Método de Prova por Diagramas Numerados: uma justificativa algébrica

Danilo Souza
Bolsista PIBIC-CNPq
IC-UFF

Petrucio Viana
Orientador
GAN-IME-UFF

Renata de Freitas
Coorientadora
GAN-IME-UFF

2013

Sumário

1 Introdução

Neste trabalho[1], apresentamos o Método de Prova por Diagramas Numerados. Provamos que o método apresentado é *correto* e *completo*, e os lemas utilizados são demonstrados de maneira detalhada. Apresentamos, também, definições precisas dos conceitos utilizados em nossas provas.

O Método de Prova por Diagramas Numerados é uma ferramenta para identificarmos quais inclusões entre termos construídos a partir de variáveis para conjuntos $A, B, C, \ldots$ e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, são verdadeiras para quaisquer conjuntos.

Para isto, utilizamos *diagramas numerados*, isto é, diagramas gerais (que representam todas as possibilidades de pertinência de elementos do universo aos conjuntos considerados) com regiões numeradas (rotuladas).

Basicamente, calculamos as sequências de rótulos que representam os termos da inclusão que queremos verificar. Após esta etapa, comparamos as duas sequências de rótulos obtidas. Se todos os rótulos que ocorrem na primeira sequência ocorrem, também, na segunda, concluímos que a inclusão é verdadeira para quaisquer conjuntos $A, B, C, \ldots$ Caso contrário, seremos capazes de construir um contraexemplo, indicando que a inclusão *não* é verdadeira para todos os conjuntos $A, B, C, \ldots$

[1]Texto extraído do relatório final apresentado ao Programa PIBIC-CNPq da UFF.

Uma versão inicial deste trabalho foi apresentada na Semana de Monitoria 2012, pelos monitores **Danilo Souza** (autor deste trabalho) e Rafael Costa, da disciplina Matemática Discreta (GAN-IME-UFF).

2 Apresentação do método

O Método de Prova por Diagramas Numerados (MPDN) é uma ferramenta para identificarmos quais inclusões entre termos construídos a partir de variáveis para conjuntos $A, B, C, \ldots$ e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, são verdadeiras para quaisquer conjuntos.

O método recebe este nome, justamente, pela utilização de *diagramas numerados*, isto é, diagramas gerais (que representam todas as possibilidades de pertinência de elementos do universo aos conjuntos considerados) cujas regiões mínimas são rotuladas. Podemos utilizar sequências de rótulos de um diagrama numerado para representar um termo da inclusão. Com isso, a comparação das sequências de rótulos dos termos da inclusão será suficiente para apontar se o primeiro termo está contido no segundo para quaisquer conjuntos, isto é, se a inclusão é válida.

Basicamente, se todos os rótulos que ocorrem na primeira sequência ocorrem, também, na segunda, concluímos que a inclusão é verdadeira para quaisquer conjuntos $A, B, C, \ldots$ Caso contrário, seremos capazes de construir um contraexemplo, indicando que a inclusão *não* é verdadeira para todos os conjuntos $A, B, C, \ldots$

Assim, apresentamos o MPDN como solução para o Problema da Inclusão, enunciado a seguir.

PROBLEMA DA INCLUSÃO

DADOS: termos X e Y construídos a partir de variáveis $A_1, \ldots, A_n$ para conjuntos e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos.

QUESTÃO: a inclusão $X \subseteq Y$ é verdadeira para todos os conjuntos $A_1, \ldots, A_n$?

A seguir apresentamos o MPDN.

MPDN

Dados os termos X e Y construídos a partir de variáveis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ para conjuntos e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, faça:

PASSO 1. Desenhe um Diagrama Numerado para $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

PASSO 2. Calcule a sequência $r[X]$ de rótulos para X e a sequência $r[Y]$ de rótulos para Y.

PASSO 3. Compare as sequências de rótulos $r[X]$ e $r[Y]$.

PASSO 4. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ também ocorrerem em $r[Y]$, responda SIM. Caso contrário, responda NÃO.

Para compreender melhor o MPDN apresentamos, a seguir, a descrição de cada um dos passos do método:

Passo 1. **Desenhar** um Diagrama Numerado para os conjuntos dados:

Desenhe o Diagrama de Venn para os conjuntos que ocorrem nos termos cuja inclusão deseja ser verificada. O Diagrama, então, deverá mostrar todas as possibilidades de um determinado elemento pertencer ou não aos conjuntos representados pelo diagrama. Cada uma destas possibilidades será uma região mínima do diagrama. Com isso, teremos 2^n regiões mínimas num Diagrama de Venn para n conjuntos. Para tornar este diagrama, um diagrama numerado, basta dar números (rotular) a cada região mínima do diagrama. Assim, teremos 2^n rótulos, um para cada região mínima do diagrama. Assim, nosso Diagrama Numerado estará pronto.

