Capítulo 4

Subespaços, Bases e Dimensão

4.0 Introdução

Em diversos exemplos e exercícios dos capítulos anteriores, buscamos representações geométricas de certos subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$. O exemplo 2.11 e os exercícios P2.16, P2.17, P2.21 e P2.22 tratam da interpretação geométrica do *span* de determinados conjuntos de vetores. Nos exemplos 3.12 e 3.13, interpretamos o núcleo de certas matrizes.

Talvez você tenha reparado que alguns tipos de subconjuntos são recorrentes nesses exemplos. Referimo-nos, em particular, a retas passando pela origem em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ e a planos passando pela origem em $\mathbb{R}^3$. A recorrência desses tipos de subconjuntos não é um acaso: eles são exemplos de *subespaços*. Um subespaço é um tipo especial de subconjunto de $\mathbb{R}^n$, que tem papel central em álgebra linear. Veremos que o *span*, o espaço-coluna e o núcleo de uma matriz são subespaços. O conceito será definido precisamente na seção a seguir, e o restante do capítulo será dedicado a estudar suas propriedades.

Boa parte do material deste capítulo será de natureza mais abstrata do que o dos capítulos anteriores. Um pouco de abstração é inevitável nesta etapa, pois o objetivo, essencialmente, é descrever as propriedades de certos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, onde n pode ser qualquer inteiro positivo. Como podemos descrever um subconjunto de $\mathbb{R}^5$, de $\mathbb{R}^{17}$ ou de $\mathbb{R}^{821}$ sem usar conceitos abstratos? Uma visualização geométrica, direta e concreta desses espaços é evidentemente impossível.

4.1 Subespaços de $\mathbb{R}^n$

Comecemos fazendo uma breve recordação sobre subconjuntos. Dizer que Y é um **subconjunto** de X é o mesmo que dizer que todo elemento de Y é um elemento de X. Nesse caso, dizemos também que Y está *contido* em X, e denotamos $Y \subseteq X$.[1] Quando dizemos, então, que S é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$,

[1]Quando x é um *elemento* do conjunto X, geralmente dizemos que x *pertence* a X, e denotamos $x \in X$. Mas podemos também dizer que x está contido em X. Cuidado com essa ambiguidade da terminologia.

queremos dizer que S é um conjunto de vetores, cada um de n coordenadas reais. Observe que, por definição, o próprio $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Por outro lado, o $\mathbb{R}^2$ *não* é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$, pois um elemento de $\mathbb{R}^2$ (uma lista ordenada de *dois* números) *não* pertence a $\mathbb{R}^3$ (cujos elementos são listas de *três* números).

Definição 4.1
Seja V um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que V é um **subespaço** de $\mathbb{R}^n$ se as seguintes condições forem satisfeitas:

1. O vetor zero $\mathbf{0}_n$ de $\mathbb{R}^n$ pertence a V.

2. Para quaisquer vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ de V, a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ também pertence a V.

3. Para qualquer $\mathbf{u}$ de V e qualquer escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, o produto $\alpha\mathbf{u}$ pertence a V.

O conjunto $\mathbb{R}^n$ é um subespaço dele próprio. De fato, $\mathbb{R}^n$ é um subconjunto dele próprio que contém o vetor zero. Além disto, se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e α é um escalar, então a soma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ e o produto $\alpha\mathbf{u}$ são vetores de $\mathbb{R}^n$. O conjunto $\mathbb{R}^n$, portanto, satisfaz as condições da definição 4.1.

O subconjunto $\{\mathbf{0}_n\}$ do $\mathbb{R}^n$ que contém apenas o vetor zero é também um subespaço (verifique que este conjunto satisfaz as condições da definição). Por não ter muita graça, este é chamado de **subespaço trivial** do $\mathbb{R}^n$.

Cuidado!
Atenção para a premissa da definição 4.1: Para que V seja um subespaço de $\mathbb{R}^n$, *V tem que ser um subconjunto de $\mathbb{R}^n$* (além de satisfazer as condições 1 a 3). O $\mathbb{R}^2$ *não* é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, por exemplo, pois *não é sequer um subconjunto de $\mathbb{R}^3$* (ver o parágrafo que antecede a definição 4.1). Pela mesma razão, $\mathbb{R}^n$ *não* é um subespaço de $\mathbb{R}^m$ quando $n \neq m$.

Observação 4.2
O exercício P4.2 pede que você verifique o seguinte fato, que segue da definição 4.1. Se V é um subespaço e os vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ pertencem a V, então qualquer combinação linear

$$c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$$

também pertence a V. Ou seja, se cada $\mathbf{a}_j$ pertence a V, então o conjunto gerado por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ está contido em V (em símbolos, $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq V$).

Na realidade, vale também a recíproca. Com efeito, cada $\mathbf{a}_j$ pertence a $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, em vista da observação 2.15. Assim, se $\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq V$, então $\mathbf{a}_j \in V$. Temos, portanto, o resultado a seguir.

Proposição 4.3
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, e sejam $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vetores de $\mathbb{R}^n$. O conjunto gerado por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ está contido em V ($\text{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq V$) se e somente se cada um dos vetores $\mathbf{a}_j$ pertence a V.

A hipótese de que V seja um subespaço é muito importante na observação 4.2 e na proposição 4.3 (veja o exercício P4.3).

Os próximos resultados mostram que o subespaço gerado por vetores, o espaço das colunas e o núcleo de uma matriz são subespaços.[2] As provas são simples e elucidativas, pois consistem na verificação direta das condições da definição 4.1.

Proposição 4.4
Sejam $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ vetores de $\mathbb{R}^n$. O subespaço gerado por $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ (ou seja, $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$) é, de fato, um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Demonstração: Em primeiro lugar, verificamos a premissa da definição 4.1: Como $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ são vetores de $\mathbb{R}^n$, é claro que suas combinações lineares também o são, logo $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Agora, a condição 1: O vetor zero $\mathbf{0}_n$ pertence a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, pela observação 2.14 (página 51). Condição 2: Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencem a $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, então existem pesos $c_1, \dots, c_m$ e $d_1, \dots, d_m$ tais que

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = d_1\mathbf{a}_1 + \cdots + d_m\mathbf{a}_m. \tag{4.1}$$

Assim,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (c_1 + d_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 + d_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_m + d_m)\mathbf{a}_m,$$

isto é, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$. Isso é o mesmo que dizer $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Finalmente, verificamos a condição 3: Se $\mathbf{u} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$, mais uma vez podemos escrever $\mathbf{u}$ como em (4.1). E, se α é um escalar qualquer, então

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m) = (\alpha c_1)\mathbf{a}_1 + (\alpha c_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (\alpha c_m)\mathbf{a}_m,$$

logo $\alpha\mathbf{u} \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. □

Como o espaço-coluna de uma matriz é, por definição, o espaço gerado por seus vetores-coluna, obtemos a seguinte consequência direta dessa proposição.

Corolário 4.5
Seja A uma matriz $n \times m$. O espaço-coluna de A ($\operatorname{Col} A$) é um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4.6
Sejam $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ os vetores do exemplo 2.21, na página 54, e seja $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Pela proposição 4.4, o conjunto W é um subespaço de $\mathbb{R}^3$. Mais concretamente, W é um *plano* passando pela origem de $\mathbb{R}^3$, conforme o exercício P2.21. Recapitulando esse exercício, vimos que os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ são *coplanares*. É fácil ver, no entanto, que esses vetores *não são* colineares. A conclusão de que o conjunto W gerado por eles seja um plano, portanto, é intuitiva (veja também o exercício P2.22). Uma região do plano W contendo os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, é ilustrada na figura 2.7 (página 62).

[2] Assim, a terminologia "subespaço gerado", que introduzimos no capítulo 2, está finalmente justificada.

No exemplo acima, usamos fortemente os resultados do exercício P2.21. Nos exemplos 4.28 e 4.29 da seção 4.3, veremos uma forma mais sistemática de fornecer descrições geométricas de subespaços de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

Proposição 4.7
Seja A uma matriz $n \times m$. O núcleo de A ($\operatorname{Nuc} A$) é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

Demonstração: Primeiramente, observamos que $\operatorname{Nuc} A$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^m$ (recorde a definição 3.8). Condição 1: Em vista da observação 3.10, o vetor zero de $\mathbb{R}^m$ pertence a $\operatorname{Nuc} A$ ($\mathbf{0}_m$ é sempre uma solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}_n$). Condição 2: Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencem a $\operatorname{Nuc} A$, então, por definição, $A\mathbf{u} = \mathbf{0}_n$ e $A\mathbf{v} = \mathbf{0}_n$. Usando as propriedades algébricas do produto matriz-vetor, temos $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = \mathbf{0}_n + \mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n$, logo o vetor $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertence a $\operatorname{Nuc} A$. Verificamos a condição 3 similarmente: Se $\mathbf{u} \in \operatorname{Nuc} A$ e α é um escalar, então $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u} = \alpha\mathbf{0}_n = \mathbf{0}_n$, logo $\alpha\mathbf{u} \in \operatorname{Nuc} A$. □

Cuidado!
Mais uma vez, alertamos o leitor para não confundir $\operatorname{Col} A$ e $\operatorname{Nuc} A$. Em particular, se A é uma matriz $n \times m$, então $\operatorname{Col} A$ é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, ao passo que $\operatorname{Nuc} A$ é um subespaço de $\mathbb{R}^m$.

4.2 Conjuntos geradores e bases de subespaços

Considere os seguintes n vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.2}$$

Qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito como uma combinação linear desses vetores, ou seja, eles geram $\mathbb{R}^n$ (recorde a definição 2.20 e o teorema 2.24). De fato, se $\mathbf{v}$ é um vetor de coordenadas $v_1, v_2, \ldots, v_n$, então

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \cdots + v_n\mathbf{e}_n. \tag{4.3}$$

Ademais, esta é a *única* forma de representar $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. Esse fato está associado à independência linear dos vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ (conforme a proposição 3.20), mas o exercício P4.6 pede que você verifique-o diretamente.

Em síntese, o conjunto $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ tem a seguinte propriedade interessante: qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser escrito de uma única maneira como combinação linear de seus elementos. Dizemos que este conjunto é uma *base* de $\mathbb{R}^n$. Nesta seção vamos definir esse conceito precisamente. De fato, introduziremos o conceito de base de um *subespaço*, que não precisa ser o $\mathbb{R}^n$ inteiro.

Primeiro, precisamos generalizar a definição 2.20.

Definição 4.8
Seja $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ um conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ e seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se o subespaço gerado por $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ coincide com V, isto é, se

$$V = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}, \tag{4.4}$$

dizemos que $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ é um **conjunto gerador** do subespaço V. Podemos dizer também, mais informalmente, que os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ **geram** V, ou ainda que o conjunto $\mathcal{G}$ **gera** V.

É claro que a condição (4.4) será válida se e somente se forem válidas as seguintes duas condições:[3] (i) $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\} \subseteq V$, e (ii) $V \subseteq \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. Em vista da proposição 4.3, a condição (i) equivale a dizer que cada vetor $\mathbf{a}_j$ pertence a V. A condição (ii), por sua vez, equivale a dizer que qualquer vetor de V pode ser gerado pelos vetores $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$. Às vezes, é mais conveniente considerar separadamente estas duas "sub-condições" (como no exemplo 4.16, adiante). Sintetizamos essas considerações na seguinte observação.

Observação 4.9
O conjunto $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ gera V se e somente se valem as seguintes condições: (i) cada $\mathbf{a}_j$ está em V; e (ii) qualquer vetor de V é gerado por $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_m$.

