

## IT19tb WIN7 S8 Aufgabe 3

Leo Rudin & Stefan Teodoropol

a)

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{bmatrix}$$

Das heisst somit, dass  $\|b - \tilde{b}\| \leq 100$  sein muss.

**Geschätzter absoluter Fehler:**

$$\|x - \tilde{x}\| \leq \|A^{-1}\|_{\infty} * \|b - \tilde{b}\|_{\infty}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_{\infty} = \max\{1.4, 1.2, 1.1\} = 1.4$$

$$\|x - \tilde{x}\| \leq 1.4 * 100 = 140$$

Der maximale absolute Fehler beträgt 140'000 (da wir unsere Matrix auf 1000-er normiert haben).

**Geschätzter relativer Fehler:**

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \|A^{-1}\|_{\infty} * \|A\|_{\infty} * \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}}$$

$$\|b\|_{\infty} = \max\{5720, 3300, 836\} = 5720$$

$$\|A\|_{\infty} = \max\{60, 33, 7\} = 60$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq 60 * 1.4 * \frac{100}{5720} = 1.4685$$

Der maximale relative Fehler beträgt 146.85%.

Bezüglich der Konditionierung bleibt bei maximaler Fehler die Antwort um ihrer Grössenordnung herum oder weicht um 1 Grössenordnung ab. Sie ist also relativ gut konditiert.

b)

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 10 & 17 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5720 \\ 3300 \\ 836 \end{bmatrix}$$

$\|b - \tilde{b}\| \leq 100$  gilt nach wie vor.

Damit der Satz angewendet werden kann, muss folgende Bedingung gelten:

$$\text{cond}(A) * \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} < 1$$

$$\tilde{A} : \begin{bmatrix} 20.1 & 30.1 & 10.1 \\ 10.1 & 17.1 & 6.1 \\ 2.1 & 3.1 & 2.1 \end{bmatrix}$$

$$\|A - \tilde{A}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \right\| = \max\{0.3, 0.3, 0.3\} = 0.3$$

$$\|A\|_{\infty} = \max\{60, 33, 7\} = 60$$

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\| * \|A\| = \left\| \begin{bmatrix} 0.4 & -0.75 & 0.25 \\ -0.2 & 0.5 & -0.5 \\ -0.1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} * \left\| \begin{bmatrix} 20.1 & 30.1 & 10.1 \\ 10.1 & 17.1 & 6.1 \\ 2.1 & 3.1 & 2.1 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = 84$$

Somit ergibt das:

$$84 * \frac{0.3}{0.6} = 0.42 < 1$$

Somit gilt die Bedingung und wir können  $\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}}$  abschätzen:

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{\text{cond}(A)}{1 - \text{cond}(A) * \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}}} * \left( \frac{\|A - \tilde{A}\|_{\infty}}{\|A\|_{\infty}} + \frac{\|b - \tilde{b}\|_{\infty}}{\|b\|_{\infty}} \right)$$

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|_{\infty}}{\|x\|_{\infty}} \leq \frac{84}{1 - 84 * \frac{0.3}{0.6}} * \left( \frac{0.3}{0.6} + \frac{100}{5720} \right) = 3.256$$

Somit kann der maximale relative Fehler 325.6% betragen.

c)

$$Ax = b$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} 19900 & 29900 & 9900 \\ 9900 & 16900 & 5900 \\ 1900 & 2900 & 1900 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 5820000 \\ 3400000 \\ 936000 \end{bmatrix}$$

Wir haben das neue Gleichungssystem mithilfe von Python ausgerechnet:

```
In [127]: runfile('C:/Users/Leo/code/pyth
hm1/zhaw-hm1-Lab/Lab08')
x_old: [[ 22.]
 [ 88.]
 [264.]]
x: [[ 7.38297872]
 [ 58.76595745]
 [395.55319149]]
x_1 Fehler [0.66441006]
x_2 Fehler [0.33220503]
x_3 Fehler [-0.49830754]

In [128]:
```

Wir haben für die x Werte folgende relative Fehler ausgerechnet:

- $x_1 \approx 66.4\%$
- $x_2 \approx 33.2\%$
- $x_3 \approx 49.8\%$

Die Fehlerabschätzung lieferte einen weit grösseren relativen Fehler als den den wir eigentlich bekommen haben.