Capítulo 7

Mudança de Base

Este capítulo é mais técnico, nele pretendemos explicar como as coordenadas de um vetor mudam, ao mudarmos de uma base para outra. Antes de começar é preciso fazer uma distinção sem a qual não é possível entender os conceitos discutidos neste capítulo. A distinção é a de que quando escrevemos $\mathbf{w}$ estamos imaginando um vetor (como ente geométrico) e quando escrevemos $[\mathbf{w}]$, estamos pensando nas coordenadas deste vetor com respeito à uma base.

7.1 Matriz Mudança de Coordenadas

Vamos considerar uma base $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ do $\mathbb{R}^n$, então qualquer vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ pode ser escrito de maneira única como combinação linear dos vetores de α, isto é, existem $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{w} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n.$$

Se ordenarmos o conjunto α podemos associar para cada vetor $\mathbf{w}$ um único conjunto de números que informam as coordenadas do vetor $\mathbf{w}$, em relação aos vetores de α, e escrevemos $[\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t$. Reciprocamente, se dermos um conjunto de n números $x_1, x_2, \ldots, x_n$ existe um único vetor associado, que é o vetor $\mathbf{w} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$.

Agora se tivermos outra base, digamos $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, então podemos encontrar $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, tais que o mesmo vetor $\mathbf{w}$ se escreve

$$\mathbf{w} = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + \cdots + y_n\mathbf{v}_n,$$

e as coordenadas desse vetor com respeito à base β são $[\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix}^t$. Nesta seção vamos entender como relacionar as coordenadas de $\mathbf{w}$, na base α, com as coordenadas de $\mathbf{w}$, com respeito à base β.

7.1.1 Dimensão 2

Faremos as contas somente para o caso em que a dimensão do espaço vetorial é 2, isso porque o resultado obtido em dimensão 2 estende-se para espaços de dimensão maior sem nenhuma dificuldade.

Sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Então dado, o vetor

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2\\ &= y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2.\end{aligned}$$

Como $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ são vetores, podemos determinar as coordenadas destes vetores com respeito à base α, isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2\\ \mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2.\end{aligned}$$

Substituindo na igualdade acima obtemos:

$$\begin{aligned}\mathbf{w} &= y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2\\ &= y_1(a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2) + y_2(a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2)\\ &= (a_{11}y_1 + a_{12}y_2)\mathbf{u}_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2)\mathbf{u}_2.\end{aligned}$$

E usando a unicidade da representação de um vetor em termos de uma base ordenada e a multiplicação de matrizes obtemos que:

$$\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\end{bmatrix}.$$

Observe que qualquer que seja o vetor $\mathbf{w}$, se soubermos as coordenadas dele com respeito à base β, $[\mathbf{w}]_\beta$, podemos encontrar as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base α, $[\mathbf{w}]_\alpha$, bastando para isso multiplicar $[\mathbf{w}]_\beta$ pela matriz acima. Chamamos essa matriz de **matriz de mudança de coordenadas** da base β para a base α e a denotamos por $[I]^\beta_\alpha$.

Exemplo 7.1
Considere $V = \mathbb{R}^2$ e $\alpha = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$ e a base $\beta = \left\{\left[\begin{smallmatrix}-1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$. Então, para determinarmos a matriz mudança da base α para a base β, $[I]^\beta_\alpha$, precisamos encontrar as coordenadas dos vetores da base β com respeito à base α, isto é,

$$\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} = a_{11}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{21}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \text{ e também } \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = a_{12}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + a_{22}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}.$$

Essas equações vetoriais são muito fáceis de serem resolvidas e as soluções são $a_{11} = -1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$ e $a_{22} = 1$. Portanto,

$$[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Vamos determinar também $[I]^\alpha_\beta$. Para isso precisamos escrever os vetores da base α, em termos da base β. Depois de fazermos as contas chegamos que:

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = -\,1/2\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = 1/2\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} + 1/2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$[I]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Vamos fazer duas observação: a primeira é a de que $[I]_\beta^\alpha [I]_\alpha^\beta = I$, portanto, uma é inversa da outra(este resultado é geral!) A segunda é a de que a matriz $[I]_\alpha^\beta$ tem como colunas os vetores da base β, esse fato sempre ocorre se a base de chegada é a base canônica.

