Capítulo 6

Determinantes

Já em 1683, o japonês Seki Takakazu inventou o conceito de determinante, provavelmente reinventado em 1693 pelo alemão Gottfried Liebniz, pois não havia comunicação entre eles. Na época, o determinante estava relacionado com as fórmulas para exprimir a solução de um sistema linear de n equações e n variáveis, uma vez que a teoria de matrizes só seria desenvolvida muito mais tarde. Posteriormente, em 1812, Augustin-Louis Cauchy identificou que o determinante poderia ser usado para calcular a área do paralelogramo ou o volume do paralelepípedo. Somente depois o determinante seria associado com as formas multilineares alternadas.

O determinante associa um número para cada matriz quadrada.

O principal uso do determinante está no fato de que o determinante de um operador linear é não-nulo se, e somente se, o operador é invertível.

Neste capítulo iremos deduzir fórmulas e procedimentos para calcular o determinante de uma matriz, além de apresentar dois métodos para obter a inversa de uma matriz e um critério para decidir se um sistema admite solução única.

6.1 Determinantes de ordens $1, 2$ e 3

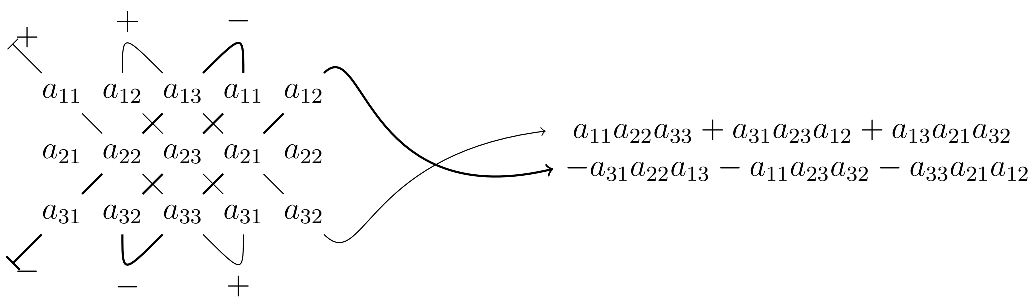
O determinante é uma função que toma uma matriz quadrada A e retorna com um número.

Os determinantes de ordens $1, 2$ e 3 são definidos por:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} \end{bmatrix} = a_{11}, \quad \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \text{ e}$$

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Observe que o determinante da matriz 3×3 possui seis produtos, cada um consiste de três elementos da matriz original. Três destes produtos recebem sinal positivo e três deles recebem sinal negativo. O diagrama a seguir ajuda a memorizar a fórmula envolvida no cálculo do determinante, o esquema é obtido por repetir a 1ª e 2ª coluna no final da matriz. O determinante é obtido através da soma dos produtos, ao longo das três setas assinaladas com o sinal $+$, mais a soma dos negativos dos produtos dos elementos que estão nas setas assinaladas com o sinal $-$.



Exemplo 6.1
Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Encontre $\det(A)$ e $\det(B)$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 2(5)4 + 1(-2)2 + 1(0)(-3) - 2(5)1 - (-3)(-2)2 - 4(0)1 \\ &= 40 - 4 - 10 - 12 = 14, \\ \det(B) &= 0 + (-2) + 0 - 0 - 9 - (-16) \\ &= 5. \end{aligned}$$

6.2 Determinante em Geral

Observe que o determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem 3 pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{23}a_{31}a_{12} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{33}a_{21} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) \\ &= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{13} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Algo parecido pode ser feito com a matriz A de ordem 2:

$$\det(A) = a_{11}\det\left[a_{22}\right] - a_{12}\det\left[a_{21}\right].$$

Para facilitar a expressão do determinante introduzimos a notação a seguir.

Definição 6.2
Sejam $n > 1$ e A uma matriz quadrada de ordem n, indicaremos por A_{ij} a matriz de ordem $n-1$, obtida de A por apagar a i-ésima linha e a j-ésima coluna e por $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$. Chamamos Δ_{ij} de **cofator** de A, na linha i e coluna j.

Exemplo 6.3

Considere $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Então,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \ A_{23} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e } A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

E os cofatores correspondentes são:

$\Delta_{11} = (-1)^{1+1}\det(A_{11}) = 1$, $\Delta_{23} = (-1)^{2+3}\det(A_{23}) = -(-3+2) = 1$ e
$\Delta_{21} = (-1)^{2+1}\det(A_{21}) = -(-1+6) = -5$.

Com essa notação podemos reescrever o determinante no caso de A ser de ordem 2

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{22} + a_{12}\Delta_{21}.$$

e no caso de A ser uma matriz de ordem 3, o determinante fica:

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13}.$$

Recursivamente definimos para a matriz 4×4 o seu determinante, por ser

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + a_{13}\Delta_{13} + a_{14}\Delta_{14}.$$

E assim, sucessivamente, isto é,

Definição 6.4

Seja $n > 1$ e A uma matriz quadrada de ordem n, definimos o determinante de A como sendo:

$$\det(A) = a_{11}\Delta_{11} + a_{12}\Delta_{12} + \cdots + a_{1n}\Delta_{1n}.$$

Exemplo 6.5

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, calcule $\det(A)$.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 0\Delta_{11} + 1\Delta_{12} + 1\Delta_{13} + (-1)\Delta_{14} \\ &= 0(3) + 1(11) + 1(-9) + (-1)(-4) = 6. \end{aligned}$$

Apesar de termos definido o determinante para qualquer matriz quadrada de ordem n, sempre que precisamos calcular o determinante de uma matriz de ordem n precisamos calcular n determinantes de matrizes de ordem $n-1$. Quando n cresce, a quantidade de operações necessárias para calcular o determinante cresce muito depressa, o que inviabiliza a operação, para perceber isso tente ver quantas operações você necessitaria se tivesse que calcular o determinante de uma matriz de ordem $n = 7$. Mesmo empregando um computador para fazer esta tarefa, se utilizarmos essa fórmula, mesmo para matrizes relativamente pequenas, por exemplo $n = 15$, qualquer computador terá dificuldades em retornar uma resposta.

