Capítulo 2

Vetores e Combinações Lineares

2.0 Introdução

Neste capítulo, vamos estabelecer as “pedras fundamentais” da álgebra linear. Definiremos vetores, as operações de soma de vetores e produto por escalar e o conceito importantíssimo de *combinação linear*. Em certo sentido, podemos dizer que a teoria de álgebra linear começa aqui. Usaremos a teoria do capítulo anterior ocasionalmente, mas, neste capítulo, sistemas lineares deixarão de ter papel central.

A última seção deste capítulo contém uma discussão interessante, que será generalizada no capítulo 4. Dado um “espaço ambiente”, caracterizamos os subconjuntos de vetores que são capazes de “gerar”, por combinações lineares, todos os outros vetores do espaço. No decorrer do capítulo, o significado disso ficará mais claro, e a importância desses “conjuntos geradores” ficará evidente ao longo do curso.

2.1 Vetores de $\mathbb{R}^n$

Um **vetor de n coordenadas** é uma lista ordenada de n números, que, usualmente, escrevemos em uma coluna. As listas

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1/5 \\ \sqrt{17} \end{bmatrix},$$

por exemplo, são vetores de duas e de três coordenadas, respectivamente. Pode-se pensar em um vetor como uma matriz de apenas uma coluna, com a ressalva de que é mais usual chamar os números em um vetor de *componentes* ou *coordenadas* (ao invés de *entradas* ou *elementos*, que é como chamamos os números em uma matriz, como vimos no capítulo 1).

Este texto tratará quase exclusivamente de vetores cujas coordenadas são *números reais*, mas todos os conceitos e resultados se generalizam para vetores de coordenadas complexas.[1] Vetores e matrizes de números complexos têm grande importância em algumas áreas da física e da engenharia.

2.1.1 Notação

Números reais (ou complexos) em álgebra linear são, usualmente, chamados de **escalares**. O conjunto dos números reais é denotado por $\mathbb{R}$, e o dos complexos por $\mathbb{C}$. Quando dizemos que "c é um escalar", nossa intenção, geralmente, é enfatizar que c é um *número*, e não um vetor.

O conjunto de todos os vetores de n componentes reais é denotado por $\mathbb{R}^n$. O "$\mathbb{R}$" indica que as componentes são números reais, e o "n", o número de componentes. Em contrapartida, o conjunto dos vetores de n componentes *complexas* é denotado por $\mathbb{C}^n$.

O vetor $\mathbf{u}$ dado acima, por exemplo, é um elemento de $\mathbb{R}^2$, enquanto $\mathbf{v}$ é um elemento de $\mathbb{R}^3$. Em símbolos, escrevemos $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ (lê-se "$\mathbf{u}$ pertence a erre-dois" e "$\mathbf{v}$ pertence a erre-três").

Neste texto, vetores serão denotados usando letras em negrito, como acima com $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Escalares geralmente serão representados por letras *minúsculas* em tipo itálico ou letras gregas. Matrizes serão representadas por letras *maiúsculas* e, também, em tipo itálico. Escreveremos, por exemplo,

$$c = 3, \qquad \alpha = -5, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

As componentes x_1 e x_2 do vetor $\mathbf{x}$ são indicadas em itálico, pois são escalares, bem como os números c e α.

Chamamos o vetor de $\mathbb{R}^n$ cujas componentes são todas iguais a zero de **vetor zero**, ou de **vetor nulo**, e denotamo-lo por $\mathbf{0}_n$ (com o algarismo 0 em negrito). Assim, $\mathbf{0}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{0}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, por exemplo. Quando não houver ambiguidade, podemos denotar o vetor zero de $\mathbb{R}^n$ por $\mathbf{0}$, simplesmente.[2]

A matriz de tamanho $n \times m$ cujas entradas são todas iguais a zero, chamada de **matriz zero** ou de **matriz nula**, será denotada por $\mathit{0}_{n\times m}$ (com o algarismo 0 em itálico), ou, simplesmente, por $\mathit{0}$, quando não houver ambiguidade quanto ao seu tamanho.

2.1.2 Dimensão de $\mathbb{R}^n$

A noção de "dimensão" é bastante usada fora do contexto matemático. Por exemplo, diversos filmes hollywoodianos, atualmente, são filmados em "3D" ("três dimensões"), e as diferenças entre exibições 2D e 3D são evidentes. Outro exemplo são as "imagens tridimensionais" do interior do corpo humano, obtidas via tomografia computadorizada ou ressonância magnética, que permitiram grandes

[1] Mas cuidado, porque, em alguns pontos da teoria, a generalização ao caso complexo requer atenção a certos detalhes. Alertaremos os leitores quando chegarmos a esses pontos.

[2] Mas cuidado para não fazer confusão, pois o vetor $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^n$ *não* é a mesma coisa que o vetor $\mathbf{0}$ de $\mathbb{R}^m$, se $n \neq m$! O primeiro é uma lista de n zeros; o segundo, de m zeros.

avanços em medicina diagnóstica.[3] Em filmes de ficção científica que envolvem viagens no tempo, já é clichê ouvir algum personagem (geralmente um estereótipo de cientista) dizer que vivemos um em universo de “quatro dimensões”: três dimensões espaciais e uma dimensão temporal.

Gostaríamos de definir precisamente o conceito de *dimensão*, no contexto matemático. Isso, porém, só poderá ser feito na seção 4.3, pois ainda não dispomos da teoria necessária. Por enquanto, *convencionamos dizer que a dimensão de* $\mathbb{R}^n$ *é o número inteiro não-negativo* n. Assim, por exemplo, a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, a dimensão de $\mathbb{R}^5$ é 5, e a dimensão de $\mathbb{R}^{1017}$ é 1017.

Veremos que esta convenção será coerente com a definição de dimensão, mais geral e rigorosa, da seção 4.3. Introduzimos a terminologia antecipadamente para podermos usá-la e para nos habituarmos a ela.

A convenção acima também condiz com nossa percepção intuitiva, coloquial, de dimensão. Como recordaremos na próxima subseção, o conjunto $\mathbb{R}^2$ pode ser representado geometricamente por um plano, que é um objeto que consideramos “bidimensional”. Já o $\mathbb{R}^3$ pode ser representado pelo espaço “tridimensional”.

Cuidado!
Enfatizamos que o conceito de dimensão é mais geral do que o apresentado acima, e será visto somente na seção 4.3. Não pense que, por ler meramente esta pequena subseção, você já domina o conceito! (Esse aviso pode ser útil para quem estiver estudando de última hora para uma prova...)

2.1.3 Representação geométrica

O leitor já deve estar familiarizado com o sistema de coordenadas cartesianas e com a representação de vetores de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$ como “setas” no plano ou no espaço, respectivamente. Sendo assim, não desenvolveremos essas ideias em detalhe neste texto. Teceremos apenas alguns comentários e apresentaremos exemplos, a título de recapitulação.

Na figura 2.1(a), o conjunto $\mathbb{R}^2$ é representado geometricamente por um *plano coordenado*. O sistema de coordenadas cartesianas nesse plano é determinado pelos eixos x_1 e x_2 indicados. Cada vetor $\left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]$ de $\mathbb{R}^2$ corresponde a um ponto de coordenadas v_1 e v_2 com relação aos eixos horizontal e vertical, respectivamente. É mais intuitivo e usual, no entanto, representar vetores como *setas* no plano, ao invés de pontos. Representamos, na figura 2.1(a), por exemplo, os vetores $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. Observe que os vetores são sempre representados por setas que partem da *origem* do sistema de coordenadas, ou seja, do ponto cujas coordenadas são iguais a zero. O vetor zero $\mathbf{0}$ é representado nessa figura simplesmente como um ponto na origem (já que não é possível desenhar uma seta retilínea que começa e termina no mesmo ponto...).

A representação geométrica de $\mathbb{R}^3$ é feita de forma análoga, mas, nesse caso, usa-se um sistema de coordenadas cartesianas em um espaço *tridimensional*. Na

[3] A construção de “imagens 3D” a partir de “fatias 2D” nesses exames, a propósito, envolve métodos matemáticos sofisticados. E, na base desses métodos, há bastante álgebra linear.

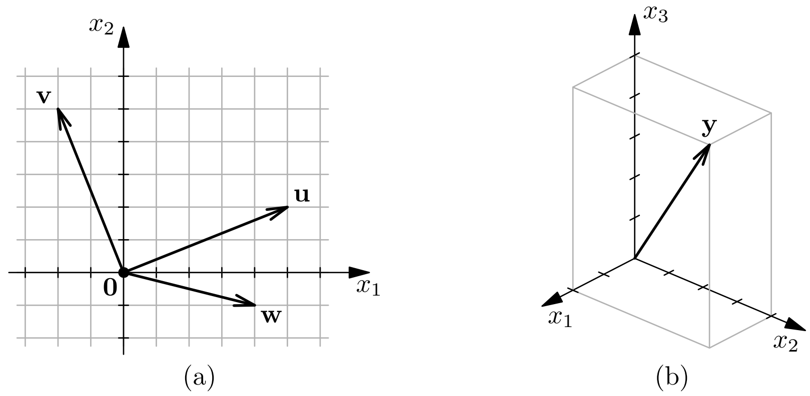

Figura 2.1: Representação geométrica de vetores em $\mathbb{R}^2$ (a) e em $\mathbb{R}^3$ (b).

figura 2.1(b), esse sistema é dado pelos três eixos indicados, e representamos geometricamente o vetor $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Em resumo, um vetor pode ser pensado como uma "seta partindo da origem" dentro de um "espaço ambiente" (um plano, no caso de $\mathbb{R}^2$; e um espaço tridimensional, no caso de $\mathbb{R}^3$). A representação é tão natural que, às vezes, dizemos coisas como "esta seta *é* o vetor $\mathbf{x}$", ao invés de "esta seta *representa* o vetor $\mathbf{x}$".

