Capítulo 1

Sistemas Lineares e Escalonamento de Matrizes

1.0 Introdução

O leitor, ou a leitora, desde o ensino fundamental e médio, já deve ter se deparado muitas vezes com sistemas de equações do tipo

$$\underset{\text{Sistema (a)}}{\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -1 \\ 2x_1 + x_2 = 5, \end{cases}} \qquad \underset{\text{Sistema (b)}}{\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 9 \\ \ 2x_1 + x_2 = 5, \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \underset{\text{Sistema (c)}}{\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 = 15 \\ \ 2x_1 + x_2 = 5. \end{cases}}$$

Esses são exemplos de *sistemas lineares*, objeto de estudo deste capítulo, que serão úteis durante todo o curso.

Você deve ter aprendido, no ensino fundamental, ao menos dois métodos para resolver os sistemas acima. Um deles é o *método da substituição*. No sistema (a), por exemplo, podemos "isolar" a variável x_1 na primeira equação, obtendo, assim, $x_1 = 3x_2 - 1$. Em seguida, substituimos x_1 por $3x_2 - 1$ na segunda equação, obtendo $2(3x_2 - 1) + x_2 = 5$. Resolvendo esta equação, encontramos $x_2 = 1$. Agora, basta colocar $x_2 = 1$ em $x_1 = 3x_2 - 1$ para concluirmos que $x_1 = 2$. Portanto, a única solução do sistema (a) é dada por $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

O segundo método que você deve conhecer é o *método da eliminação*. Multiplicando a primeira equação do sistema (a) por 2, obtemos $2x_1 - 6x_2 = -2$. Subtraindo esta nova equação da segunda equação do sistema, obtemos

$$\begin{array}{rrcrcr} & 2x_1 & + & x_2 & = & 5 \\ -\big(& 2x_1 & - & 6x_2 & = & -2\ \big) \\ \hline & & & 7x_2 & = & 7, \end{array}$$

ou seja, $x_2 = 1$, como havíamos obtido. Agora, podemos substituir $x_2 = 1$ em qualquer uma das equações do sistema (a) para achar $x_1 = 2$.

Os métodos que acabamos de recapitular são satisfatórios para tratar sistemas pequenos, como os acima, que têm apenas duas equações e duas variáveis. Mas imagine a dor-de-cabeça que seria aplicá-los a sistemas com cinco, seis, ou até mais variáveis e equações! Precisamos desenvolver um método que nos permita lidar, mais facilmente, com sistemas deste porte, pois teremos que fazê-lo, muitas vezes, ao longo do curso.

Um dos objetivos deste capítulo é estudar um procedimento, chamado de *eliminação Gaussiana* ou *escalonamento*, para resolver sistemas lineares. Esse procedimento é, essencialmente, o método da eliminação acrescido de uma sistemática para a organização do trabalho. A sistemática é importante para reduzir o esforço e a chance de cometermos erros de cálculo.

Observação

O desenvolvimento de um método sistemático para resolver sistemas lineares é importante por diversos motivos. Talvez, o motivo principal seja o seguinte: este é o primeiro passo para se escrever um programa de computador que realize esta tarefa. Muitos problemas oriundos da modelagem matemática de sistemas físicos, biológicos, econômicos e de outras áreas — incluindo importantes aplicações a todas as áreas da engenharia — podem envolver milhares, centenas de milhares, milhões de variáveis e equações. Para resolver tais sistemas, é necessário usar recursos computacionais, evidentemente.

Outro objetivo deste capítulo é obter uma caracterização de sistemas lineares que têm uma única solução, sistemas que têm mais de uma solução, e sistemas que não têm solução alguma.

O sistema (a), por exemplo, tem uma única solução ($x_1 = 2$, $x_2 = 1$), como vimos acima. Esse fato possui uma interpretação geométrica simples. Lembre-se de que uma equação do tipo $ax_1 + bx_2 = c$ representa uma *reta* no plano (x_1, x_2). As retas correspondentes às equações do sistema (a) se intersectam em um único ponto (a saber, o ponto $(x_1, x_2) = (2, 1)$), como ilustra a figura 1.1(a). Este é o único ponto do plano (x_1, x_2) que pertence a ambas as retas, ou seja, é o único ponto que satisfaz simultaneamente as duas equações do sistema (a).

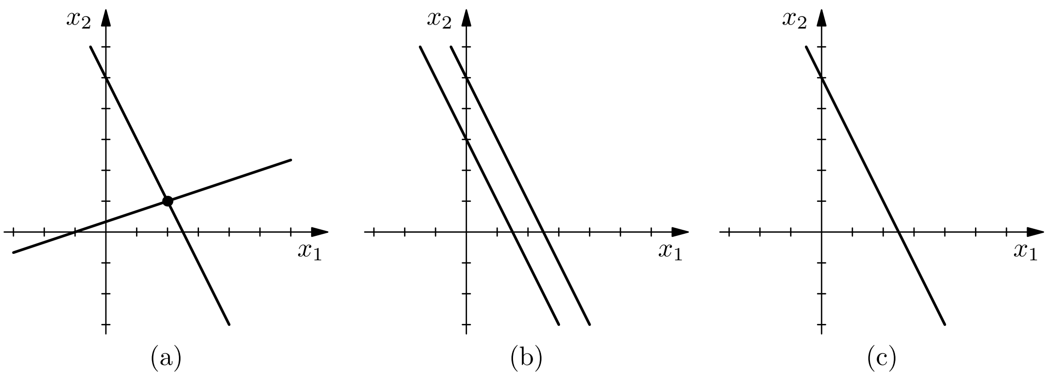

Figura 1.1: Interpretação geométrica dos sistemas (a), (b) e (c).

Você deve verificar, no entanto, que o sistema (b) não tem solução alguma, enquanto que o sistema (c) tem uma infinidade de soluções. Geometricamente, as equações do sistema (b) representam retas paralelas, que não se intersectam em ponto algum (figura 1.1(b)). Por outro lado, verifique que ambas as equações do sistema (c) representam *a mesma reta* (ilustrada na figura 1.1(c)). Dessa forma, a interseção dessa reta com ela própria é, novamente, ela própria!

Essa discussão será retomada nas seções 1.7 e 1.8. Veremos que o "cenário" exibido pelos sistemas (a), (b) e (c) permanece válido em um contexto mais abrangente: um sistema linear qualquer, e de qualquer tamanho, ou tem exatamente uma solução, ou nenhuma, ou uma infinidade delas.

1.1 Sistemas de equações lineares

Uma **equação linear** nas variáveis x_1, x_2, ... , x_n é uma equação que pode ser escrita na forma

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = b, \tag{1.1}$$

onde c_1, c_2, ... , c_n e b são números reais ou complexos.[1] Os números c_1, ... , c_n são chamados de **coeficientes** das variáveis x_1, ... , x_n, respectivamente. Já b é chamado de **termo independente** da equação (1.1).

A equação

$$2x_1 - 3x_2 + 4 = x_1 - 5x_3,$$

por exemplo, é linear, pois pode ser reescrita como

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -4,$$

que está na forma da equação (1.1). Os coeficientes de x_1, x_2 e x_3 são 1, -3 e 5, respectivamente. O termo independente é -4. Já as equações

$$x_1^2 + 3x_2 = 5, \qquad x_1 + \sqrt{x_2} = 7 \qquad \text{e} \qquad 3x_1 + x_1x_2 - x_2 = 2$$

não são lineares. A primeira equação tem o termo não-linear x_1^2, a segunda tem o termo $\sqrt{x_2}$, e a terceira tem o termo x_1x_2.

Um **sistema de equações lineares**, ou, simplesmente, um **sistema linear**, é um conjunto (finito) de equações lineares envolvendo as mesmas variáveis. Cada um dos sistemas (a), (b) e (c) da introdução, por exemplo, é um sistema de duas equações lineares envolvendo as duas variáveis x_1 e x_2. Já o sistema linear

$$\begin{cases} \;\;x_1 - 2x_2 + \;\;x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases} \tag{1.2}$$

tem duas equações envolvendo três variáveis: x_1, x_2 e x_3.

Uma **solução** de um sistema linear nas variáveis x_1, x_2, ... , x_n é uma lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que torna verdadeira cada igualdade do sistema quando substituímos x_1, x_2, ... , x_n pelos números s_1, s_2, ... , s_n. Por exemplo, $(8, 4, 0)$ é uma solução de (1.2), pois $8-2\cdot4+0 = 0$ e $2\cdot8-2\cdot4-6\cdot0 = 8$. Logo, a primeira equação do sistema reduz-se a $0 = 0$, e a segunda, a $8 = 8$. Verifique que $(15, 8, 1)$ também é uma solução. Há uma infinidade de soluções além destas duas. Procure achar mais algumas! Já a lista $(2, 1, 0)$ *não* é uma solução do sistema (1.2), pois, apesar de reduzir a primeira equação a $0 = 0$ (o que é verdadeiro), ela reduz a segunda equação a $2 = 8$, o que é falso.

[1] Neste curso, consideraremos quase exclusivamente o caso real.