Na atualidade os softwares empregados no cálculo do determinante usam outros métodos. Para entendermos como esses métodos funcionam vamos observar algumas propriedades do determinante. Para isto veja a definição do seguinte conceito:

Definição 6.6
Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é 2-linear, se ela for linear em cada uma de suas entradas, isto é, para cada x, y, z e $\alpha \in \mathbb{R}$ valem:

$$f(x+y,z) = f(x,z) + f(y,z), \quad f(x,y+z) = f(x,y) + f(x,z)$$
$$f(\alpha x, y) = \alpha f(x,y) \text{ e } f(x, \alpha y) = \alpha f(x,y).$$

Exemplo 6.7
Considere $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = xy$, então se $f(x+x', y) = (x+x')y = xy + x'y = f(x,y) + f(x',y)$ e se $f(x, y+y') = x(y+y') = xy + xy' = f(x,y) + f(x,y')$. Além disso, se multiplicarmos x ou y por um número α temos:

$$f(\alpha x, y) = (\alpha x)y = \alpha(xy) = \alpha f(x,y) \text{ e } f(x, \alpha y) = x(\alpha y) = \alpha(xy) = \alpha f(x,y).$$

Considere A uma matriz $n \times n$. Podemos pensar tal matriz como n colunas $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, onde cada uma destas colunas é um vetor $\mathbb{R}^n$, e podemos escrever $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$. Vamos definir a função D que toma n vetores do $\mathbb{R}^n$ e retorna um número por

$$D(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}.$$

Observe que a função determinante é uma função que toma uma matriz quadrada e retorna um número.

Exemplo 6.8
Calcule $D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$. Pela definição da função D temos:

$$D\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} = -1 + 6 = 5.$$

Proposição 6.9
A função $D(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(d_1) *D é **alternada**, isto é, se $\mathbf{c}_i = \mathbf{c}_j$ para $i \neq j$ então $D(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) = 0$.*

(d_2) *D é n-linear, isto é, D é linear em cada uma de suas colunas. Mais precisamente, se todos os $\mathbf{c}_j$ com $j \neq i$ estiverem fixos, então*

$$D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i + \lambda \mathbf{c}'_i, \ldots, \mathbf{c}_n) = D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n) + \lambda D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}'_i, \ldots, \mathbf{c}_n).$$

(d_3) *Se $[\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n]$ é a matriz identidade então $D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$.*

A principal implicação das propriedades acima está na próxima observação.

Observação 6.10
Considere a função D, como a que satisfaz as condições $(d_1)-(d_3)$. Então, a função é antissimétrica, isto é, se trocarmos $\mathbf{c}_i$ por $\mathbf{c}_j$ o valor de D troca de sinal. Mais precisamente,

$$D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{c}_n) = -D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_n).$$

Vamos demonstrar esse fato. Para simplificar a notação e, como só vamos tratar dos vetores $\mathbf{c}_i$ e $\mathbf{c}_j$ e os outros vetores irão permanecer fixos, considere $D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_i, \ldots, \mathbf{c}_j, \ldots, \mathbf{c}_n)$. Temos:

$$\begin{aligned} 0 &= D(\mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j) = D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j) + D(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i + \mathbf{c}_j) \\ &= D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_i) + D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) + D(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i) + D(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_j) \\ &= D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) + D(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i). \end{aligned}$$

E daí $D(\mathbf{c}_i, \mathbf{c}_j) = -D(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_i)$. Portanto, se estivermos calculando o determinante de uma matriz e trocarmos duas colunas entre si, o determinante troca de sinal.

Com estas propriedades também conseguimos reobter a fórmula para o determinante. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 6.11
Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, logo a coluna $\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e $\mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$. Observe que $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, logo pela propriedade (d_2) temos que:

$$\begin{aligned} D\left(\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) &= D\left(a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= aD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + D\left(\begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= aD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + D\left(c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= aD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) + cD\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= aD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}\right) + cD\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}\right) \\ &= abD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + adD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &\qquad + cbD\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + cdD\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= adD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - cbD\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = ad - bc. \end{aligned}$$

Observe que usamos a propriedade (d_1) quando trocamos a primeira coluna com a segunda e, por isso, trocamos o sinal e na última igualdade usamos (d_3).

6.3 Matriz de Permutação e o Determinante da Transposta

Definição 6.12
Uma **matriz de permutação** é uma matriz obtida da matriz identidade pela permutação de suas colunas.

Exemplo 6.13
A matriz
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
é obtida da matriz identidade por permutar a primeira e a segunda coluna. Além disso, é claro que o $\det(P) = -1$, pois o determinante é igual ao determinante da matriz identidade multiplicado por (-1).