Observação
Surpreendentemente, a ideia da representação geométrica de vetores de $\mathbb{R}^n$ é útil mesmo quando estamos lidando com espaços de dimensão mais alta, isto é, quando n é maior do que três. Um vetor de $\mathbb{R}^7$, por exemplo, pode ser pensado como uma seta partindo da origem dentro de um "espaço ambiente de dimensão sete". Ninguém é capaz de visualizar diretamente um espaço de dimensão sete, então, isso pode parecer muito abstrato ou "viajante". No entanto, a imagem de vetores como "setas" pode ser elucidativa mesmo nesses casos. Logo adiante, na subseção 2.1.5, veremos um exemplo disso. Podemos conceber que os vetores representados nas figuras 2.2 e 2.3 pertençam a um espaço maior, e não apenas ao plano da página.

2.1.4 Igualdade entre vetores

Dizemos que dois vetores são **iguais** quando suas componentes correspondentes são todas iguais. Assim, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vetores de $\mathbb{R}^n$, então

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} \quad \text{é uma forma sucinta de escrever} \quad \begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 \\ \quad \vdots \\ u_n = v_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde u_1, u_2, ... , u_n e v_1, v_2, ... , v_n são as componentes dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente. Os vetores $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ *não* são iguais (como dissemos, um vetor é uma lista *ordenada*).

Para que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam *diferentes*, basta que *uma* das componentes de $\mathbf{u}$ seja diferente da componente correspondente de $\mathbf{v}$. Em outras palavras,

$\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ é uma forma resumida de dizer que *pelo menos uma* das igualdades à direita em (2.1) *não* vale. Mas isso não significa dizer que *todas* as componentes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam diferentes.

Observe que a igualdade à esquerda, em (2.1), é uma *igualdade vetorial* (entre vetores), ao passo que as igualdades à direita são igualdades entre escalares (a que já estamos habituados).

2.1.5 Soma de vetores e produto de vetor por escalar

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$, definimos a **soma** $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ como o vetor obtido por meio da soma das componentes correspondentes de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é,

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

onde u_1, u_2, ... , u_n e v_1, v_2, ... , v_n são, mais uma vez, as componentes dos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, respectivamente. Enfatizamos que a soma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é um elemento de $\mathbb{R}^n$, ou seja, do *mesmo* conjunto onde residem $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Não faz sentido somar um vetor de $\mathbb{R}^n$ com um vetor de $\mathbb{R}^m$ quando $n \neq m$ (esta operação não é definida).

Por exemplo, se

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad \mathbf{u}+\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ (-3)+3 \\ 0+(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Todos os vetores acima são elementos de $\mathbb{R}^3$.

A soma de dois vetores é representada, geometricamente, pela "regra do paralelogramo", ilustrada na figura 2.2. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são representados pelas setas indicadas, que formam dois lados de um paralelogramo, então o vetor-soma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ é representado pela seta que corre ao longo da diagonal do paralelogramo. Lembre-se de que todos os vetores são representados por setas que partem da origem $\mathbf{0}$.

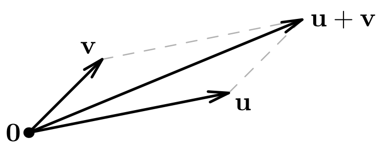

Figura 2.2: A "regra do paralelogramo" para a soma de dois vetores.

Dados um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ e um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, definimos o **produto** de $\mathbf{v}$ por α, denotado por $\alpha\mathbf{v}$, como o vetor obtido multiplicando cada componente de $\mathbf{v}$ por α, ou seja,

$$\alpha\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, se

$$\alpha = -4 \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \text{então} \quad \alpha\mathbf{v} = (-4)\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -12 \\ 20 \end{bmatrix}.$$

Geometricamente, o produto por α produz um "esticamento" de um vetor (se $|\alpha| > 1$) ou uma "contração" (se $|\alpha| < 1$). Se α é negativo, o produto $\alpha\mathbf{v}$ produz, ainda, uma "inversão no sentido" do vetor $\mathbf{v}$. A figura 2.3 ilustra um vetor $\mathbf{v}$ e seus múltiplos $3\mathbf{v}$, $\frac{1}{2}\mathbf{v}$ e $(-1)\mathbf{v}$. Podemos escrever $-\mathbf{v}$ ao invés de $(-1)\mathbf{v}$.

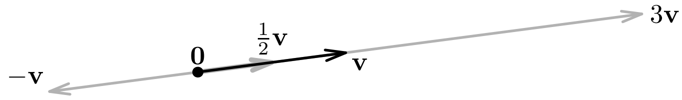

Figura 2.3: Representação geométrica do produto de um vetor por escalares.

As operações de soma de vetores e multiplicação por escalar podem ser combinadas de várias formas em uma expressão. Por exemplo, se $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{y} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{z} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, então

$$\begin{aligned} &2\big(3\mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}\big) + 4\mathbf{z} = 2\left(3\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + 4\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= 2\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -8 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Dados dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, o vetor $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ é obtido, como indicado, multiplicando $\mathbf{v}$ pelo escalar -1 e somando o resultado a $\mathbf{u}$. Chamamos esse vetor de *diferença* entre os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e escrevemos $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ ao invés de $\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$ para simplificar a notação.

As operações que definimos acima têm boas propriedades algébricas. Traduzindo do "matematiquês": é fácil fazer contas e simplificar expressões envolvendo essas operações, pois valem diversas propriedades "naturais" (ou "intuitivas").

Proposição 2.1 (Propriedades algébricas das operações vetoriais)
Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *e quaisquer escalares* α *e* β*, valem as propriedades abaixo.*

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
(b) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
(c) $\mathbf{u} + \mathbf{0}_n = \mathbf{u}$
(d) $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{0}$
(e) $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$
(f) $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$
(g) $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$
(h) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
(i) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}_n$
(j) $\alpha\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n$

É fácil verificar as propriedades acima, e não perderemos muito tempo provando cada uma. Vejamos apenas a propriedade distributiva (e):

$$
\begin{aligned}
\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= \alpha \begin{bmatrix} u_1+v_1 \\ u_2+v_2 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{bmatrix} && \text{pela definição de soma de vetores,} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha(u_1+v_1) \\ \alpha(u_2+v_2) \\ \vdots \\ \alpha(u_n+v_n) \end{bmatrix} && \text{pela definição de produto por escalar,} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha u_1+\alpha v_1 \\ \alpha u_2+\alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n+\alpha v_n \end{bmatrix} && \text{pela propriedade distributiva dos números reais (aplicada em cada coordenada),} \\
&= \begin{bmatrix} \alpha u_1 \\ \alpha u_2 \\ \vdots \\ \alpha u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix} && \text{pela definição de soma de vetores,} \\
&= \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v} && \text{pela definição de produto por escalar.}
\end{aligned}
$$

Você pode verificar as outras propriedades por conta própria. A estratégia é sempre a mesma: escrever os vetores coordenada por coordenada, e usar as propriedades que você já conhece para números reais.

Em vista da propriedade (b), podemos escrever a soma $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}$ simplesmente como $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}$, uma vez que a ordem em que somamos não importa. Do mesmo modo, uma soma da forma $\big((\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}\big)+\mathbf{x}$ pode ser reescrita como $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{x}$. Observações como essa simplificam muito os cálculos e a notação. A expressão $2\big(3\mathbf{x}+(-1)\mathbf{y}\big)+4\mathbf{z}$ em (2.2), por exemplo, pode ser reescrita como $6\mathbf{x}-2\mathbf{y}+4\mathbf{z}$ (usamos as propriedades (b), (e) e (g) para fazer esta simplificação).

As operações de soma de vetores e produto por escalar são as "pedras fundamentais" da álgebra linear. Todos os demais conceitos serão definidos, direta ou indiretamente, em termos dessas operações. Um exemplo é o conceito de *combinação linear*, que será o tema da próxima seção.

Observação
Por dispor das operações de soma, de produto por escalar, e das propriedades algébricas listadas acima, o conjunto $\mathbb{R}^n$ é um exemplo de *espaço vetorial*. Não definiremos esse conceito em toda sua generalidade, pois o nível de abstração exigido excederia os limites propostos por este texto. Recomendamos o livro de Paul Halmos [1] aos leitores interessados em um tratamento mais geral (e bem mais avançado!).

2.2 Combinações lineares

Nesta seção, faremos uma breve introdução a um dos conceitos cruciais de álgebra linear. Esse assunto será aprofundado na seção 2.5.

Definição 2.2
Dados os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ de $\mathbb{R}^n$ e os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_m$, dizemos que o vetor

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

é a **combinação linear** de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ com **pesos** (ou coeficientes) $c_1, \ldots, c_m$.

Por exemplo, se $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ são vetores de $\mathbb{R}^7$ (não interessa quais sejam suas coordenadas), então

$$6\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + 4\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 = 1\mathbf{a}_1 + (-1)\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 \quad \text{e} \quad 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}_7$$

são combinações lineares de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ (lembre que $\mathbf{0}_7$ é o vetor zero do $\mathbb{R}^7$). A equação (2.2) da seção anterior diz que o vetor $\left[\begin{smallmatrix}14\\-8\end{smallmatrix}\right]$ é a combinação linear dos vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ com pesos 6, -2 e 4, respectivamente (verifique).

Dizer que um vetor $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ é uma combinação linear de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ é o mesmo que dizer que $\mathbf{b}$ é **gerado** pelos vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$. Subentende-se que seja gerado *por uma combinação linear* desses vetores. Na seção 2.5, veremos ainda outras maneiras de dizer isso,[4] e abordaremos o importante problema de determinar quando é que um vetor é uma combinação linear de outros vetores dados.

Exemplo 2.3
Em uma sessão de gravação musical profissional, os elementos de uma música são gravados em “faixas” separadas (vocal, baixo, percussão e piano, por exemplo). A faixa musical completa é obtida pelo processo de “mixagem” (combinação) das faixas individuais. Essa “mixagem”, em sua modalidade mais simples, nada mais é do que uma combinação linear.

Vejamos um exemplo concreto. Na figura 2.4, exibimos quatro faixas de uma gravação da música “Rock and Roll”, do conjunto *Led Zeppelin*: baixo elétrico, bateria, guitarra e vocal.[5] Representamos em cada gráfico, na realidade, um segmento de apenas 40 milissegundos extraído da faixa correspondente.