7.1.2 Caso Geral

Vamos tratar o caso geral. Suponha que $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ é uma base de V assim como $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ e, que $\mathbf{w}$ seja um vetor qualquer de V, então podemos determinar as coordenadas

$$[\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{w}]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Escrevendo os vetores da base β, em termos da base α, podemos determinar os n^2 números a_{ij} a seguir:

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{u}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{u}_n \\
&\cdots\cdots \\
\mathbf{v}_j &= a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{u}_n \\
&\cdots\cdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n
\end{aligned}$$

E, montando a matriz,

$$[I]_\alpha^\beta = \begin{bmatrix} [\mathbf{v}_1]_\alpha & [\mathbf{v}_2]_\alpha & \cdots & [\mathbf{v}_n]_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Essa matriz foi obtida ao pegar os coeficientes que aparecem na expressão do vetor $\mathbf{v}_j$ como combinação linear dos vetores $\mathbf{u}_{i's}$ e colocar na j-ésima coluna. Essa matriz é chamada de **matriz de mudança da coordenadas de β para a base α** ou simplesmente **matriz de mudança de coordenadas**.

Observação 7.2
Na literatura a matriz $[I]_\alpha^\beta$ é muitas vezes chamada de matriz de mudança da base α para a base β, ou, simplesmente, matriz de mudança de base. Você poderia pensar que cometemos um equivoco, mas, de fato, não cometemos. Mais para frente justificaremos este nome.

7.2 Aplicações lineares e Matrizes

Até o momento sabemos que dada uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ podemos associar uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$ e, reciprocamente, dada uma matriz $A = [a_{ij}]$, de ordem $m \times n$, podemos determinar uma aplicação linear $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Vamos estender esse conceito para quando levarmos em conta as coordenadas de um vetor.

Vamos iniciar considerando a aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, e sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$. Observe que em qualquer vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ o vetor $T(u) \in \mathbb{R}^m$ podemos determinar as coordenadas do mesmo com respeito à base β em particular,

$$
\begin{aligned}
T(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m1}\mathbf{v}_m \\
T(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{m2}\mathbf{v}_m \\
&\cdots\cdots\cdots \\
T(\mathbf{u}_j) &= a_{1j}\mathbf{v}_1 + a_{2j}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mj}\mathbf{v}_m \\
&\cdots\cdots\cdots \\
T(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_m
\end{aligned}
$$

Assim, podemos associar a matriz

$$
[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
$$

que é chamada **matriz da aplicação linear T com respeito às bases α e β.**

Exemplo 7.3
Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$
\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x + y - z \\ 3x - 3y - 4z \end{bmatrix} \text{ e as bases}
$$

$$
\alpha = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ e } \beta = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.
$$

Encontre a matriz de T com respeito à estas bases. Precisamos encontrar as coordenadas, na base β, dos vetores da base α avaliados por T.

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix} = (-3)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};$$
$$T\left(\begin{bmatrix}-1\\-1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\0\end{bmatrix} = (3/2)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + (-3/2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix};$$
$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} = (1/2)\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix} + (5/2)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz de T, com respeito às bases α e β é

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix}-3 & 3/2 & 1/2\\ -1 & -3/2 & 5/2\end{bmatrix}.$$

Teorema 7.4
Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, α uma base de $\mathbb{R}^n$, β uma base de $\mathbb{R}^m$, então

$$[T(\mathbf{w})]_\beta = [T]_\beta^\alpha [\mathbf{w}]_\alpha.$$

Demonstração: Esse teorema nos diz que se tomarmos o vetor $\mathbf{w}$ e calcularmos as coordenadas de $T(\mathbf{w})$, com respeito à base β, será o mesmo que calcularmos $[\mathbf{w}]_\alpha$ vezes a matriz da aplicação T, com respeito às bases α e β.

Faremos a demonstração somente para o caso $n = 2$ e $m = 3$, por acreditar que isso é bem mais instrutivo que a demonstração no caso geral. Para começar, sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ uma base do $\mathbb{R}^2$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$. Sabemos que existem únicos coeficientes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + a_{31}\mathbf{v}_3\\ T(\mathbf{u}_2) &= a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{32}\mathbf{v}_3,\end{aligned}$$

e obtemos a matriz

$$[T]_\beta^\alpha = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}.$$

Seja $\mathbf{w}$ um vetor de $\mathbb{R}^2$ e sejam $[\mathbf{w}]_\alpha = \left[\begin{smallmatrix}x_1\\x_2\end{smallmatrix}\right]$ e $[T(\mathbf{w})]_\beta = \left[\begin{smallmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{smallmatrix}\right]$ as suas coordenadas.