Definimos o **conjunto-solução** de um sistema linear como o conjunto de todas as suas soluções. Podemos reformular as afirmativas do parágrafo anterior dizendo que as listas $(8,4,0)$ e $(15,8,1)$ *pertencem ao conjunto-solução* do sistema (1.2), e que a lista $(2,1,0)$ *não pertence ao conjunto-solução.*

Se um sistema tem ao menos uma solução, dizemos que ele é **possível**. Do contrário, dizemos que é **impossível**. Os sistemas (a) e (c) da introdução são possíveis, enquanto o sistema (b) é impossível. O conjunto-solução de um sistema impossível é o conjunto vazio.

Encerramos esta pequena seção com uma última definição. Dizemos que dois sistemas são **equivalentes** quando eles têm o mesmo conjunto-solução. Os "sistemas" $2x_1 = 3$ e $4x_1 = 6$, por exemplo, são evidentemente equivalentes.

1.2 Notação matricial e o método de escalonamento: primeiro exemplo

Vamos introduzir uma notação, usando *matrizes*, que nos permita escrever sistemas lineares de forma mais econômica. Lembre-se, do ensino médio, que uma matriz é simplesmente um arranjo retangular de números. Estes são chamados de *entradas* ou *elementos* da matriz. Considere, por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 - 6x_3 = -3 \\ -3x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 2. \end{cases} \tag{1.3}$$

Dizemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & -6 \\ -3 & 14 & -6 \end{bmatrix}$$

é a **matriz de coeficientes** associada ao sistema (1.3), e que

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ -3 & 14 & -6 & 2 \end{bmatrix} \tag{1.3$'$}$$

é a **matriz completa** associada ao sistema. Outra maneira seria dizer que a matriz completa (1.3′) *representa* o sistema (1.3). Observe que a entrada na primeira coluna e segunda linha da matriz é zero, pois x_1 não aparece na segunda equação de (1.3), ou seja, seu coeficiente é zero.

Para escrevermos a matriz completa de um sistema, é importante que suas variáveis estejam organizadas por colunas, como no sistema (1.3).

A última coluna da matriz completa associada a um sistema é chamada de **coluna dos termos independentes**, e corresponde aos termos do lado direito das equações do sistema. Às vezes, convém enfatizar, graficamente, com uma linha vertical, a distinção entre a submatriz de coeficientes e a coluna dos termos independentes. Poderíamos escrever a matriz completa (1.3′) como

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ -3 & 14 & -6 & 2 \end{array}\right].$$

Na introdução do capítulo, mencionamos o procedimento de *escalonamento*, também chamado de *eliminação Gaussiana*. O objetivo desse procedimento é fornecer, para um dado sistema linear, um *sistema equivalente* que seja muito fácil de resolver.[2] Grosso modo, isso é realizado da seguinte forma: Usamos o termo em x_1 da primeira equação do sistema para eliminar os termos em x_1 das outras equações. Em seguida, usamos o termo em x_2 da segunda equação do sistema para eliminar os termos em x_2 das outras equações, e assim por diante, até a última variável do sistema. Veremos que o processo nem sempre funcionará exatamente desta forma, mas podemos ao menos encarar um primeiro exemplo usando esta ideia. O procedimento será descrito, em sua forma geral, na seção 1.5.

Vamos, então, achar o conjunto-solução do sistema (1.3) usando escalonamento. Para nos habituarmos com a notação matricial, vamos usá-la lado a lado com a notação usual neste primeiro exemplo:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} 3x_2 - 6x_3 = -3 \\ -3x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ -3 & 14 & -6 & 2 \end{array}\right] \tag{1.3″}$$

Vamos usar o termo em x_1 da primeira equação para eliminá-lo das outras. Como x_1 não aparece na segunda equação (o seu coeficiente já é zero), basta "zerar" seu coeficiente na terceira. Para isso, substituimos a terceira equação pela soma dela própria com três vezes a primeira equação:

$$\begin{array}{r} \text{equação 3 }: \\ +3\cdot(\text{equação 1}): \\ \hline \text{nova equação 3}: \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3x_1 + 14x_2 - 6x_3 = 2 \\ +3\big(\ \ x_1 - \ 4x_2 + \ x_3 = 0\ \big) \\ \hline 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{array}$$

(Esta conta costuma ser feita "de cabeça", usando diretamente a forma matricial.) O novo sistema, portanto, é:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - {}} 3x_2 - 6x_3 = -3 \\ \phantom{x_1 - {}} 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right] \tag{1.4}$$

Em seguida, usamos o termo em x_2 da segunda equação para eliminá-lo das outras. Mas, antes de fazê-lo, multiplicamos a segunda equação por $1/3$ para simplificar as contas:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \\ \phantom{x_1 - 4{}} x_2 - 2x_3 = -1 \\ \phantom{x_1 - {}} 2x_2 - 3x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right] \tag{1.5}$$

[2] Lembre-se de que sistemas equivalentes têm *o mesmo conjunto-solução*, conforme definimos ao final da seção anterior.

Agora, vamos eliminar o termo em x_2 da terceira equação:

$$\begin{array}{r} \text{equação 3 } : \\ -2\cdot(\text{equação 2}) : \\ \hline \text{nova equação 3 } : \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & 2x_2 - 3x_3 &=& 2 \\ -2\big(& x_2 - 2x_3 &=& -1\ \big) \\ \hline & x_3 &=& 4 \end{array}$$

O novo sistema é:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + \ \ x_3 = \ \ 0 \\ \qquad\ \ x_2 - 2x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = \ \ 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \tag{1.6}$$

Desejamos, também, eliminar o termo em x_2 da primeira equação. Mas é mais eficiente eliminar, primeiro, os termos em x_3 da primeira e da segunda equação, usando a terceira (pois, assim, faremos menos contas):

$$\begin{array}{r} \text{equação 1 } : \\ -(\text{equação 3}) : \\ \hline \text{nova equação 1 } : \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & x_1 - 4x_2 + x_3 &=& 0 \\ -\big(& x_3 &=& 4\ \big) \\ \hline & x_1 - 4x_2 \qquad &=& -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{equação 2 } : \\ +2\cdot(\text{equação 3}) : \\ \hline \text{nova equação 2 } : \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & x_2 - 2x_3 &=& -1 \\ +2\big(& x_3 &=& 4\ \big) \\ \hline & x_2 \qquad\quad &=& 7 \end{array}$$

Substituindo essas novas equações no sistema (1.6):

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \qquad\ = -4 \\ \qquad\ \ x_2 \qquad\ = \ \ 7 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = \ \ 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

Agora sim, vamos eliminar o termo em x_2 da primeira equação, usando a segunda. Observe que, graças ao trabalho feito previamente com o x_3, não será necessário fazer mais conta alguma envolvendo os seus coeficientes:

$$\begin{array}{r} \text{equação 1 } : \\ +4\cdot(\text{equação 2}) : \\ \hline \text{nova equação 1 } : \end{array} \qquad \begin{array}{rrcr} & x_1 - 4x_2 &=& -4 \\ +4\big(& x_2 &=& 7\ \big) \\ \hline & x_1 \qquad\quad &=& 24 \end{array}$$

O novo sistema, finalmente, é:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\ = 24 \\ \qquad x_2 \qquad\ = \ \ 7 \\ \qquad\qquad x_3 = \ \ 4 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \tag{1.7}$$

Este sistema é tão simples, que podemos imediatamente “ler” seu conjunto-solução: é o conjunto que contém, como único elemento, a lista $(x_1, x_2, x_3) = (24, 7, 4)$. Substitua esses valores no sistema original (1.3) para verificar que, de fato, encontramos uma solução. É importante conferir as suas contas *sempre*!

1.3 Operações-linha e equivalência de sistemas

Observe que, no exemplo da seção anterior, usamos apenas dois "truques" para progressivamente simplificar o sistema (1.3″). Na passagem de (1.3″) para (1.4), substituímos uma linha da matriz completa (a terceira) pela soma dela mesma a um múltiplo de outra linha (a primeira). Na passagem de (1.4) a (1.5), multiplicamos uma linha da matriz completa (a segunda) por uma constante. Usamos o primeiro "truque", nova e repetidamente, no trajeto de (1.5) até (1.7).

Os "truques" básicos que usaremos no processo de escalonamento, de fato, são *três*, conforme a definição a seguir.

Definição 1.1
As operações abaixo são chamadas de **operações elementares sobre as linhas** de uma matriz, ou, simplesmente, de **operações-linha**.

1. *Substituição*: substituir uma linha pela soma dela própria com um múltiplo de outra linha.
2. *Reescalonamento* ou *reescalamento*: multiplicar todos os elementos de uma linha por uma constante *diferente de zero*.
3. *Permutação*: permutar (ou seja, trocar, intercambiar) duas linhas entre si.

Cuidado!
As operações-linha são, como diz o nome, operações sobre *as linhas* de uma matriz. Quando estamos procurando o conjunto-solução de um sistema, *não faz sentido operar sobre as colunas* da matriz completa associada. Se o fizermos, chegaremos a um resultado incorreto. (A não ser que tenhamos *muita* sorte...)