Estes sinais de áudio[6] podem ser representados por vetores de $\mathbb{R}^n$. De fato, cada faixa da figura 2.4 foi gravada digitalmente a uma taxa de 44.100 amostras por segundo (44,1 kHz). Cada trecho de 40 milissegundos contém, então, $44.100 \times 0{,}040 = 1.764$ amostras. Os sinais ilustrados na figura, portanto, podem ser representados por vetores de $\mathbb{R}^{1764}$, que vamos denotar por $\mathbf{b}$ (**b**aixo), $\mathbf{p}$ (bateria, ou **p**ercussão), $\mathbf{g}$ (**g**uitarra) e $\mathbf{v}$ (**v**ocal).

[4] Essa, talvez, seja uma das principais causas de dificuldade na aprendizagem de álgebra linear: em várias instâncias, existem muitas formas diferentes de dizer a mesma coisa!

[5] Infelizmente, não conseguimos as faixas da gravação original. As gravações apresentadas aqui foram feitas pela “banda-cover” *Boot Led Zeppelin*. (Um trocadilho com “bootleg”, que descreve um artigo pirateado. . .)

[6] O significado de “sinal”, nesse contexto, será dado logo a seguir.

htbp

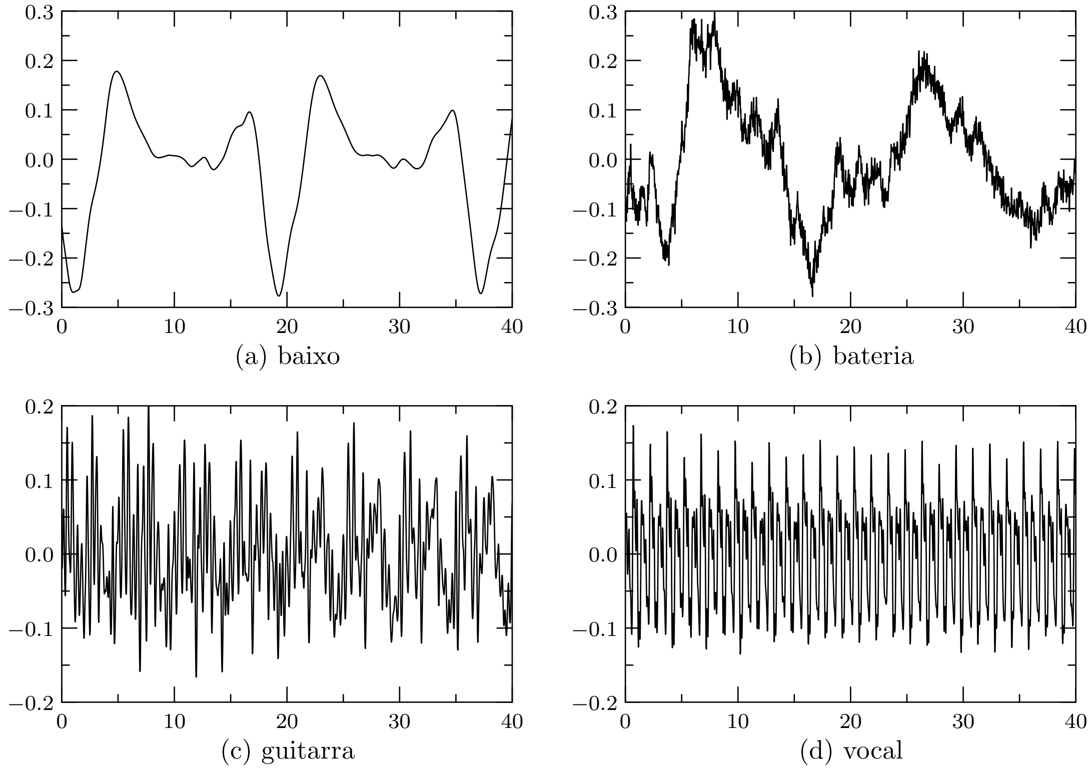

Figura 2.4: Faixas de uma gravação musical. Em cada gráfico, o eixo horizontal representa o tempo em milissegundos.

Podemos obter uma faixa musical completa "mixando" os vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{v}$ por simples combinação linear: $c_1\mathbf{b} + c_2\mathbf{p} + c_3\mathbf{g} + c_4\mathbf{v}$. Os pesos c_1 a c_4, neste exemplo, representam os "volumes" de cada faixa. A arte de ajustar tais pesos, de forma que os volumes relativos resultem em uma faixa musical harmoniosa, pertence ao campo da engenharia de som.

Na figura 2.5, exibimos duas combinações lineares (duas "mixagens") das faixas individuais: (a) $\frac{3}{4}\mathbf{b} + \mathbf{p} + \mathbf{g} + \frac{1}{2}\mathbf{v}$, e (b) $\mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{2}{5}\mathbf{g} + \frac{1}{5}\mathbf{v}$. Comparando,

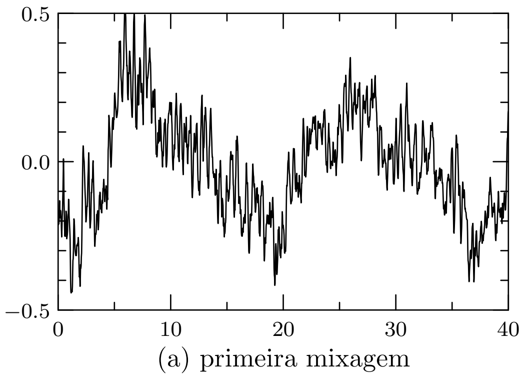

Figura 2.5: Duas "mixagens" das faixas da figura anterior.

atentamente, os gráficos da figura 2.5 com aqueles da figura 2.4, é possível ver que o "peso" (volume) relativo do baixo $\mathbf{b}$ é, realmente, maior na segunda mixagem do que na primeira. Por outro lado, componentes de alta frequência, características da guitarra $\mathbf{g}$ e do vocal $\mathbf{v}$, são maiores na primeira mixagem.

Admitimos que as "músicas" representadas na figura 2.5 são curtíssimas: elas têm duração de apenas 40 milissegundos! Uma faixa de 4 minutos gravada à taxa de 44,1 kHz teria $44.100 \times 4 \times 60 = 10.584.000$ amostras, isto é, teria de ser representada por um vetor de $\mathbb{R}^{10.584.000}$.

Observação
A álgebra linear é utilizada intensivamente na área de *processamento de sinais*, que lida com a representação e o tratamento matemático de áudio, de imagens, de vídeo e, genericamente, de "mensagens" ou medições de qualquer natureza. Na terminologia dessa área, um "sinal" é uma representação elétrica ou matemática de uma mensagem. Os vetores $\mathbf{b}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{g}$ e $\mathbf{v}$ do exemplo anterior são, portanto, sinais de áudio, bem como qualquer uma de suas combinações lineares.

2.3 O produto de matriz por vetor

Combinações lineares são tão importantes, e serão usadas com tanta frequência, que merecem uma notação mais sucinta do que aquela empregada em (2.3). O *produto de uma matriz por um vetor*, que definiremos abaixo, pode ser usado para esse fim. Mais adiante, veremos outras aplicações e interpretações importantes para o produto matriz-vetor, e ficará claro que ele é mais do que uma mera conveniência de notação.

É conveniente introduzir primeiro uma notação para matrizes que destaque suas colunas. Uma matriz $n \times m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

pode ser escrita "por colunas" como

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \tag{2.5}$$

onde $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ são os vetores de $\mathbb{R}^n$ dados por

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

É usual chamar os $\mathbf{a}_j$ de "vetores-coluna da matriz A". Compare (2.4) com (2.6) e note que os $\mathbf{a}_j$ são, de fato, as colunas de A.

A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \tag{2.7}$$

por exemplo, pode ser escrita como $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{bmatrix}$, onde

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

são seus vetores-coluna.

Agora podemos passar ao objetivo principal desta seção.

Definição 2.4
Seja A uma matriz $n \times m$ com colunas dadas por $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ e seja $\mathbf{x}$ um vetor de $\mathbb{R}^m$ de coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_m$. O **produto de A por $\mathbf{x}$**, denotado por $A\mathbf{x}$, é definido como a combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ com pesos $x_1, \ldots, x_m$, isto é,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m. \tag{2.9}$$

Note que o produto $A\mathbf{x}$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ (onde n é o número de *linhas* de A), e que só está definido quando o número m de componentes de $\mathbf{x}$ é igual ao número de *colunas* de A. Verifique, também, que o produto $A\mathbf{x}$ é nada mais do que uma combinação linear dos vetores-coluna de A (compare (2.3) com (2.9)).

Exemplo 2.5

Vamos calcular o produto da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ de (2.7) pelo vetor $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$. Usando a definição acima, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}.$$

É provável que você já tenha estudado o produto matriz-vetor no ensino médio. A definição 2.4 talvez não se pareça muito com o produto que você já conhece. Mas não fique confuso, pois a expressão (2.9) dada acima coincide com o produto "habitual". Vamos verificar isso, escrevendo $A\mathbf{x}$ "por extenso". Se A é a matriz dada em (2.4), então

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{bmatrix}. \qquad (2.10)$$

A primeira linha acima é simplesmente (2.9) reescrita (verifique!) e a última igualdade segue diretamente da aplicação das operações vetoriais (veja a subseção 2.1.5). Verifique, agora, que o vetor à direita, em (2.10), é precisamente o produto $A\mathbf{x}$ "habitual".

Proposição 2.6 (Propriedades algébricas do produto matriz-vetor)
Se A é uma matriz $n \times m$ qualquer, $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^m$, e α é um escalar, então valem as propriedades abaixo.