Agora estamos prontos para enunciar a principal definição desta seção.

Definição 4.10
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Um conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ de vetores de $\mathbb{R}^n$ é dito uma **base** do subespaço V se as seguintes condições estiverem satisfeitas:

1. $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador para V, isto é, $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} = V$. Conforme a observação 4.9, esta condição se desdobra em duas:
   (i) Cada vetor $\mathbf{a}_j$ pertence a V.
   (ii) Qualquer vetor $\mathbf{v}$ de V pode ser gerado por $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_p$.
2. O conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é linearmente independente.

Repetindo, uma base de V é um *conjunto gerador de V* que é também *linearmente independente.*

Enfatizamos a "sub-condição" 1(i): Se $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é uma base de V, então *cada um dos vetores $\mathbf{a}_j$ tem que pertencer a V.* Na observação abaixo, destacamos outra condição necessária (mas não suficiente) para que um conjunto seja uma base de um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

[3] É necessário que *ambas* sejam verdadeiras para que valha $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$.

Observação 4.11
Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é uma base de um subespaço V de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{B}$ *tem, no máximo, n elementos*. Ou seja, a condição $p \leqslant n$ é necessária. Isso segue da proposição 3.22, já que os elementos da base $\mathcal{B}$ são, afinal, vetores *linearmente independentes* de $\mathbb{R}^n$. Neste ponto, a hipótese $V \subseteq \mathbb{R}^n$ é importante.

Observação 4.12
Dizemos, *por convenção*, que a base do subespaço trivial $\{\mathbf{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$ é o conjunto vazio $\varnothing = \{\}$. Coerentemente, dizemos também que o conjunto vazio é linearmente independente, e que é um conjunto gerador para o subespaço trivial.

Exemplo 4.13
O conjunto $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, onde os $\mathbf{e}_j$ são dados em (4.2), é uma base de $\mathbb{R}^n$. Como vimos, esse conjunto gera $\mathbb{R}^n$ e, conforme o exercício P4.7, é também linearmente independente. Esse conjunto é chamado de **base canônica** de $\mathbb{R}^n$. A base canônica do $\mathbb{R}^2$, por exemplo, é $\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$, e a do $\mathbb{R}^3$ é $\left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right\}$.

Cuidado!
Estamos usando os mesmos símbolos ($\mathbf{e}_j$) para escrever vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$, de $\mathbb{R}^3$ ou de $\mathbb{R}^n$, para n qualquer! Denotamos, por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^2$ por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, e a de $\mathbb{R}^3$ por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Mas os $\mathbf{e}_j$ do primeiro conjunto são vetores de $\mathbb{R}^2$, e os $\mathbf{e}_j$ do segundo são vetores de $\mathbb{R}^3$. Já os $\mathbf{e}_j$ de (4.2) são vetores de $\mathbb{R}^n$. Cabe a *você* atentar ao contexto para sanar essa ambiguidade.

Observação
"Base *canônica*" significa base *padrão* ou *standard*. Problemas e aplicações são muitas vezes formulados em termos da base canônica, mas às vezes esta *não* é a base mais conveniente para se usar no desenvolvimento e resolução de tais problemas. Veremos exemplos disso no capítulo 8.

Exemplo 4.14
Sejam $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right]$. Verifique que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Solução: Esse exercício é muito simples. Para verificar as condições da definição 4.10, escalonamos a matriz $\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \to \ell_2 + 3\ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 \\ 0 & \boxed{11} \end{bmatrix}.$$

Pelo teorema 2.23, como a matriz $\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v}\end{bmatrix}$ tem uma posição-pivô em cada *linha*, o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ gera $\mathbb{R}^2$ (é evidente que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ pertencem a $\mathbb{R}^2$, logo a condição 1(i) é satisfeita). E, pelo teorema 3.17, como a matriz tem uma posição-pivô em cada *coluna* também, esse conjunto é linearmente independente. □

Exemplo 4.15
Sejam $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix}2\\5\end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix}8\\9\end{smallmatrix}\right]$. Determine se $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$.

Solução: O conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ gera $\mathbb{R}^2$ (verifique!), mas *não* é linearmente independente (um conjunto de três vetores em $\mathbb{R}^2$ nunca o é, conforme a proposição 3.22). Assim, esse conjunto *não* é uma base de $\mathbb{R}^2$. □

Exemplo 4.16
Sejam $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{bmatrix}$ os vetores do exemplo 4.6, e seja novamente $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Como vimos, W é um plano passando pela origem de $\mathbb{R}^3$. Evidentemente, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ é um conjunto gerador de W, pela própria definição de W. No entanto, esse conjunto *não* é uma base de W, pois não é linearmente independente (conforme o exemplo 3.15). Vamos verificar, em contrapartida, que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base de W.

A condição 1(i) da definição 4.10 é claramente satisfeita: $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ pertencem a W, em vista da observação 2.15. Para abordar a condição 1(ii), observamos primeiro que o vetor $\mathbf{a}_3$ é gerado por $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. De fato, $\mathbf{a}_3 = -4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$ (verifique!). Agora, seja $\mathbf{w} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3$ um vetor de W, isto é, um vetor qualquer gerado por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$. Ora, $\mathbf{w}$ pode ser escrito como combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ apenas, já que

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \\ &= c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3(-4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2) = (c_1 - 4c_3)\mathbf{a}_1 + (c_2 + 3c_3)\mathbf{a}_2. \end{aligned}$$

Assim, qualquer vetor de W é gerado por $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. Finalmente, temos que verificar que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é um conjunto linearmente independente (condição 2). Deixamos isso como um exercício para o leitor.

Na seção 4.5, veremos um método para encontrar, no caso geral, uma base para o subespaço gerado por um dado conjunto de vetores. Abordaremos também a construção, "na prática", de bases para o núcleo e o espaço-coluna de uma dada matriz.

No momento, vamos discutir alguns resultados teóricos, considerando um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^n$. Veremos, em particular, que todo subespaço de $\mathbb{R}^n$, de fato, possui uma base (veja o teorema 4.20, abaixo). As demonstrações são relegadas à seção 4.7, cuja leitura é opcional. No entanto, recomendamos que você leia os *enunciados* dos resultados com atenção, e procure entendê-los de uma maneira geométrica e intuitiva. Para que a discussão não fique demasiado abstrata, a construção de imagens mentais é útil. Para isso, você pode pensar em um subespaço V "abstrato" como sendo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ou, digamos, um plano passando pela origem de $\mathbb{R}^3$.

Dito esse preâmbulo, passemos aos resultados. Vimos no exemplo 4.16, acima, que o vetor $\mathbf{a}_3$ é, em certo sentido, um elemento "redundante" do conjunto gerador $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ de W. Quando retiramos esse vetor, o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ resultante permanece, ainda, um conjunto gerador de W. Isso se deve ao fato de que $\mathbf{a}_3$ é, ele próprio, gerado por $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$. O lema a seguir generaliza esse resultado.

Lema 4.17
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ um conjunto gerador de V. Se um dos vetores de $\mathcal{G}$ — digamos, $\mathbf{a}_k$ — é uma combinação linear dos demais, então o conjunto $\mathcal{G}' = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_m\}$, obtido pela remoção do vetor $\mathbf{a}_k$ de $\mathcal{G}$, ainda é um conjunto gerador de V.

Observação
Já poderíamos ter enunciado e provado a essência desse lema no capítulo 2 (veja o exercício P4.8). Postergamo-lo até aqui para que pudéssemos usar a linguagem da definição 4.8 e para que estivéssemos mais habituados aos conceitos envolvidos.

Teorema 4.18
Se $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ é um conjunto gerador do subespaço V, então algum subconjunto de $\mathcal{G}$ (possivelmente o próprio $\mathcal{G}$) é uma base de V. Em outras palavras, ou $\mathcal{G}$ é uma base de V, ou então podemos obter uma base de V pelo processo de remover de $\mathcal{G}$ um ou mais elementos.

O teorema acima diz que qualquer conjunto gerador de V, se já não for uma base de V, pode ser "reduzido" a uma base, mediante a exclusão de vetores "redundantes". Um caso particular simples foi ilustrado no exemplo 4.16. Veja também o exercício P4.9.

O teorema a seguir é análogo ao anterior. Ele diz que qualquer conjunto linearmente independente de vetores de V, se já não for uma base de V, pode ser "complementado" para formar uma base. O ingrediente principal da demonstração é o exercício resolvido R3.3 (página 77).

Teorema 4.19
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se $\mathcal{I}$ é um conjunto linearmente independente de vetores de V, então existe uma base de V que contém o conjunto $\mathcal{I}$. Em outras palavras, ou $\mathcal{I}$ é uma base de V, ou então podemos obter uma base pelo processo de acrescentar a $\mathcal{I}$, apropriadamente, um ou mais vetores de V.

O teorema acima tem a importante consequência a seguir.

Teorema 4.20
Todo subespaço de $\mathbb{R}^n$ possui uma base finita.

Demonstração: Seja V um subespaço qualquer de $\mathbb{R}^n$. O conjunto vazio $\varnothing$ é linearmente independente (pela observação 4.12) e está contido em V.[4] Assim, podemos aplicar o teorema 4.19 e acrescentar vetores ao conjunto vazio $\varnothing$ de maneira a obter uma base de V.[5] □

Perceba que a definição 4.10 requer, tacitamente, que uma base de um subespaço de $\mathbb{R}^n$ seja composta por um número *finito* de vetores.[6] Assim, no contexto de subespaços de $\mathbb{R}^n$, a expressão *base finita* é redundante. Às vezes, no entanto, é importante enfatizar a finitude, como fizemos no enunciado do teorema 4.20.

[4] Ou seja, todo elemento de $\varnothing$ é um elemento de V. Por estranha que pareça, essa afirmativa vale por vacuidade. Afinal, não existem elementos de $\varnothing$ que *não* pertençam a V (pois, simplesmente, não existem elementos de $\varnothing$!). De fato, o conjunto vazio é um subconjunto de qualquer conjunto, como você talvez já saiba.

[5] Se você não estiver convencido de que esse argumento seja válido, verifique que a prova do teorema 4.19, na seção 4.7, funciona *mesmo no caso em que o conjunto $\mathcal{I}$ é vazio.* Basta substituir as referências a $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ por referências a $\varnothing = \{\}$, o que corresponde ao caso $m = 0$. Você terá que adaptar, também, o exercício R3.3.

[6] Mesmo que a finitude não fosse imposta por definição, ela ainda estaria garantida pela observação 4.11.

Esse teorema é válido mesmo no caso do subespaço trivial $\{\mathbf{0}\}$ de $\mathbb{R}^n$. Com efeito, o subespaço trivial tem uma base finita: o conjunto vazio, que tem *zero* elementos (veja a observação 4.12).

O teorema 4.20 garante a *existência* de uma base para qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$, mas nada afirma sobre a *unicidade*. A base canônica $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ do exemplo 4.14 são ambos bases de $\mathbb{R}^2$. Isso mostra que um subespaço pode ter mais de uma base. Na realidade, um subespaço que não seja o trivial *sempre* possui uma *infinidade* de bases, cada uma das quais composta por um número *finito* de vetores (veja o exercício P4.12). Em contrapartida, o conjunto vazio é a única base do subespaço trivial.