É conveniente usar a seguinte notação para indicar operações-linha:

$\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j$	Indica a *substituição* da i-ésima linha de uma matriz pela soma dela própria com α vezes a j-ésima linha, onde $j \neq i$.
$\ell_i \to \alpha\ell_i$	Indica o *reescalonamento* da i-ésima linha de uma matriz pelo fator α. Lembre que $\alpha \neq 0$.
$\ell_i \leftrightarrow \ell_j$	Indica a *permutação* das linhas i e j de uma matriz.

Com essa notação, não precisamos escrever coisas do tipo: "vamos permutar a segunda e a quinta linha". Podemos, simplesmente, indicar $\ell_2 \leftrightarrow \ell_5$. Enfatizamos que, na operação de reescalonamento, o fator α *não pode ser zero*, isto é, $\ell_i \to 0\ell_i$ *não* é uma operação-linha válida (a justificativa será dada na demonstração da proposição 1.2, logo adiante).

Para exemplificar o uso da notação acima, vamos reescrever dois passos do escalonamento da seção anterior, começando em (1.4):

$$\begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to \frac{1}{3}\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

Proposição 1.2
As operações elementares sobre as linhas são reversíveis, isto é, para cada operação-linha, existe uma operação-linha reversa que a "desfaz".

Demonstração: A operação $\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j$ é "desfeita" pela operação $\ell_i \to \ell_i - \alpha\ell_j$ (verifique!). A operação $\ell_i \to \alpha\ell_i$ é revertida por $\ell_i \to \frac{1}{\alpha}\ell_i$. (Foi por isso, a propósito, que exigimos a condição $\alpha \neq 0$ na operação de reescalonamento. Do contrário, não seria possível revertê-la!) Finalmente, a operação $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$ é revertida aplicando-se, novamente, ela própria. Note que trocar ℓ_i por ℓ_j e, em seguida, ℓ_j por ℓ_i é o mesmo que não fazer coisa alguma. □

Uma *sequência* de operações-linha também pode ser revertida, operação por operação. A sequência das duas operações em (1.8), por exemplo, é revertida por meio da operação $\ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_2$ seguida de $\ell_2 \to 3\ell_2$. Verifique isto, observando que é necessário atentar para a *ordem* em que as operações são realizadas.

Definição 1.3
Dizemos que duas matrizes são **equivalentes por operações sobre as linhas**, ou simplesmente **linha-equivalentes**, se existe uma sequência de operações-linha que leva uma matriz à outra.

Em vista da proposição 1.2, dizer que uma matriz A é linha-equivalente a uma matriz B é o mesmo que dizer que B é linha-equivalente a A. As três matrizes que aparecem em (1.8), por exemplo, são todas linha-equivalentes.

O teorema a seguir é importante porque dá embasamento à estratégia de simplificar um sistema aplicando operações-linha em sua matriz completa. Temos a garantia de que a versão simplificada do sistema terá o mesmo conjunto-solução que o sistema original.

Teorema 1.4
Se dois sistemas lineares têm matrizes completas que são linha-equivalentes, então os dois sistemas são equivalentes, isto é, têm o mesmo conjunto-solução.

A prova do teorema é dada abaixo. *O aluno sem interesse em argumentos matemáticos pode passar diretamente à seção 1.4.*

Demonstração: Suponha que A e B sejam matrizes associadas a sistemas lineares — vamos chamá-los de "sistema (A)" e "sistema (B)" — e que a matriz B seja obtida de A via uma operação-linha qualquer. Afirmamos que os sistemas (A) e (B) têm o mesmo conjunto-solução, isto é, qualquer solução do sistema (A) é também uma solução do sistema (B), e *vice-versa*.

De fato, suponha que $A \xrightarrow{\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j} B$. Se a lista $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é uma solução do sistema (A), então $\mathbf{s}$ satisfaz a todas as equações deste sistema, em particular a i-ésima e a j-ésima. Estas equações estão associadas, respectivamente, às linhas ℓ_i e ℓ_j da matriz A. Portanto, $\mathbf{s}$ também satisfaz a equação associada a $\ell_i + \alpha\ell_j$, isto é, a lista $\mathbf{s}$ satisfaz a i-ésima equação do sistema (B). (Verifique esse passo do argumento! Considere exemplos, se preferir.) Todas as outras equações do sistema (B) são idênticas às equações correspondentes de (A), pois só "mexemos" na i-ésima equação. Portanto, $\mathbf{s}$ também satisfaz essas outras equações. Logo, a lista $\mathbf{s}$ é uma solução do sistema (B). A parte do "vice-versa" agora é fácil. Basta usar a reversibilidade das operações-linha: como $A \xrightarrow{\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j} B$, vale também que $B \xrightarrow{\ell_i \to \ell_i - \alpha\ell_j} A$. Portanto, podemos repetir o argumento acima para mostrar que qualquer solução do sistema (B) é também uma solução de (A). Verifique que o argumento deste parágrafo pode ser adaptado às operações de reescalamento e de permutação.

Para terminar a prova do teorema, recordemos a seguinte definição: duas matrizes são linha-equivalentes se existe uma sequência de operações-linha que leva uma à outra. Aplicando, sucessivamente, o argumento acima em cada um dos passos da sequência, obtemos o resultado desejado. Todas as matrizes envolvidas, da primeira à última, representam sistemas com o mesmo conjunto-solução. □

1.4 Formas escalonadas

Considere o sistema linear abaixo, apresentado com sua matriz completa:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0 \\ \qquad\qquad\;\; - 3x_3 + \;\; x_4 = 9 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\; 2x_4 = 6 \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \tag{1.9}$$

É fácil encontrar o conjunto-solução desse sistema. A última equação implica, imediatamente, que $x_4 = 3$. A segunda equação, portanto, se reduz a

$$-3x_3 + 3 = 9 \qquad \text{ou a} \qquad -3x_3 = 6 \qquad \text{ou, ainda, a} \qquad x_3 = -2.$$

Agora, podemos colocar $x_3 = -2$ e $x_4 = 3$ na primeira equação, obtendo

$$x_1 - 5x_2 + 2 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad x_1 = 16 + 5x_2.$$

O conjunto-solução do sistema (1.9), portanto, é descrito por

$$\begin{cases} x_1 = 16 + 5x_2, \\ x_2 \text{ é uma "variável livre" (veja o comentário abaixo)}, \\ x_3 = -2, \\ x_4 = 3. \end{cases} \tag{1.10}$$

A solução do sistema não é única, isto é, o conjunto-solução tem mais do que um elemento. De fato, podemos arbitrar ("chutar") qualquer valor para a "variável livre" x_2. Para cada valor arbitrado, obtemos uma solução diferente. Portanto, há uma infinidade de soluções. Nas seções 1.7 e 1.8, este assunto será aprofundado. O significado de "variável livre" será dado mais precisamente na subseção 1.7.1.

Ao invés de resolver o sistema (1.9) usando substituições, como fizemos acima, poderíamos ter utilizado operações-linha para simplificá-lo ainda mais:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 \to \frac{1}{2}\ell_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2 - \ell_3]{\ell_1 \to \ell_1 + 4\ell_3}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \to -\frac{1}{3}\ell_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{1.11}$$

A última matriz obtida acima representa um sistema tão simples que, assim como no caso do sistema (1.7), podemos "ler" a descrição (1.10) de seu conjunto-solução.[3]

Podemos formular, agora, a pergunta-chave desta seção. Os sistemas associados às matrizes que aparecem em (1.7), (1.9) e (1.11) são muito simples de resolver. Nesse sentido, *qual é a particularidade dessas matrizes?*

A resposta está na definição abaixo. Antes de apresentá-la, precisamos de alguns termos auxiliares. Dizemos que uma linha, ou uma coluna, de uma matriz é **não-nula** se ela contém, ao menos, um elemento diferente de zero. O **elemento líder** de uma linha é o primeiro elemento diferente de zero desta linha, olhando da esquerda para a direita. Uma linha só de zeros não tem elemento líder.

Definição 1.5
Dizemos que uma matriz está em **forma escalonada**, ou, simplesmente, que é uma **matriz escalonada**, se ela tem as duas propriedades abaixo:

1. As linhas não-nulas estão todas acima de qualquer linha só de zeros. Ou seja, se há linhas só de zeros, elas estão todas agrupadas na parte de baixo da matriz.

2. O elemento líder de cada linha não-nula está numa coluna à direita do elemento líder da linha acima.

Dizemos que uma matriz está na **forma escalonada reduzida**, ou que é uma **matriz escalonada reduzida**, se ela tem as propriedades seguintes, além das anteriores:

3. O elemento líder de cada linha não-nula é igual a 1.

4. Cada elemento líder é o único elemento diferente de zero da sua coluna.

[3] Mas essa "leitura" requer um pouco de prática! Recomendamos que o leitor invista um ou dois minutos de atenção, agora, para perceber como se pode obter (1.10) a partir de (1.11).

