

# Übung 8

Sonntag, 15. November 2020 13:51

Rechtsseitige Dreiecksmatrix:

$$A = R = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad Q = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Iteration:

$$R^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$v^{(1)} = r^{(1)} + \text{sign}(r_1^{(1)}) \cdot \|r^{(1)}\| \cdot e^{(1)}$$

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} + \underbrace{1 \cdot \sqrt{1^2 + 5^2 + 2^2}}_{\begin{bmatrix} \sqrt{30} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{30} \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$u^{(1)} = \frac{1}{\|v^{(1)}\|} \cdot v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{30})^2 + 25 + 4}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{30} \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{30} + 60}} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{30} \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1 + \sqrt{30}}{\sqrt{2\sqrt{30} + 60}} \\ \frac{-5}{\sqrt{2\sqrt{30} + 60}} \\ \frac{2}{\sqrt{2\sqrt{30} + 60}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 H^{(1)} &= I - 2 \cdot u^{(1)} \cdot (u^{(1)})^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \left( 2 \cdot \begin{bmatrix} 0.59 & -0.46 & 0.18 \\ -0.46 & 0.35 & -0.14 \\ 0.18 & -0.14 & 0.06 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1.18 & -0.91 & 0.37 \\ -0.91 & 0.70 & 0.28 \\ 0.37 & -0.28 & 0.11 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.91 & 0.30 & 0.28 \\ -0.37 & 0.28 & 0.89 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$H^{(1)} = Q^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
 R_{\text{neu},1} &= Q^{(1)} \cdot R^{(1)} = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.91 & 0.30 & 0.28 \\ -0.37 & 0.28 & 0.89 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -5.48 & 4.38 & -0.73 \\ 0 & -0.93 & 3.88 \\ 0 & 0.97 & 1.85 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$Q_{\text{neu}} = Q_{\text{alt}} \cdot (Q^{(1)})^T = I \cdot (Q^{(1)})^T = (Q^{(1)})^T = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.91 & 0.30 & 0.28 \\ -0.37 & 0.28 & 0.89 \end{bmatrix}$$

2. Iteration

$$R^{(2)} = \begin{bmatrix} \cancel{-5.48} & \cancel{4.38} & \cancel{-0.73} \\ 0 & -0.93 & 3.88 \\ 0 & 0.97 & 1.85 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 & 3.88 \\ 0.97 & 1.85 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 v^{(2)} &= r^{(1)} + \text{sign}(r_1^{(1)}) \cdot \|r^{(1)}\| \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} -0.93 \\ 0.97 \end{bmatrix} + \left( -1 \cdot \sqrt{0.83^2 + 0.97^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\
 &= \begin{bmatrix} -0.93 - \sqrt{1.8058} \\ 0.97 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\|v^{(2)}\|} \cdot v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{(-0.93 - \sqrt{1.8058})^2 + 0.97^2}} \cdot \begin{bmatrix} -0.93 - \sqrt{1.8058} \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

$$u^{(2)} = \frac{1}{\|v^{(2)}\|} \cdot v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{(-0.93 - \sqrt{1.8058})^2 + 0.97^2}} \cdot \begin{bmatrix} -0.97 - \sqrt{1.8058} \\ 0.97 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-0.97 - \sqrt{1.8058}}{\sqrt{(-0.93 - \sqrt{1.8058})^2 + 0.97^2}} \\ \frac{0.97}{\sqrt{(-0.93 - \sqrt{1.8058})^2 + 0.97^2}} \end{bmatrix}$$

$$H^{(2)} = I - (2 \cdot u^{(2)} \cdot (u^{(2)})^T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \left( 2 \cdot \begin{bmatrix} 0.85 & -0.86 \\ -0.86 & 0.15 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} -0.69 & 0.72 \\ 0.72 & 0.69 \end{bmatrix}$$

$$Q^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.69 & 0.72 \\ 0 & 0.72 & 0.69 \end{bmatrix}$$

$$R_{\text{-neu-2}} = Q^{(1)} \cdot R_{\text{-neu-1}}$$

$$= \begin{bmatrix} -5.48 & 4.38 & -0.73 \\ 0 & 1.34 & -1.34 \\ 0 & 0 & 4.08 \end{bmatrix}$$

$$Q_{\text{-neu-2}} = Q_{\text{-neu-1}} \cdot (Q^{(2)})^T$$

$$= \begin{bmatrix} -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ 0.31 & 0.30 & 0.28 \\ -0.37 & 0.28 & 0.89 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.69 & 0.72 \\ 0 & 0.72 & 0.69 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.18 & -0.89 & 0.41 \\ 0.91 & 0 & 0.41 \\ -0.37 & 0.45 & 0.82 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 1b

$$Q = \begin{bmatrix} -0.18 & -0.89 & 0.41 \\ 0.91 & 0 & 0.41 \\ -0.37 & 0.45 & 0.82 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} -5.48 & 4.38 & -0.73 \\ 0 & 1.34 & -1.34 \\ 0 & 0 & 4.08 \end{bmatrix}$$

$$c = Q^T \cdot b = \begin{bmatrix} -0.18 & 0.91 & -0.37 \\ -0.89 & 0 & 0.45 \\ 0.41 & 0.41 & 0.82 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.21 \\ 1.34 \\ 8.16 \end{bmatrix}$$

$$R \cdot x = c$$

$$\begin{aligned} -5.48x_1 + 4.38x_2 - 0.73x_3 &= 6.21 & \Rightarrow x_1 &= \frac{6.21 + 0.73(2) - 4.38(-1)}{-5.48} = 1 \\ 1.34x_2 - 1.34x_3 &= 1.34 & \Rightarrow x_2 &= \frac{1.34 + 1.34(2)}{1.34} = 3 \\ 4.08x_3 &= 8.16 & \Rightarrow x_3 &= \frac{8.16}{4.08} = 2 \end{aligned}$$

Die Lösung ist  $(1, 3, 2)$ .