Observação
A proposição 4.4 diz que o *span* de um dado conjunto de vetores é um subespaço. Segue do teorema 4.20 que *todo* subespaço V de $\mathbb{R}^n$ pode ser descrito como o *span* de certos vetores. Com efeito, se $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é uma base de V, então $V = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\} = \operatorname{Col}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$. Isso significa que o *span* e o espaço-coluna não são "tipos especiais" de subespaços. É mais correto pensar no *span* e no espaço-coluna como *formas de descrever* subespaços. Também é verdade que qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$ pode ser descrito como o núcleo de certa matriz (assim, o núcleo também não é um "exemplo especial" de subespaço), mas isso não será provado aqui.

4.3 Dimensão de um subespaço

Discutimos o conceito de *dimensão*, informalmente, no capítulo 2 (subseção 2.1.2). Nesta seção, finalmente, estudaremos o conceito precisamente. Uma boa internalização da ideia de dimensão, em nível "intuitivo", é valiosa. Ela auxilia muito na compreensão da natureza dos subespaços. Assim, recomendamos uma leitura cuidadosa desta seção, ainda que você decida omitir as demonstrações.

O lema a seguir é a peça fundamental desta seção, da qual decorrem naturalmente os demais resultados. Sua demonstração, no entanto, é relegada à seção 4.7.

Lema 4.21
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, e suponha que V tenha um conjunto gerador com m elementos. Então qualquer conjunto contendo mais do que m vetores de V é, necessariamente, linearmente dependente.

A parte (a) da proposição abaixo generaliza a proposição 3.22 (página 75). A parte (b) generaliza a proposição 2.25 (página 57).

Proposição 4.22
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, e suponha que V tenha uma base contendo p elementos. Então valem as seguintes afirmativas.

(a) *Um conjunto contendo mais do que p vetores de V é linearmente dependente.*

(b) *Um conjunto contendo menos do que p vetores de V não gera V.*

Demonstração: Seja $\mathcal{B}$ uma base de V contendo p vetores. Por ser uma base, $\mathcal{B}$ é um conjunto gerador de V. Assim, a afirmativa (a) segue da aplicação direta do lema 4.21 (com p no papel de m). Agora, se existisse um conjunto gerador de V com menos do que p elementos, o conjunto $\mathcal{B}$ teria que ser linearmente dependente, em razão, novamente, do lema. Mas $\mathcal{B}$ é linearmente independente, por ser uma base. Ou seja, a *negação* da afirmativa (b) leva a uma contradição com as hipóteses da proposição. Conclui-se que (b) tem que ser verdadeira. $\square$

O teorema 4.20 garante a existência de uma base para qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$, mas, além da finitude, nada diz a respeito da *quantidade* de elementos em uma base. O teorema a seguir, que é crucial, aborda essa questão.

Teorema 4.23
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Se V possuir uma base composta por p vetores, então qualquer base de V conterá exatamente p vetores. Em outras palavras, dado um subespaço de $\mathbb{R}^n$, qualquer uma de suas bases contém o mesmo número de elementos.

Demonstração: Suponha que V tenha uma base contendo p elementos. Se um conjunto $\mathcal{S}$ de vetores de V contiver *mais* do que p vetores, então ele será linearmente dependente, pela afirmativa (a) da proposição 4.22. Se $\mathcal{S}$ contiver *menos* do que p vetores, ele não poderá gerar V, pela afirmativa (b). Em qualquer um dos casos, $\mathcal{S}$ não será uma base de V. Portanto, para ser uma base de V, um conjunto deverá conter exatamente p elementos. $\square$

Agora, estamos prontos para definir o conceito de dimensão.

Definição 4.24
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. A **dimensão** de V, denotada por $\dim V$, é o número de vetores contidos em qualquer base de V.

Essa definição tem sentido graças aos teoremas 4.20 e 4.23. Se um subespaço de $\mathbb{R}^n$ não tivesse base alguma, qual seria sua dimensão? E se, digamos, um subespaço tivesse uma base com quatro vetores e outra com cinco? Sua dimensão seria quatro ou seria cinco? Ou seria outro número? Os teoremas citados garantem que estes dilemas nunca ocorrem. Dado um subespaço, bases existem e todas elas têm igual número de vetores. Este número, que chamamos de dimensão, está, portanto, bem definido.

Exemplo 4.25 (A dimensão de $\mathbb{R}^n$)
A base canônica de $\mathbb{R}^n$ tem n vetores (veja o exemplo 4.13). De acordo com o teorema 4.23, *qualquer* base de $\mathbb{R}^n$ terá precisamente n vetores. Assim, a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é igual a n, conforme a definição 4.24. Observe que essa conclusão condiz com a convenção que adotamos na subseção 2.1.2.

A dimensão do subespaço trivial $\{\mathbf{0}\}$ é igual a zero. Isso decorre da convenção de que o conjunto vazio $\varnothing$, que contém zero vetores, é uma base de $\{\mathbf{0}\}$.

Lembre que um conjunto $\mathcal{S}$ de vetores será uma base de V se for *linearmente independente* e *gerar* V. O teorema abaixo diz que, caso saibamos que $\mathcal{S}$

tem a quantidade "certa" de vetores, só precisamos verificar *uma* dessas duas propriedades. Para isso, no entanto, é preciso conhecer *a priori* a dimensão de V.

Teorema 4.26
Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão igual a p.

(a) *Se $\mathcal{S}$ é um conjunto linearmente independente contendo exatamente p vetores de V, então $\mathcal{S}$ "automaticamente" gera V, e, portanto, é uma base de V.*

(b) *Se $\mathcal{S}$ é um conjunto gerador de V contendo exatamente p vetores, então $\mathcal{S}$ é "automaticamente" linearmente independente, e, portanto, é uma base de V.*

Esse teorema é uma consequência direta dos resultados desta seção e da anterior. A demonstração detalhada está na seção 4.7.

Observação 4.27
O teorema 4.26 é muito útil. Ele implica, em particular, no seguinte fato: *um conjunto linearmente independente contendo n vetores de $\mathbb{R}^n$ é, automaticamente, uma base de $\mathbb{R}^n$.* Basta lembrar que a dimensão de $\mathbb{R}^n$ é n, e aplicar a parte (a) do teorema. Similarmente, *um conjunto gerador de $\mathbb{R}^n$ com n elementos é uma base de $\mathbb{R}^n$* (basta aplicar a parte (b)).

Podemos usar a dimensão para classificar os subespaços de $\mathbb{R}^n$. Nos exemplos a seguir, consideramos os subespaços de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, cujas classificações possuem interpretações geométricas simples.[7]

Exemplo 4.28 (Classificação dos subespaços de $\mathbb{R}^2$)
Um subespaço de $\mathbb{R}^2$ tem dimensão, no máximo, igual a 2. Isso é uma consequência da observação 4.11: uma base de um subespaço de $\mathbb{R}^2$ tem, no máximo, dois elementos. Assim, um subespaço de $\mathbb{R}^2$ tem dimensão igual a 0, 1 ou 2. Consideremos cada caso:

- *Subespaços de dimensão zero*: O único subespaço de dimensão zero de $\mathbb{R}^2$ é o subespaço trivial $\{\mathbf{0}_2\}$. Geometricamente, esse subespaço é representado por um ponto: a origem de $\mathbb{R}^2$.

- *Subespaços unidimensionais*: São os subespaços gerados por um único vetor não-nulo. Geometricamente, esses subespaços são as retas em $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem.

- *Subespaços bidimensionais*: O único subespaço de $\mathbb{R}^2$ de dimensão igual a dois é o próprio $\mathbb{R}^2$. De fato, um subespaço de dimensão dois é gerado por dois vetores linearmente independentes (pois tem uma base contendo dois elementos). Mas dois vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ geram o $\mathbb{R}^2$ todo, pela observação 4.27. Geometricamente, o $\mathbb{R}^2$ é representado por um plano, como já sabemos.

[7] Os exemplos mostrarão que o conceito de dimensão ajuda na "classificação geométrica" dos subespaços de $\mathbb{R}^n$. Essa interpretação geométrica, por sua vez, ajuda muito na assimilação do conceito de dimensão. Do ponto de vista estritamente lógico, isso pode parecer um círculo vicioso. Didaticamente, no entanto, é um círculo *virtuoso*. Tire proveito disso!

Exemplo 4.29 (Classificação dos subespaços de $\mathbb{R}^3$)
Um subespaço de $\mathbb{R}^3$ tem dimensão igual a 0, 1, 2 ou 3 (justifique!). Consideremos cada caso:

- *Subespaços de dimensão zero*: Somente o subespaço trivial $\{\mathbf{0}_3\}$. Geometricamente, esse subespaço é representado por um ponto: a origem de $\mathbb{R}^3$.

- *Subespaços unidimensionais*: São os subespaços gerados por um único vetor não-nulo. Geometricamente, esses subespaços são as retas em $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem.

- *Subespaços bidimensionais*: São os subespaços gerados por dois vetores linearmente independentes. Geometricamente, esses subespaços são os planos em $\mathbb{R}^3$ que passam pela origem.

- *Subespaços tridimensionais*: O único subespaço de $\mathbb{R}^3$ de dimensão igual a três é o próprio $\mathbb{R}^3$. O argumento é análogo ao do exemplo anterior, e usa o fato de que três vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^3$ geram o $\mathbb{R}^3$ todo.

Podemos generalizar esses exemplos (veja o exercício P4.13), e concluir que existem exatamente $n+1$ tipos de subespaços de $\mathbb{R}^n$: o de dimensão zero (apenas o subespaço trivial $\{\mathbf{0}_n\}$), os de dimensão um, os de dimensão dois, e assim por diante, até o de dimensão igual a n (apenas o próprio $\mathbb{R}^n$).

4.4 Coordenadas com respeito a uma base

No início da seção 4.2, vimos que qualquer vetor de $\mathbb{R}^n$ pode ser representado de uma única maneira como combinação linear dos vetores da base canônica $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. O teorema a seguir mostra que essa é uma propriedade de qualquer base, em qualquer subespaço.

Teorema 4.30
Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p\}$ uma base para um subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Para cada vetor $\mathbf{v}$ de V, existe uma única lista de escalares $c_1, \dots, c_p$ tal que

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p. \tag{4.5}$$

Ou seja, existe uma única maneira de expressar $\mathbf{v} \in V$ como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$.

Demonstração: O conjunto $\mathcal{B}$ gera V, porque é, por hipótese, uma base de V. Assim, para cada $\mathbf{v} \in V$, existem escalares $c_1, \dots, c_p$ satisfazendo (4.5). Como o conjunto $\mathcal{B}$ é também linearmente independente, essa representação (4.5) é única, em vista da proposição 3.20. □

Exemplo 4.31
Sejam $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ os vetores do exemplo 4.16. Já estabelecemos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é

uma base de $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. Considere agora o vetor $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{smallmatrix}\right]$. Observe que $\mathbf{v}$ é uma combinação linear de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ (isto é, $\mathbf{v} \in W$), pois

$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] - \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{v}.$$

No entanto, existem muitas maneiras de escrever $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, já que estes vetores são linearmente dependentes (veja o exemplo 3.15 e a proposição 3.20). Vale também, por exemplo,

$$9\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = 9\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] - 5\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] + \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 10 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{v}.$$

Para se obter *todas* as maneiras de escrever $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, é necessário resolver o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{v}$.

Em contrapartida, pelo teorema 4.30, $\mathbf{v} = 5\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ é a *única* forma de representar $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$, já que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base de W. Você pode verificar, usando a teoria do capítulo 1 diretamente, que $\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 5 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$ é a única solução do sistema $x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{v}$.

Neste exemplo, usamos o vetor $\mathbf{v}$ em particular, mas resultados similares valem para qualquer vetor de W.