(a) $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ (b) $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u}$

É fácil deduzir essas propriedades. Vamos verificar apenas (a), e deixamos a verificação de (b) para o leitor (veja o exercício P2.8). Se $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ são as colunas da matriz A, e $u_1, \ldots, u_m$ e $v_1, \ldots, v_m$ são, respectivamente, as coordenadas de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, então

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= (u_1 + v_1)\mathbf{a}_1 + (u_2 + v_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (u_m + v_m)\mathbf{a}_m \\ &= (u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + \cdots + u_m\mathbf{a}_m) + (v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + \cdots + v_m\mathbf{a}_m) \\ &= A\mathbf{u} + A\mathbf{v}. \end{aligned}$$

A primeira igualdade acima decorre diretamente da definição 2.4 (as coordenadas de $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ são $u_1+v_1, \ldots, u_m+v_m$); a segunda, das propriedades algébricas das operações vetoriais; e a terceira, novamente, da definição 2.4.

Aplicações repetidas dessas propriedades permitem mostrar o seguinte resultado. Se A é uma matriz $n \times m$, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$ são vetores de $\mathbb{R}^m$ e $c_1, \ldots, c_q$ são escalares, então

$$A\big(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_q\mathbf{v}_q\big) = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \cdots + c_qA\mathbf{v}_q. \tag{2.11}$$

Note que a expressão dentro dos parênteses, à esquerda, é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q$. A expressão à direita, por sua vez, é uma combinação linear dos vetores $A\mathbf{v}_1, \ldots, A\mathbf{v}_q$. A "moral" da equação (2.11) é dizer que o produto matriz-vetor exibe "bom comportamento" com respeito a combinações lineares, no seguinte sentido: o produto por uma combinação linear é a combinação linear dos produtos, com os mesmos pesos.

As propriedades discutidas acima terão papel crucial no capítulo 5.

2.4 Notação vetorial para sistemas lineares

Os conceitos que vimos acima podem ser usados para escrever sistemas lineares de forma mais simples e sucinta do que fizemos no capítulo 1. Desejamos chamar a atenção da leitora, ou do leitor, para este fato. Pense nesta seção como um aparte que, de certa maneira, não pertence a este capítulo, pois não traz nenhum conceito novo sobre vetores. A notação que veremos aqui, no entanto, será útil para as próximas seções, por isso vamos introduzi-la agora.

Vamos começar com um exemplo. O sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 9 \\ -3x_1 + 5x_3 = -11 \end{cases} \tag{2.12}$$

pode ser escrito, de acordo com (2.1) (página 36), na forma vetorial

$$\begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -3x_1 + 5x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}. \tag{2.13}$$

Usando as operações definidas na seção 2.1.5, podemos reescrever (2.13) novamente como

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}. \tag{2.14}$$

Representando a lista das variáveis x_1, x_2 e x_3 como um vetor $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^3$, e usando a definição do produto matriz-vetor, esta equação pode ser reescrita ainda como

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 9 \\ -11 \end{bmatrix}. \tag{2.15}$$

A equação acima nada mais é do que um sistema linear. Enfatizamos que (2.13), (2.14) e (2.15) são, de fato, formas diferentes de escrever o sistema (2.12). Observe que é fácil “ler”, diretamente de (2.15), a matriz completa desse sistema, que é

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 9 \\ -3 & 0 & 5 & -11 \end{array}\right].$$

Agora tratemos do caso geral. Um sistema qualquer de n equações lineares envolvendo m variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases} \tag{2.16}$$

pode ser reescrito na forma vetorial

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \tag{2.17}$$

A equação acima é igual a

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}, \tag{2.18}$$

onde os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ e $\mathbf{b}$ são dados por

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Observe que esses são vetores de $\mathbb{R}^n$, e n é o número de equações do sistema (2.16).

Representando a lista das variáveis x_1, x_2, ... , x_m por um vetor $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^m$, e usando o produto matriz-vetor, a equação (2.18) pode ser reescrita na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2.19}$$

Chamando a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$ de A, como em (2.5), (2.19) torna-se

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{2.20}$$

Repare que A é precisamente a matriz de *coeficientes* do sistema (2.16) (compare (2.16) com (2.4) da página 43). O vetor $\mathbf{b}$ é o *vetor dos termos independentes* do sistema. A matriz *completa* do sistema é escrita, usando a notação “por colunas”, como

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m & \mathbf{b} \end{array}\right].$$

Podemos escrever essa matriz de forma ainda mais compacta como $\left[\begin{array}{c|c} A & \mathbf{b} \end{array}\right]$.

Enfatizamos, novamente, que (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) e (2.20) são formas diferentes (ordenadas da mais prolixa para a mais sucinta) de escrever *o mesmo sistema linear*. Você deve se habituar com cada uma destas notações, pois elas serão muito usadas. Ao deparar-se com algo como (2.18) ou (2.20), você deve perceber a correspondência com (2.16) imediatamente, sem precisar pensar muito!

A notação compacta $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de (2.20) será particularmente útil. Lembre-se de que, no contexto de sistemas lineares, a matriz de coeficientes A e o vetor $\mathbf{b}$ tipicamente são dados, e $\mathbf{x}$ é o vetor cujas coordenadas são as variáveis ou "incógnitas" $x_1, \ldots, x_m$. Você pode pensar em $\mathbf{x}$ como a "incógnita vetorial" da equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Podemos, então, reformular o conceito de *solução* de um sistema: um vetor $\mathbf{u}$ é dito uma **solução** do sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, ou seja, se a igualdade vetorial torna-se verdadeira quando substituímos $\mathbf{x}$ por $\mathbf{u}$. O **conjunto-solução** de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é o conjunto de todos os vetores $\mathbf{u}$ de $\mathbb{R}^m$ tais que $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$.

A notação vetorial é conveniente, também, para *descrever* tais conjuntos-solução. Revisitemos alguns exemplos do capítulo 1, para ver como isso é feito.

Exemplo 2.7
Considere o sistema (1.20) do exemplo 1.9, na página 22. Uma descrição paramétrica de seu conjunto-solução é dada por (1.22):

$$\begin{cases} x_1 = 5 + 3x_3, \\ x_2 = -3 - 2x_3, \\ x_3 \text{ é uma variável livre}, \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

Usando a notação vetorial, podemos reescrever essa descrição como

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 3x_3 \\ -3 - 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (x_3 \text{ é uma variável livre}). \tag{2.21}$$

Note que $\mathbf{x}$ é um vetor de $\mathbb{R}^4$, pois há quatro variáveis no sistema (1.20). Perceba, também, que a descrição (2.21) não impõe nenhuma restrição genuína sobre x_3, já que essa é uma variável livre. As igualdades entre as terceiras coordenadas em (2.21) dizem, simplesmente, "$x_3 = x_3$".

Podemos reescrever (2.21) em uma forma que será ainda mais conveniente. Para isso, colocamos "em evidência" a variável livre x_3:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 + 3x_3 \\ -3 - 2x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{2.22}$$

Repare que a última igualdade acima é válida para qualquer valor de x_3. Basta verificá-la coordenada por coordenada.

Dizemos que (2.22) é uma **descrição vetorial paramétrica** do conjunto-solução do sistema (1.20). Vejamos mais um exemplo.

Exemplo 2.8
Considere, agora, o sistema (1.16) do exemplo 1.7, na página 19. Obtivemos uma descrição paramétrica (não-vetorial) de seu conjunto-solução em (1.18):

$$\begin{cases} x_1 = 3 - 2x_2 - 5x_4, \\ x_2 \text{ é uma variável livre,} \\ x_3 = 7 + 3x_4, \\ x_4 \text{ é uma variável livre.} \end{cases}$$

Para obter essa descrição na forma vetorial, procedemos como no exemplo anterior. Escrevemos as variáveis x_j como coordenadas de um vetor $\mathbf{x}$, usamos as igualdades acima, e, depois, colocamos "em evidência" as variáveis livres:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2x_2 - 5x_4 \\ x_2 \\ 7 + 3x_4 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Perceba, novamente, que, com relação às variáveis livres, a descrição acima diz apenas "$x_2 = x_2$" e "$x_4 = x_4$".

Exemplo 2.9
Por fim, consideramos o sistema (1.23) do exemplo 1.10, na página 23. A descrição paramétrica de seu conjunto-solução é (1.25):

$$\begin{cases} x_1 = 24, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

A descrição *vetorial* paramétrica, então, é

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Como observamos no exemplo 1.10, a terminologia, nesse caso, é artificiosa, pois não há "parâmetro" algum nas descrições acima. Isso é porque o sistema (1.23) não possui variáveis livres.

Daqui para diante, *resolver* um sistema linear significará obter uma descrição *vetorial* de seu conjunto-solução, ou determinar que ele é impossível. Reveja o procedimento descrito na subseção 1.7.3 e acrescente um sétimo passo: "obtenha uma descrição *vetorial* paramétrica do conjunto-solução". Com prática, você será capaz de ir diretamente do passo 4 a esse sétimo passo, pulando o 5 e o 6. Recomendamos os exercícios P2.9 e P2.10.

2.5 O espaço gerado por vetores (o *span*)

Nesta seção, voltamos a colocar o conceito de combinação linear em primeiro plano. Uma rápida revisão da definição 2.2 é aconselhável (ver página 40).

Dado um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$, podemos considerar o conjunto de *todas* as suas combinações lineares (conforme a definição a seguir). O resultado é um tipo especial de subconjunto de $\mathbb{R}^n$, chamado *subespaço*, que tem grande importância em álgebra linear. Estudaremos subespaços de $\mathbb{R}^n$ no capítulo 4, mas, até lá, vamos usar essa terminologia sem muita justificativa. Por ora, considere que um subespaço é meramente um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, com certas propriedades especiais que serão discutidas mais adiante.

Definição 2.10
Dados os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ de $\mathbb{R}^n$, *o conjunto de todas as suas combinações lineares* é chamado de **subespaço gerado por** $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$, e é denotado por $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Em outras palavras, $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ é o conjunto de todos os vetores de $\mathbb{R}^n$ que podem ser escritos na forma

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m,$$

onde x_1, x_2, ... , x_m são escalares (pesos) quaisquer.

Enfatizamos que $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, onde n é o número de coordenadas dos vetores $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$. Não confunda n com m!