Passo 2. **Calcular** a sequência de rótulos para cada lado da inclusão:

Para calcular a sequência de rótulos de cada termo da inclusão, basta que consideremos, inicialmente, as sequências de rótulos de cada conjunto que ocorre no diagrama, além do conjunto Universo. Desta forma, basta realizar as operações com as sequências de rótulos destes conjuntos de modo a obter a sequência de rótulos dos termos envolvidos pela inclusão. O cálculo da sequência de rótulos de um determinado termo é análogo (intuitivamente) às operações que ocorrem na Álgebra de

Conjuntos. Por exemplo, a sequência de rótulos do termo $X \cap Y$ é a sequência que apresenta os rótulos que estão presentes na sequência de rótulos de X e na sequência de rótulos de Y simultaneamente. A analogia com a Álgebra de Conjuntos também ocorre no cálculo da sequência de rótulos de $X \cup Y$ e $\overline{X}$. Ao final deste passo, você terá obtido a sequência de rótulos de ambos os termos da inclusão a ser verificada como válida ou não.

Passos 3 e 4. **Comparar** as sequências de rótulos.

Ao obter as duas sequências de rótulos dos termos da inclusão em questão, o último passo do método é realizar a comparação das sequências de rótulos. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ (sequência de rótulos do termo X) ocorrem, também, em $r[Y]$ (sequência de rótulos do termo Y), então, o método afirma que $X \subseteq Y$ para todos os conjuntos $A, B, C \ldots$. Em caso contrário, ao pegar um rótulo de $r[X]$ que não está presente em $r[Y]$, poderemos construir um contraexemplo que nos mostrará que, para alguns conjuntos $A, B, C, \ldots$, a inclusão $X \subseteq Y$ não é verdadeira. Pelo método, o contraexemplo obtido é unitário, isto é, envolve apenas conjuntos vazios ou unitários, em um universo unitário.

Para ilustrar melhor como o MPDN funciona, acompanhe os dois exemplos a seguir:

2.1 Prova de Inclusões

Vejamos um exemplo de prova de inclusão.

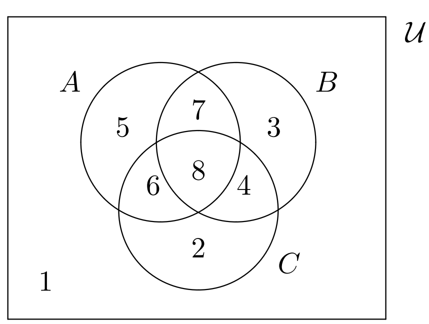
Exemplo 2.1 Para todos os conjuntos A, B e C temos que:

$$\overline{A \cup C} \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}.$$

Verdadeiro ou falso?

Vamos responder a esta pergunta utilizando o MPDN:

Passo 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A, B, C.



Observe que este diagrama representa todas as possibilidades de um elemento pertencer a A, B ou C. Além disso, cada uma das regiões é rotulada. A seguir, a relação entre os rótulos e estas possibilidades.

$$\begin{array}{lcl}
1 & : & \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
2 & : & \overline{A} \cap \overline{B} \cap C \\
3 & : & \overline{A} \cap B \cap \overline{C} \\
4 & : & \overline{A} \cap B \cap C \\
5 & : & A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \\
6 & : & A \cap \overline{B} \cap C \\
7 & : & A \cap B \cap \overline{C} \\
8 & : & A \cap B \cap C
\end{array}$$

Passo 2. Calcule a sequência $r[X]$ de rótulos para X e a sequência $r[Y]$ de rótulos para Y.

Devemos calcular a sequência de rótulos para os termos que estão relacionados pela inclusão:

$$\overline{A \cup C} \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}$$

$$r[\overline{A \cup C}] = ?$$

$$r[A \cup C] = 245678$$

$$r[\overline{A \cup C}] = 13$$

$$r[\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}] = ?$$

$$r[A \cap B] = 78$$

$$r[C] = 2468$$

$$r[\overline{B}] = 1265 \; r[C \cap \overline{B}] = 26$$

$$r[(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B}] = 2678$$

$$r[\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}] = 1345$$

Passo 3. Compare as sequências de rótulos $r[X]$ e $r[Y]$.

Comparamos as sequências $r[\overline{A \cup C}] = 13$ e $r[\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}] = 1345$ e verificamos que todos os rótulos da sequência $r[\overline{A \cup C}]$ encontra-se em $r[\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}]$.

Passo 4. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ também ocorrerem em $r[Y]$, responda sim. Caso contrário, responda não.

Como todos os rótulos que ocorrem na sequência $r[\overline{A \cup C}]$ ocorrem também na sequência $r[\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}]$, a resposta é SIM: temos que a inclusão é *verdadeira* para quaisquer conjuntos A, B e C.

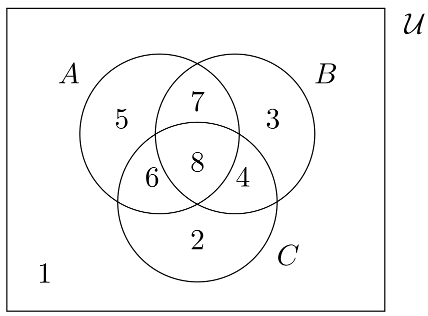
Exemplo 2.2 Para todos os conjuntos A, B e C temos que:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup C.$$

Verdadeiro ou falso?