Vamos tecer algumas conclusões a respeito do exemplo acima. Vimos, no exemplo 4.16, que os conjuntos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ e $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ ambos geram W (em símbolos, $W = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$).[8] Assim, podemos representar vetores de W usando combinações lineares de $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$, ou de $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ apenas. Mas as representações usando apenas $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são claramente mais *econômicas*, pois envolvem apenas dois vetores (compare a representação $\mathbf{v} = 5\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ com $\mathbf{v} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3$ ou com $\mathbf{v} = 9\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$). Além disso, tais representações são *únicas*, inambíguas, visto que $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base de W. Em síntese, é vantajoso representar os vetores de W usando uma base. Isso motiva a definição abaixo.

Definição 4.32

Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ uma base de V, e seja $\mathbf{v}$ um vetor de V. Pelo teorema 4.30, existe uma única representação

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p \tag{4.6}$$

de $\mathbf{v}$ como combinação linear de $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$. Nestas condições, os escalares $c_1, \ldots, c_p$ são chamados de **coordenadas do vetor $\mathbf{v}$ com relação à base $\mathcal{B}$**. O vetor de $\mathbb{R}^p$ cujas coordenadas são $c_1, \ldots, c_p$ é chamado de **vetor de coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação a $\mathcal{B}$**, que denotamos por

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}.$$

[8] Lembre-se de que W foi *definido* como $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ no exemplo 4.16.

Atente para as premissas da definição acima. Enfatizamos que só faz sentido falar de "coordenadas de $\mathbf{v}$ com respeito a $\mathcal{B}$" se $\mathcal{B}$ for uma *base* de um subespaço, e se $\mathbf{v}$ for um vetor pertencente a *esse mesmo subespaço*.

Um vetor de V fica completamente determinado (ou "especificado") por meio de suas coordenadas com relação a uma dada base de V. De fato, se $c_1, \ldots, c_p$ são as coordenadas de $\mathbf{v}$ com respeito à base $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$, então o vetor $\mathbf{v}$ fica determinado pela relação (4.6) (veja o exercício resolvido R4.1).

Observação 4.33
Na definição 4.32, o vetor $\mathbf{v}$ pertence a $\mathbb{R}^n$, pois $\mathbf{v}$ é um vetor do subespaço V, e, por hipótese, $V \subseteq \mathbb{R}^n$. Repare, no entanto, que $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ é um vetor de $\mathbb{R}^p$! Perceba também que p é a dimensão de V (já que é o número de elementos na base $\mathcal{B}$). Veja o exemplo 4.37, adiante.

Encontrar as coordenadas de um vetor $\mathbf{v} \in V$ com relação a uma base $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ de V é simples. Basta resolver o sistema $x_1\mathbf{a}_1 + \cdots + x_p\mathbf{a}_p = \mathbf{v}$.

Exemplo 4.34
Sejam $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right]$ os vetores dos exemplos 4.14 e 4.15. Já vimos que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas de $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ com respeito a essa base.

Solução: Temos que resolver o sistema $x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} = \mathbf{w}$, para obter a (única) representação de $\mathbf{w}$ como combinação linear de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Escalonando a matriz completa desse sistema, obtemos:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} \mid \mathbf{w}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & 2 & 8 \\ 3 & 5 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \to \ell_2 + 3\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{-1} & 2 & 8 \\ 0 & \boxed{11} & 33 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2/11]{\ell_1 \to -\ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & -8 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 + 2\ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right].$$

A única solução do sistema é $x_1 = -2$, $x_2 = 3$ e temos, portanto, $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$. Isso significa que as coordenadas de $\mathbf{w}$ com respeito à base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ são -2 e 3, e o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ com respeito a essa base é $[\mathbf{w}]_{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}} = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$. □

Exemplo 4.35
Sejam agora $\mathbf{y} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{z} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Verifique que $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$, e calcule as coordenadas do vetor $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right]$ com relação a essa base.

Solução: Deixamos a verificação de que $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é uma base como um exercício para o leitor. Para calcular as coordenadas de $\mathbf{w}$ com respeito a essa base, procedemos como no exemplo anterior, resolvendo o sistema $x_1\mathbf{y} + x_2\mathbf{z} = \mathbf{w}$:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y} & \mathbf{z} \mid \mathbf{w}\end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 8 \\ 3 & 0 & 9 \end{array}\right] \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2/3]{\ell_1 \to \ell_1/2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ \boxed{1} & 0 & 3 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \to \ell_2 - \ell_1} \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{array}\right].$$

Assim, temos $\mathbf{w} = 3\mathbf{y} + \mathbf{z}$ e, portanto, o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ com respeito à base $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$ é $[\mathbf{w}]_{\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. □

Observe que o vetor $\mathbf{w}$ é o *mesmo* nos dois exemplos anteriores (a saber, é o vetor $\left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$). No entanto, seus vetores de coordenadas $[\mathbf{w}]_{\{\mathbf{u},\mathbf{v}\}}$ e $[\mathbf{w}]_{\{\mathbf{y},\mathbf{z}\}}$ com relação a bases distintas são também distintos. É comum dizermos que uma base de um subespaço fornece um *sistema de coordenadas* nesse subespaço. Bases distintas fornecem sistemas de coordenadas distintos. Isso é ilustrado, usando os exemplos acima, pela figura 4.1.

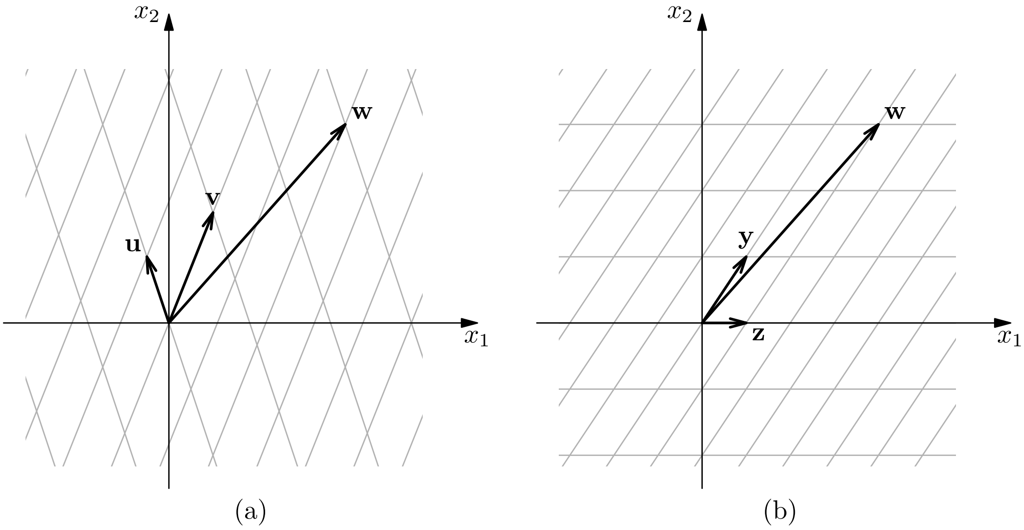


Figura 4.1: Dois sistemas de coordenadas em $\mathbb{R}^2$.

O reticulado na figura 4.1(a) é uma representação gráfica do sistema de coordenadas em $\mathbb{R}^2$ induzido pela base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Os pontos onde as linhas se encontram representam as combinações lineares de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ com pesos inteiros. Verifique geometricamente, aplicando a regra do paralelogramo diretamente sobre a figura, que $\mathbf{w} = -2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$, conforme o exemplo 4.34.

Já o reticulado na figura 4.1(b) representa o sistema de coordenadas associado à base $\{\mathbf{y}, \mathbf{z}\}$. Usando a regra do paralelogramo, mais uma vez, verifique que $\mathbf{w} = 3\mathbf{y} + \mathbf{z}$, conforme o exemplo 4.35. Observe, novamente, que o vetor $\mathbf{w}$ é o *mesmo* nas duas figuras (as setas que o representam são, de fato, idênticas). O que mudou da figura (a) para a (b) foi somente o sistema de coordenadas considerado.

A base canônica também fornece um sistema de coordenadas, que é simplesmente o sistema "usual" de coordenadas cartesianas. A figura 2.1(a) (página 36) ilustra o sistema de coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}^2$. Nas figuras 4.1(a) e (b), os eixos x_1 e x_2 são apenas uma "lembrança" do sistema cartesiano (esses eixos não são adequados aos sistemas de coordenadas considerados nas figuras).

Exemplo 4.36
Seja $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^2$, e seja novamente $\mathbf{w} = \left[\begin{smallmatrix} 8 \\ 9 \end{smallmatrix}\right]$. É evidente que $\mathbf{w} = 8\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + 9\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right] = 8\mathbf{e}_1 + 9\mathbf{e}_2$. Assim, as coordenadas de $\mathbf{w}$ com relação à base canônica são 8 e 9.

Mais geralmente, se $\mathbf{v}$ é um vetor de $\mathbb{R}^n$ de coordenadas v_1, v_2, … , v_n, então a equação (4.3) (página 86) mostra que v_1, … , v_n são as coordenadas de $\mathbf{v}$ *com* *respeito à base canônica de* $\mathbb{R}^n$. Ou seja, quando nos referimos simplesmente às "coordenadas" de um vetor de $\mathbb{R}^n$, sem referência a uma base (como vínhamos fazendo até esta seção), a qualificação adicional "com respeito à base canônica" fica subentendida.

O próximo exemplo é mais interessante do que os anteriores, pois descreve um sistema de coordenadas em um subespaço *próprio* de $\mathbb{R}^3$ (isto é, em um subespaço que não é o $\mathbb{R}^3$ inteiro).

Exemplo 4.37
Sejam $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ os vetores dos exemplos 4.6 e 4.16. Já verificamos, no segundo desses exemplos, que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base do plano $W = \mathrm{Span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$. A base $\mathcal{B}$, portanto, fornece um sistema de coordenadas em W, conforme ilustra a figura 4.2 (compare com a figura 2.7 da página 62).

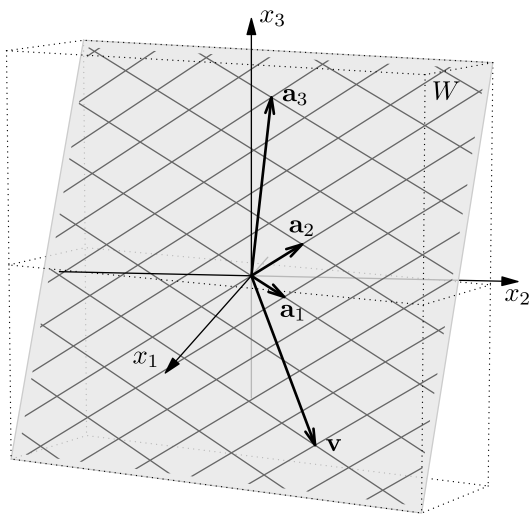


Figura 4.2: O sistema de coordenadas no plano W dado pela base $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$.

O vetor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -9 \end{bmatrix}$ do exemplo 4.31 também está ilustrado na figura 4.2. Vimos, naquele exemplo, que $\mathbf{v} = 5\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ (verifique, caso não o tenha feito ainda). Isso quer dizer que as coordenadas de $\mathbf{v}$ com relação à base $\mathcal{B}$ são 5 e -2, isto é, $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$. É interessante verificar a igualdade $\mathbf{v} = 5\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2$ geometricamente, aplicando a regra do paralelogramo sobre figura 4.2.