Logo, $\mathbf{w} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2$ e por fazer uso da linearidade da aplicação T temos:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{w}) &= T(x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2)\\ &= x_1T(\mathbf{u}_1) + x_2T(\mathbf{u}_2)\\ &= x_1(a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + a_{31}\mathbf{v}_3) + x_2(a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + a_{32}\mathbf{v}_3)\\ &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2)\mathbf{v}_1 + (a_{21}x_1 + a_{22}x_2)\mathbf{v}_2 + (a_{31}x_1 + a_{32}x_2)\mathbf{v}_3.\end{aligned}$$

Mas $T(\mathbf{w}) = y_1\mathbf{v}_1 + y_2\mathbf{v}_2 + y_3\mathbf{v}_3$ e como as coordenadas com respeito a uma base são únicas segue que

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \end{cases}, \text{ que é equivalente a, } \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Isto é, $[T(\mathbf{w})]_\beta = [T]^\alpha_\beta [\mathbf{w}]_\alpha$. □

Exemplo 7.5
Considere o caso especial $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o operador identidade, isto é, $I(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Considere $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma base do domínio de I e uma base $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ do contradomínio de I. Vamos determinar a matriz deste operador com respeito à estas bases. Para isso calcule:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 = a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{u}_n; \\ I(\mathbf{v}_2) &= \mathbf{v}_2 = a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{u}_n; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ I(\mathbf{v}_j) &= \mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nj}\mathbf{u}_n; \\ &\cdots\cdots\cdots \\ I(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{v}_n = a_{1n}\mathbf{u}_1 + a_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{u}_n. \end{aligned}$$

Observe que a matriz de I com respeito às duas bases é obtida por pegar as coordenadas do vetor $\mathbf{v}_j$, em termos da base β e colocar na j-ésima coluna da matriz. Mas isso é exatamente a forma de calcular a matriz de mudança de coordenada. Portanto,

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

E por isso denotar a matriz de mudança de coordenadas da base α para a base β por $[I]^\alpha_\beta$ não é nada de especial, é apenas a matriz do operador I com respeito às bases α e β.

Teorema 7.6
Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ duas aplicações lineares e α, β e γ bases de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^k$, respectivamente. Então, a composta de $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, é linear e

$$[S \circ T]^\alpha_\gamma = [S]^\beta_\gamma \cdot [T]^\alpha_\beta.$$

A demonstração desse resultado é fácil, mas muito trabalhosa, veja o exercício R7.2.

Observação 7.7
Você há de convir que seria muito mais natural definir a multiplicação entre matrizes como a simples multiplicação entre as entradas correspondentes e somente

para matrizes de mesmo tamanho, similarmente ao que ocorre com a operação de soma de matrizes. Definimos dessa forma para tornar o Teorema 7.6 verdadeiro.

O Teorema 7.6 nos diz que a multiplicação entre matrizes é compatível com a composição de funções lineares.

Corolário 7.8
Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear invertível e se α e β são bases do domínio e do contradomínio, respectivamente. Logo, $T^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ também é um operador linear e

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}.$$

Demonstração: Segue das seguintes duas observações. Em primeiro lugar, se $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é o operador identidade, e γ é uma base de qualquer de $\mathbb{R}^n$, então, a0 calcularmos $[I]^{\gamma}_{\gamma}$ obtemos sempre a matriz identidade, qualquer que seja γ escolhida. A segunda observação é a seguinte

$$[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha}[T]^{\alpha}_{\beta} = [T^{-1} \circ T]^{\alpha}_{\alpha} = [I]^{\alpha}_{\alpha}.$$

Portanto, $[T^{-1}]^{\beta}_{\alpha} = ([T]^{\alpha}_{\beta})^{-1}$. □

Segue deste corolário que se $[I]^{\beta}_{\alpha}$ é a matriz de mudança de coordenadas da base β para a base α, então $[I]^{\alpha}_{\beta} = ([I]^{\beta}_{\alpha})^{-1}$.