PASSO 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A, B e C.

O diagrama numerado para os conjuntos A, B e C é:



PASSO 2. Calcule a sequência $r[X]$ de rótulos para X e a sequência $r[Y]$ de rótulos para Y.

Devemos calcular a sequência de rótulos para os termos que estão relacionados pela inclusão $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup C$:

$$r[(A \cup B) \cap (B \cup C)] =?$$
$$r[A \cup B] = 345678$$
$$r[B \cup C] = 234678$$
$$r[(A \cup B) \cap (B \cup C)] = 34678$$

$$r[A \cup C] = 245678$$

PASSO 3. Compare as sequências de rótulos $r[X]$ e $r[Y]$.

Comparamos as sequências $r[(A \cup B) \cap (B \cup C)] = 34678$ e verificamos que todos os rótulos da sequência$r[\overline{A \cup C}]$ encontra-se em $r[A \cup C] = 245678$ e verificamos que nem todos os rótulos de $r[(A \cup B) \cap (B \cup C)]$ encontra-se em $r[A \cup C]$.

PASSO 4. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ também ocorrerem em $r[Y]$, responda SIM. Caso contrário, responda NÃO.

Como há rótulos que ocorrem em $r[(A\cup B)\cap(B\cup C)]$, mas não ocorrem em $r[A\cup C]$, a resposta é NÃO: temos que a inclusão *não* é verdadeira para alguns conjuntos A, B e C.

2.2 Prova de Igualdades

Como uma igualdade $X = Y$ entre termos, construídos a partir de variáveis para conjuntos e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, é verdadeira se, e somente se, ambas as inclusões $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq X$ são verdadeiras, o MPDN pode ser usado também para identificar igualdades verdadeiras para todos os conjuntos.

2.3 Criação de contraexemplos

Para criarmos um contraexemplo para uma inclusão, de modo que mostremos que existem conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que tornam a inclusão falsa, é necessário que apresentemos conjuntos (exemplos) $A_1, A_2, \ldots, A_n$, de modo que pelo menos um elemento pertença ao termo da esquerda da inclusão, mas não pertença ao termo da direita da inclusão. Deste modo, não é verdade que o conjunto representado pelo termo da esquerda está contido no conjunto representado pelo termo da direita para todos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Ao executarmos o MPDN, teremos as sequências de rótulos que representam os termos envolvidos na inclusão. Pensando diagramaticamente, cada rótulo representa uma região mínima diferente do diagrama numerado. Com isso, a sequência de rótulos de um termo representará quais regiões mínimas poderão ter elementos, tendo em vista as diferentes formas de construirmos os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, além das operações as quais os conjuntos são submetidos para construir o termo. Por exemplo, no diagrama numerado para os três conjuntos A, B e C, a sequência de rótulos de $A \cap B \cap C$ é, somente, o rótulo de número 8. Isto significa que, com as diferentes formas de construir os três conjuntos em questão, somente a região (de rótulo) 8 poderá ter elementos. As outras sete estarão, certamente, vazias, considerando somente o termo $A \cap B \cap C$.

Como a sequência de rótulos aponta quais as regiões do diagrama numerado que podem estar preenchidas ou não, ao construirmos o contraxemplo, podemos utilizar as sequências que representam os termos da inclusão que queremos verificar para escolher elementos convenientes a $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de modo que a inclusão **não** seja verdadeira para estes determinados conjuntos.

Para isso, devemos escolher um rótulo R, tal que R esteja presente na sequência de rótulos do termo da esquerda, mas que não esteja na sequência de rótulos do termo da direita na inclusão. Dentre os conjuntos envolvidos na inclusão $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$, aqueles cuja sequência de rótulos apresentam o rótulo R deverão ter R em seus elementos. Os demais conjuntos ficam vazios.

Assim, construímos um contraexemplo unitário a partir das sequências de rótulos dos termos da inclusão. Ele é *unitário*, pois basta um único elemento no conjunto universo para que a inclusão não seja verdadeira para conjuntos específicos $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Com isso, apresentamos o Método da Criação de Contraexemplos Unitários, que deve ser executado quando o MPDN responde NÃO à pergunta que origina sua execução.

MÉTODO DA CRIAÇÃO DE CONTRAEXEMPLOS UNITÁRIOS

Dados os termos X e Y construídos a partir de variáveis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ para conjuntos e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, $r[X]$ e $r[Y]$ as sequências de rótulos (que representam os termos X e Y) calculadas no MPDN, sendo X e Y tais que o MPDN responde NÃO para $\models X \subseteq Y$, faça:

PASSO 1. Identifique um rótulo R que ocorre em $r[X]$, mas que não ocorre em $r[Y]$.

PASSO 2. Para todo i, com $1 \leq i \leq n$, se R ocorre em $r[A_i]$, tome $A_i = \{R\}$. Caso contrário, tome $A_i = \emptyset$.