Similarmente, no exemplo 4.16, vimos que $\mathbf{a}_3 = -4\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2$. (Verifique isso geometricamente, usando, mais uma vez, a figura 4.2 e a regra do paralelogramo.) Assim, o vetor de coordenadas de $\mathbf{a}_3$ com relação à base $\mathcal{B}$ é $[\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Observe, no exemplo acima, que $\mathbf{v}$ é um vetor de $\mathbb{R}^3$ (assim como $\mathbf{a}_3$), mas que $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ é um vetor de apenas *duas* coordenadas (assim como $[\mathbf{a}_3]_{\mathcal{B}}$). Por estranha que essa situação possa parecer, ela é consistente com a definição 4.32, já que a base $\mathcal{B}$ do plano W possui apenas *dois* elementos, isto é, W tem dimensão igual a 2 (veja também a observação 4.33). Intuitivamente, o que ocorre é que, já que o vetor $\mathbf{v}$ está contido no plano W, podemos especificá-lo usando um sistema de coordenadas *sobre esse plano*. Não é necessário usar um sistema de coordenadas no espaço $\mathbb{R}^3$ inteiro para especificar vetores contidos em W. Por outro lado, um sistema de coordenadas sobre o plano W não é suficiente para especificar vetores quaisquer de $\mathbb{R}^3$.

A situação descrita acima tem uma analogia com um exemplo mais concreto. Vivemos num universo de *três* dimensões espaciais (semelhante ao $\mathbb{R}^3$). No entanto, para especificar um ponto sobre a superfície do planeta Terra, bastam *duas* coordenadas: sua *latitude* e sua *longitude*. Os paralelos e meridianos definem um sistema de coordenadas sobre a superfície da Terra, assim como a base $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ define um sistema de coordenadas sobre o plano W. Essa analogia, no entanto, não é perfeita. De fato, ela tem uma falha gravíssima: A superfície da Terra *não é* um subespaço, e o sistema de coordenadas geográficas não é dado por uma "base", no sentido estrito da definição 4.10.

Observação
É interessante notar que definição 4.32 só faz sentido graças ao teorema 4.30. De fato, esse teorema garante a existência e a unicidade do vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$, para qualquer $\mathbf{v} \in V$, quando $\mathcal{B}$ é uma base de V. Repare, em particular, que se existisem duas (ou mais) maneiras de escrever $\mathbf{v}$ como uma combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, a definição de $[\mathbf{v}]_{\mathcal{B}}$ seria ambígua. O teorema 4.30 garante que isso nunca ocorre.

4.5 Bases para Nuc A, Col A e Span$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$

Os resultados das seções 4.3 e 4.4 atestam a importância do conceito de *base*. Na seção 4.2, vimos que qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$, de fato, possui uma base (teorema 4.20). Não estudamos, no entanto, como construir, "na prática", uma base para um dado subespaço. Esse é o objetivo desta seção. Ilustraremos, por meio de exemplos, como determinar bases para subespaços especificados de diversas formas. Discutiremos também a dimensão desses subespaços.

4.5.1 Uma base para Nuc A

Recorde os exemplos 3.12 e 3.13 da seção 3.2, bem como o exercício P3.10. Vimos que, dada uma matriz A, podemos escrever $\operatorname{Nuc} A$ explicitamente como o *span* de certos vetores. Esses vetores formarão, portanto, um *conjunto gerador* de $\operatorname{Nuc} A$. O método proposto nesses exemplos sempre produzirá, de fato, uma *base* do núcleo, como argumentaremos nesta subseção.

Exemplo 4.38
Vamos obter um conjunto gerador do núcleo da matriz A de (1.13) (página 13):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Temos que resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a fim de achar uma descrição explícita de $\operatorname{Nuc} A$, seguindo o procedimento da seção 3.2. Felizmente, já obtivemos a forma escalonada reduzida de A: é a matriz B dada em (1.15) (página 18). Assim, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é equivalente a $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$[9], cuja matriz completa é

$$[B \mid \mathbf{0}] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 0 & -3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

As variáveis básicas são x_1, x_2 e x_4, e as livres são x_3 e x_5. A descrição vetorial paramétrica do conjunto-solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é, então, dada por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_3 - 5x_5 \\ -2x_3 + 3x_5 \\ x_3 \\ 0 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_1} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_2} = x_3\mathbf{u}_1 + x_5\mathbf{u}_2. \tag{4.7}$$

Isso mostra que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é um conjunto gerador de $\operatorname{Nuc} A$, onde $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ são os vetores de $\mathbb{R}^5$ indicados acima. Em símbolos, $\operatorname{Nuc} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$.

Observação 4.39

Os vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ obtidos no exemplo acima são linearmente independentes, pois teremos $x_3\mathbf{u}_1 + x_5\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ somente se os pesos x_3 e x_5 forem ambos iguais a zero. A forma mais fácil de perceber isso é examinar as componentes 3 e 5 do vetor $\mathbf{x} = x_3\mathbf{u}_1 + x_5\mathbf{u}_2$, que são x_3 e x_5, respectivamente. Evidentemente, para que $\mathbf{x}$ seja o vetor zero, é necessário que essas componentes sejam nulas.

Assim, o conjunto gerador $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é linearmente independente e é, portanto, uma *base* de $\operatorname{Nuc} A$.

O método utilizado no exemplo acima para determinar um conjunto gerador do núcleo de uma matriz sempre produzirá uma base, pois um argumento análogo ao da observação 4.39 será válido em todos os exemplos dessa natureza.

Exemplo 4.40

Determine uma base para o núcleo da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & -3 & 14 & -10 \\ -1 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução: Mais uma vez, temos que resolver o sistema homogêneo $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Verifique que a forma escalonada *reduzida* da matriz completa $[C \mid \mathbf{0}]$ é dada por

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} \boxed{1} & 3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

[9] Caso tenha dúvidas quanto a isso, veja o exercício P3.5(b).

Assim, o conjunto-solução do sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é descrito, em termos das variáveis livres x_2, x_4 e x_5, por

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_2 \\ 4x_4 - 3x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_1} + x_4 \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_2} + x_5 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}_3}$$

$$= x_2\mathbf{v}_1 + x_4\mathbf{v}_2 + x_5\mathbf{v}_3. \quad (4.8)$$

Sejam $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ os vetores de $\mathbb{R}^5$ indicados acima. O conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é uma base de $\operatorname{Nuc} C$: esse conjunto não apenas gera $\operatorname{Nuc} C$, como também é linearmente independente. Como mencionamos, um argumento análogo ao da observação 4.39 justifica a independência linear. Os detalhes são deixados para o exercício P4.21. □

Vamos, agora, discutir a dimensão do núcleo de uma matriz. Primeiro, consideramos os dois exemplos anteriores. A dimensão do núcleo da matriz A do exemplo 4.38 é igual a 2, pois a base $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $\operatorname{Nuc} A$ tem *dois* elementos (assim, pelo teorema 4.23, qualquer base terá dois elementos). Observe que o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem *duas* variáveis livres, x_3 e x_5, que são os coeficientes dos vetores $\mathbf{u}_1$ e $\mathbf{u}_2$ na descrição paramétrica (4.7).

O núcleo da matriz C do exemplo 4.40, por sua vez, tem dimensão igual a 3, pois a base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ tem *três* elementos. Observe, mais uma vez, que o sistema $C\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tem *três* variáveis livres, x_2, x_4 e x_5, que são os coeficientes dos vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$ na descrição (4.8).

Perceba que, para qualquer matriz A, sempre haverá uma correspondência biunívoca entre as variáveis livres do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e os vetores da base de $\operatorname{Nuc} A$ construída pelo método dos exemplos acima. Com efeito, cada variável livre será o coeficiente de um dos vetores da base, na descrição vetorial paramétrica do conjunto-solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Assim, *a dimensão de* $\operatorname{Nuc} A$ *será igual ao número de variáveis livres do sistema* $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lembre-se de que as variáveis livres do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ são aquelas que correspondem às *colunas não-pivô* da matriz de coeficientes A. Assim, vale o seguinte resultado.

Proposição 4.41
Seja A uma matriz qualquer. A dimensão do núcleo de A é igual ao número de colunas não-pivô de A.

A dimensão do núcleo de A, que denotamos por $\dim \operatorname{Nuc} A$, é às vezes chamada de **nulidade** da matriz A.

4.5.2 Uma base para Col A

Veremos, nesta subseção, como obter uma base para o espaço das colunas de uma matriz. Comecemos com um exemplo simples.

Exemplo 4.42
Vamos encontrar uma base para $\operatorname{Col} B$, onde B é a matriz de (1.15) (página 18):

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Denotamos as colunas de B por $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, ... , $\mathbf{b}_5$. A matriz B está na forma escalonada reduzida, então é fácil ver que as colunas não-pivô $\mathbf{b}_3$ e $\mathbf{b}_5$ são combinações lineares das demais. De fato, podemos "ler", diretamente da matriz B, as relações $\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_5 = 5\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2$.

Por definição, $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5\}$ é um conjunto gerador do espaço-coluna de B, isto é, $\operatorname{Col} B = \operatorname{Span}\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5\}$. Em vista do lema 4.17, podemos remover os vetores "redundantes" $\mathbf{b}_3$ e $\mathbf{b}_5$, e o conjunto resultante $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ ainda irá gerar $\operatorname{Col} B$. Se quiser, verifique esse fato diretamente, usando um argumento similar ao do exemplo 4.16. Verifique, também, que o conjunto $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4\}$ é linearmente independente (veja o exercício P4.23). Isso mostra que esse conjunto é uma base de $\operatorname{Col} B$.

O exemplo acima é particularmente simples porque a matriz B está na forma escalonada reduzida. Antes de passar a um exemplo mais interessante, precisamos do resultado a seguir.

Proposição 4.43
Sejam A e B matrizes linha-equivalentes. Então os vetores-coluna de A e os vetores-coluna de B possuem as mesmas relações de dependência linear.

Demonstração: Se A e B são linha-equivalentes, então as matrizes $[A \mid \mathbf{0}]$ e $[B \mid \mathbf{0}]$ também são linha-equivalentes (veja o exercício P3.5(b)). Assim, os sistemas $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ e $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ têm o mesmo conjunto-solução. Para terminar a demonstração, basta lembrar que as soluções não-triviais de um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ correspondem precisamente às relações de dependência linear entre as colunas de A (veja o exercício P3.18). $\square$

O significado dessa proposição ficará mais claro no exemplo abaixo.

Exemplo 4.44
Vamos achar uma base para $\operatorname{Col} A$, onde A é a matriz de (1.13) (página 13):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}.$$

Denotamos as colunas de A por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_5$. Observe que a matriz A é linha-equivalente à matriz B do exemplo anterior (de fato, B foi obtida de A por operações-linha, na seção 1.5). Pela proposição 4.43, as colunas $\mathbf{a}_1$, ... , $\mathbf{a}_5$ da matriz A têm as mesmas relações de dependência linear que as colunas $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_5$ da matriz B. Já havíamos observado que $\mathbf{b}_3 = -3\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$ e que $\mathbf{b}_5 = 5\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2$. Assim, valem também as relações $\mathbf{a}_3 = -3\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_5 = 5\mathbf{a}_1 - 3\mathbf{a}_2$ (verifique-as diretamente!).

Dessa maneira, podemos remover os vetores "redundantes" $\mathbf{a}_3$ e $\mathbf{a}_5$ do conjunto $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5\}$, e o conjunto resultante $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ ainda irá gerar $\operatorname{Col} A$. Esse conjunto é também linearmente independente, pelo seguinte argumento. Se houvesse uma relação de dependência linear entre os vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_4$, essa mesma relação valeria para os vetores $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_4$, pela proposição 4.43, novamente. Mas já constatamos que $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_4$ são linearmente independentes.