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear e, α e α' são bases de $\mathbb{R}^n$ e β e β' são bases de $\mathbb{R}^m$, então podemos associar as seguintes matrizes $[T]^{\alpha}_{\beta}$ e $[T]^{\alpha'}_{\beta'}$ à aplicação linear T.

Como podemos relacionar estas matrizes? Como elas provêm da mesma transformação linear, devem ter a mesma ação sobre os vetores de $\mathbb{R}^n$, o que deve sofrer alteração, são as coordenadas desses vetores.

Observe que para avaliar o vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ em T, por usar a matriz $[T]^{\alpha}_{\beta}$, precisamos obter as coordenadas de $\mathbf{w}$ na base α, digamos ainda que conheçamos as coordenadas na base α', isto é, $[\mathbf{w}]_{\alpha'}$. Portanto, para obtermos as coordenadas na base α precisamos da matriz $[I]^{\alpha'}_{\alpha}$ e, por um lado,

$$[T(\mathbf{w})]_{\beta'} = [T]^{\alpha'}_{\beta'}[\mathbf{w}]_{\alpha'}$$

e por outro,

$$[T(\mathbf{w})]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}[I]^{\alpha'}_{\alpha}[\mathbf{w}]_{\alpha'}.$$

Se ainda conhecermos a matriz $[I]^{\beta'}_{\beta}$, então temos a igualdade

$$[I]^{\beta'}_{\beta}[T]^{\alpha'}_{\beta'}[\mathbf{w}]_{\alpha'} = [I]^{\beta'}_{\beta}[T(\mathbf{w})]_{\beta'} = [T(\mathbf{w})]_{\beta} = [T]^{\alpha}_{\beta}[I]^{\alpha'}_{\alpha}[\mathbf{w}]_{\alpha'}.$$

Como isso vale para todo vetor $\mathbf{w}$, logo essa igualdade é válida entre as matrizes, isto é,

$$[I]^{\beta'}_{\beta}[T]^{\alpha'}_{\beta'} = [T]^{\alpha}_{\beta}[I]^{\alpha'}_{\alpha}.$$

Exemplo 7.9
Considere a mesma aplicação $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida no exemplo 7.3 e α' a base canônica do $\mathbb{R}^3$ e β' a base canônica do $\mathbb{R}^2$, então

$$[T]_{\beta'}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}.$$

Vamos conectar com a matriz

$$[T]_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} -3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & -3/2 & 5/2 \end{bmatrix},$$

calculada no exemplo 7.3 com essa matriz, para isso precisamos das matrizes $[I]_{\beta}^{\beta'}$, que foi calculada no exemplo 7.1, e também $[I]_{\alpha}^{\alpha'}$. Executando as contas obtemos:

$$[I]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \text{ e } [I]_{\alpha}^{\alpha'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Vale a seguinte igualdade (verifique):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix} &= [I]_{\beta}^{\beta'}[T]_{\beta'}^{\alpha'} \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & -2 & -3/2 \\ 5/2 & -1 & -5/2 \end{bmatrix} = [T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & -3/2 & 5/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se na equação $[I]_{\beta}^{\beta'}[T]_{\beta'}^{\alpha'} = [T]_{\beta}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ tivermos $m = n$ e $\alpha = \beta$ e $\alpha' = \beta'$, a igualdade aqui demonstrada se torna $[I]_{\alpha}^{\alpha'}[T]_{\alpha'}^{\alpha'} = [T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ e, lembrando que $([I]_{\alpha}^{\alpha'})^{-1} = [I]_{\alpha'}^{\alpha}$ se multiplicarmos a igualdade por $([I]_{\alpha}^{\alpha'})^{-1}$ obtemos:

$$[T]_{\alpha'}^{\alpha'} = [I]_{\alpha'}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}.$$

Observação 7.10
Continuando com a notação anterior, observe que ao fazemos $[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ obteremos $[T]_{\alpha}^{\alpha'}$. Portanto, a matriz $[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ toma a matriz de T, na base α, α e retorna a matriz de T com respeito às bases α', α, podemos dizer que a matriz $[I]_{\alpha}^{\alpha'}$ é a matriz de mudança da base α para a base α'. Isso justifica o nome dado anteriormente na observação 7.2.