Observação
A expressão "o subespaço gerado por $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$" traduz-se para o inglês como "*the span of* $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$" (daí a notação $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$). O substantivo *span*, em inglês corrente, significa algo como "região (ou período) de abrangência", "alcance" ou "alçada". Assim, dizer que $\mathbf{b}$ está no *span* de $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$ é dizer que $\mathbf{b}$ está ao alcance (via combinações lineares) dos vetores $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$. Dizer que $\mathbf{b}$ *não* pertence ao *span* de $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$ é como dizer que $\mathbf{b}$ está "fora da alçada" desses vetores. Continuaremos a cometer esses anglicismos ocasionalmente, e faremo-lo sem remorso, porque o significado corrente de *span* nos ajuda a ilustrar o conceito matemático.

É fácil descrever geometricamente subespaços gerados por vetores de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$, como mostra o exemplo a seguir. Os exercícios P2.16, P2.17, P2.21 e P2.22 contêm mais exemplos dessa natureza (especialmente o último).

Exemplo 2.11
Considere os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ ilustrados na figura 2.6(a). O *span* de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ é precisamente o plano que contém ambos os vetores. Em outras palavras, qualquer vetor desse plano pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, mas vetores que não se encontram nesse plano estão "fora do alcance" de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, isto é, não são combinações lineares desses dois vetores.

Os vetores $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ de $\mathbb{R}^3$, ilustrados na figura 2.6(b), por outro lado, são *colineares* (ou seja, estão ambos contidos em uma mesma reta) e não-nulos. Isso implica que qualquer combinação linear de tais vetores é simplesmente um múltiplo de $\mathbf{u}'$ (ou de $\mathbf{v}'$), conforme o exercício P2.20. O *span* de $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$, portanto, é justamente a reta que contém esses vetores.

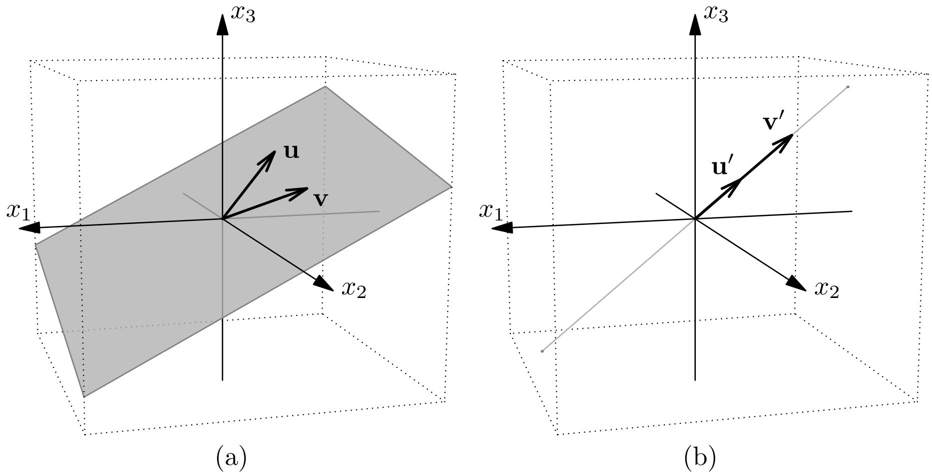

Figura 2.6: $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é o plano hachurado em (a). Já $\text{Span}\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ é a reta ilustrada em (b).

Determinar se um vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *pertence a* $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *é o mesmo que determinar se* $\mathbf{b}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$*.*[7]

Vejamos como se faz essa determinação "na prática".

Exemplo 2.12

Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}. \tag{2.23}$$

Determine se $\mathbf{b}$ pertence a $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Solução: Temos que determinar se $\mathbf{b}$ é uma combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, ou seja, se existem escalares (pesos) x_1 e x_2 tais que $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$. Escrevendo essa equação vetorial "por extenso", obtemos

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix}. \tag{2.24}$$

Portanto, $\mathbf{b}$ *é uma combinação linear de* $\mathbf{a}_1$ *e* $\mathbf{a}_2$ *se e somente se a equação* (2.24) *tem solução.* Como foi discutido na seção anterior, essa equação corresponde exatamente ao sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 = -5. \end{cases}$$

[7]Esta afirmativa é trivial, pois $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ é *definido* como o conjunto das combinações lineares de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ (definição 2.10). Seria como dizer: "Determinar se o ornitorrinco pertence ao conjunto dos mamíferos é o mesmo que determinar se o ornitorrinco é um mamífero."

O ornitorrinco, a propósito, é um mamífero.

Determinar se um sistema é possível é um problema que já conhecemos (ver as subseções 1.7.2 e 1.8.1, em particular as proposições 1.11 e 1.12). Escalonando a matriz completa do sistema (2.24), obtemos

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Como não há linhas do tipo (1.26) na matriz escalonada obtida (não há equações do tipo $0 = \blacksquare$ no sistema associado), o sistema (2.24) é possível. Portanto, $\mathbf{b}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Com isso, chegamos ao fim do exercício e à seguinte conclusão: o vetor $\mathbf{b}$ pertence a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. □

Observe que não foi necessário resolver o sistema (2.24) completamente para responder à questão proposta. Em particular, não foi necessário obter a forma escalonada reduzida em (2.25). No entanto, se quisermos escrever $\mathbf{b}$ explicitamente como combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, então, aí sim, será necessário resolver o sistema (2.24). Verifique que a (única) solução do sistema (2.24) é $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, e, portanto, vale $\mathbf{b} = 3\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$.

Exemplo 2.13

Determine se o vetor $\mathbf{d} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{smallmatrix}\right]$ pertence a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, onde $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são os vetores de $\mathbb{R}^3$ do exemplo anterior.

Solução: Procedemos como no caso anterior. Queremos determinar se o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{d}$ é possível. Para isso, escalonamos a sua matriz completa:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

O sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{d}$ é *impossível*, pois é equivalente a um sistema que tem a equação $0 = 3$, como se pode ver acima. Portanto, $\mathbf{d}$ não é uma combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, isto é, $\mathbf{d}$ *não pertence a* $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$. □

Observação 2.14

O vetor zero de $\mathbb{R}^n$ *sempre* pertence a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ de $\mathbb{R}^n$, pois

$$\mathbf{0}_n = 0\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_m.$$

Ou seja, o vetor zero é sempre uma combinação linear de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.

Observação 2.15

Cada um dos vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ também *sempre* pertence a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Para verificar que $\mathbf{a}_1 \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, por exemplo, basta observar que $\mathbf{a}_1 = 1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \cdots + 0\mathbf{a}_m$. A verificação para os outros vetores é análoga.

Existem diversas maneiras de se dizer que um vetor $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ pertence ao subespaço gerado por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Para a sua conveniência, reunimos as mais usuais na proposição a seguir.[8]

Proposição 2.16
As seguintes afirmativas são equivalentes (isto é, ou são todas verdadeiras, ou então são todas falsas):

(a) $\mathbf{b} \in \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$.[9]

(b) $\mathbf{b}$ *é gerado por* $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$.[10]

(c) $\mathbf{b}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$.

(d) *Existe ao menos uma lista de pesos* $x_1, \dots, x_m$ *tal que* $\mathbf{b} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m$.

(e) *O sistema linear* $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ *é possível.*

Esperamos que a equivalência entre as afirmativas esteja clara, à luz das definições e dos exemplos acima. Geralmente, a afirmativa (e) é usada "na prática" para determinar se as outras valem ou não (como foi feito nos exemplos 2.12 e 2.13).

2.6 O espaço-coluna de uma matriz

A definição a seguir está intimamente relacionada à definição 2.10.

Definição 2.17
Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times m$. O **espaço das colunas** de A é o subespaço gerado pelos vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ de $\mathbb{R}^n$. Denotamos o espaço das colunas de A por $\mathrm{Col}\, A$.

Em símbolos, a definição diz que $\mathrm{Col}\, A = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, onde $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ são os vetores-coluna de A. O espaço das colunas também é chamado de **espaço gerado pelas colunas** ou, simplesmente, de **espaço-coluna** de A.

Note que o espaço-coluna de A é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, onde n é o número de *linhas* da matriz A. O conjunto $\mathrm{Col}\, A$ é, de fato, um *subespaço* de $\mathbb{R}^n$, como veremos no capítulo 4.

Exemplo 2.18
Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Determine se $\mathbf{b}$ e $\mathbf{d}$ pertencem a $\mathrm{Col}\, A$.

[8] Admitimos que há *muita* redundância no enunciado da proposição. Nossa intenção é ajudar o leitor a assimilar os conceitos e abordar os exercícios. Pecamos pela prolixidade, mas não pela falta de clareza (ou assim esperamos).

[9] Lembre que o símbolo "$\in$" significa "pertence a".

[10] Introduzimos essa terminologia na página 40.

Solução: Isso é uma mera repetição dos exemplos 2.12 e 2.13. De fato, por definição $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, onde $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são os vetores-coluna de A, dados em (2.23), na página 50. Já sabemos que $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ (exemplo 2.12) e que $\mathbf{d} \notin \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ (exemplo 2.13), portanto, $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$ e $\mathbf{d} \notin \operatorname{Col} A$. □

A questão está solucionada, mas vamos explorar esse exemplo um pouco mais. Vimos, no exemplo 2.12, que $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, já que o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{b}$ é possível. Esse sistema pode ser escrito na forma compacta $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ver seção 2.4). Similarmente, o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{d}$ pode ser escrito como $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$. No exemplo 2.13, vimos que esse sistema é impossível, logo $\mathbf{d} \notin \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

Em síntese, $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, pois o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é *possível*. Já $\mathbf{d} \notin \operatorname{Col} A$, pois o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{d}$ é *impossível*.

Generalizando o exemplo acima, temos o resultado a seguir.

Proposição 2.19
Seja A uma matriz $n \times m$ qualquer. Um vetor $\mathbf{b}$ de $\mathbb{R}^n$ pertence a $\operatorname{Col} A$ se e somente se o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível.