Assim, mostramos que o conjunto $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ é uma base de $\operatorname{Col} A$. Observe que esse é o conjunto formado pelas *colunas-pivô* da matriz A.

Os exercícios P4.22 e P4.24 contêm um roteiro para generalizar os exemplos acima, de forma a demonstrar o resultado a seguir.

Proposição 4.45
As colunas-pivô de uma matriz constituem uma base de seu espaço-coluna.

Para achar uma base para o espaço-coluna de uma matriz, portanto, basta "desvendar", via escalonamento, quais são suas colunas-pivô.

Exemplo 4.46
Encontre uma base para o espaço das colunas da matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Solução: Vamos escalonar a matriz C:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 8 \\ 0 & 2 & -4 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 3\ell_1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 8 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & 8 & -16 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_3 \to \ell_3 - 4\ell_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -2 & 8 \\ 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Observe que não é necessário obter a forma escalonada reduzida. Constatamos que as colunas-pivô da matriz C são a primeira e a segunda. Assim, pela proposição 4.45, uma base de $\operatorname{Col} C$ é dada pelo conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4.10}$$

Verifique que, de fato, a terceira coluna de C é gerada pelas duas primeiras. $\square$

Cuidado!
Na busca de uma base para o espaço-coluna de uma dada matriz, o escalonamento serve apenas para determinar *quais são* as suas colunas-pivô. Ao escrever a base, tenha o cuidado de usar as colunas *da própria matriz dada*, e não as da forma

escalonada obtida. Observe, no exemplo 4.46, que a base (4.10) de $\operatorname{Col} C$ é composta pelas colunas-pivô *da matriz* C, e não pelas colunas-pivô $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ da matriz escalonada em (4.9). Estes dois vetores, de fato, *não geram* o espaço-coluna de C. Note, em particular, que eles têm zero como último elemento, e, portanto, não podem gerar nenhum dos vetores-coluna de C. Similarmente, a base de $\operatorname{Col} A$ obtida no exemplo 4.44 contém as colunas $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_4$ *da própria matriz* A, e não as colunas $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_4$ da forma escalonada B.

Definição 4.47
Seja A uma matriz qualquer. A dimensão do espaço das colunas de A é chamado de **posto** de A, e é denotado por $\operatorname{posto} A$. Ou seja, definimos $\operatorname{posto} A = \dim \operatorname{Col} A$.

Exemplo 4.48
O posto da matriz A do exemplo 4.44 é igual a 3, visto que $\operatorname{Col} A$ tem uma base com três vetores. Observe que A tem três colunas-pivô, que formam, justamente, a base de $\operatorname{Col} A$ obtida no exemplo 4.44. Já o posto da matriz C do exemplo 4.46 é igual a 2, visto que $\operatorname{Col} C$ tem uma base com dois vetores (as colunas-pivô de C). Em símbolos, $\operatorname{posto} A = 3$ e $\operatorname{posto} C = 2$.

Como vimos, as colunas-pivô de qualquer matriz A formam uma base para seu espaço-coluna. Assim, a dimensão de $\operatorname{Col} A$ é sempre igual ao número de colunas-pivô de A. Em outras palavras, temos o resultado abaixo.

Proposição 4.49
O posto de uma matriz A é igual número de colunas-pivô de A.

Alguns autores denotam o posto de A por $\operatorname{rank} A$, pois, em inglês, a palavra usada para *posto* é *rank*.

4.5.3 Uma base para Span$\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$

No exemplo 4.16 (página 89), verificamos que o conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ é uma base do subespaço $W \subseteq \mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ e $\mathbf{a}_3$ dados. No entanto, não discutimos ainda o caso geral. Dada uma lista $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ... , $\mathbf{a}_m$ de vetores de $\mathbb{R}^n$, como podemos obter, de maneira sistemática, uma base para o subespaço $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ por eles gerado?

É fácil abordar essa questão usando os resultados da subseção anterior. Primeiro, consideramos a matriz $A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}$, cujas colunas são os vetores $\mathbf{a}_j$ dados. Dessa maneira, teremos $\operatorname{Col} A = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, pela definição de espaço-coluna. Agora, basta aplicar a proposição 4.45: as colunas-pivô de A formarão uma base de $\operatorname{Col} A$ e, portanto, também de $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, já que esses subespaços são iguais.

Exemplo 4.50
Encontre uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 9 \\ 15 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, determine a dimensão desse subespaço.

Solução: Seja $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \end{bmatrix}$, de forma que $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\} = \operatorname{Col} A$. Vamos escalonar a matriz A para revelar suas colunas-pivô:

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & -2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 3 & 15 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 7 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{29} \\ 0 & 0 & 0 & 38 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 1 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{29} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Não é necessário chegar à forma reduzida. As colunas-pivô de A são a primeira, a segunda e a quarta. Dessa forma, o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ é uma base do subespaço $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$. Como a base encontrada tem três vetores, a dimensão desse subespaço é igual a 3. □

4.6 O teorema do posto

Como vimos na proposição 4.49, o posto de uma matriz A (a dimensão de seu espaço-coluna) é igual ao número de colunas-pivô de A. Por outro lado, a proposição 4.41 diz que a dimensão do núcleo de A é dada pelo número de colunas não-pivô de A, ou seja, pelo número de variáveis livres do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Em resumo:

$$\begin{aligned} \operatorname{posto} A &= \text{número de colunas-pivô de } A, \\ \dim \operatorname{Nuc} A &= \text{número de colunas não-pivô de } A. \end{aligned}$$

Ora, a soma do número de colunas-pivô e não-pivô de A resulta no número total de colunas de A! Esta observação trivial leva ao resultado abaixo.

Teorema 4.51 (Teorema do Posto, versão 1)
Se A é uma matriz com m colunas, então

$$\operatorname{posto} A + \dim \operatorname{Nuc} A = m. \tag{4.11}$$

Enfatizamos que (4.11) é nada mais do que uma reformulação do fato trivial

$$\begin{pmatrix} \text{número de} \\ \text{colunas-pivô de } A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{número de colunas} \\ \text{não-pivô de } A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{número total de} \\ \text{colunas de } A \end{pmatrix}.$$

Esse fato, no entanto, tem aplicações interessantes, e é conveniente ter a forma sintética (4.11) de exprimi-lo. O teorema do posto será revisitado em um contexto um pouco diferente na subseção 5.3.3, por isso usamos aqui o rótulo “versão 1”.

4.7 Demonstrações dos resultados sobre bases e dimensão (leitura opcional)

A seguir, fornecemos as demonstrações que omitimos nas seções 4.2 e 4.3.

Demonstração do lema 4.17: Evidentemente, os elementos de $\mathcal{G}'$ pertencem a V, visto que $\mathcal{G}'$ está contido em $\mathcal{G}$, e este é um conjunto gerador de V (portanto está, ele próprio, contido em V). Assim, a condição (i) da observação 4.9 está satisfeita. Basta mostrar, então, que qualquer vetor $\mathbf{v}$ de V é gerado pelos vetores de $\mathcal{G}'$. O vetor $\mathbf{v}$ pode ser escrito na forma

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \cdots + c_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + c_k\mathbf{a}_k + c_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + c_m\mathbf{a}_m, \tag{4.12}$$

já que $\mathbf{v} \in V$ e $\mathcal{G}$ gera V. Agora, por hipótese, $\mathbf{a}_k$ é uma combinação linear dos demais vetores de $\mathcal{G}$. Assim, o vetor $\mathbf{a}_k$ pode ser escrito como

$$\mathbf{a}_k = d_1\mathbf{a}_1 + d_2\mathbf{a}_2 + \cdots + d_{k-1}\mathbf{a}_{k-1} + d_{k+1}\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + d_m\mathbf{a}_m. \tag{4.13}$$

Substituindo a expressão (4.13) para $\mathbf{a}_k$ em (4.12) e simplificando, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v} = (c_1 + c_kd_1)\mathbf{a}_1 + (c_2 + c_kd_2)\mathbf{a}_2 + \cdots + (c_{k-1} + c_kd_{k-1})\mathbf{a}_{k-1} + \\ + (c_{k+1} + c_kd_{k+1})\mathbf{a}_{k+1} + \cdots + (c_m + c_kd_m)\mathbf{a}_m.\end{aligned}$$

Mostramos, então, que $\mathbf{v}$ é gerado pelos vetores de $\mathcal{G}'$. □

Demonstração do teorema 4.18: Se $\mathcal{G}$ é um conjunto linearmente independente, então ele já é uma base de V, pois, por hipótese, ele é também um conjunto gerador. Não há mais o que considerar nesse caso.

Se, do contrário, $\mathcal{G}$ é linearmente *dependente*, então, pela proposição 3.18, um dos vetores de $\mathcal{G}$ é uma combinação linear dos demais. Pelo lema 4.17, podemos retirar esse vetor "redundante" do conjunto $\mathcal{G}$, e o conjunto $\mathcal{G}'$ obtido ainda irá gerar V. Se $\mathcal{G}'$ for linearmente independente, ele será uma base de V, e o processo terminará. Se, por outro lado, $\mathcal{G}'$ for linearmente dependente, poderemos mais uma vez retirar um vetor de $\mathcal{G}'$, de forma que o conjunto resultante ainda gere V. O processo continuará até que obtenhamos um conjunto linearmente independente. Como temos conjuntos geradores em cada etapa, o conjunto obtido irá também gerar V, ou seja, será uma base de V.

Para terminar a prova de forma honesta, no entanto, precisamos justificar por que esse processo, de fato, termina. Por que o processo não poderia continuar para sempre, sem sucesso? Como podemos garantir que, em algum estágio, vamos necessariamente obter um conjunto linearmente independente? Ora, o conjunto $\mathcal{G}$ dado no enunciado tem um número finito m de elementos. Assim, o processo descrito acima poderá ter, no máximo, m etapas de remoção de vetores. Se todos os m vetores de $\mathcal{G}$ forem realmente removidos pelo processo, terminaremos com o conjunto vazio, que é linearmente independente, conforme a observação 4.12. (Este caso extremo só ocorre quando V é o subespaço trivial.) □

Demonstração do teorema 4.19: Vamos fazer algumas considerações preliminares. O conjunto $\mathcal{I}$ é linearmente independente, e seus elementos são vetores de $\mathbb{R}^n$, já que $\mathcal{I} \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^n$. Pela proposição 3.22, $\mathcal{I}$ contém no máximo n vetores. Assim, $\mathcal{I}$ pode ser escrito como $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, com $m \leqslant n$, ou então como $\{\}$, no caso em que $\mathcal{I}$ é o conjunto vazio. Por hipótese, os vetores de $\mathcal{I}$ pertencem a V, como já indicamos. Pela observação 4.2, portanto, vale

$$\operatorname{Span} \mathcal{I} \subseteq V, \tag{4.14}$$

onde $\operatorname{Span} \mathcal{I}$ representa o conjunto gerado pelos vetores de $\mathcal{I}$. Agora vamos passar ao cerne da prova do teorema.

Se $\mathcal{I}$ é um conjunto gerador de V, então ele já é uma base de V (pois é também linearmente independente). Neste caso, a relação (4.14) vale com igualdade ($\operatorname{Span} \mathcal{I} = V$), e não há mais trabalho algum a fazer.