Se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$, denotamos a matriz de permutação por $P_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, isso significa que na primeira coluna temos o vetor $\mathbf{e}_{i_1}$, na segunda coluna está o vetor $\mathbf{e}_{i_2}$ e na n-ésima coluna está o vetor $\mathbf{e}_{i_n}$, assim, a matriz acima é denotada por P_{213}.

O determinante de uma matriz de permutação é sempre ± 1, uma vez que podemos obter a matriz identidade depois de executarmos um número finito de permutações em suas colunas. Podemos ser mais precisos: se executamos um número par de trocas, então o determinante é 1; e se executamos um número ímpar de trocas, então o determinante é -1. Logo, definimos o sinal da matriz de permutação P como:
$$\sigma(P) = \det(P).$$

Agora vamos enunciar o resultado principal desta seção.

Teorema 6.14
Para todo $n > 1$ se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(A) = \det(A^t)$.

Disso seguem duas observações importantes. Para entendermos bem as observações considere:
$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \vdots \\ \ell_n \end{bmatrix}$$
escrita como n colunas ou n linhas.

Observação 6.15
Dada uma matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n podemos considerar $B = A^t$, logo o $\det(B) = \det(A)$ e D é n-linear e alternada sobre as colunas de B, mas isso quer dizer que, com respeito a matriz A, $D(A)$ é n-linear e alternada com respeito às linhas de A.

Observação 6.16
Sejam A e $B = A^t$. Calculando o determinante por fazer a expansão em termos da primeira linha de B, temos

$$\begin{aligned}\det A &= \det B = b_{11}\Delta_{11} + b_{12}\Delta_{12} + \cdots + b_{1n}\Delta_{1n} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A^t_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\det A^t_{21} + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}\det A^t_{n1} \\ &= a_{11}(-1)^{1+1}\det A_{11} + a_{21}(-1)^{2+1}\det A_{21} + \cdots + a_{n1}(-1)^{n+1}\det A_{n1},\end{aligned}$$

isto é, podemos calcular o determinante por fazer a expansão segundo a primeira coluna de A. Na verdade, podemos calcular o determinante por fazer a expansão em qualquer linha e qualquer coluna. Para ver como isso é feito veja o exercício R6.6.

6.4 Regra de Cramer

Sejam $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ e $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ um vetor. Considere a equação

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Seja A_k a matriz obtida de A por substituir a coluna k de A pelo vetor $\mathbf{b}$. Então, vale o seguinte resultado:

Teorema 6.17
O sistema (quadrado) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *possui uma única solução se, e só se,* $\det(A) \neq 0$. *Nesse caso, a solução é dada por*

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Veja o seguinte exemplo

Exemplo 6.18
Resolva o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y - z = 3 \end{cases} \cdot$$

Para usarmos o teorema anterior, precisamos calcular o seguinte determinante:

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 2 - 6 + 1 + 4 + 3 + 1 = 5.$$

Como $\det(A) \neq 0$, o sistema tem apenas uma solução, que é dada por

$$x = \frac{1}{5}\det\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{20}{5}, \; y = \frac{1}{5}\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{-10}{5}$$

$$z = \frac{1}{5}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{15}{5}.$$

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ e, como já explicamos, chamamos os elementos Δ_{ij} de cofatores da matriz A na posição ij. A **Adjunta Clássica** de A, denotada por $\operatorname{adj}(A)$, é a transposta da matriz de cofatores de A, a saber:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix}.$$

Chamamos de "Adjunta Clássica", em vez de simplesmente "Adjunta", porque, hoje em dia, o termo "adjunta" é reservado para outro conceito totalmente diferente.

Teorema 6.19
Seja A uma matriz quadrada de ordem n qualquer. Então,

$$\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I$$

sendo I a matriz identidade. Assim, se $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Exemplo 6.20
Por utilizar a técnica sugerida no teorema acima vamos obter a inversa de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso, precisamos determinar os cofatores Δ_{ij} da matriz A. Vamos construir uma matriz intermediária D e, por fim, obter a $\operatorname{adj}(A)$ que é D^t.

$$D = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -3 & 1 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto,

$$\operatorname{adj}(A) = D^t = \begin{bmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sabendo que $\det(A) = 2$ segue que

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 & -1 \\ 1/2 & -3/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

6.5 Determinante do Produto

Antes de obtermos este resultado vamos ver como se comporta o determinante, quando o aplicamos em matrizes elementares:

(a) Se E_1 é a matriz obtida por executar $\ell_i \to \ell_i + k\ell_j$ na matriz identidade, então, $\det(E_1) = 1$;

(b) Se E_2 é a matriz obtida por executar $\ell_i \to k\ell_i$ com $k \neq 0$ na matriz identidade, então, $\det(E_2) = k$;

(c) Se E_3 é a matriz obtida por executar $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$ na matriz identidade, então, $\det(E_3) = -1$;

(d) Se A é uma matriz qualquer e E é uma matriz elementar, então, $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

Teorema 6.21
Se A e B são matrizes $n \times n$, então $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Demonstração: (1ª caso) Se A ou B não são invertíveis, logo pode acontecer: a) A invertível e B não é; b) B invertível e A não é; c) A e B são ambas não invertíveis. Então, nas três situações, podemos concluir que AB também não é invertível. De fato, se a) ocorre então existe A^{-1} e admita que AB seja invertível, nesse caso, $B = A^{-1}(AB)$ também é invertível. Se ocorrer b) tratamos da mesma maneira. Se ocorrer c) suponha, por absurdo, que AB é invertível, nesse caso, existe C, tal que $C(AB) = I = (CA)B$ e, portanto, B é invertível, o que é um absurdo.

