O *tipo* mais conhecido de número é o *número natural*. São os números da contagem, começando pelo 1:

1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .

Os números naturais, porém, têm o escopo limitado, por se expandirem numa só direção. Mais úteis são os *números inteiros*, que são os números naturais junto com o zero e os negativos dos números naturais:

. . . −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .

Os números inteiros abrangem todos os números desde o menos infinito até o mais infinito. Se existisse um hotel com um número ilimitado de andares e um número ilimitado de subsolos, os botões do elevador seriam os números inteiros.

Outro tipo básico de número é a *fração*, que são os números escritos como $\frac{a}{b}$ quando a e b são inteiros, com b nunca igual a 0. O número de cima da fração é o *numerador*, e o número de baixo é o *denominador*. Se tivermos várias frações, o *menor denominador comum* é o menor número divisível por todos os denominadores sem deixar resto. Então, se considerarmos $\frac{1}{2}$ e $\frac{3}{10}$, o menor denominador comum é 10, já que tanto 2 como 10 são divisores de 10. Mas qual o menor denominador comum de $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{9}$ e $\frac{7}{13}$? Em outras palavras, qual é o menor número divisível por 3, 4, 9 e 13? A resposta é surpreendentemente elevada: 468! Estou mencionando isso mais para esclarecer uma questão semântica do que matemática. O termo "menor denominador comum" é usado, em geral, para descrever alguma coisa básica e não sofisticada. Parece intuitivo, mas é enganoso quanto à aritmética. Menores denominadores comuns podem ser grandes e nada convencionais: 468 é um número bem impressionante! Um termo mais significativo em termos aritméticos para algo muito comum é o *máximo divisor comum* — que é o maior número divisor de um grupo de números. O máximo divisor comum de 3, 4, 9 e 13, por exemplo, é 1, e não se pode atingir nada menor ou menos sofisticado.

Por serem equivalentes a razões entre números inteiros, as frações são também chamadas de *números racionais*, e existe uma quantidade infinita deles. Aliás, existe um número infinito de números racionais entre 0 e 1. Por exemplo, vamos considerar todas as frações em que o numerador é 1 e o denominador é um número natural maior ou igual a 2. Será o conjunto composto por:

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6} \ldots$

Podemos ir além e provar que existe um número infinito de números racionais entre *quaisquer dois* números racionais. Vamos considerar *c* e *d* como dois números racionais, com *c* menor que *d*. O ponto médio entre *c* e *d* é um número racional: é $\frac{(c+d)}{2}$. Vamos chamar esse ponto de *e*. Podemos agora encontrar um ponto entre *c* e *e*. Seria $\frac{(c+e)}{2}$. É um número racional e também está entre *c* e *d*. Podemos continuar *ad infinitum*, sempre dividindo a distância entre *c* e *d* em partes cada vez menores. Não importa o quanto diminuirmos a distância entre *c* e *d*, sempre haverá um número infinito de números racionais entre eles.

Considerando que sempre se pode encontrar uma quantidade infinita de números racionais entre quaisquer dois números racionais, seria de se pensar que os números racionais abrangem todos os números. Sem dúvida era o que Pitágoras esperava. Sua metafísica baseava-se na convicção de que o mundo era feito de números e da proporção harmônica entre eles. A existência de um número que não pudesse ser descrito como uma proporção no mínimo diminuía sua importância, se não o contradissesse de uma vez por todas. Mas, infelizmente para Pitágoras, *existem* números que não podem ser expressos em termos de frações — o que é ainda mais constrangedor para ele —, e é seu próprio teorema que nos leva a um deles. Se tivermos um quadrado em que cada lado tenha a medida de 1, o comprimento da diagonal será a raiz quadrada de dois, que não pode ser escrita como fração (incluí uma prova disso no apêndice, p. 445).

Os números que não podem ser escritos em forma de frações são chamados de *irracionais*. Segundo a lenda, a existência desses números foi demonstrada pela primeira vez por um discípulo pitagórico, Hipaso, o que por certo não lhe valeu o ingresso na Irmandade: ele foi declarado herege e afogado no mar.

Quando um número racional é escrito como uma fração decimal, ou ele tem uma quantidade finita de dígitos — como $\frac{1}{2}$ pode ser escrito como 0,5 —, ou as casas se repetem para sempre — como $\frac{1}{3}$ é igual a 0,3333... em que esses 3 continuam para sempre. Às vezes a repetição acontece com mais de um dígito, como no caso de $\frac{1}{11}$, que é 0, 090909... onde os dígitos 09 se repetem para sempre, ou $\frac{1}{19}$, que é 0,052631578947368421 0... em que 052631578947368421 se repete para sempre. Em contraste, e esse é o ponto crucial, quando um número é irracional, sua expansão decimal nunca se repete.