Vamos considerar, então, o caso em que $\mathcal{I} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ *não* é um conjunto gerador de V, ou seja, o caso em que a inclusão (4.14) é *estrita* ($\operatorname{Span} \mathcal{I} \subsetneq V$).[10] Nesse caso, podemos escolher um vetor $\mathbf{v}$ de V que *não pertença* a $\operatorname{Span} \mathcal{I}$. Pelo exercício resolvido R3.3, o conjunto $\mathcal{I}' = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{v}\}$, obtido pela inclusão do vetor $\mathbf{v}$ em $\mathcal{I}$, ainda será linearmente independente. Observe que $\operatorname{Span} \mathcal{I}' \subseteq V$, pois todos os vetores de $\mathcal{I}'$ pertencem a V. Se o conjunto $\mathcal{I}'$ gerar V, isto é, se tivermos a igualdade $\operatorname{Span} \mathcal{I}' = V$, esse conjunto será uma base de V, e processo terminará. Caso contrário, poderemos acrescentar a $\mathcal{I}'$ mais um vetor de V, de forma que o conjunto resultante ainda seja linearmente independente. O processo continuará até que obtenhamos um conjunto gerador de V. Como temos conjuntos linearmente independentes em cada etapa, o conjunto gerador obtido será uma base de V.

Mais uma vez, é preciso justificar por que o processo necessariamente termina. Como é que podemos garantir que, em alguma etapa, um conjunto gerador para V será obtido? Ora, se um conjunto gerador nunca fosse obtido, poderíamos continuar acrescentando a $\mathcal{I}$ um número arbitrário de vetores, um por um, *sempre mantendo a propriedade de independência linear dos conjuntos resultantes.* Mas isso é impossível, em razão da proposição 3.22. □

Demonstração do lema 4.21: Suponha que $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ seja um conjunto gerador de V. Seja $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_q\}$ qualquer conjunto de vetores de V, com $q > m$. Vamos provar que $\mathcal{S}$ tem que ser linearmente dependente.

Como $\mathcal{G}$ gera V, cada vetor $\mathbf{v}_i$ de $\mathcal{S}$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $\mathbf{a}_j$ de $\mathcal{G}$.[11] Sendo assim, existem escalares u_{ij} tais que

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= u_{11}\mathbf{a}_1 + u_{12}\mathbf{a}_2 + \cdots + u_{1m}\mathbf{a}_m, \\
\mathbf{v}_2 &= u_{21}\mathbf{a}_1 + u_{22}\mathbf{a}_2 + \cdots + u_{2m}\mathbf{a}_m, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mathbf{v}_q &= u_{q1}\mathbf{a}_1 + u_{q2}\mathbf{a}_2 + \cdots + u_{qm}\mathbf{a}_m.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

[10] Em outras palavras, $\operatorname{Span} \mathcal{I}$ está *propriamente contido* em V (não vale a igualdade).

[11] A hipótese de que os vetores de $\mathcal{S}$ pertençam a V é essencial nesse passo!

Vamos agora definir os seguintes q vetores de $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ \vdots \\ u_{1m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ \vdots \\ u_{2m} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \mathbf{u}_q = \begin{bmatrix} u_{q1} \\ u_{q2} \\ \vdots \\ u_{qm} \end{bmatrix}.$$

Não há nenhum mistério aqui. Apenas atribuímos os nomes $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ... , $\mathbf{u}_q$ aos vetores indicados acima. Vamos também chamar de A a matriz cujas colunas são os vetores $\mathbf{a}_j$, isto é, $A = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m\end{bmatrix}$. Com esta notação, as q equações de (4.15) podem ser reescritas como

$$\mathbf{v}_1 = A\mathbf{u}_1, \qquad \mathbf{v}_2 = A\mathbf{u}_2, \qquad \dots, \qquad \mathbf{v}_q = A\mathbf{u}_q. \tag{4.16}$$

Para verificar a equivalência entre (4.15) e (4.16), basta usar a definição 2.4 do produto matriz-vetor (página 43).

Observe que $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_q\}$ é um conjunto de q vetores de $\mathbb{R}^m$ e que, por hipótese, $q > m$. Pela proposição 3.22, esse conjunto é linearmente dependente. Dessa forma, existem escalares $c_1, \dots, c_q$, *não todos iguais a zero*, tais que $c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_q\mathbf{u}_q = \mathbf{0}_m$. Essa relação de dependência linear se traduz para os vetores $\mathbf{v}_i$, por meio das equações (4.16). Com efeito, temos

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_q\mathbf{v}_q &= c_1A\mathbf{u}_1 + c_2A\mathbf{u}_2 + \dots + c_qA\mathbf{u}_q = \\ &= A(c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 + \dots + c_q\mathbf{u}_q) = A\mathbf{0}_m = \mathbf{0}_n. \end{aligned}$$

Isso mostra que o conjunto $\mathcal{S} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_q\}$ é linearmente dependente. □

Demonstração do teorema 4.26: Suponha que $\mathcal{S}$ seja linearmente independente. Se $\mathcal{S}$ não gerasse V, então, pelo teorema 4.19, poderíamos acrescentar vetores de V a $\mathcal{S}$ de forma a obter uma base. Essa base, no entanto, conteria *mais* do que p vetores, pois seria obtida *acrescentando* vetores a $\mathcal{S}$, que já tem p elementos. Isso contradiria a hipótese de que p seja a dimensão de V. Assim, $\mathcal{S}$ tem que ser um conjunto gerador de V. Isso termina a prova de (a).

Agora, suponha que $\mathcal{S}$ gere V. Se $\mathcal{S}$ não fosse linearmente independente, então, pelo teorema 4.18, poderíamos remover elementos de $\mathcal{S}$ de forma a obter uma base de V. Essa base, no entanto, conteria *menos* do que p vetores. Mais uma vez, isso contradiria a hipótese $\dim V = p$. Portanto, $\mathcal{S}$ tem que ser linearmente independente. Isso prova (b). □

Exercícios resolvidos

R4.1. Sejam $\mathbf{b}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{b}_2 = \left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, e considere a base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine o vetor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ tal que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Solução: Basta aplicar a definição 4.32. Dizer que $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$ é o mesmo que dizer $\mathbf{x} = 4\mathbf{b}_1 + 2\mathbf{b}_2$, ou seja, $\mathbf{x} = 4\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] + 2\left[\begin{smallmatrix} -3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Note que 2 e 0 são as coordenadas de $\mathbf{x}$ com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$. □

R4.2. Mostre que se V e W são subespaços de $\mathbb{R}^n$, então a interseção $V \cap W$ é também um subespaço de $\mathbb{R}^n$.

Solução: Vamos verificar que o subconjunto $V \cap W$ satisfaz as condições da definição 4.1. É claro que $V \cap W$ é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, já que V e W o são. O vetor zero de $\mathbb{R}^n$ pertence a V e a W (justifique), portanto ele pertence à interseção $V \cap W$. Sejam agora $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ quaisquer vetores de $V \cap W$. Isso significa que cada um desses vetores pertence a V e a W. Assim, a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ pertence a V e a W (justifique novamente), portanto pertence a $V \cap W$. A verificação da última condição é deixada para o leitor. □

R4.3. Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$. Verifique as seguintes afirmativas:

(a) Se V contiver m vetores linearmente independentes, então $\dim V \geqslant m$.
(b) Se V for gerado por um conjunto contendo q vetores, então $\dim V \leqslant q$.

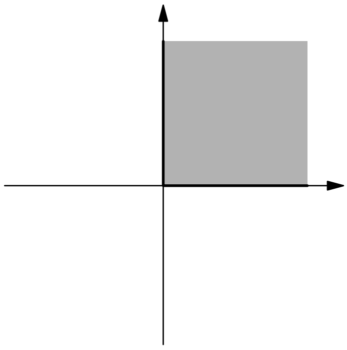
Solução: Este exercício é uma mera reformulação da proposição 4.22. Verifique, lembrando que, se V tem uma base contendo p elementos, então, por definição, $\dim V = p$. □

Observação: Na proposição 4.22, não empregamos explicitamente o termo "dimensão". De fato, essa proposição foi essencial para definir o termo, de modo que empregá-lo seria incoerente do ponto de vista lógico. No entanto, uma vez que o conceito de dimensão esteja adequadamente definido, temos a liberdade de reformular a proposição. O objetivo deste exercício foi exatamente esse.

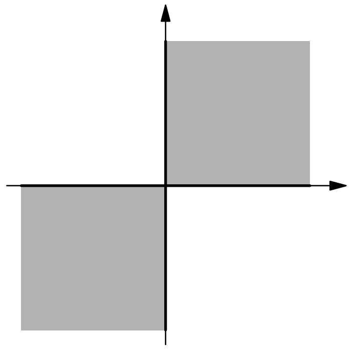
Exercícios propostos

P4.1. Em cada item abaixo, temos um subconjunto do $\mathbb{R}^2$. Suponha que cada um deles contenha a sua respectiva fronteira (representada pela linha mais grossa). Esses subconjuntos *não* são subespaços de $\mathbb{R}^2$. Determine qual(is) propriedade(s) da definição 4.1 é(são) violada(s) em cada caso. Justifique suas respostas graficamente, esboçando algumas figuras.

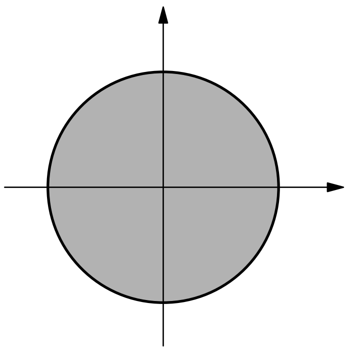
(a) O primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$.



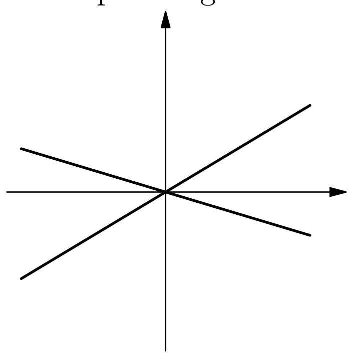
(b) A união do primeiro quadrante com o terceiro quadrante.



(c) Um disco com centro na origem.



(d) A união de duas retas distintas passando pela origem.



P4.2. Mostre que se V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e os vetores $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ pertencem a V, então qualquer combinação linear $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_m\mathbf{a}_m$ desses vetores também pertence a V, conforme a observação 4.2.

Dicas: Primeiro, observe que os vetores $c_1\mathbf{a}_1, \ldots, c_m\mathbf{a}_m$ pertencem a V, pela condição 3 da definição 4.1. Em seguida, aplique repetidamente a condição 2.

P4.3. Seja $Q = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2;\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$ o primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$, incluindo os semi-eixos positivos (ou seja, Q é o subconjunto dado no item (a) do exercício P4.1). Sejam também $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$. Mostre que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ pertencem a Q, mas $\operatorname{Span}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} = \mathbb{R}^2 \not\subseteq Q$. Explique por que isso *não* contradiz a observação 4.2.

P4.4. Em cada item, determine se os vetores dados formam uma base de $\mathbb{R}^2$. Justifique.

(a) $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix}3\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$.

P4.5. Em cada item, determine se os vetores dados formam uma base de $\mathbb{R}^3$. Justifique.

(a) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. (b) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

P4.6. Sejam $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ os vetores dados em (4.2) (página 86). Verifique, *sem utilizar a independência linear dos vetores* $\mathbf{e}_j$, que (4.3) é a *única* forma de representar um vetor $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^n$ como combinação linear de $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$.

Dica: Escreva duas combinações lineares dos vetores $\mathbf{e}_j$ e mostre, diretamente, que elas serão iguais somente se os pesos correspondentes forem todos iguais. Para isso, use a própria equação (4.3).

