$$\sigma_{Q_{\downarrow}} = \sqrt{\left(\frac{3Q_{\downarrow}}{r}\sigma_r\right)^2 + \left(-\frac{Q_{\downarrow}}{E}\sigma_E\right)^2 + \left(\frac{Q_{\downarrow}}{1 - v/v_o}\left(-\frac{1}{v_o}\right)\sigma_v\right)^2 + \left(\frac{Q_{\downarrow}}{1 - v/v_o}\left(\frac{v}{v_o^2}\right)\sigma_{v_o}\right)^2} \quad (13)$$

$$\sigma_{Q_{\uparrow}} = \sqrt{\left(\frac{3Q_{\uparrow}}{r}\sigma_r\right)^2 + \left(-\frac{Q_{\uparrow}}{E}\sigma_E\right)^2 + \left(\frac{Q_{\uparrow}}{1 + |v|/v_o}\left(+\frac{1}{v_o} \cdot \text{sgn}(v)\right)\sigma_v\right)^2 + \left(\frac{Q_{\uparrow}}{1 + |v|/v_o}\left(-\frac{|v|}{v_o^2}\right)\sigma_{v_o}\right)^2} \quad (14)$$

Dove le varie σ sono le relative incertezze alle variabili a pedice.

Per calcolare il valore effettivo della carica dell'elettrone si ha fatto uso di un programma scritto nel linguaggio C++ e della libreria ROOT sviluppata dal CERN per rappresentare il grafico. Si può trovare l'intero codice al seguente [indirizzo](#).

Per ricavare il grafico, si è dovuto calcolare lo scarto quadratico medio per ogni carica di prova, nell'intervallo $[1.4 \cdot 10^{-19}; 1.8 \cdot 10^{-19}]$, ma, prima di calcolarlo, si è dovuto ricavare il rapporto intero tra la carica misurata e la carica di prova in esame secondo la relazione:

$$k_i(q_\alpha) = \left\lceil \frac{Q_i}{q_\alpha} + 0.5 \right\rceil \quad (15)$$

Dove l'operatore $\lceil \cdot \rceil$ restituisce la parte intera del valore, Q_i sono le cariche calcolate con le relazioni (11) e (12), mentre le q_α sono le cariche di prova.

Successivamente è stato calcolato lo scarto quadratico medio $S(q_\alpha)$ per ogni carica di prova con la formula:

$$S(q_\alpha) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{Q_i}{k_i(q_\alpha)} - q_\alpha \right)^2 \quad (16)$$

³Sono state direttamente ricondotte le derivate alla formula che includesse la Q

Dove q_α è il valore della carica di prova, Q_i rappresenta tutte le cariche ottenute dall'esperienza e k_i il valore calcolato su una determinata q_α della relativa Q_i .

Per ottenere il valore della carica dell'elettrone con questo esperimento, si è dovuta derivare rispetto a q la relazione (16), ottenendo così la seguente:

$$q_e = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{k_i} \quad (17)$$

Dove le k_i sono state calcolate sempre allo stesso modo, ma il valore della carica di prova è stato ottenuto graficamente cercando il minimo tra tutte le $S(q)$.

Il valore dell'incertezza statistica sulla carica dell'elettrone è stato calcolato nel seguente modo:

$$\sigma_{q_e} = \sqrt{\frac{S(q_e)}{N(N-1)}} \quad (18)$$

Vi è tuttavia anche un errore sistematico che è stato ottenuto prendendo il 2% della carica. Si è deciso di prendere il 2% di errore a causa dell'imprecisione della strumentazione, per esempio il moto era visibile solo lungo un piano e non in tutto lo spazio tridimensionale. Questo valore e quello ottenuto dalla formula (18) sono stati combinati in quadratura secondo la formula:

$$\sigma_{tot_q} = \sqrt{\sigma_{2\%}^2 + \sigma_{q_e}^2} \quad (19)$$

5 Confronto con valore atteso

Dall'analisi dati è stata stimata la misura della carica dell'elettrone, che risulta essere pari a:

$$e_{mis}^- = (1.64 \pm 0.03) \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

mentre il valore universalmente accettato è:

$$e^- = -1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Confrontando i due valori si può ritenere e_{mis} un risultato accettabile, in quanto il valore atteso rientra di circa 1.27σ all'interno dell'intervallo di confidenza.

Il grafico ottenuto mediante la funzione (16), sebbene mostri diversi punti di discontinuità più o meno evidenti, è caratterizzato da un andamento ben definito, in cui il minimo globale si distingue chiaramente dal resto della curva grazie ad un intervallo di convessità che ricopre la maggior parte del grafico (Figura 1). Quest'ultima caratteristica rivela un aspetto interessante: la funzione non presenta nessun intervallo in cui l'andamento è direzionato verso un punto di minimo diverso da quello ottenuto.