A propriedade 2 diz que os elementos líderes formam uma escada que desce da esquerda para a direita na matriz — é por isso que usamos o adjetivo *escalonado*, que significa "ter forma de escada". Uma consequência simples dessa propriedade é que, em uma matriz escalonada, *todos os elementos que estão abaixo de um elemento líder são zeros.*

A matriz completa do sistema (1.9), por exemplo, está em forma escalonada, mas *não* está na forma escalonada reduzida:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -5 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 6 \end{bmatrix}$$

Hachuramos cada linha a partir dos elementos líderes, em destaque, a fim de realçar a "forma de escada" da matriz. Observe que a matriz acima, de fato, tem a propriedade 2: O elemento líder $\boxed{2}$ da linha 3 está numa coluna à direita do elemento líder $\boxed{-3}$ da linha anterior. Este $\boxed{-3}$, por sua vez, também está numa coluna à direita do elemento líder $\boxed{1}$ da linha acima (*não* é necessário que ele esteja na coluna *imediatamente* à direita). Como não há linhas só de zeros, não há o que verificar quanto à propriedade 1.

A última matriz que obtivemos em (1.11), por sua vez, não só está em forma escalonada, como também está na forma *reduzida*:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -5 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que os elementos líderes, novamente em destaque, são todos iguais a um, e são as únicas entradas não-nulas em suas respectivas colunas. A matriz acima, portanto, tem também as propriedades 3 e 4.

Agora, vejamos exemplos de matrizes que *não* estejam em forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{9} & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \boxed{1} & -3 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & \boxed{5} & -2 & 0 & 7 \\ 0 & \boxed{9} & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} & 6 \end{bmatrix}$$

A primeira matriz acima não é uma matriz escalonada, já que viola a propriedade 1: há uma linha só de zeros no meio da matriz, ou seja, há uma linha não-nula abaixo de uma linha de zeros. A segunda matriz não está em forma escalonada, já que viola a propriedade 2: o elemento líder $\boxed{9}$ da terceira linha não está em uma coluna à direita do elemento líder $\boxed{5}$ da linha acima. Esta segunda matriz, apesar de aparentar uma forma de escada, tem um "degrau" grande demais na segunda coluna.

A seguinte notação será útil para indicar formas gerais de matrizes escalonadas:

$$
\begin{bmatrix}
\blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
$$

As entradas $\blacksquare$ são os elementos líderes, que podem ter qualquer valor *diferente de zero*. As entradas indicadas por $*$ podem ter qualquer valor (zero ou não). Ambas as matrizes "genéricas" acima têm as propriedades 1 e 2 (verifique!), portanto são, de fato, escalonadas.

As matrizes a seguir são formas gerais de matrizes escalonadas

$$
\begin{bmatrix}
\boxed{1} & * & 0 & * & * & * & * \\
0 & 0 & \boxed{1} & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{bmatrix}
0 & \boxed{1} & 0 & * & * & * & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & \boxed{1} & * & * & * & 0 & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & * & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{1.12}
$$

Verifique que estas matrizes têm as quatro propriedades da definição 1.5.

Se B for uma matriz escalonada linha-equivalente a A, diremos que B é **uma forma escalonada da matriz** A. Se B estiver na forma escalonada reduzida, diremos que B é **a forma escalonada reduzida da matriz** A. O processo que leva uma matriz, por operações-linha, até uma de suas formas escalonadas é chamado de **escalonamento**, como já mencionamos.

Em geral, uma matriz tem muitas formas escalonadas. Todas as matrizes que aparecem em (1.11) são formas escalonadas distintas de uma mesma matriz, por exemplo. No entanto, cada matriz tem apenas uma forma escalonada reduzida, isto é, *cada matriz é linha-equivalente a uma única matriz escalonada reduzida*. É por isso que usamos as expressões "*uma* forma escalonada" e "*a* forma escalonada reduzida" de uma matriz.

Um sistema representado por uma matriz escalonada é simples de analisar e de resolver, especialmente se a matriz for escalonada reduzida, como você poderá observar em vários exemplos e exercícios — a começar pelos sistemas (1.7) e (1.9). A definição 1.5 responde, portanto, à "pergunta-chave" da seção. Os conceitos e a terminologia que introduzimos aqui, no entanto, aplicam-se a *qualquer matriz*, e não apenas a matrizes completas associadas a sistemas lineares.

Observação

É comum dizermos coisas como "a matriz está em forma escalonada" e "B é uma forma escalonada de A". Apesar de consagrada, esta terminologia pode induzir a um erro conceitual, que queremos prevenir aqui. Parece-nos mais correto dizer "a matriz *é* escalonada" ou "a matriz *tem* forma de escada" que dizer "a matriz *está* escalonada", visto que o verbo "estar" sugere uma transitoriedade que é falsa. O fato é que uma matriz A ou é escalonada ou não é. Se A não for uma matriz escalonada, ela não poderá "tornar-se" escalonada nunca. O processo de escalonamento produz *outra* matriz B, que é escalonada e linha-equivalente a A. Mas o processo não faz com que a própria matriz A "vire" escalonada.

1.5 O algoritmo de escalonamento

Começamos a seção com uma breve anedota (não muito boa, admitimos). Uma turista carioca chega à estação das barcas em Niterói e pergunta a um transeunte como se chega ao Teatro Municipal. Infelizmente, esse transeunte é professor do Instituto de Matemática da UFF, e sua resposta é absolutamente correta, porém absolutamente inútil: "Ah, é fácil! Você chega lá movendo, alternadamente, suas pernas direita e esquerda."

A desventurada turista sabe *aonde* quer chegar (ao Teatro Municipal de Niterói), sabe quais são os *passos admissíveis* para chegar lá (são, literalmente, passos, ou, nas palavras do matemático, "movimentos alternados das pernas"), mas não faz ideia da direção dos passos a tomar.

Encontramo-nos em uma situação curiosa, análoga à da turista. Dada uma matriz qualquer, sabemos *aonde* queremos chegar (a uma forma escalonada linha-equivalente) e sabemos quais são os *passos admissíveis* a tomar (são as operações elementares sobre as linhas). Mas ainda não discutimos o trajeto para se chegar lá. Quais são, exatamente, as operações-linha que devemos aplicar, e em que ordem devemos aplicá-las?

Nesta seção, abordaremos o *algoritmo de escalonamento*, que responde à questão acima. Um **algoritmo** é um procedimento (ou uma "receita") para resolver um determinado problema matemático ou computacional, e que, usualmente, é descrito passo a passo. Frequentemente, o mesmo passo tem que ser aplicado diversas vezes em diferentes etapas do processo, e o algoritmo de escalonamento não é exceção.

Antes de começarmos, precisamos explicar o significado de dois termos que serão empregados. Quando usamos um elemento de uma matriz para "zerar" as entradas que estão abaixo ou acima, dizemos que esse elemento é o *pivô* das operações-linha envolvidas. Uma coluna que contém um pivô é chamada de *coluna-pivô*. Este último conceito será definido mais precisamente na seção 1.6.

1.5.1 Obtenção de uma forma escalonada

Os passos do algoritmo de escalonamento são dados a seguir. Cada um é ilustrado por meio do seguinte exemplo: achar uma forma escalonada da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Passo 1: Olhando a matriz da esquerda para a direita, procure a primeira coluna não-nula. Esta será a coluna-pivô do próximo passo.

A coluna 1 da matriz A é não-nula (não é só de zeros), então esta será nossa primeira coluna-pivô.

Passo 2: Escolha qualquer elemento não-nulo da coluna-pivô para servir de pivô. Você pode escolher um que torne fáceis as contas que estão por vir. Com prática, você será capaz de antever as contas e aplicar este critério.

Na primeira coluna de A, que é a coluna-pivô no momento, podemos escolher o 1 que está na última linha para ser o pivô. Vamos destacá-lo na matriz:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

A escolha deste pivô é conveniente. Se tivéssemos escolhido o -2 na terceira linha, por exemplo, os cálculos adiante envolveriam frações.

Passo 3: Se for necessário, passe o pivô para a primeira linha disponível, usando uma operação de permutação ($\ell_i \leftrightarrow \ell_j$).

Nosso pivô está na quarta linha da matriz, portanto temos que trocar as linhas 1 e 4:

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_4} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Se o pivô já estivesse na linha 1, a troca seria desnecessária aqui.

Passo 4: Opcionalmente, use operações de reescalonamento ($\ell_i \to \alpha\ell_i$) sobre quaisquer linhas que você queira, para facilitar as contas do próximo passo. Mas lembre-se de que $\alpha \neq 0$!

O passo 4 é desnecessário neste estágio do nosso exemplo.

Passo 5: Use operações de substituição ($\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j$) para "zerar" todos os elementos da coluna-pivô que estão abaixo do pivô.

Em nosso exemplo, temos que "zerar" o -1 e o -2 nas linhas 2 e 3, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

O trabalho com o primeiro pivô terminou. A ideia, agora, é repetir todos os passos acima, mas olhando apenas para a parte da matriz que está *abaixo* da linha do pivô. Formalizamos isto no passo seguinte.

Passo 6: Ignore (cubra com a mão, se quiser) a linha que contém o pivô, e todas as linhas acima dela (se houver alguma). Aplique os passos de 1 a 5 sobre a submatriz restante. Continue repetindo este procedimento todo até chegar a uma forma escalonada, ou seja, até que não haja linhas restantes, ou que estas sejam todas linhas de zeros.