PASSO 3. Determine os valores de X e Y a partir de $A_1, A_2, \ldots, A_n$ calculados no passo anterior.

PASSO 4. Conclua que $X \nsubseteq Y$ para os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ calculados no passo anterior.

Exemplo 2.3 Para alguns conjuntos A, B e C, temos que, segundo o MPDN, não é verdade que:

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq A \cup C.$$

Podemos determinar um contraexemplo unitário?

Vimos no exemplo anterior que $r[(A \cup B) \cap (B \cup C)] = 34678$ e $r[A \cup C] = 245678$. Além disso, sabemos que $r[A] = 5678$, $r[B] = 3478$ e $r[C] = 2468$.

Passo 1. Identifique um rótulo R que ocorre em $r[X]$, mas que não ocorre em $r[Y]$.

Temos que o rótulo 3 ocorre em $r[(A \cup B) \cap (B \cup C)]$, mas não ocorre em $r[A \cup C]$.

Passo 2. Para todo i, com $1 \leq i \leq n$, se R ocorre em $r[A_i]$, tome $A_i = \{R\}$. Senão, tome $A_i = \emptyset$.

3 não ocorre em $r[A]$, logo $A = \emptyset$.

3 ocorre em $r[B]$, logo $B = \{3\}$.

3 não ocorre em $r[C]$, logo $C = \emptyset$.

Passo 3. Determine os valores de X e Y a partir de A, B e C calculados no passo anterior.

Tomando $A = C = \emptyset$ e $B = \{3\}$:

$A \cup B = \{3\}$. $B \cup C = \{3\}$. $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{3\}$.

$A \cup C = \emptyset$.

Passo 4. Conclua que $X \not\subseteq Y$ para os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ calculados no passo anterior.

Como $(A \cup B) \cap (B \cup C) = \{3\}$ e $A \cup C = \emptyset$, temos que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \not\subseteq A \cup C$.

2.4 Corretude e completude

Observe que o objetivo do MPDN é identificar as inclusões (e igualdades) verdadeiras para *quaisquer conjuntos*, inclusive os *infinitos*. No entando, o MPDN justifica inclusões (e igualdades) através da comparação de sequências *finitas* de rótulos. Assim, o método não parece forte o suficiente. Devemos, então, mostrar que o MPDN é:

- *Correto* (nunca leva a resultados errados).

- *Completo* (sempre chega ao resultado correto).

Para isso, vamos mostrar que um termo, envolvendo conjuntos finitos ou infinitos, pode ser reescrito em *forma normal*, sem nenhuma alteração semântica. Com isso, o termo poderá ser visto como uma união de interseções fundamentais (será explicada adiante).

Cada uma destas interseções é o significado de uma região mínima distinta do diagrama numerado. E, como vimos anteriormente, os rótulos identificam numericamente estas regiões mínimas. Deste modo, as sequências de rótulos, embora finitas, representam regiões que podem conter infinitos elementos. Assim, se um termo está na forma normal, podemos enxergá-lo como uma quantidade finita de compartimentos infinitos.

Portanto, é necessário garantir que um termo pode ser colocado em forma normal, sem alteração de seu significado, permitindo que este possa ser representado num diagrama geral, além de garantir que a comparação das sequências de rótulos, de fato, permite responder corretamente se os conjuntos, cujos termos possuem estas tais sequências, estão contidos um no outro (de acordo com a posição que o termo ocupa referente ao $\subseteq$).

Sendo assim, na próxima subseção, definiremos a forma normal e apresentaremos dois teoremas que garantem que o MPDN é completo e correto.

3 Álgebra de Conjuntos

Para a prova dos teoremas que garantem a completude e a corretude do MPDN, definimos formalmente a linguagem da Álgebra de Conjuntos, além de alguns conceitos baseados nesta definição.

3.1 Sintaxe

3.1.1 Alfabeto

Definição 3.1 O alfabeto da linguagem da Álgebra de Conjuntos é composto dos símbolos a seguir.

– Variáveis para conjuntos: $A, B, C, \ldots$ (indexadas ou não)

– Símbolos de operações: $\sqcap$, $\sqcup$,

– Sinal de inclusão: $\sqsubseteq$

– Sinais de pontuação: $($, $)$

O conjunto de todas as variáveis para conjuntos será denotado por Var.

3.1.2 Termos

Definição 3.2 Os *termos* da Álgebra de Conjuntos são as sequências finitas de símbolos obtidas por aplicações das seguintes regras:

1. Cada variável para conjunto é um termo.

2. Se X é um termo, então $\overline{X}$ é um termo.

3. Se X e Y são termos, então $(X \sqcap Y)$ e $(X \sqcup Y)$ são termos.

Assumimos que nenhum objeto é um termo a não ser que possa ser obtido por um número finito de aplicações das regras acima.

Definição 3.3 Seja X e Y termos.

(a) Dizemos que o termo $\overline{X}$ é o complementar de X.