Logo, se A ou B não é invertível, então AB também não é invertível e $\det(AB) = 0$ e como $\det(A) = 0$ ou $\det(B) = 0$ segue a igualdade.

(2ª caso) Se A e B são invertíveis, sabemos que existe uma sequência finita de operações elementares (sobre as linhas) $E_1, \ldots, E_k$ que tornam A a matriz identidade, isto é, $I = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}A$ Daí temos:

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_k IB)$$

e aplicando um número finito de vezes a propriedade (d) acima obtemos:

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det(E_1)\det(E_2 \cdots E_{k-1}B) \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{k-1}E_k)\det(B) \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{k-1})\det(E_k)\det(B) \\
&= \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_{k-1}E_k)\det(B) \\
&= \det(E_1E_2\cdots E_{k-1}E_kI)\det(B) = \det(A)\det(B).
\end{aligned}$$

□

Teorema 6.22
Seja A uma matriz $n \times n$. A matriz A é invertível se, e somente se, $\det(A) \neq 0$, *e neste caso* $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se A é invertível existe uma matriz B, tal que $AB = I$, aplicando o determinante dos dois lados desta igualdade obtemos:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(I) = 1.$$

Isso implica que $\det(A) \neq 0$ e também que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.

($\Leftarrow$) Se $\det(A) \neq 0$ e seja B a adjunta clássica de A, então sabemos que $BA = \det(A)I$, daí temos que $\frac{1}{\det(A)}BA = I$, isto é, ao multiplicarmos $\frac{1}{\det(A)}B$ por A obtemos I, e como a inversa de uma matriz é única, segue que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}B$. □

6.6 Matrizes em Blocos

O principal resultado dessa seção é o seguinte:

Teorema 6.23
Seja B uma matriz quadrada triangular inferior (superior) em blocos com os blocos diagonais $A_1, A_2, \ldots, A_k$. Então,

$$\det(B) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_k).$$

Exemplo 6.24
Calcule o determinante de $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & -9 & -4 \\ 5 & -1 & 1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$. Observe que B é uma matriz triangular superior em blocos. Pelo teorema basta calcularmos o determinante de cada bloco diagonal:

$$\det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = -10 - 3 = -13, \qquad \det\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = 5.$$

Então, $\det(B) = (-13)(5) = -65$.

Corolário 6.25
Seja $B = [b_{ij}]$ uma matriz quadrada triangular inferior (superior). Então,

$$\det(B) = b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}.$$

Observação 6.26
Seja $N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, em que A, B, C e D são matrizes quadradas. Em geral, não é válido que $\det(N) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$. (confira o exercício P6.8).

6.7 Área e Volume através do Determinante

Nesta seção mostraremos que os determinantes podem ser usados para calcular a área e o volume, tal como foi mencionado na introdução do capítulo. Faremos apenas para o $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. E generalizamos o conceito de volume, usando estes métodos para espaços de dimensão n maior que 3.

Teorema 6.27
Se A é uma matriz de ordem 2, a área do paralelogramo determinado pelas colunas de A é igual ao $|\det(A)|$. Se A é de ordem 3, o volume do paralelepípedo determinado pelas colunas de A é igual ao $|\det(A)|$.

Demonstração: No caso de A ser de ordem 2, o resultado é verdadeiro se A for diagonal, pois

$$\left|\det \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}\right| = |ad| = \{\text{área do retângulo de lados a e d}\}.$$

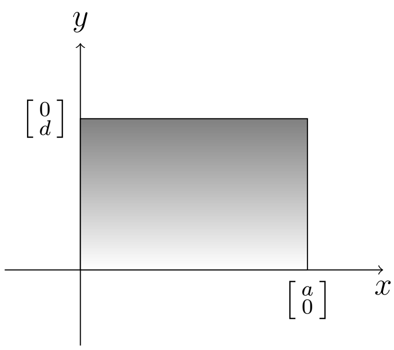


Figura 6.1: Área$= |ad|$

Suponha que $A = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2]$ é uma matriz qualquer. Para provarmos o resultado basta verificarmos que a matriz A pode ser transformada em uma matriz diagonal sem que com isso altere o $|\det(A)|$ e nem a área do paralelogramo. Já sabemos que trocar uma coluna com a outra não altera o valor de $|\det(A)|$, assim como somar a uma coluna um múltiplo da outra coluna (verifique que isso é o suficiente para transformar qualquer matriz em uma matriz diagonal).

Claramente a área do paralelogramo com respeito aos vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ é a mesma que com respeito a $\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1$. Além disso, se chamarmos a reta determinada por $\mathbf{0}$ e $\mathbf{c}_1$ de L, então a reta $\mathbf{c}_2 + L$ é uma reta paralela a L, e $\mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_1$ pertence a reta $\mathbf{c}_2 + L$ para todo t. Como a área de um paralelogramo é o comprimento da base vezes a sua altura com respeito a esta base, segue que a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ é sempre igual a área do paralelogramo determinado por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_1$. Veja a próxima figura para entender melhor o que acontece.

No caso de A ter ordem 3, o raciocínio é semelhante. No caso em que A é diagonal o resultado é claramente verdadeiro.