Em nosso exemplo, temos que "cobrir", por enquanto, apenas a linha 1, que contém o pivô (não há outras linhas acima dela). Abaixo, as linhas "cobertas" (ou ignoradas) serão impressas em tom mais claro:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Agora, voltamos ao passo 1: procurar a primeira coluna não-nula na submatriz indicada acima (esta será a próxima coluna-pivô). Cuidado: A primeira coluna não-nula é a coluna 2! O único elemento não-nulo da coluna 1 é o $\boxed{1}$, o pivô anterior. Mas esse elemento está em uma linha ignorada. Então, a coluna-pivô "da vez" é a coluna 2:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Passo 2: Escolher um elemento não-nulo na coluna-pivô. Podemos escolher qualquer entrada na segunda coluna, exceto o 4 da primeira linha, pois esta é uma linha ignorada. Escolhemos o 2, que destacamos abaixo, para ser pivô:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Passo 3: Se necessário, passar o pivô (por troca de linhas) para a primeira linha disponível. Neste caso, isso não será necessário, pois o pivô *já está* na primeira linha disponível. Como a linha 1 é ignorada, ela não está disponível.

Passo 4: Usar operações de reescalonamento, opcionalmente, para facilitar as contas posteriores. Em nosso exemplo, é conveniente dividir a segunda linha por 2 e a terceira linha por 5:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{2} & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \frac{1}{5}\ell_3]{\ell_2 \to \frac{1}{2}\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

Passo 5: “Zerar” os elementos abaixo do pivô:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_4 \to \ell_4 + 3\ell_2]{\ell_3 \to \ell_3 - \ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Chegamos, finalmente, ao passo 6: “Cobrir” a linha que contém o pivô e as linhas acima dela, e aplicar o processo todo, novamente, à submatriz restante. Em nosso exemplo, temos que cobrir a linha 2, que contém o pivô “da vez”. A linha 1, que está acima dela, permanece coberta também:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, retornamos novamente ao passo 1! As três primeiras colunas são só de zeros, então a nova coluna-pivô será a quarta:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ -5 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Passos 2 e 3: O novo pivô é, necessariamente, o -5 na coluna destacada acima (um elemento zero nunca pode ser pivô). Temos, então, que passar o pivô para a primeira linha disponível, que é a linha 3 (as linhas 1 e 2 estão “indisponíveis”):

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \leftrightarrow \ell_4} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O processo terminou, porque chegamos a uma matriz escalonada. De fato, o passo 4 é opcional, e o passo 5 é desnecessário, pois já temos um zero no único elemento abaixo do pivô $\boxed{-5}$. Ao aplicar o passo 6, cobrimos a terceira linha (a do pivô). O que sobra é uma linha só de zeros. Dessa forma, obtivemos a matriz escalonada

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cuja forma geral é} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (1.14)$$

Perceba que os pivôs tornam-se os elementos líderes na forma escalonada. Deixamos os pivôs em destaque, pois eles serão usados, novamente, abaixo.

1.5.2 Obtenção da forma escalonada reduzida

A matriz C, que obtivemos acima, é linha-equivalente à matriz A de (1.13). Ela está em forma escalonada, mas não está na forma escalonada *reduzida*. Veremos, adiante, que podemos extrair muita informação sobre uma matriz analisando qualquer uma de suas formas escalonadas (nem sempre é necessário chegar à forma reduzida).

Às vezes, no entanto, é necessário obter a forma reduzida. É fácil, por exemplo, "ler" o conjunto-solução de um sistema linear a partir da forma escalonada reduzida de sua matriz completa (como vimos na seção 1.4). Mas não é tão fácil fazer essa "leitura" a partir de uma forma escalonada qualquer.

Para obter a forma escalonada reduzida de uma matriz, primeiro, encontramos uma forma escalonada qualquer (para isso, aplicamos os passos descritos acima). Em seguida, aplicamos o seguinte passo adicional:

Passo 7: Use operações de substituição ($\ell_i \to \ell_i + \alpha\ell_j$) para "zerar" todos os elementos *acima* de cada pivô. Recomendamos que você comece com o pivô mais à direita da matriz, e prossiga, de pivô em pivô, da direita para a esquerda. Proceder nesta ordem reduz a quantidade total de cálculos. Para cada pivô que for diferente de 1, use uma operação de reescalonamento em sua linha para que ele se torne 1.

Se desejar, use operações de reescalonamento de linhas ($\ell_i \to \alpha\ell_i$), antes das operações de substituição, para facilitar as contas. Mas lembre-se de reescalonar as linhas no final para que todos os pivôs fiquem iguais a 1.

Vamos aplicar o passo 7 à matriz escalonada C que obtivemos em (1.14). Começamos com o pivô mais à direita, como sugerido, que é o $\boxed{-5}$ da quarta coluna. Para facilitar as contas, vamos reescalonar a linha do pivô para que ele se torne $\boxed{1}$ (de toda a forma, seria necessário fazer isso mais adiante):

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to -\frac{1}{5}\ell_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora, vamos zerar as entradas acima do pivô "da vez". Indicamos o "pivô da vez" pela caixa preta. Os outros pivôs tem caixa mais clara.

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2 + 3\ell_3]{\ell_1 \to \ell_1 + 9\ell_3} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O próximo pivô, indo da direita para a esquerda, é o $\boxed{1}$ na segunda coluna. Zeramos a entrada acima dele:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & 0 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 - 4\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se tivéssemos começado com este pivô, neste passo teríamos que fazer contas na quarta coluna. É por isso que é melhor seguir da direita para a esquerda.

O próximo pivô, à esquerda, é o $\boxed{1}$ da primeira coluna. Mas não há elementos acima dele para zerar! Como todos os pivôs já são iguais a 1, já obtivemos a forma escalonada reduzida da matriz A de (1.13):

$$B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.15}$$

1.6 Posições e colunas-pivô

Compare a matriz C de (1.14) com a B de (1.15), e note que as posições dos elementos líderes de cada linha não mudaram. Não é difícil perceber que as posições dos líderes nunca mudam quando passamos por operações-linha de uma forma escalonada qualquer para a forma escalonada reduzida. Como mencionamos antes, cada matriz tem uma única forma escalonada reduzida.

Dessa discussão, segue o seguinte fato fundamental: *As posições dos elementos líderes são sempre as mesmas em qualquer uma das formas escalonadas de uma dada matriz.* Essas posições são chamadas de **posições-pivô** da matriz, pois os elementos nessas posições são usados como pivôs no processo de escalonamento.

Uma coluna que contém uma posição-pivô em uma matriz é chamada de **coluna-pivô**, como você deve ter observado na seção anterior. As demais colunas são chamadas de **colunas não-pivô**.

Exemplo 1.6
Localize as posições-pivô da matriz A de (1.13) (página 13). Quais são as colunas-pivô de A? Quais são as colunas não-pivô?

Solução: Temos que determinar as posições dos elementos líderes em uma forma escalonada (qualquer) de A. Na seção 1.5.1, já encontramos uma forma escalonada de A, a saber, a matriz C de (1.14), que repetimos abaixo:

$$C = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{cuja forma geral é} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os elementos líderes de C estão destacados, e suas posições são aquelas assinaladas por $\blacksquare$ na "forma geral". Estas são as posições-pivô de A, destacadas novamente abaixo, na própria matriz A. As colunas-pivô de A são, portanto, a primeira, a segunda, e a quarta (hachuradas abaixo); a terceira e a quinta são colunas não-pivô.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & \boxed{-2} & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & \boxed{3} & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

□

É importante entender que os conceitos de posição-pivô e coluna-pivô são definidos para *qualquer matriz*, e não apenas para matrizes em forma escalonada. Apesar de *não* ser uma matriz escalonada, a matriz A do exemplo acima tem posições-pivô bem definidas — só que foi necessário escalonar para "desvendá-las". As posições-pivô de uma matriz escalonada, por outro lado, são evidentes: são as posições dos elementos líderes.

Observe, também, que *não* é necessário obter a forma escalonada *reduzida* de uma matriz para determinar suas posições-pivô: basta encontrar uma forma escalonada *qualquer*. No exemplo acima, usamos a matriz escalonada C, que não é reduzida, para localizar as posições-pivô de A.

As posições e colunas-pivô têm papel central na análise de diversas questões de álgebra linear, como veremos nas seções a seguir e nos próximos capítulos.

1.7 Resolução de sistemas lineares

Nesta seção, vamos voltar ao tema que motivou todo este capítulo: a resolução de sistemas lineares. **Resolver** um sistema significa obter uma descrição de seu conjunto-solução, ou determinar que o sistema não tem solução alguma. Vamos começar com dois exemplos que vão nos auxiliar na abordagem de novos conceitos e que servem, também, para recapitular os já estudados.

