

HM2 Serie 3 Aufgabe 1

Leo Rudin

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 20 - 18x_1 - 2x_2^2 \\ -4x_2 \cdot (x_1 - x_2^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechnung der Jacobi Matrix (mit Python):

$$Df(x^{(n)}) = \begin{pmatrix} -18 & -4x_2 \\ -4x_2 & -4x_1 + 12x_2^2 \end{pmatrix}$$

Newton-Verfahren mit Startpunkt: $x^{(0)} = (1.1, 0.9)^T$

1. Iterationsschritt:

$$Df(x^{(0)})\delta^{(0)} = -f(x^{(0)})$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -3.6 \\ -3.6 & 5.32 \end{pmatrix} \cdot \delta^{(0)} = \begin{pmatrix} 1.42 \\ 1.044 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(0)} = \begin{pmatrix} -0.104 \\ 0.126 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \delta^{(0)}$$

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 0.9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.104 \\ -0.126 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.996 \\ 1.026 \end{pmatrix}$$

$$\|f(x^{(0)})\|_2 = 1.762$$

$$\|x^{(1)} - x^{(0)}\|_2 = 1.267$$

2. Iterationsschritt:

$$Df(x^{(1)})\delta^{(1)} = -f(x^{(1)})$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -4.10 \\ -4.10 & 8.64 \end{pmatrix} \cdot \delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.03 \\ -0.23 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.004 \\ -0.02 \end{pmatrix}$$

$$x^{(2)} = x^{(1)} + \delta^{(1)}$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.996 \\ 1.026 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.004 \\ -0.02 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 1.0009 \end{pmatrix}$$

$$\|f(x^{(1)})\|_2 = 0.233$$

$$\|x^{(2)} - x^{(1)}\|_2 = 0.0252$$

3. Iterationsschritt:

$$Df(x^{(2)})\delta^{(2)} = -f(x^{(2)})$$

$$\begin{pmatrix} -18 & -4.004 \\ -4.004 & 8.023 \end{pmatrix} \cdot \delta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.002 \\ -0.008 \end{pmatrix}$$

$$\delta^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0002 \\ -0.0009 \end{pmatrix}$$

$$x^{(3)} = x^{(2)} + \delta^{(2)}$$

$$x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ 1.0009 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.0002 \\ -0.0009 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|f(x^{(2)})\|_2 = 0.008$$

$$\|x^{(3)} - x^{(2)}\|_2 = 0.0009$$