P4.7. Mostre que os vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ de (4.2) são linearmente independentes.

Dica: Use a equação (4.3) e a definição 3.14 de independência linear.

P4.8. Verifique que o lema 4.17 pode ser reformulado da seguinte maneira "compacta": Se $\mathbf{a}_k \in \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}$, então vale a igualdade $\operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}, \mathbf{a}_{k+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\} = \operatorname{Span}\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$. (Repare que essa formulação não faz referência alguma a subespaços "abstratos".)

P4.9. O teorema 4.18 diz que uma base de um subespaço pode ser obtida mediante a remoção de elementos "redundantes" de um conjunto gerador (releia o enunciado preciso, na página 90). Este exercício mostra que, em geral, há uma certa liberdade na escolha do(s) elemento(s) a ser(em) removido(s), mas isso não é verdade em todos os casos. Considere, primeiro, os vetores $\mathbf{a}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]$, $\mathbf{a}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{a}_3 = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ de $\mathbb{R}^2$ e o conjunto $\mathcal{G} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

(a) Verifique que $\mathcal{G}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^2$, mas não é uma base.
(b) Mostre que uma base de $\mathbb{R}^2$ pode ser obtida de $\mathcal{G}$ mediante a remoção de *qualquer um* dos vetores $\mathbf{a}_j$. Em outras palavras, verifique que os conjuntos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3\}$ e $\{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ são bases de $\mathbb{R}^2$.
(c) Conclua que nenhum dos vetores $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ é "intrinsecamente redundante" no conjunto gerador $\mathcal{G}$, ou seja, nenhum deles é "mais redundante" do que os outros.

Agora, considere o vetor $\mathbf{a}_4 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ e o conjunto $\mathcal{G}' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$.

(d) Verifique que $\mathcal{G}'$ gera $\mathbb{R}^2$, mas não é uma base.
(e) Mostre que uma base de $\mathbb{R}^2$ pode ser obtida de $\mathcal{G}'$ mediante a remoção de $\mathbf{a}_1$ ou de $\mathbf{a}_4$, *mas não de* $\mathbf{a}_2$.

Finalmente, considere o vetor $\mathbf{a}_5 = \mathbf{0}_2$ e o conjunto $\mathcal{G}'' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_5\}$.

(f) Verifique que $\mathcal{G}''$ gera $\mathbb{R}^2$, mas não é uma base.
(g) Mostre que uma base de $\mathbb{R}^2$ pode ser obtida de $\mathcal{G}''$ mediante a remoção de $\mathbf{a}_5$, *mas não de* $\mathbf{a}_1$ *ou de* $\mathbf{a}_2$.

Represente, geometricamente (usando setas), os vetores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_5$ no plano $\mathbb{R}^2$, e interprete intuitivamente os resultados acima. Ao considerar o item (e), em particular, observe que $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_4$ são colineares.

P4.10. Sejam $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\\4\end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix}2\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$. Verifique que o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente, mas não é uma base de $\mathbb{R}^3$. Encontre um vetor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ de forma que $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$. *Observação*: Há uma infinidade de respostas admissíveis.

P4.11. É possível acrescentar vetores ao conjunto $\left\{\left[\begin{smallmatrix}6\\0\\4\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}3\\0\\2\end{smallmatrix}\right]\right\}$ de forma a obter uma base de $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Dica: Veja o exercício P3.27. O teorema 4.19 se aplica nesse caso?

P4.12. Seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ uma base do subespaço V de $\mathbb{R}^n$. Suponha que V não seja o subespaço trivial (ou, equivalentemente, que $p \geqslant 1$). Mostre que, para qualquer escalar $\alpha \neq 0$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{\alpha\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ é também uma base de V. Em particular, V possui uma infinidade de bases distintas.

P4.13. Mostre que $\mathbb{R}^n$ não pode conter um subespaço de dimensão maior do que n, e que o único subespaço de $\mathbb{R}^n$ de dimensão igual a n é o próprio $\mathbb{R}^n$.

Dica: Inspire-se no exemplo 4.28.

P4.14. Verifique que $\mathcal{B} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}2\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}-1\\3\end{smallmatrix}\right]\right\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$. Em seguida, determine o vetor de coordenadas de cada vetor abaixo com respeito à base $\mathcal{B}$.

(a) $\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}7\\7\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

P4.15. Seja $V = \operatorname{Span}\left\{\left[\begin{smallmatrix}2\\2\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\-3\\2\end{smallmatrix}\right]\right\}$. Verifique que $\mathcal{B} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}2\\2\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\-3\\2\end{smallmatrix}\right]\right\}$ é uma base de V. Em seguida, determine se cada vetor abaixo pertence a V. Nos casos afirmativos, calcule o vetor de coordenadas com relação à base $\mathcal{B}$.

(a) $\begin{bmatrix}4\\12\\-7\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}0\\-8\\5\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

P4.16. Seja W o plano em $\mathbb{R}^3$ considerado no exemplo 4.37. Já sabemos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\} = \left\{\left[\begin{smallmatrix}1\\2\\-1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\3\\2\end{smallmatrix}\right]\right\}$ é uma base de W. Seja $\mathbf{u}$ o vetor de W tal que $[\mathbf{u}]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix}-4\\1\end{smallmatrix}\right]$. Esboce o vetor $\mathbf{u}$ diretamente sobre a figura 4.2. Em seguida, determine as coordenadas de $\mathbf{u}$ com relação à base canônica de $\mathbb{R}^3$.

P4.17. Seja V um subespaço de $\mathbb{R}^n$, e seja $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p\}$ uma base de V.

(a) Se $\mathbf{u} \in V$, então o sistema $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p = \mathbf{u}$ é possível e tem uma única solução. Justifique essa afirmativa.

(b) Se $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, mas $\mathbf{u} \notin V$, faz sentido falar das coordenadas de $\mathbf{u}$ com relação a $\mathcal{B}$? Explique. Neste caso, o sistema $c_1\mathbf{a}_1 + \cdots + c_p\mathbf{a}_p = \mathbf{u}$ é possível?

P4.18. Em cada item abaixo, a primeira matriz é linha-equivalente à segunda (neste contexto, o símbolo $\sim$ denota equivalência por operações sobre as linhas). Em cada caso, determine bases para $\operatorname{Col} A$ e $\operatorname{Nuc} A$. Determine também a dimensão desses subespaços.

(a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 8 & 4 \\ -3 & 10 & -9 & -11 \\ 0 & 2 & 6 & -10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 6 & 30 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 9 & 3 & 1 \\ 2 & -6 & 14 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

P4.19. Em cada item a seguir, determine uma base para o subespaço gerado pelos vetores dados.

(a) $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -7 \\ 0 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(b) $\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix}.$

P4.20. Seja A a matriz do exercício P4.18(c). Denote as suas colunas por $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_5$.

(a) Verifique que $\mathcal{B} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4\}$ é uma base de $\operatorname{Col} A$. (Essa é, provavelmente, a base que você encontrou no exercício P4.18(c).)

(b) Determine as coordenadas do vetor $\mathbf{a}_5$ com relação à base $\mathcal{B}$.
Dica: Aproveite o trabalho já realizado no exercício P4.18(c), e utilize a proposição 4.43.

P4.21. Reveja o exemplo 4.40 (página 100). Mostre que o vetor $\mathbf{x} = x_2\mathbf{v}_1 + x_4\mathbf{v}_2 + x_5\mathbf{v}_3$ de (4.8) será igual ao vetor zero somente se os pesos x_2, x_4 e x_5 forem todos iguais a zero. (*Dica*: Examine as componentes 2, 4 e 5 dos vetores envolvidos em (4.8).) Conclua que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ é linearmente independente.

P4.22. (a) Convença-se de que cada coluna não-pivô de uma matriz escalonada reduzida é gerada pelas colunas-pivô que estão à esquerda.

Sugestão: Pense em termos de formas escalonadas reduzidas "gerais", como aquelas indicadas em (1.12) (página 12).

(b) Mostre que cada coluna não-pivô de uma matriz *qualquer* é gerada pelas colunas-pivô que estão à esquerda.
Dica: Use o item anterior e a proposição 4.43.

(c) Use o lema 4.17 para concluir que o espaço-coluna de qualquer matriz é gerado por suas colunas-pivô.

P4.23. Observe que os vetores $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ e $\mathbf{b}_4$ do exemplo 4.42 são iguais, respectivamente, aos vetores $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ da base canônica de $\mathbb{R}^4$. Use o exercício P3.27(b) para concluir que esses vetores são linearmente independentes.

P4.24. (a) Seja R uma matriz $n \times m$, na forma escalonada reduzida. Convença-se de que as colunas-pivô de R são iguais a certos elementos da base canônica de $\mathbb{R}^n$. De fato, se R tem p colunas-pivô, então essas colunas são iguais aos vetores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ de $\mathbb{R}^n$.

(b) Conclua, do item anterior, que as colunas-pivô de uma matriz escalonada reduzida são sempre linearmente independentes.

(c) Mostre que as colunas-pivô de uma matriz *qualquer* são linearmente independentes.
Dica: Use novamente a proposição 4.43.

P4.25. Verifique que o vetor $\mathbf{v}_3$ do exemplo 4.50 pode ser escrito como uma combinação linear de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$. Conclua que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ é um conjunto gerador para $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$. (*Dica*: Use o lema 4.17 ou o exercício P4.8.) Verifique também que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_4\}$ é linearmente independente. Conclua que esse conjunto é uma base de $\operatorname{Span}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_4\}$, conforme afirmamos no exemplo 4.50.

P4.26. Sejam A e B matrizes linha-equivalentes. Mostre que $\operatorname{Nuc} A = \operatorname{Nuc} B$. Perceba, no entanto, que, em geral, *não vale* $\operatorname{Col} A = \operatorname{Col} B$.

Sugestão: Para a segunda parte, considere os exemplos da subseção 4.5.2.

P4.27. Se o núcleo de uma matriz 6×8 é tridimensional, qual é a dimensão do espaço das colunas?

P4.28. Se o posto de uma matriz 6×8 é igual a dois, qual é a dimensão de seu núcleo?

P4.29. Seja A uma matriz 5×8. A dimensão de $\operatorname{Nuc} A$ pode ser igual a zero? Qual é o menor valor possível para a dimensão de $\operatorname{Nuc} A$? Justifique suas respostas.

P4.30. Determine se cada afirmativa é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) O conjunto vazio é um subespaço.
(b) O subespaço trivial não contém vetor algum.
(c) O subespaço trivial contém exatamente um vetor, portanto não é vazio.

(d) Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ e V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, então qualquer vetor de V pode ser gerado pelos vetores de $\mathcal{B}$.
(e) Se $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, então $\mathcal{B}$ é também uma base de qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$.
(f) Se A e B são matrizes linha-equivalentes, então uma base de $\operatorname{Nuc} A$ é também uma base de $\operatorname{Nuc} B$.
(g) Se A e B são matrizes linha-equivalentes, então uma base de $\operatorname{Col} A$ é também uma base de $\operatorname{Col} B$.
(h) A dimensão do espaço-coluna de uma matriz A é igual ao número de linhas de A.
(i) A dimensão do espaço-coluna de uma matriz A é igual ao número de colunas de A.
(j) Para se obter uma base do espaço-coluna de uma matriz, é recomendável determinar sua forma escalonada *reduzida*.
(k) Para se obter uma base do núcleo de uma matriz, é recomendável determinar sua forma escalonada *reduzida*.