IT19tb WIN7 S4 Aufgabe 1

Leo Rudin & Stefan Teodoropol

a)

Auswahl möglicher Fixpunktgleichungen für Ursprungsfunktion: $f(x) = 230x^4 + 18x^3 + 9x^2 - 221x - 9$

$F1(x) = \frac{230x^4+18x^3+9x^2-9}{221}$
$F1'(x) = \frac{920x^3}{221} + \frac{54x^2}{221} + \frac{18x}{221}$

$F2(x) = \sqrt{\frac{230x^4+18x^3-221x-9}{-9}}$
$F2'(x) = \frac{1}{2} * \frac{1}{\sqrt{\frac{230x^4+18x^3-221x-9}{-9}}} * \frac{920x^3+54x^2-221}{-9}$

Für $\overline{x}_1$ wählen wir den Startwert -0.1:
$|F1'(-0.1)| = 0.00986425339366516 < 1$
Somit wird der Punkt für den Startwert -0.1 konvergieren.

Fixpunktiteration für Startwert -0.1:
$F1(-0.1) = -0.04029411764705882..$
$F1(-0.04029411764705882..) = -0.040660446815532846..$
$F1(-0.040660446815532846..) = -0.0406592846229974..$
$F1(-0.0406592846229974..) = -0.0406592883275295..$

$\overline{x}_1 \approx -0.04065928...$

Für $\overline{x}_2$ wählen wir den Startwert 0.9:
$|F1'(0.9)| = 3.305972850678734 > 1$
$|F2'(0.9)| = 12.4153 > 1$
Wir schliessen daraus, dass wir auf dem Interval $[0, 1]$ für den Startwert 0.9 keine Fixpunktiteration ausführen können, da die Steigung an dieser Stelle zu gross ist und die Fixpunktiteration nicht konvergiert bzw. der Fixpunkt ist nicht anziehend.

b)

Für die erste Bedingung $[a, b] \to [a, b]$, das heisst die Funktion F1(x) bildet sich auf das gleiche Interval ab, haben wir gezeigt, indem wir die Funktion geplottet haben und die Funktionswerte betrachten:

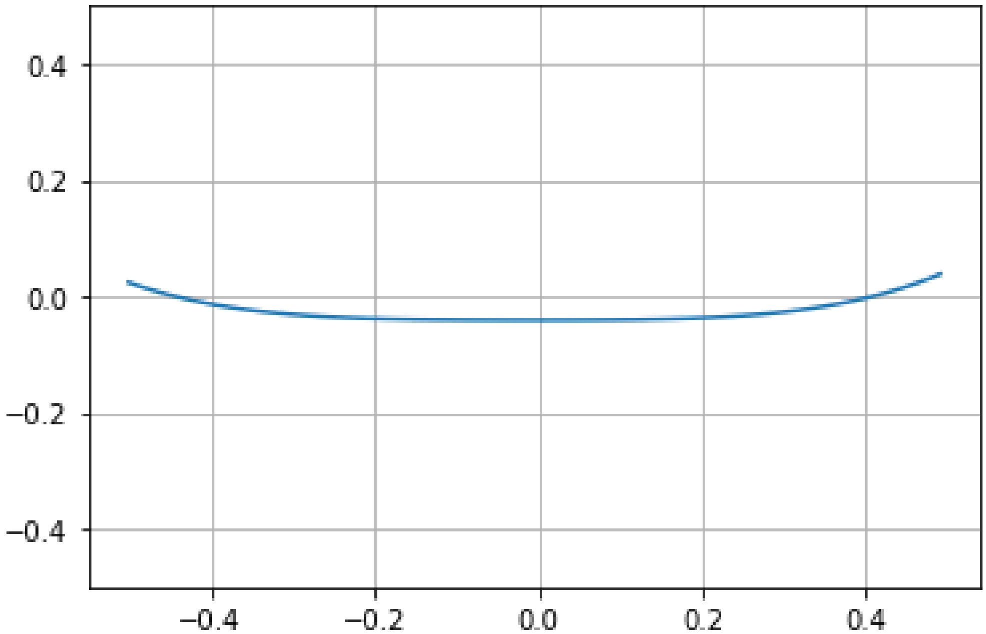

Figure 1: Plot für F1(x) zwischen -0.5 und 0.5 auf x und y-Achse.

Dann rechnen wir α aus, indem wir den in der Aufgabenstellung vorgegebenes Maximum in die Ableitung einsetzen und kriegen dann:

$$\alpha = F1'(0.5) = 0.6221719457013575$$

α erfüllt somit die Bedingnung $0 > \alpha > 1$. Das heisst alle Bedingungen des Banachscher Fixpunktsatzes sind erfüllt.

c)

Wir nutzen folgende Formel für die Fehlerabschätzung:
$|x_n - \overline{x}| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} |x_1 - x_0|$
Für $|x_n - \overline{x}|$ setzen wir 10^{-9} ein und für α unseren vorherigen errechnet Wert:

$10^{-9} \leq \frac{0.62^n}{0.38} * |F(-0.1) - (-0.1)|$
$10^{-9} \leq \frac{0.62^n * 0.05970588235294118}{0.38}$
$6.364532019704433121308452037176 4 * 10^{-9} \leq 0.62^n$
$log(6.3645320197044331213084520371764 * 10^{-9}) \leq log(0.62^n)$
$log(6.3645320197044331213084520371764 * 10^{-9}) \leq n * log(0.62)$
$\frac{log(6.3645320197044331213084520371764 * 10^{-9})}{log(0.62)} \leq n$

$n \geq 39.4793..$

Somit ist unsere Abweichung kleiner als 10^{-9} wenn n grösser als 39.3793. Wir wählen also die nächstgrössere Zahl n = 40.