Exemplo 1.7
Vamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 8x_4 = 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 13 \end{cases} \tag{1.16}$$

Atacamos este problema usando o método de escalonamento desenvolvido neste capítulo. Incialmente, escrevemos a matriz completa associada ao sistema:

$$G = \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 2 & -1 & 17 \\ -1 & -2 & 1 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 13 \end{array}\right].$$

Vamos, agora, escalonar a matriz completa G:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 17 \\ -1 & -2 & 1 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 7 & 13 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -9 & 21 \\ 0 & 0 & -3 & 9 & -21 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 + \ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -9 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Passamos à forma escalonada *reduzida*:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & \boxed{3} & -9 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to \frac{1}{3}\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 2 & -1 & 17 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2} H = \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Esta última matriz, que chamamos de H, representa o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad + 5x_4 = 3 \\ \qquad\qquad x_3 - 3x_4 = 7 \\ \qquad\qquad\qquad 0 \;= 0. \end{cases} \tag{1.17}$$

Por ser toda de zeros, a última linha de H representa a equação $0 = 0$, que podemos descartar sem perder informação alguma.

Como as matrizes G e H são linha-equivalentes (H foi obtida de G por operações-linha), *o sistema* (1.16) *é equivalente ao sistema* (1.17)*, isto é, esses dois sistemas têm o mesmo conjunto-solução.* Usamos, aqui, o teorema 1.4 da página 8.

Nosso problema se reduziu, portanto, a achar o conjunto-solução de (1.17). Mas este sistema é muito simples, visto que a matriz H que o representa está na forma escalonada reduzida.

Observe que as variáveis x_1 e x_3 correspondem a colunas-pivô da matriz H, ou da matriz G, enquanto x_2 e x_4 correspondem a colunas não-pivô. É fácil constatar estes fatos simplesmente olhando para a matriz H. É usual, neste caso, estabelecer x_1 e x_3 como *variáveis básicas* (ou *dependentes*); e x_2 e x_4, como *variáveis livres.*[4] Escrevendo as variáveis dependentes x_1 e x_3, em termos das variáveis livres x_2 e x_4, obtemos

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 - 5x_4, \\ x_2 \text{ é uma variável livre,} \\ x_3 = 7 + 3x_4, \\ x_4 \text{ é uma variável livre.} \end{cases} \tag{1.18}$$

Com um pouco de prática, fica fácil "ler" (1.18) diretamente da matriz H, sem a necessidade de escrever o sistema (1.17).

Concluímos que (1.18) descreve o conjunto-solução do sistema (1.16). Esse sistema tem uma infinidade de soluções: uma para cada par de valores arbitrado para as variáveis livres x_2 e x_3. Já havíamos nos deparado com um caso semelhante: reveja o sistema (1.9), na página 9, e seu conjunto-solução descrito em (1.10).

[4]Esses conceitos serão esclarecidos na subseção a seguir.

Exemplo 1.8
Consideramos o sistema:

$$\begin{cases} \phantom{2x_1 + {}} x_2 - 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 + 7x_2 + x_3 = 11 \end{cases} \tag{1.19}$$

Para resolver este sistema, seguindo a estratégia anterior, escalonamos a matriz completa associada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -2 & -3 \\ \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 6 & 7 & 1 & 11 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 6 & 7 & 1 & 11 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 + 2\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \end{array}\right]$$

Obtivemos uma forma escalonada, e, neste caso, não é necessário chegar à forma escalonada reduzida. Observe que a terceira linha da matriz escalonada representa a equação $0 = 2$ $(0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2)$. Esta equação jamais poderá ser satisfeita, não interessa quais sejam os valores de x_1, x_2 e x_3. Portanto, o sistema (1.19) é *impossível*, isto é, não tem solução. Em outras palavras, o seu conjunto-solução é vazio.

Resolvemos, portanto, os sistemas (1.16) e (1.19). No exemplo 1.7, obtivemos uma descrição do conjunto-solução do primeiro, e, no exemplo 1.8, concluímos que o segundo sistema não tem solução alguma.

Vamos, a seguir, estudar mais cuidadosamente descrições tais como (1.18), formalizando os conceitos de variáveis "básicas" e "livres". Na subseção 1.7.2, abordaremos a questão fundamental de determinar se um dado sistema tem ou não solução. Por ora, chamamos a atenção do leitor para a equação "problemática" $0 = 2$, que encontramos no exemplo acima. Ela é típica de um sistema impossível. Aprofundaremos esta questão na seção 1.8.

1.7.1 Descrições paramétricas de conjuntos-solução, variáveis básicas e livres

Descrições do tipo (1.18) ou (1.10), na página 9, em que "variáveis básicas" são dadas em termos de "variáveis livres", são chamadas de **descrições paramétricas** de conjuntos-solução, pois as variáveis livres também podem ser chamadas de "parâmetros livres".

Reveja a passagem de (1.17) para (1.18) no exemplo 1.7. Poderíamos reformular (1.18) escolhendo, por exemplo, x_1 e x_3 como variáveis livres, e escrevendo x_2 e x_4 em termos delas.[5] Poderíamos, também, escolher x_1 e x_4 como variáveis

[5] Isso iria requerer mais algumas contas simples.

livres, e escrever x_2 e x_3 em termos delas. No entanto, x_3 e x_4 nunca poderiam ser *simultaneamente* livres, pois uma está amarrada à outra pela relação $x_3 - 3x_4 = 7$.

Há uma certa liberdade de escolha, portanto, ao classificarmos variáveis como dependentes ou livres. A escolha que adotamos, por *convenção*, é que as **variáveis básicas**, ou **dependentes**, sejam *aquelas que correspondam às colunas-pivô da matriz de coeficientes* de um dado sistema, e as demais sejam as **variáveis livres**. Lembre que é necessário escalonar uma matriz para que se possa "desvendar" quais são as colunas-pivô!

Vejamos, novamente, o exemplo 1.7. As colunas-pivô da matriz completa G são a primeira e a terceira, como fica claro ao examinar a matriz H, que é uma forma escalonada de G. Estabelecemos, portanto, que as variáveis x_1 e x_3 são básicas. As variáveis x_2 e x_4 correspondem à segunda e à quarta coluna de G, respectivamente, que são colunas não-pivô. Estas variáveis, portanto, são livres.

A quinta coluna de G é não-pivô, mas *não corresponde a uma variável livre*. De fato, a última coluna de G *não corresponde a variável alguma*: esta é a coluna associada aos termos independentes do sistema (1.16) (ver seção 1.2).

A classificação de variáveis em básicas ou livres só tem sentido no caso de sistemas possíveis. Portanto, não faz sentido classificar as variáveis do sistema (1.19). Isso porque o conjunto-solução de um sistema impossível é vazio, portanto, não tem descrição paramétrica.

Vamos examinar mais dois exemplos para fixar essas ideias.

Exemplo 1.9

Classifique cada variável do sistema abaixo como básica ou livre, e obtenha uma descrição paramétrica de seu conjunto-solução.

$$\begin{cases} - 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 9 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + 3x_4 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 9x_4 = -7 \end{cases} \tag{1.20}$$

Solução: Usando a mesma estratégia do exemplo 1.7, começamos escalonando a matriz completa associada ao sistema. Observe que a matriz completa de (1.20) é exatamente a matriz A de (1.13), na página 13. Já aplicamos o algoritmo de escalonamento a A na seção 1.5, e obtivemos a matriz B, dada em (1.15):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(ver seção 1.5)}]{\text{escalonamento}} B = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Assim, o sistema (1.20) é equivalente ao sistema associado a B:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 5 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \\ x_4 = 0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Acima, descartamos a equação $0 = 0$ representada pela última linha de B.

As variáveis x_1, x_2 e x_4 correspondem às colunas-pivô da matriz A (ver seção 1.6, em particular o exemplo 1.6), portanto, estabelecemos que estas são as variáveis *básicas*. A variável x_3 corresponde a uma coluna não-pivô de A, portanto, x_3 é *livre*.

Escrevendo as variáveis básicas x_1, x_2 e x_4 em termos da variável livre x_3, obtemos uma descrição paramétrica do conjunto-solução de (1.20):

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_3, \\ x_2 = -3 - 2x_3, \\ x_3 \text{ é uma variável livre}, \\ x_4 = 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

O sistema (1.20), mais uma vez, tem uma infinidade de soluções: uma para cada valor arbitrado ("chute") para variável livre x_3. □

Nem todo sistema linear, ainda que possível, tem variáveis livres.

Exemplo 1.10
Vamos revisitar, brevemente, o "primeiro exemplo" da seção 1.2 (página 4):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & 4x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 3x_2 & - & 6x_3 & = & -3 \\ -3x_1 & + & 14x_2 & - & 6x_3 & = & 2 \end{array}\right. \tag{1.23}$$

Vimos que a matriz completa deste sistema e sua forma escalonada reduzida são dadas por

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & -3 \\ -3 & 14 & -6 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{(ver seção 1.2)}]{\text{escalonamento}} \left[\begin{array}{rrr|r} \boxed{1} & 0 & 0 & 24 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 7 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right]. \tag{1.24}$$

Todas as colunas da *matriz de coeficientes* do sistema são colunas-pivô, isto é, as colunas associadas a x_1, x_2 e x_3 são colunas-pivô (a última coluna da matriz completa *não* faz parte da matriz de coeficientes). Por esta razão, não há variáveis livres neste exemplo, e o sistema (1.23) possui *uma única solução*, dada por

$$\begin{cases} x_1 = 24, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = 4. \end{cases} \tag{1.25}$$

Podemos chamar (1.25) de descrição paramétrica do conjunto-solução do sistema (1.23), apesar de a terminologia ser um tanto artificiosa neste caso. Como o sistema (1.23) não tem variáveis livres, não há "parâmetro" algum em (1.25).

