HM2 Serie 5 Aufgabe 1

Leo Rudin

Datenpunkte:

- $(x_0, y_0) = (4, 6)$
- $(x_1, y_1) = (6, 3)$
- $(x_2, y_2) = (8, 9)$
- $(x_3, y_3) = (10, 0)$

Es gibt insgesamt 4 Stützpunkte also ist n = 3, da der Algorithmus mit 0 beginnt.

Es wird nun mit i = 0,1,...,n-1 iteriert:

1) Ausrechnen der a_i Werte:

- $a_0 = y_0 = 6$
- $a_1 = y_1 = 3$
- $a_2 = y_2 = 9$

2) Ausrechnen der h_i Werte:

- $h_0 = x_{0+1} - x_0 = 6 - 4 = 2$
- $h_1 = x_{1+1} - x_1 = 8 - 6 = 2$
- $h_2 = x_{2+1} - x_2 = 10 - 8 = 2$

3) Ausrechnen der c_i Werte:

$c_0 = 0$ $c_3 = 0$

Für c_1 und c_2 wird ein Gleichungssystem aufgestellt. Spezialfall, da nicht gilt: $n \geq 4 \rightarrow$ Es gibt nur genau zwei c-Werte zu berechnen:

$2(h_0 + h_1)c_1 + h_1 c_2 = 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} - 3\frac{y_1 - y_0}{h_0} \rightarrow 8c_1 + 2c_2 = 3\frac{6}{2} - 3\frac{-3}{2} \rightarrow 8c_1 + 2c_2 = 13.5$

$h_1 c_1 + 2(h_1 + h_2)c_2 = 3\frac{y_3 - y_2}{h_2} - 3\frac{y_2 - y_1}{h_1} \rightarrow 2c_1 + 8c_2 = 3\frac{-9}{2} - 3\frac{6}{2} \rightarrow 2c_1 + 8c_2 = -22.5$

In Matrixform:

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13.5 \\ -22.5 \end{pmatrix}$$

$c_1 = 2.55$ $c_2 = -3.45$

4) Ausrechnen der b_i Werte:

- $b_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) = \frac{3-6}{2} - \frac{2}{3}(2.55) = -3.2$
- $b_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1}{3}(c_2 + 2c_1) = \frac{9-3}{2} - \frac{2}{3}(-3.45 + 2(2.55)) = 1.9$
- $b_2 = \frac{y_3 - y_2}{h_2} - \frac{h_2}{3}(c_3 + 2c_2) = \frac{0-9}{2} - \frac{2}{3}(2(-3.45)) = 0.1$

5. Ausrechnen der d_i Werte:

- $d_0 = \frac{1}{3h_0}(c_1 - c_0) = \frac{1}{6}(2.55 - 0) = 0.425$
- $d_1 = \frac{1}{3h_1}(c_2 - c_1) = \frac{1}{6}(-3.45 - 2.55) = -1$
- $d_2 = \frac{1}{3h_2}(c_3 - c_2) = \frac{1}{6}(0 - (-3.45)) = 0.575$

$S_0(x) = 6 - 3.2(x - 4) + 0.425(x - 4)^3$

$S_1(x) = 3 - 1.9(x - 6) + 2.55(x - 6)^2 - 1(x - 6)^3$

$S_2(x) = 9 + 0.1(x - 8) - 3.45(x - 8)^2 + 0.575(x - 8)^3$