De fato, se $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$, então $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Dizer que $\mathbf{b} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ equivale a dizer que o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{b}$ é possível (ver afirmativas (a) e (e) na proposição 2.16). Esse sistema, por sua vez, é exatamente o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Podemos, assim, estender a proposição 2.16, acrescentando mais algumas afirmativas equivalentes. Quando $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$, estas são "formas compactas" de escrever as afirmativas (a), (b), (c) e (e), respectivamente:

(a′) $\mathbf{b} \in \operatorname{Col} A$.

(b′) $\mathbf{b}$ é gerado pelas colunas de A.

(c′) $\mathbf{b}$ é uma combinação linear das colunas de A.

(e′) O sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é possível.

2.7 Conjuntos que geram $\mathbb{R}^n$

Dados os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, … , $\mathbf{a}_m$ e $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, já sabemos abordar o problema: "o vetor $\mathbf{y}$ é gerado por $\mathbf{a}_1$, … , $\mathbf{a}_m$?" A chave está na afirmativa (e) da proposição 2.16: basta determinar se o sistema

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{y} \tag{2.26}$$

é possível. Uma questão mais interessante é determinar se os vetores $\mathbf{a}_1$, … , $\mathbf{a}_m$ são capazes de gerar *qualquer vetor* de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.20
Se o sistema (2.26) tem solução, *qualquer que seja* o vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$, dizemos que **o conjunto** $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ **gera o** $\mathbb{R}^n$. Podemos também dizer, mais informalmente, que os vetores $\mathbf{a}_1$, … , $\mathbf{a}_m$ geram o $\mathbb{R}^n$.

Caracterizar os conjuntos que geram $\mathbb{R}^n$ é uma questão importante em álgebra linear. Antes de abordar essa questão no contexto geral, vamos considerar dois exemplos.

Exemplo 2.21
Sejam

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Vamos investigar se o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Começamos reformulando essa questão. O que queremos é saber se qualquer vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, isto é, se o sistema

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{y} \tag{2.27}$$

é possível para *qualquer escolha* de $\mathbf{y}$.

Vamos denotar as coordenadas de $\mathbf{y}$ por y_1, y_2 e y_3, e abordar essa questão exatamente como nos exemplos 2.12 e 2.13. Assim, vamos escalonar a matriz completa do sistema (2.27):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & y_1 \\ 2 & 3 & 1 & y_2 \\ -1 & 2 & 10 & y_3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 3 & 9 & y_3 + y_1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & y_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & 7y_1 - 3y_2 + y_3 \end{array}\right] \tag{2.28}$$

A posição hachurada é a chave de nossa investigação. Perceba que essa pode ou não ser uma posição-pivô da matriz completa, dependendo do valor de $7y_1 - 3y_2 + y_3$. Se esse valor for *igual a zero*, então a última coluna da matriz completa será não-pivô, e o sistema (2.27) será *possível.* Por outro lado, se o valor for *diferente de zero*, então a terceira linha da matriz escalonada obtida acima representará uma equação do tipo $0 = \blacksquare$. Em outras palavras, a última coluna da matriz completa será uma coluna-pivô, e, nesse caso, o sistema (2.27) será *impossível.*

O conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, portanto, *não gera* o $\mathbb{R}^3$, pois, como acabamos de ver, *não* é para qualquer vetor $\mathbf{y}$ que o sistema (2.27) é possível. Ou seja, existem vetores de $\mathbb{R}^3$ que *não* são gerados por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$. O vetor $\mathbf{y}' = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ é um exemplo (há muitos outros), pois, nesse caso, $7y_1 - 3y_2 + y_3 = 7 \neq 0$. Por outro lado, o vetor $\mathbf{y}'' = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ *é* gerado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ (verifique!). A descrição do conjunto dos vetores que são gerados por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ é o objetivo do exercício P2.21.

Cuidado!
Frisamos que a chave na discussão acima é o valor de $7y_1 - 3y_2 + y_3$, que ocupa a posição “talvez pivô, talvez não” na matriz *escalonada* em (2.28). O valor de y_3, que ocupa esta posição na matriz completa *original*, tem pouca relevância nesta

discussão. Ou seja, o valor de y_3, por si só, não determina se o sistema (2.27) é ou não possível. O fato de que y_3 ocupa a "posição indecisa" na matriz completa original é irrelevante. Até porque poderíamos permutar a linha 3 por outra, e, então, y_1 ou y_2 passaria a ocupar tal posição. O y_3 não é "especial".

Exemplo 2.22
Sejam

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vamos, agora, investigar se o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Para isso, procedemos como no exemplo anterior, escalonando a matriz completa do sistema

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 + x_4\mathbf{a}_4 = \mathbf{y}, \tag{2.29}$$

onde $\mathbf{y}$ é, mais uma vez, um vetor qualquer de $\mathbb{R}^3$, de coordenadas y_1, y_2 e y_3.

$$\left[\begin{array}{rrrr|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & y_1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & y_2 \\ -1 & 2 & 10 & 0 & y_3 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1]{\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1} \left[\begin{array}{rrrr|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & y_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 3 & 9 & 1 & y_3 + y_1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_2} \left[\begin{array}{rrrr|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & y_1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -2 & -2y_1 + y_2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{7} & 7y_1 - 3y_2 + y_3 \end{array}\right] \tag{2.30}$$

A situação agora é bastante diferente daquela do exemplo anterior. A última coluna da matriz completa do sistema (2.29) *nunca* será pivô, não importa quais forem os valores de y_1, y_2 e y_3.[11] O sistema (2.29), portanto, é *sempre* possível, para qualquer vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^3$. Assim, o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ gera o $\mathbb{R}^3$.

Queremos caracterizar os conjuntos que geram $\mathbb{R}^n$, e usaremos os exemplos acima para nos guiarmos. Qual é a distinção essencial entre esses dois exemplos, no contexto desta questão?

Observe que a matriz de *coeficientes* $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3\end{bmatrix}$ do sistema (2.27) possui uma linha sem posição-pivô: a terceira (ver (2.28)). Isso dá margem para que a última coluna da matriz *completa* $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{y}\end{bmatrix}$ seja, para alguns valores de $\mathbf{y}$, uma coluna-pivô, como vimos no exemplo 2.21. Para tais valores de $\mathbf{y}$, o sistema (2.27) será impossível.

A matriz de coeficientes $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4\end{bmatrix}$ do sistema (2.29), por outro lado, *possui uma posição-pivô em cada uma de suas três linhas* (ver (2.30)). Isso "fecha o cerco" de tal forma que a última coluna da matriz completa $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 & \mathbf{y}\end{bmatrix}$ *nunca* poderá ser uma coluna-pivô. De fato, *cada linha* da forma escalonada em (2.30) já possui um elemento líder em uma coluna anterior à última, portanto, não há como "encaixar" mais um elemento líder nesta última coluna (verifique!). Dessa forma, a sistema (2.29) será sempre possível.

Isso motiva o resultado principal desta seção.

[11] Verifique esta afirmativa, examinando a forma escalonada em (2.30)!

Teorema 2.23
Sejam $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ *vetores de* $\mathbb{R}^n$*. O conjunto* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *gera o* $\mathbb{R}^n$ *se e somente se a matriz* $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$ *possui uma posição-pivô em cada uma de suas* n linhas.

Demonstração: Por definição, o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ gera $\mathbb{R}^n$ se e somente se o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é sempre possível, qualquer que seja o vetor $\mathbf{y}$ de $\mathbb{R}^n$ (lembre-se de que esse sistema é o mesmo que (2.26)). Vamos mostrar que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ é sempre possível se e só se A possui uma posição-pivô em cada linha.

Seja F uma forma escalonada da matriz A. Dado um $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ qualquer, podemos escalonar a matriz completa do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$\begin{bmatrix}A \mid \mathbf{y}\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(operações-linha)}]{\text{escalonamento}} \begin{bmatrix}F \mid \mathbf{z}\end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

O vetor $\mathbf{z}$ é o vetor obtido aplicando-se sobre $\mathbf{y}$ as mesmas operações-linha que levam A até F. Observe que os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ e $F\mathbf{x} = \mathbf{z}$ são equivalentes.

Se a matriz A possuir uma posição-pivô em cada linha, a matriz escalonada F terá um elemento líder em cada linha. A última coluna da matriz completa $\begin{bmatrix}F & \mathbf{z}\end{bmatrix}$, portanto, *nunca* será uma coluna-pivô, não importa qual seja o valor de $\mathbf{z}$ (ou de $\mathbf{y}$).[12] Sendo assim, o sistema $F\mathbf{x} = \mathbf{z}$ será *sempre possível*, e o mesmo valerá para o sistema equivalente $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

Se, por outro lado, a matriz A *não* tiver uma posição-pivô em cada linha, então a *última linha* da matriz escalonada F será, necessariamente, toda de zeros.[13] Considere, então, um vetor $\mathbf{z}'$ de $\mathbb{R}^n$ cuja última coordenada z'_n seja diferente de zero ($z'_n = 1$, por exemplo). O sistema $F\mathbf{x} = \mathbf{z}'$ será, evidentemente, impossível, pois sua última equação será do tipo $0 = 1$. Agora considere o vetor $\mathbf{y}'$ de $\mathbb{R}^n$ obtido ao se aplicar sobre $\mathbf{z}'$ as operações-linha que *revertem* o processo (2.31) acima, isto é,

$$\begin{bmatrix}F \mid \mathbf{z}'\end{bmatrix} \xrightarrow[\text{(operações-linha reversas)}]{\text{“des-escalonamento”}} \begin{bmatrix}A \mid \mathbf{y}'\end{bmatrix}.$$

O sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}'$ é equivalente ao sistema impossível $F\mathbf{x} = \mathbf{z}'$, portanto será, ele próprio, impossível. Assim, *não* é para qualquer escolha de $\mathbf{y}$ que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ será possível. $\square$

Observe que, no caso em que a matriz A não tem uma posição-pivô em cada linha, a prova do teorema dá uma “receita” para a construção de um vetor $\mathbf{y}'$ de modo que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{y}'$ seja impossível (essa dica poderá ajudá-los na resolução do exercício P2.31).