1.7.2 Sistemas possíveis *versus* impossíveis

Nossa estratégia para resolver o sistema (1.16) do exemplo 1.7 foi a seguinte:

(a) escrever a matriz completa G associada ao sistema;
(b) obter sua forma escalonada reduzida H;
(c) extrair de H uma descrição paramétrica do conjunto-solução.

Usamos a mesma estratégia nos exemplos 1.9 e 1.10. Os sistemas destes três exemplos são todos *possíveis*. Todos têm ao menos uma solução. Note que o sistema (1.23) tem exatamente uma solução, e os sistemas (1.16) e (1.20) têm uma infinidade.

Por outro lado, ao escalonar a matriz completa do sistema (1.19) do exemplo 1.8, obtivemos uma linha igual a $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$, que representa a equação "problemática" $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 2$ (ou $0 = 2$). Concluímos, imediatamente, que o sistema em questão é *impossível*: não tem solução alguma.

Isso motiva o seguinte critério para determinar se um dado sistema é ou não possível.

Proposição 1.11
Se uma forma escalonada da matriz completa de um sistema linear tem uma linha do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \blacksquare \end{bmatrix}, \quad \text{com } \blacksquare \text{ diferente de zero,} \tag{1.26}$$

então o sistema é impossível. Se, do contrário, uma forma escalonada da matriz completa não *tem nenhuma linha deste tipo, então o sistema é possível.*

Demonstração: Se uma forma escalonada da matriz completa de um sistema tem uma linha do tipo acima, podemos imediatamente concluir que tal sistema é impossível. Essa linha representa a equação $0 = \blacksquare$, que jamais será satisfeita (é uma equação do tipo $0 = 2$).

Por outro lado, se uma forma escalonada da matriz completa de um sistema *não* tem uma linha do tipo acima, então podemos, sem nenhum impedimento, determinar o valor de cada variável básica ou escrevê-la em termos das variáveis livres (se houver alguma). O resultado será uma descrição paramétrica do conjunto-solução. □

O método recomendado para obter uma descrição paramétrica do conjunto-solução, no caso de um sistema possível, é aquele delineado no início desta subseção: passar à forma escalonada *reduzida* da matriz completa, como fizemos nos exemplos 1.7, 1.9 e 1.10. O procedimento geral é resumido na subseção abaixo.

1.7.3 Procedimento para a resolução de sistemas

Lembre que *resolver* um sistema linear significa obter uma descrição de seu conjunto-solução (uma descrição paramétrica, por exemplo), ou, então, concluir que o sistema é impossível. Abaixo, apresentamos um procedimento sistemático (um algoritmo) para resolver um dado sistema. Para estudá-lo, use os exemplos anteriores desta seção como guias.

Passo 1: Escreva a matriz completa do sistema.

Passo 2: Obtenha uma forma escalonada da matriz completa, usando o algoritmo visto na subseção 1.5.1. Não é necessário, por ora, chegar à forma reduzida.

Passo 3: Se houver uma linha do tipo (1.26) na matriz obtida, o sistema é impossível (conforme a proposição 1.11). Neste caso, o procedimento termina aqui. Caso contrário, siga para o próximo passo.

Passo 4: Obtenha a forma escalonada reduzida da matriz completa, usando o algoritmo visto na subseção 1.5.2.

Passo 5: Escreva o sistema de equações representado pela matriz obtida no passo anterior. (Este passo é dispensável. Com um pouco de prática, é fácil passar diretamente ao passo 6.)

Passo 6: Obtenha uma descrição paramétrica do conjunto-solução. Isso é feito reescrevendo cada equação não-nula (que não seja do tipo $0 = 0$) do passo anterior, de forma que a variável básica envolvida seja expressa em termos das variáveis livres (se houver alguma).

1.8 Existência e unicidade de solução

Nesta seção, abordaremos o resultado anunciado na introdução do capítulo: um sistema linear qualquer ou tem exatamente uma solução, ou não tem solução alguma, ou tem uma infinidade de soluções. Isso já foi praticamente demonstrado na seção anterior. Só falta sistematizar as ideias e enunciar os resultados.

Observação
Queremos fazer um breve comentário sobre terminologia. Dada uma classe de problemas matemáticos (sistemas lineares, por exemplo), duas questões naturais, frequentemente, se colocam: Sob quais condições um problema particular da classe terá alguma solução? Nos casos em que há solução, sob quais condições adicionais (talvez, mais restritas) haverá uma única solução, e sob quais condições haverá mais de uma? A primeira questão é chamada de um *problema de existência*, já que queremos saber quando é que uma solução existe. A segunda chama-se um *problema de unicidade*, já que queremos saber quando é que uma solução tem a qualidade de ser única. O mundo matemático é cheio de "teoremas de existência e unicidade", referentes aos mais variados problemas. Ao final desta seção, veremos um exemplo referente ao caso de sistemas lineares.

1.8.1 Existência

Na proposição 1.11 da seção anterior, estabelecemos um critério para determinar se um sistema possui solução. Tal critério baseia-se na (não) ocorrência de uma "linha problemática" do tipo (1.26), em uma forma escalonada da matriz completa do sistema.

Este já é um critério satisfatório para determinar a existência, ou não, de uma solução para um sistema linear. Mas desejamos reformulá-lo em termos das colunas-pivô da matriz completa do sistema.

Considere as matrizes escalonadas "genéricas"

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \tag{1.27}$$

e interprete cada uma como a matriz completa de um sistema linear (ou linha-equivalente a tal matriz). As matrizes acima representam sistemas *possíveis*, já que nenhuma tem uma linha do tipo (1.26). Já as matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1.28}$$

correspondem a sistemas *impossíveis*, já que elas possuem linhas do tipo (1.26), representando equações do tipo $0 = \blacksquare$. Lembre que $\blacksquare$ representa um número diferente de zero. Em cada matriz, a "linha problemática" está hachurada.

Examine as matrizes acima, dando atenção especial à *última coluna* de cada uma. As matrizes de (1.27) *não* possuem "linhas problemáticas", e, em cada uma delas, a última coluna é *não*-pivô. Em contrapartida, todas as matrizes de (1.28) apresentam "linhas problemáticas", e, em cada uma, a última coluna *é* pivô. O exercício P1.13 pede que você deduza o seguinte fato geral: *A última coluna de uma matriz qualquer* (*escalonada ou não*) *é pivô se e somente se uma de suas formas escalonadas tem uma linha do tipo* (1.26).

A proposição abaixo é completamente equivalente à proposição 1.11, em vista dessas observações.

Proposição 1.12
Um sistema linear é possível se e somente se a última coluna de sua matriz completa (*a dos termos independentes*) não *é uma coluna-pivô.*

Enfatizamos que, para determinar se um sistema é possível, *não* é necessário obter a forma escalonada *reduzida* de sua matriz completa. Basta chegar a uma forma escalonada *qualquer* para aplicar o critério da proposição acima.

1.8.2 Unicidade

Vimos que o sistema do exemplo 1.9 tem uma infinidade de soluções: cada valor que for escolhido (ou "chutado") para a variável livre x_3 leva a uma solução diferente. O exemplo 1.7 é semelhante, mas, neste caso, há *duas* variáveis livres: obtém-se uma solução diferente do sistema (1.16) para cada escolha de valores das variáveis x_2 e x_4.

O sistema do exemplo 1.10, por outro lado, não possui variáveis livres, e, assim, o sistema tem uma única solução. Em outras palavras, o conjunto-solução tem apenas um elemento.

Tendo esses exemplos por base, não é difícil formular as seguintes ideias gerais. Um sistema linear possível *ou tem pelo menos uma variável livre, ou então não tem variável livre alguma.* Claramente, não há outra alternativa. Se o sistema *tiver* pelo menos uma variável livre, então ele terá uma infinidade de soluções: uma para cada "chute" da(s) variável(eis) livre(s). Se o sistema *não tiver* nenhuma variável livre, então ele terá uma única solução. Salientamos que esta discussão refere-se, por hipótese, a um sistema *possível.*

Considere, por exemplo, as matrizes escalonadas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & \ast \end{array}\right], \tag{1.29}$$

e, mais uma vez, interprete cada uma como a matriz *completa* de um sistema linear. As matrizes acima representam sistemas possíveis que *não* têm variáveis livres: Em cada caso, todas as colunas da matriz de coeficientes contêm uma posição-pivô, portanto, *todas as variáveis são básicas* (veja a subseção 1.7.1). Acima, a última coluna de cada matriz completa é não-pivô, mas *não* faz parte da matriz de *coeficientes.* Lembre-se de que a linha vertical destaca a matriz de coeficientes da coluna dos termos independentes.