Se $A = [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$ é uma matriz qualquer, podemos transformá-la em uma matriz diagonal, por permutar as suas colunas e somar a uma coluna um múltiplo

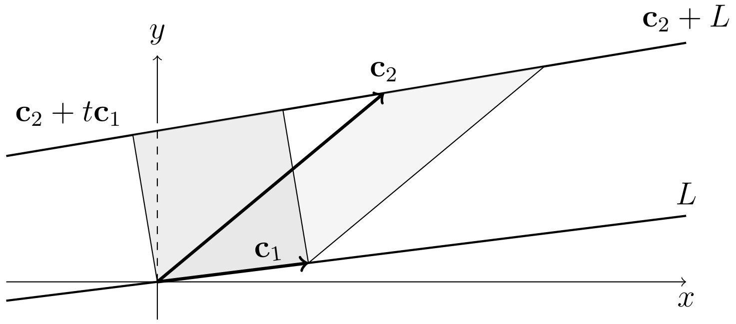


Figura 6.2: Área$= |ad - bc|$

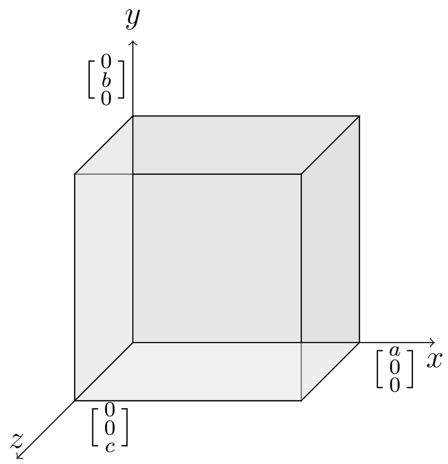


Figura 6.3: Volume do paralelepípedo é $|abc|$

de outra. Claramente estas operações não alteram o $|\det(A)|$. Vamos ver que essas operações não alteram o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$. Lembre-se de que o volume de um paralelepípedo é determinado pela multiplicação da área de uma de suas faces pela altura com respeito a essa face. Vamos considerar a face determinada pelos vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3$. Observe que, pelo mesmo argumento usado no $\mathbb{R}^2$, a área dessa face não se altera se trocarmos os vetores $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_1$ qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$.

Por simplicidade vamos supor que a face determinada por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3$ coincida com o plano xz veja a próxima figura

Considere o plano $P = \operatorname{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3\}$, então a face de cima do paralelepípedo está no plano $P+\mathbf{c}_2$ obtido por transladar o plano P. O volume do paralelepípedo é igual a área determinada por $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_3$, vezes a altura de $\mathbf{c}_2$ com respeito ao plano P. Todos vetores da forma $\mathbf{c}_2 + r\mathbf{c}_1$ e $\mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_3$, com $r, t \in \mathbb{R}$, tem a mesma altura com respeito ao plano P, uma vez que se encontram no plano $P + \mathbf{c}_2$ que é paralelo a P. Portanto, o volume do paralelepípedo não se altera quando trocamos $[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$ por $[\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 + r\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_3]$, uma vez que isso é equivalente a deslizar a face superior do paralelepípedo no plano $P + \mathbf{c}_2$. Veja a figura abaixo

□

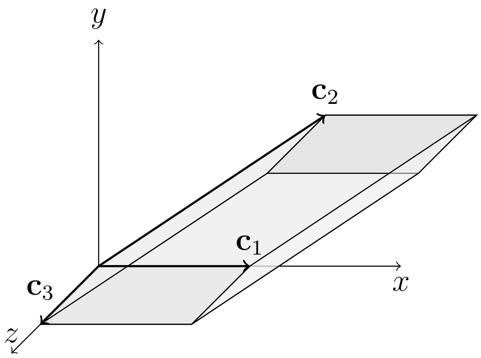


Figura 6.4: Paralelepípedo

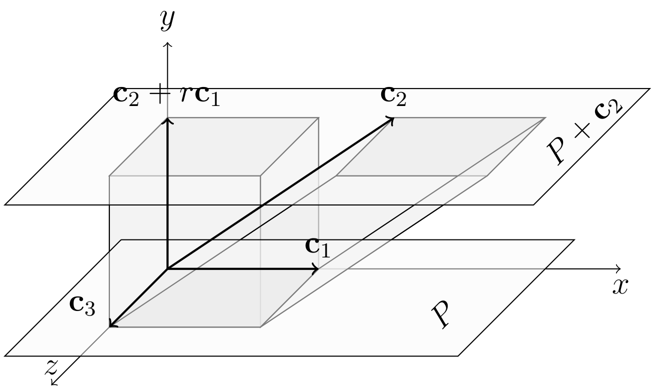


Figura 6.5: Deslizando a face do paralelepípedo

Exemplo 6.28
Calcule a área do paralelogramo determinado pelos pontos $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Para começar, translade o paralelogramo até que o vértice $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ coincida com a origem. Para isso, subtraia $\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}$ de todos os vértices. O novo paralelogramo tem a mesma área e vértices $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$. Logo, o paralelogramo é determinado pelas colunas de

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},$$

e daí, $|\det(A)| = |-28| = 28\, uni^2$ é a área do paralelogramo inicial.

Exercícios resolvidos

R6.1. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes.