(b) Dizemos que o termo $(X \sqcup Y)$ é a união de X e Y.

(c) Dizemos que o termo $(X \sqcap Y)$ é a interseção de X e Y.

Definição 3.4 Sejam X, Y e Z termos e A uma variável para conjuntos. O *conjunto de todas as variáveis que ocorrem em* X, denotado por $\mathsf{Var}[X]$, é obtido pela aplicação das seguintes regras:

1. Se $X \in \mathsf{Var}$, então $\mathsf{Var}[X] = \{X\}$.

2. Se X é $\overline{Y}$, então $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}[Y]$.

3. Se X é $(Y \sqcap Z)$, então $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}[Y] \cup \mathsf{Var}[Z]$.

4. Se X é $(Y \sqcup Z)$, então $\mathsf{Var}[X] = \mathsf{Var}[Y] \cup \mathsf{Var}[Z]$.

3.2 Semântica

Definição 3.5 Um modelo é um par $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, onde $\mathcal{U} \neq \emptyset$ é o universo do modelo $\mathcal{M}$ e I é uma função $I : \mathsf{Var} \to \mathcal{P}(\mathcal{U})$ chamada interpretação em $\mathcal{U}$.

Definição 3.6 Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$ um modelo. O significado de um termo X segundo I, denotado por $I^*[X]$, é definido pelas seguintes regras:

1. Se $X \in \mathsf{Var}$, então $I^*[X] = I(X)$.

2. Se X é $\overline{Y}$, então $I^*[X] = \mathcal{U} - I^*[Y]$.

3. Se X é $(Y \sqcup Z)$, então $I^*[X] = I^*[Y] \cup I^*[Z]$.

4. Se X é $(Y \sqcap Z)$, então $I^*[X] = I^*[Y] \cap I^*[Z]$.

Definição 3.7 Sejam $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$ um modelo e $X \sqsubseteq Y$ uma inclusão. Dizemos que $X \sqsubseteq Y$ é <u>verdadeira</u> em $\mathcal{M}$, denotado por $\mathcal{M} \models X \sqsubseteq Y$, se $I^*[X] \subseteq I^*[Y]$.

Definição 3.8 Seja $X \sqsubseteq Y$ uma inclusão. Dizemos que $X \sqsubseteq Y$ é <u>válida</u> se, para todo modelo $\mathcal{M}$, temos que $\mathcal{M} \models X \sqsubseteq Y$.

Visando uma melhor leitura do texto, deste ponto em diante, iremos omitir parênteses na escrita de termos, conforme descrito a seguir.

- Omissão de parênteses externos. Por exemplo, o termo $(A \sqcap B)$ será escrito como $A \sqcap B$.

- Omissão de parênteses na iteração de um mesmo símbolo de operação binária. Por exemplo, o termo $((A \sqcup B) \sqcup C)$ será escrito como $A \sqcup B \sqcup C$.

3.3 Outros conceitos

3.3.1 Interseção Fundamental

Definição 3.9 Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ variáveis para conjuntos distintas duas a duas. Uma <u>interseção fundamental</u> em $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, é um termo da forma

$$(Z_1 \sqcap Z_2 \sqcap \cdots \sqcap Z_n)$$

onde Z_i é ou A_i ou $\overline{A_i}$, com $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 3.1 (a) $\overline{B}$ é interseção fundamental em $\{B\}$.

(b) $(A \sqcap B)$ é interseção fundamental em $\{A, B\}$, mas **não** é interseção fundamental em $\{A, B, C\}$.

(c) $(\overline{A} \sqcap B \sqcap C)$ é interseção fundamental em $\{A, B, C\}$.

(d) $\overline{\overline{A}}$, $(A \sqcap B \sqcap A)$ e $(A \sqcap B \sqcap C \sqcap \overline{B})$ **não** são interseções fundamentais.

3.3.2 Forma Normal Inicial

Definição 3.10 Dado um termo X, dizemos que X está na <u>forma normal inicial</u> se, em X, o símbolo da operação de complementação é aplicado somente a variáveis.

Exemplo 3.2 Os termos $(A \sqcup (B \sqcap \overline{C}))$ e $((\overline{A} \sqcup \overline{B}) \sqcap \overline{C})$ estão na forma normal inicial. Já os termos $\overline{(A \sqcap B)}$ e $\overline{\overline{C}}$ **não** estão na forma normal inicial.

3.3.3 Forma Normal Incompleta

Definição 3.11 Dado um termo X, dizemos que X está na forma normal incompleta se X é uma união de termos $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ que são da forma

$$(Z_1 \sqcap Z_2 \sqcap \cdots \sqcap Z_n),$$

onde cada Z_i $(1 \leq i \leq n)$ é uma variável para conjuntos ou o complementar de uma variável para conjuntos.

Exemplo 3.3 O termo $((A \sqcap B) \sqcup (B \sqcap \overline{C} \sqcap D) \sqcup (\overline{B} \sqcap D))$ está na forma normal incompleta. Já os termos $\overline{(A \sqcup B)}$ e $((A \sqcup B) \sqcap (B \sqcup C))$ **não** estão na forma normal incompleta.