Mais uma vez, há muitas formas de se afirmar que um conjunto $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ gera $\mathbb{R}^n$. Para a conveniência do leitor, enumeramos várias delas a seguir.

Teorema 2.24
Sejam $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ *vetores de* $\mathbb{R}^n$*, e seja* A *a matriz de tamanho* $n \times m$ *dada por* $\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$*. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

[12] A situação, nesse caso, é como a do exemplo 2.22: o “cerco está fechado”, e não há maneira de “encaixar” mais um elemento líder na última coluna de $\begin{bmatrix}F & \mathbf{z}\end{bmatrix}$.

[13] Do contrário, A teria uma posição-pivô em cada linha, não é mesmo? A situação aqui é como a do exemplo 2.21.

(a) $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} = \mathbb{R}^n$.

(b) *O conjunto* $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *gera o* $\mathbb{R}^n$.

(c) *Os vetores* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ *geram o* $\mathbb{R}^n$.

(d) *Qualquer* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *é uma combinação linear dos vetores* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$.

(e) *Para qualquer* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *existe ao menos uma lista de pesos* x_1, ... , x_m *tal que* $\mathbf{y} = x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m$.

(f) *Para qualquer* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *o sistema linear* $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_m\mathbf{a}_m = \mathbf{y}$ *é possível.*

(g) *Para qualquer* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, *o sistema linear* $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ *é possível.*

(h) $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$.

(i) *A matriz* A *possui uma posição-pivô em cada uma de suas* n linhas.

A equivalência entre (b) e (i) é precisamente o teorema 2.23, e a equivalência entre as afirmativas (a) a (h) decorre, diretamente, das definições deste capítulo. Encorajamos que você faça a verificação de tais fatos. Essa tarefa será um bom exercício de fixação dos conceitos. As seguintes considerações podem ajudar.

A equivalência entre (a) e (d) é uma mera questão de linguagem: escrever $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} = \mathbb{R}^n$ se traduz, em palavras, para "o conjunto das combinações lineares (o *span*) de $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$ é igual ao $\mathbb{R}^n$ todo", ou seja, qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ é uma combinação linear de $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$. Sob a hipótese $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$, vale $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, portanto, a equivalência entre (a) e (h) é imediata.

Em geral, é a afirmativa (i) que é usada "na prática" para testar se todas as outras valem ou não. Ela é também a chave para demonstrar o seguinte resultado.

Proposição 2.25
Se os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ *geram o* $\mathbb{R}^n$, *então, necessariamente, vale* $m \geqslant n$.

Demonstração: A matriz $n \times m$ dada por $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$ tem uma posição-pivô em cada uma de suas n linhas, uma vez que a afirmativa (i) do teorema 2.24 é equivalente à hipótese desta proposição. Isto implica que A tem exatamente n posições-pivô, pois uma matriz (qualquer que seja) não pode ter mais do que uma posição-pivô por linha.

O número m de colunas de A, portanto, *não pode ser menor do que* n. Do contrário, a matriz A não poderia ter n posições-pivô. Ela permitiria, no máximo, m posições-pivô, pois uma matriz qualquer também não pode ter mais do que uma posição-pivô por coluna. Veja o exercício P1.19 do capítulo 1. $\square$

A proposição 2.25 é simples, mas é importante. Uma outra forma de enunciá-la (a "contrapositiva") é dizer que se $m < n$, então os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ não podem gerar $\mathbb{R}^n$ (e, portanto, não podem satisfazer nenhuma das afirmativas do teorema 2.24).

Isso é bastante intuitivo. Dois vetores de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, nunca poderão gerar o $\mathbb{R}^3$ todo. Eles poderão gerar, no máximo, um *plano* dentro de $\mathbb{R}^3$, como no caso dos vetores **u** e **v** do exemplo 2.11 (ver também o exercício P2.22). Analogamente, dezesseis vetores, ou menos, em $\mathbb{R}^{17}$ jamais poderão gerar o $\mathbb{R}^{17}$ todo.

Cuidado!
As recíproca da proposição 2.25 *não* é verdadeira, ou seja, a condição $m \geqslant n$ *não garante* que valham as afirmativas do teorema 2.24. Em particular, três ou mais vetores de $\mathbb{R}^3$ não geram, necessariamente, o $\mathbb{R}^3$ (ver o exemplo 2.21). Similarmente, dezessete (ou mais) vetores em $\mathbb{R}^{17}$ não geram, necessariamente, o $\mathbb{R}^{17}$ todo. Para determinar se um dado conjunto de vetores gera $\mathbb{R}^n$, é necessário verificar diretamente uma das afirmativas do teorema 2.24 (geralmente a afirmativa (i), como mencionamos).

Exercícios propostos

P2.1. Sejam $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$. Calcule o vetor $2\mathbf{x} - 6\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$.

P2.2. Represente um sistema de coordenadas cartesianas em uma folha de papel quadriculado. Posicione a origem bem no centro da folha, para que você tenha bastante espaço. Complete os itens abaixo, cuidadosamente, usando um par de esquadros.

(a) Represente os vetores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ do exercício anterior no sistema de coordenadas.
(b) Agora represente os vetores $2\mathbf{x}$, $-6\mathbf{y}$ e $3\mathbf{z}$.
(c) Obtenha, graficamente, o vetor $2\mathbf{x} + (-6\mathbf{y})$, usando a "regra do paralelogramo".
(d) Obtenha agora, graficamente, o vetor $\big(2\mathbf{x} + (-6\mathbf{y})\big) + 3\mathbf{z}$, usando, novamente, a regra do paralelogramo.
(e) Verifique que o vetor resultante, obtido graficamente, coincide com aquele obtido no exercício anterior.

P2.3. Calcule o produto $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ de duas maneiras distintas:

(a) usando a definição 2.4, como no exemplo 2.5;
(b) usando o método "usual" empregado no ensino médio.

Perceba que os resultados são idênticos.

P2.4. Determine quais dos produtos abaixo estão definidos (alguns deles não fazem sentido). Calcule aqueles que estiverem.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 9 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

(f) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(g) $\begin{bmatrix} -3 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

(h) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

P2.5. Escreva a combinação linear $2\mathbf{x} - 6\mathbf{y} + 3\mathbf{z}$ do exercício P2.1 como o produto de uma matriz 2×3 por um vetor de $\mathbb{R}^3$. Observe que as coordenadas de tal vetor correspondem aos *pesos* na combinação linear.

P2.6. Seja A uma matriz $n \times m$ qualquer. Mostre que $A\mathbf{0}_m = \mathbf{0}_n$. (Lembre-se de que $\mathbf{0}_m$ é o vetor-zero de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbf{0}_n$ é o vetor-zero de $\mathbb{R}^n$.) *Dica*: Use a definição do produto matriz-vetor, e verifique que $A\mathbf{0}_m$ é uma combinação linear com pesos todos iguais a zero.

P2.7. Seja $\mathbf{x}$ um vetor de $\mathbb{R}^m$ qualquer. Mostre que $\mathit{0}\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$, onde $\mathit{0}$ é a matriz $n \times m$ com entradas todas iguais a zero.

P2.8. Verifique a propriedade (b) do produto de matriz por vetor (proposição 2.6, na página 44). *Sugestão*: Escreva A coluna por coluna e $\mathbf{u}$ coordenada por coordenada.

P2.9. Use o método de escalonamento para resolver o sistema linear (2.15) (página 45). Obtenha uma descrição vetorial paramétrica do conjunto-solução, como nos exemplos 2.7, 2.8 e 2.9.

P2.10. Considere os sistemas dos exercícios P1.10 e P1.11 do capítulo 1. Forneça uma descrição vetorial paramétrica do conjunto-solução de cada um que for *possível*. *Sugestão*: Aproveite o trabalho já realizado.

P2.11. Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \end{bmatrix}$. Escreva a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ explicitamente como um sistema de equações lineares. Esse sistema tem quantas variáveis? E quantas equações? Compare esses números com o tamanho da matriz A. Escreva a matriz completa do sistema explicitamente, e perceba que faz sentido denotá-la por $\begin{bmatrix} A \mid \mathbf{b} \end{bmatrix}$.

P2.12. Escreva o sistema (1.16) (página 19) na forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Em outras palavras, determine A e $\mathbf{b}$ tais que o sistema (1.16) seja escrito nessa forma. Qual é o tamanho da matriz A? E do vetor $\mathbf{b}$? Compare com o número de variáveis e de equações do sistema (1.16).

P2.13. Em cada item a seguir, determine se o vetor $\mathbf{b}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$. Inspire-se nos exemplos 2.12 e 2.13.

(a) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(c) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

(d) $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

P2.14. Um vetor de $\mathbb{R}^5$ pode ser uma combinação linear de vetores de $\mathbb{R}^8$? E um vetor de $\mathbb{R}^8$ pode pertencer ao *span* de vetores de $\mathbb{R}^5$? Justifique.

P2.15. Sejam $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 7 \end{smallmatrix}\right]$. É verdade que $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^2$? É um subconjunto de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

P2.16. Seja $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. O conjunto $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$ contém os vetores de $\mathbb{R}^2$ que podem ser escritos na forma $\alpha\mathbf{u}$, ou seja, $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$ é o conjunto de todos os múltiplos escalares de $\mathbf{u}$, certo?

(a) Verifique que um vetor $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right]$ pertence a $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$ se e somente se suas coordenadas satisfazem a relação $3v_1 - 4v_2 = 0$. Lembre-se de que esta é a equação de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$. Essa reta, portanto, é a representação geométrica de $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$.

(b) Represente $\mathbf{u}$, geometricamente, por uma seta em uma folha de papel quadriculado. Trace a reta $\text{Span}\{\mathbf{u}\}$ no mesmo esboço. Observe que ela é a reta que "contém a seta" $\mathbf{u}$.

P2.17. Sejam $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

(a) Verifique que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ geram $\mathbb{R}^2$. *Dica*: Use o teorema 2.23.

(b) Relembre que o ítem anterior equivale a dizer $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} = \mathbb{R}^2$ (teorema 2.24).

(c) Conclua que $\text{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é representado geometricamente pelo plano $\mathbb{R}^2$ todo.