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b) \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \qquad c) \quad C = \begin{bmatrix} t-5 & 6 \\ 3 & t+2 \end{bmatrix}.$$

Solução: Usando a fórmula do determinante 2×2 temos:

a) $\det(A) = 6(3) - 5(2) = 18 - 10 = 8$,

b) $\det(B) = 14 + 12 = 26$,

c) $\det(C) = (t-5)(t+2) - 18 = t^2 - 3t - 10 - 18 = t^2 - 10t - 28$. $\square$

R6.2. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes.

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b)\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ -2 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Usando a fórmula do determinante 3×3 e escalonando temos:

a) $\det(A) = 12 - 36 + 0 - (-32) - 0 - (-9) = 17$,

b) fazendo $\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1$ e $\ell_3 \to \ell_3 + \ell_1$ obtemos que

$$\det(B) = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = 2(-16 - (-6)) = -20. \qquad \square$$

R6.3. Calcule o determinante de cada uma das matrizes seguintes:

$$a)\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & -6 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad b)\quad B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Solução: Em a), se fizermos $\ell_2 \to \ell_2 + 2\ell_1$, $\ell_3 \to \ell_3 - \ell_1$, $\ell_4 \to \ell_4 + \ell_1$, $\ell_3 \longleftrightarrow \ell_4$ e, por fim, $\ell_3 \to \ell_3 + 4\ell_1$ ficamos com a matriz:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -23 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = (-1)(1)(1)(-23)(4) = 92.$$

Em b), se fizermos $\ell_1 \to \ell_1 - 2\ell_2$, $\ell_3 \to \ell_3 - \ell_2$ e $\ell_4 \to \ell_4 + \ell_2$ e na matriz resultante expandirmos com respeito à primeira coluna, teremos:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = (-1)\det \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nessa matriz faça $\ell_1 \to \ell_1 - 4\ell_2$ e $\ell_4 \to \ell_4 - 3\ell_2$ e obtemos

$$\det(B) = (-1)\det \begin{bmatrix} 0 & 7 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 \end{bmatrix} = (-1)(-1)\det \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \det \begin{bmatrix} 7 & 1 & 4 \\ 5 & -1 & 2 \\ 0 & 6 & 5 \end{bmatrix} = 24.$$

$\square$

Transposta e Determinante

R6.4. Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. Mostre que:

$$\det(A) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \sigma(P_{i_1\ldots i_n}) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}, \tag{6.1}$$

sendo $P_{i_1\ldots i_n}$ uma matriz de permutação e $\sigma(P_{i_1\ldots i_n}) = \pm 1$ o sinal desta matriz de permutação.

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$. E podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_1 &= a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n \\
\mathbf{c}_2 &= a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
\mathbf{c}_n &= a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{nn}\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

sendo $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ a base canônica do $\mathbb{R}^n$. E, assim,

$$\begin{aligned}
\det(A) &= D(a_{11}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n1}\mathbf{e}_n, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) \\
&= a_{11} D(\mathbf{e}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) + \cdots + a_{1n} D(\mathbf{e}_n, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n)
\end{aligned}$$

Se substituírmos $\mathbf{c}_2$ por $a_{12}\mathbf{e}_1 + \cdots + a_{n2}\mathbf{e}_n$ obteremos uma expressão semelhante, só que com mais termos. Feitas todas as substituições de $\mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$, e considerando que nos termos cujos índices têm repetições D é igual a zero, chegamos a expressão:

$$\begin{aligned}
\det(A) = D(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n) &= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} D(\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_n}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} \det(P_{i_1 i_2 \ldots i_n}) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \sigma(P_{i_1 i_2 \ldots i_n}) a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.
\end{aligned}$$

No somatório acima i_l é diferente de todos os outros i_k se $l \neq k$. $\square$

R6.5. Prove o teorema 6.14. Para todo $n > 1$, se A é uma matriz $n \times n$, então $\det(A) = \det(A^t)$.

Solução: Seja $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}] = A^t$, portanto, $b_{ij} = a_{ji}$. Usando as equação para o determinante, deduzida no exercício R6.4, obtemos:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= \sum_{i_1,\dots,i_n} \sigma(P_{i_1\dots i_n}) b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \\
&= \sum_{i_1,\dots,i_n} \det \begin{bmatrix} e_{i_1} & \cdots & e_{i_n} \end{bmatrix} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n} \det \begin{bmatrix} e_{j_1} & \cdots & e_{j_n} \end{bmatrix}^t a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n} \det \begin{bmatrix} e_{j_1} & \cdots & e_{j_n} \end{bmatrix} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} \\
&= \sum_{j_1,\dots,j_n} \sigma(P_{j_1\dots j_n}) a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = \det(A).
\end{aligned}$$

Para entender melhor o que aconteceu na terceira igualdade veja a observação a seguir.

Dado um termo $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ do somatório do determinante que aparece no exercício R6.4. Observe que cada fator $a_{i_j k}$ tem dois índices i_j e k, por exemplo: $a_{i_2 2}$ tem o índice i_2 e o índice 2. Todos os valores do $\{1, 2, \dots, n\}$ aparecem no primeiro índice i_2. Então podemos reordenar os termos, de tal forma que o primeiro índice apareça com valores crescentes, desta forma podemos determinar $j_1, \dots, j_n$, tais que $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n} = a_{1 j_1} a_{2 j_2} \cdots a_{n j_n}$. Por exemplo, na expressão do determinante de ordem 3×3 aparece o seguinte termo: $a_{31} a_{12} a_{23}$, que podemos reescrever da seguinte forma: $a_{12} a_{23} a_{31}$.