6 Conclusione

Durante la presa dati dell'esperimento sono entrate in gioco diverse imprecisioni che hanno causato errori di tipo sia statistico che sistematico. Tali incertezze sono state stimate ed analizzate durante l'elaborazione dati, nella quale sono stati vagliati i dati, concludendo con l'esclusione di alcuni di essi e valutandone l'opportuna incertezza sul valore finale. In conclusione, si può affermare che i risultati ottenuti sono compatibili con il valore teorico di riferimento.

7 Grafici e tabelle aggiuntive

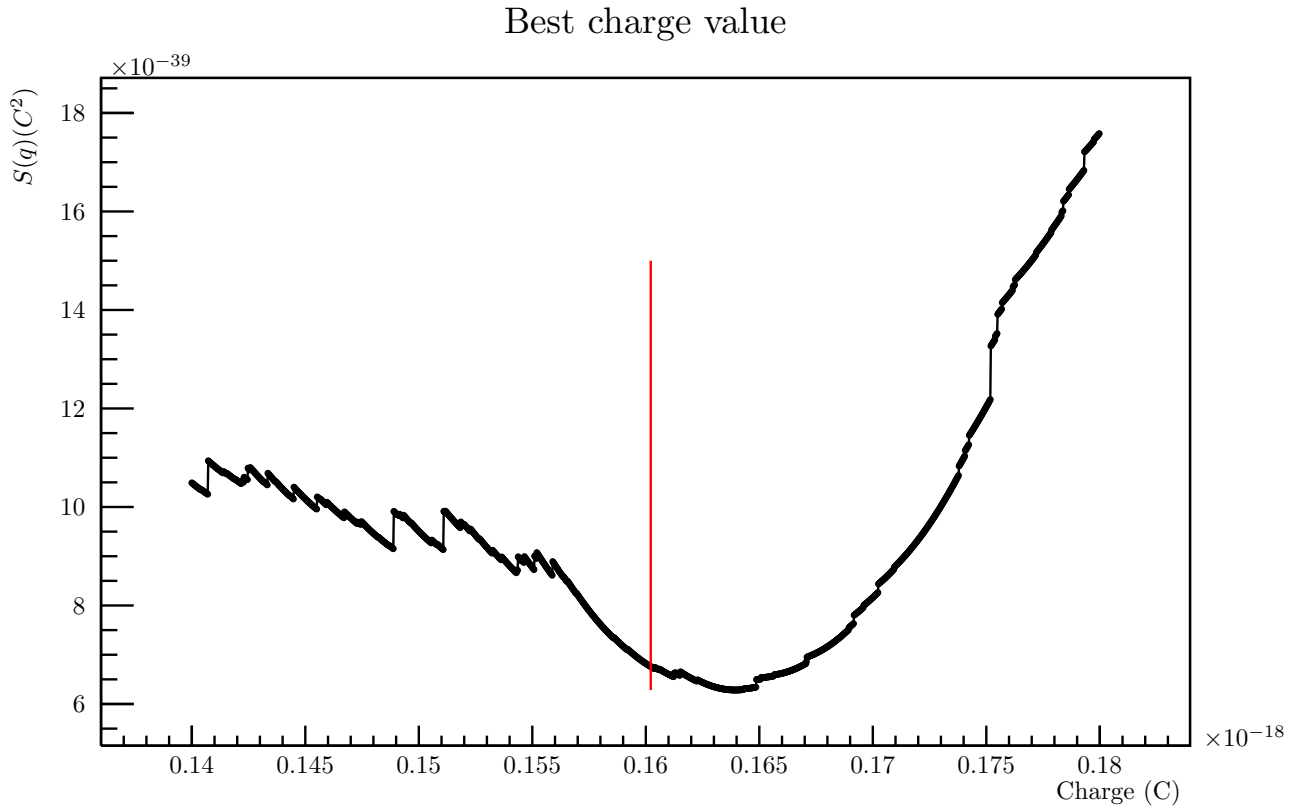


Figure 1: Grafico scarto quadratico medio su cariche di prova, la linea rossa indica il valore effettivo della carica dell'elettrone

g Milano $[\frac{m}{s^2}]$	9.80505
ρ_o $[\frac{kg}{m^3}]$	860
ρ_a (1 atm) $[\frac{kg}{m^3}]$	1.293
p [Pa]	101325
b correzione viscosità [Pa · m]	0.0082
Δz [m]	0.0005

Table 40: Tabella con i valori delle costanti

misura d [mm]	incertezza [mm]
7.56	0.01
7.57	0.01
7.56	0.01
7.54	0.01
7.55	0.01
7.54	0.01

Table 41: Valori grazie ai quali è stato ricavato il valore di d

Per tutti i valori completi, si consiglia la visione del seguente foglio di calcolo di Excel ([link](#)).