3.3.4 Forma Normal

Definição 3.12 Sejam X um termo e V um conjunto finito de variáveis tais que $\mathsf{Var}[X] \subseteq V$. Dizemos que X está na forma normal (em relação a V) se X é uma união de interseções fundamentais em V.

Note que, se X está na forma normal em relação a V, então o conjunto das variáveis de cada interseção fundamental que ocorre em X é igual a V. Isto é, $\mathsf{Var}[Y] = V$ para cada interseção fundamental Y que ocorre em X.

Exemplo 3.4 O termo

$$((A \sqcap B \sqcap C) \sqcup (A \sqcap B \sqcap \overline{C}) \sqcup (\overline{A} \sqcap \overline{B} \sqcap C) \sqcup (\overline{A} \sqcap B \sqcap C))$$

está na forma normal, em relação a $V = \{A, B, C\}$. Já o termo $((A \sqcap B) \sqcup (B \sqcap C))$ **não** está na forma normal.

3.3.5 Equivalência

Definição 3.13 Sejam X e Y termos. Dizemos que X e Y são equivalentes, denotado por $X \equiv Y$, quando, para todo modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, temos que $I^*[X] = I^*[Y]$.

Proposição 3.1 Para todos os termos X e Y, as seguintes afirmações são equivalentes:

(1) $X \equiv Y$.

(2) $\models X \sqsubseteq Y$ e $\models Y \sqsubseteq X$.

PROVA. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $X \equiv Y$. Daí, para todo modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, temos que $I^*[X] = I^*[Y]$. Daí, para todo modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, temos que $I^*[X] \subseteq I^*[Y]$ e $I^*[Y] \subseteq I^*[X]$. Logo, $\models X \sqsubseteq Y$ e $\models Y \sqsubseteq X$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\models X \sqsubseteq Y$ e $\models Y \sqsubseteq X$. Daí, para todo modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, $I^*[X] \subseteq I^*[Y]$ e $I^*[Y] \subseteq I^*[X]$. Daí, para todo modelo $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$, $I^*[X] = I^*[Y]$. Logo, $X \equiv Y$. ■

Proposição 3.2 A relação $\equiv$ é uma relação de equivalência no conjunto dos termos da Álgebra de Conjuntos.

PROVA.

- **A relação $\equiv$ é reflexiva:**

  Seja X um termo. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$ um modelo. Temos que $I^*[X] = I^*[X]$. Logo, $X \equiv X$.

- **A relação $\equiv$ é simétrica:**

  Sejam X e Y termos. Suponhamos que $X \equiv Y$. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$ um modelo. Como $X \equiv Y$, temos que $I^*[X] = I^*[Y]$. Daí, $I^*[Y] = I^*[X]$. Logo, $Y \equiv X$.

- **A relação $\equiv$ é transitiva:**

  Sejam X, Y e Z termos. Suponhamos que $X \equiv Y$ e $Y \equiv Z$. Seja $\mathcal{M} = (\mathcal{U}, I)$ um modelo. Como $X \equiv Y$, temos que $I^*[X] = I^*[Y]$. Como $Y \equiv Z$, temos que $I^*[Y] = I^*[Z]$. Daí, $I^*[X] = I^*[Z]$. Logo, $X \equiv Z$.

Como a relação $\equiv$ é reflexiva, simétrica e transitiva, temos que $\equiv$ é uma relação de equivalência. ■

A proposição a seguir será apresentada sem prova.

Proposição 3.3 Para todos os termos X, Y, Z, temos que:

1. Se $X \equiv Y$, então $\overline{X} \equiv \overline{Y}$.
2. Se $X \equiv Y$ e $Z \equiv W$, então $X \sqcap Z \equiv Y \sqcap W$.
3. $\overline{\overline{X}} \equiv X$.
4. $\overline{(X \sqcap Y)} \equiv \overline{X} \sqcup \overline{Y}$.
5. $\overline{(X \sqcup Y)} \equiv \overline{X} \sqcap \overline{Y}$.

6. $X \sqcap (Y \sqcup Z) \equiv (X \sqcap Y) \sqcup (X \sqcap Z)$.

7. $X \sqcup (Y \sqcap Z) \equiv (X \sqcup Y) \sqcap (X \sqcup Z)$.

8. $X \sqcap X \equiv X$.

9. $X \sqcup \emptyset \equiv X$.

10. $X \sqcup (X \sqcap Y) \equiv X$.

11. $X \sqcap \overline{X} \equiv \emptyset$.

4 Importância da Forma Normal

Um diagrama numerado é um diagrama geral que representa n conjuntos de modo que todas as possibilidades de um elemento pertencer a estes conjuntos são representadas por regiões distintas no diagrama.

Assim, um diagrama numerado para n conjuntos possui 2^n regiões, chamadas *regiões mínimas*, que representam as 2^n maneiras de um elemento pertencer/não pertencer a cada um dos conjuntos considerados.