Além disso, a matriz $P_{j_1 \dots j_n}$ é obtida quando tomamos $(P_{i_1 \dots i_n})^t$, em que é possível verificar que $\sigma(P_{i_1 \dots i_n}) = \sigma(P_{j_1 \dots j_n})$. Por exemplo, associado ao termo $a_{31} a_{12} a_{23}$ temos a matriz de permutação P_{312}, como $a_{31} a_{12} a_{23} = a_{12} a_{23} a_{31}$, e obtemos a matriz P_{231} associado ao lado direito da igualdade. Agora verifique que $P_{231} = P_{312}^t$ e que $\det(P_{231}) = \det(P_{312}^t)$. $\square$

R6.6. Mostre que o determinante de qualquer matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ pode ser calculando fazendo a expansão em qualquer de suas linhas ou colunas. Chamamos esta expansão de **Expansão de Laplace** do determinante. Assim, a expansão na i-ésima linha e na j-ésima coluna pode ser assim representada:

$$\det(A) = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\Delta_{ik} \text{ e}$$

$$\det(A) = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{lj}\Delta_{lj}, \text{ respectivamente.}$$

Solução: Faremos a demonstração somente para a expansão pela j-ésima coluna. Considere a matriz escrita $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{j-1} & \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_{j+1} & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$

como colunas, então:

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \det\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{j-1} & \mathbf{c}_j & \mathbf{c}_{j+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}\\
&= D\left(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_n\right)\\
&= -D\left(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_n\right)\\
&\vdots\\
&= (-1)^{j-1} D\left(\mathbf{c}_j, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{j-1}, \mathbf{c}_{j+1}, \ldots, \mathbf{c}_n\right)\\
&= (-1)^{j-1}\det\begin{bmatrix}\mathbf{c}_j & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{j-1} & \mathbf{c}_{j+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Seja $B = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_j & \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{j-1} & \mathbf{c}_{j+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$ e vamos calcular o determinante por fazer a expansão na primeira coluna de B

$$\begin{aligned}
\det(A) &= (-1)^{j-1}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+1}\det(B_{k1})\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1+j-1} a_{kj}\det(A_{kj})\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j}\det(A_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\Delta_{kj}.
\end{aligned}$$

No caso, da expansão do determinante com respeito a uma linha é só lembrar que o determinante também é linear antissimétrico com respeito às linhas da matriz. □

Determinantes e sistema de equações lineares

R6.7. Prove o teorema 6.17. O sistema (quadrado) $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ possui uma única solução se, e só se, $\det(A) \neq 0$. Nesse caso, a solução é dada por:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}.$$

Solução: Suponha que $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j$ seja uma solução da equação e $\mathbf{e}_j$ seja os vetores da base canônica. Além disso, se $A = \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}$, logo $A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j A\mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{c}_j = \mathbf{b}$, isso se traduz por:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{c}_j = b \text{ e } b_i = \sum_{j=1}^{n} x_j a_{ij}.$$

Assumindo que $\mathbf{x}$ é uma solução então:

$$\begin{aligned}
A_k &= \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{k-1} & \mathbf{b} & \mathbf{c}_{k+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}\mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{k-1} & \sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{c}_j & \mathbf{c}_{k+1} & \cdots & \mathbf{c}_n\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned}
\det(A_k) &= D(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}, \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{k+1}, \ldots, \mathbf{c}_n) \\
&= \sum_{j=1}^{n} x_j D\left(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{c}_j, \mathbf{c}_{k+1}, \ldots, \mathbf{c}_n\right) \\
&= x_k D\left(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_{k-1}, \mathbf{c}_k, \mathbf{c}_{k+1}, \ldots, \mathbf{c}_n\right) \\
&= \det \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_{k-1} & \mathbf{c}_k & \mathbf{c}_{k+1} & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix} = x_k \det(A).
\end{aligned}$$

Logo, se $\det(A) \neq 0$ segue que:

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)}.$$

Como consequência se $\det(A) \neq 0$ a solução existe e é única. $\square$

Adjuntas clássicas e inversas

R6.8. Prove o teorema 6.19. Seja A uma matriz quadrada de ordem n qualquer. Então:

$$\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I,$$

sendo I a matriz identidade. Assim, se $\det(A) \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

Solução: Se $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_k & \cdots & x_n \end{bmatrix}^t \in \mathbb{R}^n$ é um vetor qualquer, e seja $A = [a_{ij}]$ vista como n colunas, isto é, $A = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & \cdots & \mathbf{c}_k & \cdots & \mathbf{c}_n \end{bmatrix}$, digamos que $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 & \cdots & u_k & \cdots & u_n \end{bmatrix}^t = A\mathbf{x}$. Por fazer a expansão na k-ésima coluna (veja o exercício R6.6) de A_k, onde A_k é a matriz obtida por substituir $\mathbf{c}_k$ por $\mathbf{u}$, obtemos:

$$\det(A_k) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} u_i \det(A_{ik}), \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, n.$$

E pelo exercício R6.7 temos

$$x_k \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \det(A_{ik}) u_i, \text{ para todo } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Lembrando que $\Delta_{ik} = (-1)^{i+k} \det(A_{ik})$, podemos expressar estas n igualdades, usando a multiplicação de matriz por vetor, como a igualdade entre os vetores

$$\det(A) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \cdots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \cdots & \Delta_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} = \operatorname{adj}(A)\mathbf{u}.$$