Definição 7.11
Sejam A e B duas matrizes quadradas. Dizemos que A e B são matrizes semelhantes e denotamos por $A \cong B$ se existe uma matriz P invertível, tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

Disso temos que todas as matrizes associadas a um operador são semelhantes.

Exercícios resolvidos

R7.1. Sejam $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ e $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ as bases de um espaço vetorial V, e suponha que $\mathbf{v}_1 = 6\mathbf{u}_1 - 2\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{v}_2 = 9\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2$.

a) Determine a matriz de mudança de coordenadas $[I]^\alpha_\beta$;

b) Determine, usando o item a), $[\mathbf{w}]_\beta$ para $\mathbf{w} = 3\mathbf{u}_1 - 4\mathbf{u}_2$.

Solução: a) Da expressão de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ como combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ obtemos $[I]^\beta_\alpha = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$. Como $\left([I]^\beta_\alpha\right)^{-1} = [I]^\alpha_\beta$ segue que

$$[I]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 2/3 & 3/2 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) Como sabemos que as coordenadas de $\mathbf{w}$, com respeito à base α, para encontrarmos as coordenadas de $\mathbf{w}$, com respeito à base β, basta calcularmos:

$$[\mathbf{w}]_\beta = [I]^\alpha_\beta [\mathbf{w}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2/3 & 3/2 \\ -1/3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

□

R7.2. Prove o teorema 7.6. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ duas aplicações lineares e α, β e γ bases de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^k$, respectivamente. Então, a composta de $S \circ T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ é linear e

$$[S \circ T]^\alpha_\gamma = [S]^\beta_\gamma \cdot [T]^\alpha_\gamma.$$

Solução: Suponha que $\alpha = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\} \subset \mathbb{R}^m$ e $\gamma = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\} \subset \mathbb{R}^k$ sejam bases de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^k$, respectivamente. Podemos determinar escalares a_{ij} e b_{jl}, satisfazendo:

$$T(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{v}_j \text{ e } S(\mathbf{v}_j) = \sum_{l=1}^k b_{jl}\mathbf{w}_l, \text{ com } i = 1, \dots, n \text{ e } j = 1, \dots, m.$$

E isto determina as matrizes $[S]^\beta_\gamma = [b_{jl}]_{k\times m}$ e $[T]^\alpha_\beta = [a_{ij}]_{m\times n}$. Agora, observe o seguinte:

$$\begin{aligned}
(S \circ T)(\mathbf{u}_i) = S(T(\mathbf{u}_i)) &= S\left(\sum_{j=1}^m a_{ij}\mathbf{v}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ij} S(\mathbf{v}_j) \\
&= \sum_{j=1}^m a_{ij} \sum_{l=1}^k b_{jl}\mathbf{w}_l = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jl}\right)\mathbf{w}_l.
\end{aligned}$$

O escalar $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jl}$ é a entrada il da matriz da transformação linear $S \circ T$ com respeito às bases α e γ. Por outro lado, a entrada na posição il da matriz obtida por multiplicar $[b_{jl}]_{k\times m}$ por $[a_{ij}]_{m\times n}$ é o escalar $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}b_{jl}$. De onde obtemos a igualdade desejada. □

R7.3. Considere o operador linear F de $\mathbb{R}^2$ definido por $F\left(\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 5x-y \\ 2x+y \end{smallmatrix}\right]$ e as bases de $\mathbb{R}^2$ a seguir:

$$\alpha = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\} \text{ e } \beta = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 4 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]\right\}.$$

a) Encontre a matriz P de mudança de coordenada da base α para a base β e a matriz Q de mudança de coordenada da base β para a base α.

b) Encontre a matriz A que representa F na base α.

c) Encontre a matriz B que representa F na base β.