Cada uma das regiões do diagrama numerado possui uma correspondência com uma interseção fundamental diferente. Para representarmos a união de duas ou mais regiões, basta que façamos a união destas interseções fundamentais.

Assim, se um termo X é uma união de interseções fundamentais, isto é, se X está na *forma normal*, temos uma representação direta para X no diagrama numerado.

Além disso, o MPDN é descrito como a comparação de sequências de rótulos de termos de modo a identificar se um termo está incluído em outro. Como cada rótulo pode ser associado a uma interseção fundamental, as sequências de rótulos representam uniões de interseções fundamentais. Desta forma, para mostrar que o MPDN é correto e completo, basta assegurar que (1) todo termo *pode ser colocado* em forma normal; (2) para sabermos se um termo, em forma normal, está contido em outro também em forma normal, basta verificar se as interseções fundamentais do primeiro ocorrem, também, no segundo.

Na próxima seção, enunciamos teoremas que garantem (1) e (2). Assim, como corolário, teremos a completude e corretude do MPDN.

5 Teoremas

5.1 Teorema da Forma Normal

Inicialmente, mostraremos que todo termo "pode ser colocado em forma normal", isto é, para todo termo X, existe um termo que está na forma normal e é equivalente a X. Para provarmos este resultado, usaremos dois lemas:

Lema 5.1 *Para todo termo X, existem termos $\mathsf{FN}^i[X]$ e $\mathsf{FN}^i[\overline{X}]$ tais que*

(*a*) $\mathsf{FN}^i[X]$ *está na forma normal inicial,*

(*b*) $\mathsf{FN}^i[\overline{X}]$ *está na forma normal inicial,*

(*c*) $X \equiv \mathsf{FN}^i[X]$*,*

(*d*) $\overline{X} \equiv \mathsf{FN}^i[\overline{X}]$*.*

Lema 5.2 *Para todo termo X na forma normal inicial, existe um termo $\mathsf{FN}^{ic}[X]$, tal que:*

(a) $\mathsf{FN}^{\mathsf{ic}}[X]$ *está em forma normal incompleta.*

(b) $X \equiv \mathsf{FN}^{\mathsf{ic}}[X]$*.*

Estes dois lemas são provados por indução em termos.

Usando estes lemas podemos provar o seguinte teorema:

Teorema 5.1 *Para todo termo X e todo conjunto finito de variáveis V tal que $\mathsf{Var}[X] \subseteq V$, existe um termo $\mathsf{FN}[X]$ tal que:*

(*a*) $\mathsf{FN}[X]$ *está em forma normal, em relação a V,*

(*b*) $X \equiv \mathsf{FN}[X]$*.*

Este teorema é provado utilizando os dois lemas apresentados anteriormente, além da propriedade de transitividade da relação $\equiv$.

Com a aplicação dos dois lemas acima, temos que X possui termo equivalente na forma normal incompleta, que, como vimos, é uma união de interseções fundamentais. O que mostramos aqui é a franca possibilidade de inserirmos variáveis para conjunto nestas interseções de modo que obtenhamos um termo equivalente a X, mas em forma normal.

5.2 Teorema das Interseções Fundamentais

Teorema 5.2 *Para todos os termos X, Y, ambos na Forma Normal, temos que as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(a) $\models X \sqsubseteq Y$.

(b) Toda interseção fundamental de X ocorre em Y.

6 Perspectivas

7 Extensão do MPDN para tratamento de consequência

Vimos que o MPDN é útil para identificar inclusões (e igualdades) verdadeiras na Álgebra de Conjuntos. Além disso, queremos mostrar que o Método (após pequenas alterações) também é útil para identificar inclusões verdadeiras sob determinadas hipóteses, de modo que consigamos tratar a relação de consequência entre as hipóteses e a inclusão cuja validade será verificada.

Para isso, antes de calcularmos as sequências de rótulos dos termos envolvidos na inclusão a ser verificada, devemos analisar cada hipótese, de modo que o diagrama numerado no qual o MPDN basear-se-á seja alterado, removendo alguns de seus rótulos.

Como os rótulos são utilizados para identificarmos as regiões mínimas do diagrama numerado e, consequentemente, a informação sobre a possibilidade ou não de existência de elementos nas interseções fundamentais representadas pelos rótulos, apagar um rótulo significa a certeza de que não há elementos na interseção fundamental representada por este. Vale lembrar que, nas interseções fundamentais cujos rótulos permanecem inalterados pelo raciocínio com as hipóteses, apenas sabemos da **possibilidade** destas interseções fundamentais conterem elementos: estas interseções fundamentais podem ser vazias ou não. Os rótulos apagados representam que ou não há elementos ali, sem incertezas.