Em contrapartida, as matrizes

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cc|c} 0 & \blacksquare & \ast \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1.30}$$

representam sistemas possíveis *que têm variáveis livres.* As colunas associadas às variáveis livres estão hachuradas. Elas são as colunas não-pivô em cada matriz de *coeficientes* (ver subseção 1.7.1). No sistema representado pela primeira matriz acima, por exemplo, a variável x_3 é livre. No caso do sistema representado pela última matriz, as variáveis livres são x_1 e x_4. Note que, em cada uma dessas matrizes, a última coluna não está hachurada. Apesar de serem não-pivô, essas colunas *não correspondem a variáveis livres*! Elas não correspondem a variável alguma, já que, repetimos, não fazem parte da matriz de coeficientes.

Para determinar se um sistema possível tem variáveis livres, portanto, basta determinar se há colunas não-pivô em sua matriz de coeficientes.

Por fim, as matrizes

$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & \blacksquare & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \end{array}\right] \quad \text{e} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & \ast & \ast & \ast & \ast \\ 0 & \blacksquare & \ast & \ast & \ast \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \tag{1.31}$$

representam sistemas *impossíveis*: as linhas hachuradas são "problemáticas". Observe, também, que, em cada matriz, a última coluna é pivô. A classificação das variáveis em básicas ou livres é irrelevante nestes casos.

Em resumo:

- As matrizes em (1.29) representam sistemas com solução única (sistemas possíveis, sem variáveis livres). Em outras palavras, o conjunto-solução de cada um desses sistemas tem um único elemento.
- As matrizes em (1.30) representam sistemas com uma infinidade de soluções (sistemas possíveis, com variáveis livres). O conjunto-solução de cada um desses sistemas tem uma infinidade de elementos.
- As matrizes em (1.31) representam sistemas sem solução alguma (sistemas impossíveis). O conjunto-solução de cada um deles é vazio, ou seja, não tem elemento algum.

1.8.3 Teorema de existência e unicidade de solução

Sintetizamos, abaixo, os resultados das duas últimas subseções. Se você achar confuso o enunciado do teorema abaixo, refira-se ao exercício P1.14.

Teorema 1.13
Um sistema linear é possível se e somente se a última coluna de sua matriz completa não *é uma coluna-pivô* (*ver proposição 1.12*).

Um sistema possível tem uma única solução se e somente se todas as colunas de sua matriz de coeficientes *são colunas-pivô* (*neste caso, não há variáveis livres: todas as variáveis do sistema são básicas*).

Se, do contrário, a matriz de coeficientes de um sistema possível tem, pelo menos, uma coluna não-pivô, então o sistema tem, pelo menos, uma variável livre, e, portanto, uma infinidade de soluções.

Um sistema linear, portanto, ou tem uma única solução, ou uma infinidade, ou nenhuma. Para determinar em qual caso enquadra-se um dado sistema, basta escalonar sua matriz completa e usar o teorema acima. O escalonamento é necessário para desvendar quais são as colunas-pivô da matriz completa. Observe, mais uma vez, que basta obter uma forma escalonada *qualquer*: não é necessário chegar à forma reduzida. Ou seja, não é necessário aplicar todos os passos do procedimento da subseção 1.7.3, basta ir até o passo 2.

Observação
Talvez, você ainda não tenha percebido todas as consequências do teorema acima, e sua importância na análise de sistemas lineares. O teorema implica, por exemplo, que não há sistemas lineares com *exatamente* duas, três ou, digamos, dezessete soluções (um sistema linear ou tem uma solução, ou uma infinidade, ou nenhuma).

A situação é muito diferente no caso de sistemas não-lineares. A equação não-linear $x^2 = 4$, por exemplo, tem exatamente duas soluções: $x = 2$ e $x = -2$. E a equação $(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-17) = 0$ tem dezessete soluções (quais são?).

Exercícios propostos

P1.1. Verifique que o sistema (b) da introdução não possui soluções, e que o sistema (c) possui uma infinidade delas.

P1.2. Verifique que as equações do sistema (c) da introdução representam a mesma reta no plano (x_1, x_2).

P1.3. A primeira equação do sistema (a) da introdução corresponde a qual das duas retas da figura 1.1(a)?

P1.4. Determine o ponto de interseção entre as retas $2x_1 + x_2 = 1$ e $x_1 - 2x_2 = 13$.

P1.5. Descreva a interseção entre as retas $3x_1 - 2x_2 = 4$ e $6x_1 - 4x_2 = 8$. A interseção é vazia? É um ponto? É uma reta?

P1.6. Determine quais das matrizes abaixo estão em forma escalonada. Quais estão na forma escalonada reduzida?

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(j) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (k) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (l) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

P1.7. Encontre uma forma escalonada de cada matriz abaixo. Indique as posições e as colunas-pivô. *Observação*: Não é necessário obter a forma reduzida.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 & 4 & 17 \\ 2 & -3 & 12 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ (f) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -7 & -19 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 16 \\ -4 & 8 & -2 & 0 & -36 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

P1.8. Obtenha, agora, a forma escalonada reduzida de cada matriz do exercício anterior. Aproveite o trabalho já realizado.

P1.9. Em cada matriz abaixo, a posição destacada é uma posição-pivô? Justifique cada resposta.

(a) $\begin{bmatrix} -3 & -9 & 3 & -9 \\ 4 & 12 & \boxed{0} & 20 \\ 1 & 3 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -11 \\ -3 & \boxed{-5} & 17 \\ -6 & -10 & -2 \end{bmatrix}$

P1.10. Determine quais dos sistemas abaixo são possíveis. Para cada sistema possível, classifique as variáveis em básicas ou livres, e forneça uma descrição paramétrica do conjunto-solução. *Use o procedimento da subseção 1.7.3.*

(a) $\begin{cases} \phantom{x_1 +{}} x_2 - 2x_3 = 7 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 25 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 26x_3 = -5 \\ -x_1 + x_2 - 7x_3 = 3 \\ 2x_2 - 4x_3 = 10 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} -4x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 22x_4 = -27 \\ -5x_1 + 5x_2 - 4x_3 - 12x_4 = 5 \\ 2x_1 - 2x_2 + 8x_4 = 6 \end{cases}$

P1.11. Pense em cada matriz do exercício P1.7 como a matriz completa de um sistema. Escreva cada um desses sistemas, e resolva-o. *Dica*: Aproveite o trabalho já realizado no exercício P1.8.

P1.12. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + hx_2 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 = k \end{cases}$$

Determine os valores de h e k tais que o sistema tenha (i) nenhuma solução, (ii) uma única solução, e (iii) muitas soluções. Dê respostas separadas para cada parte, justificando cada uma.

P1.13. Mostre que a última coluna de uma matriz qualquer é uma coluna-pivô se e somente se uma de suas formas escalonadas tem uma linha do tipo (1.26).

P1.14. Justifique as seguintes afirmativas, usando o teorema 1.13. (Este exercício é, simplesmente, uma reformulação desse teorema.)

(a) Um sistema linear *não terá solução alguma* se e só se houver uma posição-pivô na última coluna de sua matriz completa.

(b) Um sistema linear terá *uma única solução* se e só se houver uma posição-pivô em todas as colunas de sua matriz completa, *exceto na última coluna.*

(c) Um sistema linear terá *uma infinidade de soluções* se não houver posição-pivô na última coluna de sua matriz completa e, além disso, não houver posição-pivô em alguma outra coluna.

P1.15. Determine se cada afirmativa é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Nem toda matriz possui uma forma escalonada.
(b) Nem toda matriz possui uma forma escalonada reduzida.
(c) Uma matriz pode ter muitas formas escalonadas reduzidas distintas.
(d) Uma matriz pode ter muitas formas escalonadas distintas.
(e) Uma matriz pode ter uma única forma escalonada. *Dica*: Veja o exercício P1.6(k).

P1.16. Mostre que, se existe uma sequência de operações-linha que leva a matriz A à matriz B, então existe uma sequência que leva B a A. *Dica*: Use a proposição 1.2.

P1.17. Se uma matriz A é linha-equivalente a B, e B é linha-equivalente a C, então A e C são linha-equivalentes. Justifique essa afirmativa.

P1.18. As matrizes dos itens (c) e (d) do exercício P1.7 são linha-equivalentes? Justifique. *Dica*: Use os dois exercícios anteriores, e aproveite o trabalho já realizado no exercício P1.8.

P1.19. Justifique a afirmativa: O número de posições-pivô de uma matriz não pode exceder seu número de linhas, nem seu número de colunas.

Dicas: Reveja as definições de *forma escalonada de uma matriz* e de *posição-pivô* nas seções 1.4 e 1.6, respectivamente. Agora, reflita: Uma linha de uma matriz qualquer pode ter mais do que um elemento líder? Uma matriz escalonada pode ter mais de um elemento líder na mesma coluna?

P1.20. Convença-se de que as únicas quatro formas escalonadas “genéricas” de tamanho 2×2 são

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ 0 & \blacksquare \end{bmatrix}.$$

P1.21. Existem exatamente 11 formas escalonadas “genéricas” de tamanho 2×4. Escreva cada uma delas. *Dica*: Escreva aquela(s) com *nenhuma* posição-pivô, em seguida aquela(s) com *uma*, e finalmente aquela(s) com *duas*. Por que é que o processo termina por aí?

P1.22. Mostre que um sistema linear com duas equações e três variáveis ou não tem solução alguma, ou tem uma infinidade de soluções. *Dica*: Use o exercício anterior.