Solução: a) Vamos começar determinando a matriz $Q = [I]_{\alpha}^{\beta}$, a qual é muito fácil de determinar, visto que precisamos escrever os vetores da base β como combinação linear dos vetores da base α que é a base canônica, além disso, $P = Q^{-1}$, então:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \text{ logo } P = Q^{-1} = Q = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

b) A matriz $A = [T]_{\alpha}^{\alpha}$ é facilmente obtida da expressão, basta fazer $\left[\begin{smallmatrix} 5x-y \\ 2x+y \end{smallmatrix}\right] = x\left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + y\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e daí

$$A = [T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) Como sabemos que $[T]_{\beta}^{\beta} = [I]_{\beta}^{\alpha}[T]_{\alpha}^{\alpha}[I]_{\alpha}^{\beta}$, logo:

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

R7.4. Considere $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear, tal que $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], T\left(\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right) = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

a) Mostre que $\beta = \left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$ é uma base do $\mathbb{R}^3$.

b) Determine $[v]_{\beta}$ se $v = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$.

c) Determine $T\left(\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$.

Solução: a) Vamos montar uma matriz A, por colocar os vetores da base β nas colunas e então

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -2 & 0\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} = 2 \neq 0,$$

E isso garante que estes vetores são linearmente independentes, uma vez que, se os vetores não fossem LI, então eles estariam em um plano, nesse caso o volume do paralelepípedo determinado por esses vetores seria 0, o que não ocorre.

b) Se α é a base canônica do $\mathbb{R}^3$ precisamos encontrar a matriz $[I]^{\alpha}_{\beta}$, mas calcular a matriz $[I]^{\beta}_{\alpha} = A$ obtida acima, usando a adjunta podemos obter o inverso desta matriz que é

$$B = [I]^{\alpha}_{\beta} = \begin{bmatrix}3/2 & -1 & -1/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ -1/2 & 1 & 1/2\end{bmatrix}.$$

Portanto, calcular $[v]_{\beta} = [I]^{\alpha}_{\beta}[v]_{\alpha} = \begin{bmatrix}3/2 & -1 & -1/2\\ 1/2 & 0 & -1/2\\ -1/2 & 1 & 1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.$

c) Observe que

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 0\end{bmatrix}\right) &= T\left(4\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\right)\\ &= 4\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 1\\ -2\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

□

Exercícios propostos

P7.1. Considere as bases $\alpha = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$, $\beta = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\4\end{smallmatrix}\right]\right\}$ e $\gamma = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}2\\3\end{smallmatrix}\right]\right\}$ do $\mathbb{R}^2$. Encontre as matrizes de mudança de coordenadas nos seguintes casos: a) $[I]^{\gamma}_{\beta}$; b) $[I]^{\beta}_{\gamma}$; c) $[I]^{\beta}_{\alpha}$ e d) $[I]^{\alpha}_{\gamma}$.

P7.2. Suponha que os eixos x e y do plano $\mathbb{R}^2$ tenham sido girados 30° no sentido anti-horário para formar novos eixos x' e y' do plano. Encontre:

a) Os vetores unitários na direção dos novos eixos x' e y';

b) A matriz P de mudança de coordenadas da base antiga para a base nova;

c) As novas coordenadas dos pontos $\left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right]$ e $\left[\begin{smallmatrix}3\\5\end{smallmatrix}\right]$;

d) Por fim, verifique que $PP^t = I$.

P7.3. a) Ache a expressão da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

b) Encontre $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

P7.4. Seja G um operador do $\mathbb{R}^2$ e α a base a seguir:

$$G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-7y \\ 4x-3y \end{bmatrix} \text{ e } \alpha = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$$

a) Encontre a matriz $[G]_\alpha^\alpha$ de G, com respeito à α.

b) Verifique que $[G]_\alpha^\alpha [\mathbf{w}]_\alpha = [G(\mathbf{w})]_\alpha$ para o vetor $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$.

P7.5. Para cada um dos operadores lineares T do $\mathbb{R}^2$ a seguir, encontre a matriz A, que representa T (em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$).

a) T definida por $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}$.

b) T é a rotação no sentido anti-horário em torno da origem de $\pi/2$.

c) T é a reflexão de $\mathbb{R}^2$ em torno da reta $y = -x$.

P7.6. Mostre que a relação de semelhança entre matrizes é uma relação de equivalência, isto é, a relação é a seguinte: Dizemos que as matrizes A e B são matrizes semelhantes (e escrevemos $A \cong B$) se existe uma matriz P invertível, tal que $B = P^{-1}AP$. Mostre então que: a) $A \cong A$; b) Se $A \cong B$ então $B \cong A$ e c) Se $A \cong B$ e $B \cong C$ então $A \cong C$.