Como $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ temos que

$$\det(A)\mathbf{x} = \operatorname{adj}(A)\mathbf{u} = \operatorname{adj}(A)A\mathbf{x}, \quad \forall\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$\operatorname{adj}(A)A = \det(A)I.$$

E, no caso de $\det(A) \neq 0$, temos que $\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = A^{-1}$. $\square$

R6.9. Prove o teorema 6.23. Seja B uma matriz quadrada triangular inferior (superior), em blocos, com os blocos diagonais $A_1, A_2, \ldots, A_k$, então,

$$\det(B) = \det(A_1)\det(A_2)\cdots\det(A_k).$$

Solução: Vamos demonstrar o resultado para um caso em particular. Considere a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} a & b & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ c & d & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i & j \\ 0 & 0 & k & l & m \end{bmatrix}.$$

Observe que A_1 é a matriz 2×2 e A_2 é a matriz 3×3. Vamos calcular o determinante de B por fazer, duas vezes, a expansão de Laplace na primeira linha, a seguir:

$$\begin{aligned}
\det(B) &= a \det \begin{bmatrix} d & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & e & f & g \\ 0 & h & i & j \\ 0 & k & l & m \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} b & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & e & f & g \\ 0 & h & i & j \\ 0 & k & l & m \end{bmatrix} \\
&= ad \det \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \\ k & l & m \end{bmatrix} - cb \det \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \\ k & l & m \end{bmatrix} \\
&= (ad - bc) \det \begin{bmatrix} e & f & g \\ h & i & j \\ k & l & m \end{bmatrix} = \det(A_1)\det(A_2).
\end{aligned}$$

O caso geral segue por raciocínio semelhante. $\square$

R6.10. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Encontre (a) $\operatorname{adj}(B)$, (b) $\det(B)$ e (c) B^{-1}, usando a $\operatorname{adj}(B)$.

Solução: Vamos começar por determinar adj(B). Para isto precisamos determinar todos os $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j}\det(A_{ij})$, então:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & (-1)^{1+2}\det(A_{12}) & (-1)^{1+3}\det(A_{13}) \\ (-1)^{2+1}\det(A_{21}) & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & (-1)^{2+3}\det(A_{23}) \\ (-1)^{3+1}\det(A_{31}) & (-1)^{3+2}\det(A_{32}) & (-1)^{3+3}\det(A_{33}) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

E como sabemos que adj$(B)B = \det(B)I$, calculando apenas a posição 11 da matriz adj$(B)B$, obtemos o valor do determinante, então:

$$\operatorname{adj}(B)B = \bar{B}^tB = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\det(B) = -2$ e

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

□

Exercícios propostos

P6.1. Use a regra de Cramer para calcular as soluções dos sistemas:

$$a)\begin{cases} 5x + 7y = 3 \\ 2x + 4y = 1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 5x + 7y = 7 \\ -3x + z = -8 \\ y + 2z = -3 \end{cases} \qquad c)\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -x + 2z = 2 \\ 3x + y + 3z = -2 \end{cases}$$

P6.2. Use a adjunta para calcular uma fórmula para a matriz inversa de $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

P6.3. Calcule $\det A$, sendo

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 \\ 5 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{(c)} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 19 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & \pi & -5 & 0 & 0 \\ 4 & \sqrt{6} & 3 & 1/6 & 0 \\ 8 & 4 & \sqrt{7} & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

P6.4. Encontre A^{-1}, sendo

$$(a)\, A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (b)\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & x^2 \\ 2 & 2 & x^2 \end{bmatrix} \quad (c)\, A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

P6.5. Seja A uma matriz ortogonal, isto é, $A^t A = I$. Mostre que $\det(A) = \pm 1$.

P6.6. Mostre que

$$\det \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

P6.7. Seja V o espaço vetorial das matrizes $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de ordem 2. Decida se a aplicação $D : V \to \mathbb{R}$ dada é bilinear (em relação as linhas)

$$(a) \quad D(M) = a + d, \quad (b) \quad D(M) = ac - bd$$
$$(c) \quad D(M) = ad, \quad (d) \quad D(M) = ab + cd.$$

P6.8. Sejam A, B, C e D matrizes quadradas de ordem n que comutam. Considere a matriz de ordem $2n$ em blocos $N = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, então $\det(N) = \det(A)\det(D) - \det(B)\det(C)$. Mostre com um exemplo que a afirmação é falsa se as matrizes não comutarem.

P6.9. Determine uma fórmula para a área do triângulo cujos vértices são $\mathbf{0}$,$\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ no $\mathbb{R}^2$.

P6.10. Seja R o triângulo com vértices $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ e (x_3, y_3). Mostre que

$$\{\text{área do triângulo}\} = \frac{1}{2} \left| \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} \right|.$$

P6.11. Encontre a área do paralelogramo cujos vértices são dados por:

$$a)\, \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ 4 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 11 \\ 6 \end{smallmatrix}\right]; \quad b)\, \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 5 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -4 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]; \quad c)\, \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ -2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 6 \\ -1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right].$$

P6.12. Determine o volume do paralelepípedo que tem um vértice na origem e os vértices adjacentes nos pontos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

P6.13. Para cada uma das matrizes a seguir calcule (a) adj(A), (b) $\det(A)$ e (c) A^{-1}, usando a adj(A).

$$\text{(a)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}.$$