IT19tb WIN7 S9 Aufgabe 1

Leo Rudin & Stefan Teodoropol

Ax = b mit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vektornorm: $||x||_\infty = \max(|x_1|, ..., |x_n|)$
Matrixnorm: $||x||_\infty = \max(|x_{11}| + ... + |x_{1n}|, ..., |x_{n1}| + ... + |x_{nn}|)$

a)

$\text{cond}(A) = ||A||_\infty * ||A^{-1}||_\infty$

$\text{cond}(A) = || \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} ||_\infty * || \begin{bmatrix} -1 & 0 & 20'000 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -10'000 \end{bmatrix} ||_\infty = 3 * 20'001 = 60'003$

b)

$||b - \widetilde{b}||_\infty = || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \varepsilon \end{bmatrix} ||_\infty = || \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{bmatrix} ||_\infty = \varepsilon$

$||b||_\infty = || \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} ||_\infty = 1$

Folgende Gleichung muss erfüllt werden:

$\frac{||x-\widetilde{x}||_\infty}{||x||_\infty} \leq ||A^{-1}||_\infty * ||A||_\infty * \frac{||b-\widetilde{b}||_\infty}{||b||_\infty}$

Mit eingesetzten Werten:

$0.01 \leq \frac{60'003\varepsilon}{1}$
$0.01 \leq 60'003\varepsilon$
$\frac{0.01}{60'003} \leq \varepsilon$

Die Abweichung bei der z-Komponente in $\widetilde{b}$ darf höchstens $\frac{0.01}{60'003}$ bzw. $1.67 * 10^{-7}$ sein, damit die Ungleichung noch stimmt.

c)

LR-Zerlegung für A:

R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{III - } 10^{-4}\times\text{I}]{\text{II - } 0\times\text{I}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10^{-3} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{III - } 0\times\text{II}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10^{-4} \end{bmatrix}$$

L:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lösen für b:

Ly = b:

$y_1 = 1$
$y_2 = 1$
$10^{-4}y_1 + y_3 = 0 \to y_3 = -10^{-4} * (1) = -10^{-4}$

Rx = y:

$x_1 + 2x_3 = 1 \to x_1 = 1 - 2 * (1) = -1$
$x_2 = 1$
$-10^{-4}x_3 = -10^{-4} \to x_3 = 1$

Lösen für $\widetilde{b}$:

Ly = b

$y_1 = 1$
$y_2 = 1$
$10^-4y_1 + y_3 = \frac{0.01}{60'003} \to y_3 = \frac{0.01}{60'003} - 10^{-4} * (1)$

Rx = y:

$x_1 + 2x_3 = 1 \to x_1 = 1 - 2 * (\frac{\frac{0.01}{60'003} - 10^{-4}}{-10^{-4}}) \approx -0.997$
$x_2 = 1$
$-10^{-4}x_3 = \frac{0.01}{60'003} - 10^{-4} \to x_3 = \frac{\frac{0.01}{60'003} - 10^{-4}}{-10^{-4}} \approx 0.998$

Abweichung:

$$||\widetilde{x} - x||_\infty = || \begin{bmatrix} -0.997 \\ 1 \\ 0.998 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ||_\infty = || \begin{bmatrix} 0.003 \\ 0 \\ -0.002 \end{bmatrix} ||_\infty = 0.003$$

$$||x||_\infty = || \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} ||_\infty = 1$$

$$\frac{||\widetilde{x} - x||_\infty}{||x||_\infty} = \frac{0.003}{1} = 0.003$$

Der tatsächliche relative Fehler beträgt 0.3%.

d)

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 1 + 10^{-7} & 10^{-7} & 2 + 10^{-7} \\ 10^{-7} & 1 + 10^{-7} & 10^{-7} \\ 10^{-4} + 10^{-7} & 10^{-7} & 10^{-4} + 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$||A - \widetilde{A}||_\infty = || \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 10^{-4} & 0 & 10^{-4} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 + 10^{-7} & 10^{-7} & 2 + 10^{-7} \\ 10^{-7} & 1 + 10^{-7} & 10^{-7} \\ 10^{-4} + 10^{-7} & 10^{-7} & 10^{-4} + 10^{-7} \end{bmatrix} ||_\infty$$

$$= || \begin{bmatrix} -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \\ -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \\ -10^{-7} & -10^{-7} & -10^{-7} \end{bmatrix} ||_\infty = 3 * 10^{-7}$$

Neue Abschätzung wenn beide Seiten gestört sind:

$$\frac{||x - \widetilde{x}||_\infty}{||x||_\infty} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) * \frac{||A - \widetilde{A}||_\infty}{||A||_\infty}} * \left(\frac{||A - \widetilde{A}||_\infty}{||A||_\infty} + \frac{||b - \widetilde{b}||_\infty}{||b||_\infty} \right)$$

$$0.01 \leq \frac{60'003}{1 - 60'000 * \frac{3*10^{-7}}{3}} * \left(\frac{3*10^{-7}}{3} + \frac{\varepsilon}{1} \right)$$

$$\frac{0.01}{\frac{60'003}{1 - 60'000 * \frac{3*10^{-7}}{3}}} \leq \frac{3*10^{-7}}{3} + \varepsilon$$

$$\frac{0.01}{\frac{60'003}{1 - 60'000 * \frac{3*10^{-7}}{3}}} - \frac{3*10^{-7}}{3} \leq \varepsilon$$

Die Abweichung bei der z-Komponente in $\widetilde{b}$ darf höchstens $\frac{0.01}{\frac{60'003}{1 - 60'000 * \frac{3*10^{-7}}{3}}} - \frac{3*10^{-7}}{3}$ bzw. $\approx 6.5658 * 10^{-8}$ sein, damit die Ungleichung noch stimmt.