(d) Represente os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ em uma folha de papel quadriculado, e observe que esses vetores não são colineares.

P2.18. Verifique que o subespaço gerado pelo vetor zero de $\mathbb{R}^n$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que contém apenas o próprio vetor zero, isto é, $\text{Span}\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}$. *Dica*: Quais são os múltiplos do vetor zero?

P2.19. Dizemos que dois vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ são *colineares* quando $\mathbf{u}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{v}$ *ou vice-versa*. A figura 2.6(b) ilustra um exemplo em $\mathbb{R}^3$: os vetores $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ são colineares.

(a) Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam *não-nulos*. Mostre que $\mathbf{u}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{v}$ se e somente se $\mathbf{v}$ é um múltiplo escalar de $\mathbf{u}$. *Dica*: Escreva $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$ para algum escalar k, e argumente, usando as hipóteses, que $k \neq 0$.

(b) Agora, suponha que $\mathbf{u}$ seja não-nulo, mas que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Mostre que esses vetores são "automaticamente" colineares. (*Dica*: Verifique que $\mathbf{z}$ é um múltiplo de $\mathbf{u}$.) Mostre, no entanto, que $\mathbf{u}$ *não é um múltiplo de* $\mathbf{z}$.

P2.20. (a) Suponha que $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ sejam vetores *colineares* e *não-nulos* em $\mathbb{R}^n$ (como na figura 2.6(b)). Mostre que qualquer combinação linear $x_1\mathbf{u}' + x_2\mathbf{v}'$ pode ser escrita na forma $\alpha\mathbf{u}'$ e na forma $\beta\mathbf{v}'$. Em outras palavras, qualquer combinação linear de $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ é, simplesmente, um múltiplo escalar de $\mathbf{u}'$ (ou de $\mathbf{v}'$). Isso equivale a dizer $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}'\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}'\}$, certo?

(b) Agora, suponha que $\mathbf{u}'$ seja não-nulo, mas que $\mathbf{v}' = \mathbf{0}$. Mostre que $\mathrm{Span}\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{u}'\}$, mas que $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}'\}$ *não* coincide com esse conjunto. De fato, neste caso $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}'\} = \{\mathbf{0}\}$, conforme o exercício P2.18.

P2.21. Considere os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ do exemplo 2.21 (página 54). Neste exercício, vamos descrever geometricamente o conjunto $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

(a) Mostre que um vetor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ é gerado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ se e somente se suas coordenadas satisfazem a relação

$$7y_1 - 3y_2 + y_3 = 0. \tag{2.32}$$

Dica: Aproveite o trabalho já desenvolvido no exemplo 2.21.

(b) Recorde-se (do ensino médio, ou de um curso de geometria analítica) de que (2.32) é a equação de um *plano* em $\mathbb{R}^3$ passando pela origem.

(c) Convença-se (usando as definições deste capítulo) que o item (a) deste exercício pode ser reformulado da seguinte maneira: O *span* de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^3$ que estão no plano dado por (2.32). Ou, mais sucintamente: $\mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ é o plano dado por (2.32).

(d) Verifique que cada um dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ pertence ao plano (2.32) (e não poderia ser de outra maneira, em vista da observação 2.15). Esses vetores, portanto, são *coplanares*: os três estão contidos num mesmo plano. Observe, no entanto, que eles *não são* colineares.

A figura 2.7 ilustra essa situação, em que os três vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ de $\mathbb{R}^3$ geram um plano passando pela origem.[14] Denotamos o plano por W.

[14] A caixa pontilhada está na figura para realçar sua "tridimensionalidade", mas note que os eixos x_1 e x_2 não atravessam as faces laterais perpendicularmente (isto é, a caixa é "torta" com relação aos eixos).

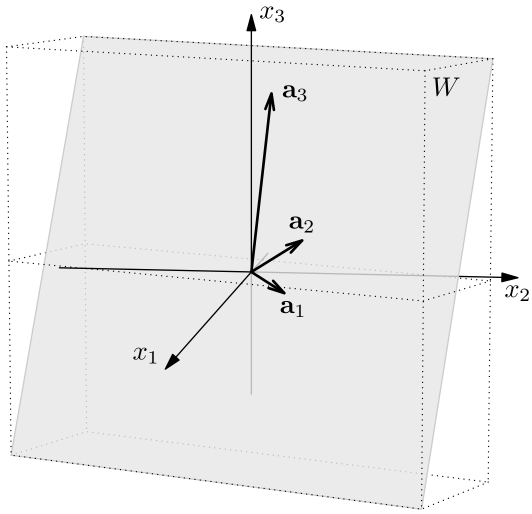

Figura 2.7: O plano W gerado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ (veja o exercício P2.21).

P2.22. Convença-se dos fatos abaixo. Demonstrações rigorosas não são necessárias aqui, pois o objetivo é apenas o de desenvolver a intuição geométrica. Faça esboços, imagens mentais, ou gráficos auxiliados por computador.

(a) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ é um vetor não-nulo, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}\}$ é uma reta contendo a origem no plano $\mathbb{R}^2$ (ver o exercício P2.16).
(b) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-colineares em $\mathbb{R}^2$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é o plano $\mathbb{R}^2$ todo (ver o exercício P2.17).
(c) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores colineares em $\mathbb{R}^2$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma reta contendo a origem no plano $\mathbb{R}^2$.
(d) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ é um vetor não-nulo, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}\}$ é uma reta contendo a origem no espaço $\mathbb{R}^3$.
(e) Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores não-colineares em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é um plano contendo a origem no espaço $\mathbb{R}^3$ (ver a figura 2.6(a)).
(f) Se $\mathbf{u}'$ e $\mathbf{v}'$ são vetores colineares em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}', \mathbf{v}'\}$ é uma reta contendo a origem no espaço $\mathbb{R}^3$ (ver a figura 2.6(b)).
(g) Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores não-coplanares em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é o espaço $\mathbb{R}^3$ todo.
(h) Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores coplanares, porém não-colineares em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é um plano contendo a origem no espaço $\mathbb{R}^3$ (ver o exercício P2.21).
(i) Se $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vetores colineares em $\mathbb{R}^3$, então $\operatorname{Span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma reta contendo a origem no espaço $\mathbb{R}^3$.

P2.23. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$. Em cada item, determine se o vetor dado pertence a $\operatorname{Col} A$. Inspire-se no exemplo 2.18 e na proposição 2.19.

(a) $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$. (b) $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

P2.24. É possível resolver, simultaneamente, ambos os itens da questão anterior, via o escalonamento da matriz $\begin{bmatrix} A & \mathbf{u} & \mathbf{v} \end{bmatrix}$. Explique como isso é possível. *Sugestão*: Primeiro, faça o escalonamento proposto.

P2.25. Seja B uma matriz 6×4. $\operatorname{Col} B$ é um subconjunto de qual "espaço ambiente"? De $\mathbb{R}^6$ ou de $\mathbb{R}^4$?

P2.26. Nas afirmativas abaixo, A representa uma matriz $n \times m$. Determine se cada uma é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) *Sempre* vale $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^n$.
(b) $\operatorname{Col} A$ é *sempre* um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.
(c) $\operatorname{Col} A$ é *sempre* um subconjunto de $\mathbb{R}^m$.
(d) Cada coluna de A pertence ao seu espaço-coluna $\operatorname{Col} A$. *Dica*: Veja a observação 2.15.
(e) O espaço-coluna de A é o conjunto que contém *apenas* as colunas de A.
(f) O espaço-coluna de A é o conjunto gerado por seus vetores-coluna.
(g) Se $\mathbf{y} \in \operatorname{Col} A$, então $\mathbf{y}$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ que pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores-coluna de A.

P2.27. Seja C a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_p \end{bmatrix}$, onde $\mathbf{c}_j$ são vetores de $\mathbb{R}^q$, e seja $\mathbf{z}$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^q$. Qual é o tamanho da matriz C? Escreva uma lista com diversas maneiras distintas de dizer "$\mathbf{z} \in \operatorname{Col} C$".

P2.28. Sejam $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -5 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$. Determine quais dos conjuntos abaixo geram $\mathbb{R}^3$. *Dica*: Tente reaproveitar o trabalho já realizado no exercício P2.23.

(a) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$, (b) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$, (c) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$.

P2.29. Sejam $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine se vale $\operatorname{Col} A = \mathbb{R}^3$. O que isso diz a respeito dos vetores-coluna de A?
(b) Determine se vale $\operatorname{Col} B = \mathbb{R}^3$. Vale $\operatorname{Col} B = \mathbb{R}^4$?

P2.30. Sejam $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{y} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Nos itens abaixo, justifique suas respostas *sem fazer conta alguma*.

(a) O conjunto $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ gera o $\mathbb{R}^3$?
(b) O conjunto $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ gera o $\mathbb{R}^2$?

P2.31. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

(a) Verifique que as colunas de A *não* geram o $\mathbb{R}^3$.
(b) Dê exemplos de vetores de $\mathbb{R}^3$ que não pertençam a $\operatorname{Col} A$, isto é, vetores que não sejam gerados pelas colunas de A.

Dica: Inspire-se no exemplo 2.21 (ou na prova do teorema 2.23).

P2.32. As colunas de uma matriz 100×99 podem gerar o conjunto $\mathbb{R}^{100}$? Justifique.

P2.33. Determine se cada afirmativa é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Quatro vetores de $\mathbb{R}^5$ *nunca* geram o $\mathbb{R}^5$.
(b) Cinco vetores de $\mathbb{R}^5$ *sempre* geram o $\mathbb{R}^5$.
(c) Cinco vetores de $\mathbb{R}^5$ *nunca* geram o $\mathbb{R}^5$.
(d) Um conjunto contendo *exatamente cinco* vetores pode gerar o $\mathbb{R}^5$.
(e) Um conjunto com *mais* de cinco vetores pode gerar o $\mathbb{R}^5$.
(f) Quatro vetores de $\mathbb{R}^5$ nunca geram o $\mathbb{R}^5$, mas podem gerar o $\mathbb{R}^4$.