Deste modo, quando há hipóteses a ser consideradas na verificação de validade de uma inclusão, temos um algoritmo que deve ser executado antes do MPDN que conhecemos:

TRATAMENTO DE HIPÓTESES NO MPDN

Dados uma lista de hipóteses (inclusões) $H_1, H_2, \ldots, H_m$ e termos X e Y construídos a partir de variáveis $A_1, A_2, \ldots, A_n$ para conjuntos e símbolos para as operações de união, interseção e complementação de conjuntos, faça:

Passo 1. Desenhe um Diagrama Numerado para $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Passo 2. Execute, para uma hipótese H_i $(1 \leq i \leq m)$ não tratada, os passos 3, 4 e 5.

Passo 3. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, calcule a sequência $r[X_i]$ de rótulos para X_i (o termo esquerda da inclusão H_i) e a sequência $r[Y_i]$ de rótulos para Y_i (o termo direito da inclusão H_i).

Passo 4. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, compare as sequências de rótulos $r[X_i]$ e $r[Y_i]$.

Passo 5. Apague do diagrama numerado todos os rótulos de $r[X_i]$ que *não* ocorrem em $r[Y_i]$. Execute o passo 6.

Passo 6. Se há hipóteses ainda não tratadas, execute o passo 2. Senão, execute o MPDN, utilizando o diagrama numerado resultante dos passos anteriores, obtendo sim ou não de acordo com o MPDN.

Para ilustrar melhor as perspectivas para o projeto quanto ao tratamento de consequência, confira os exemplos a seguir:

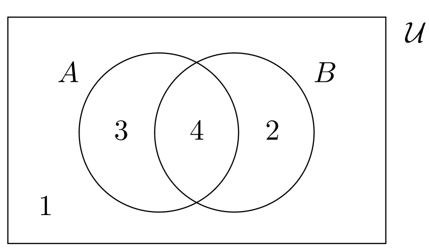
Exemplo 7.1 Para todos os conjuntos A e B, temos que:

$$A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B$$

Verdadeiro ou falso?

Vamos executar o **Algoritmo do Tratamento de Hipóteses**:

Passo 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A e B.



Passo 2. Execute, para uma hipótese H_i $(1 \leq i \leq m)$ não tratada, os passos 3, 4 e 5.

A hipótese que precisa ser tratada é $A \cup B \subseteq A \cap B$.

Passo 3. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, calcule a sequência $r[X_i]$ de rótulos para X_i (o termo esquerda da inclusão H_i) e a sequência $r[Y_i]$ de rótulos para Y_i (o termo direito da inclusão H_i).

Vamos, então, calcular $r[X]$ e $r[Y]$ para esta hipótese, isto é, calcularemos $r[A \cup B]$ e $r[A \cap B]$.

Pelo diagrama, podemos ver que

$$r[A \cup B] = 234$$

$$r[A \cap B] = 4$$

Passo 4. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, compare as sequências de rótulos $r[X_i]$ e $r[Y_i]$.

Temos que

$$r[A \cup B] = 234$$

$$r[A \cap B] = 4$$

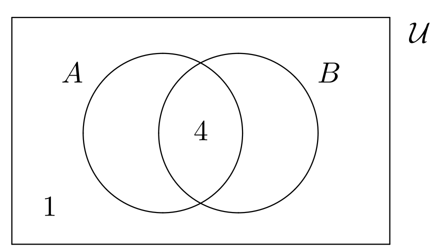
Os rótulos 2 e 3 ocorrem em $r[A \cup B]$, mas não ocorrem em $r[A \cap B] = 4$.

Passo 5. Apague do diagrama numerado todos os rótulos de $r[X_i]$ que *não* ocorrem em $r[Y_i]$. Execute o passo 6.

Vamos apagar os rótulos 2 e 3 do diagrama numerado. Assim, estas são as novas sequências de rótulos dos termos X_i e Y_i de H_i e este é o novo diagrama numerado.

$$r[A \cup B] = 4$$

$$r[A \cap B] = 4$$



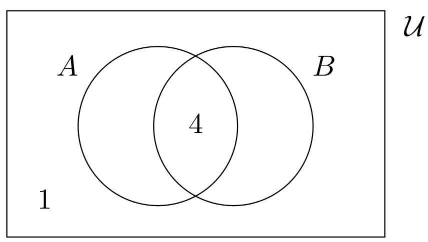
Passo 6. Se há hipóteses ainda não tratadas, execute o passo 2. Senão, execute o MPDN, utilizando o diagrama numerado resultante dos passos anteriores, obtendo SIM ou NÃO de acordo com o MPDN.

Como não há mais hipóteses para tratarmos, podemos executar o MPDN com o diagrama que obtivemos.

Execução do MPDN

Passo 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A e B.

Como já executamos o Algoritmo do Tratamento de Hipóteses, devemos usar o diagrama resultante desta etapa no MPDN:



Passo 2. Calcule a sequência $r[X]$ de rótulos para X e a sequência $r[Y]$ de rótulos para Y.

Como a inclusão a ser verificada é $A = B$, devemos, então, calcular $r[A]$ e $r[B]$.

$$r[A] = 4$$

$$r[B] = 4$$

.

Passo 3. Compare as sequências de rótulos $r[X]$ e $r[Y]$.

Comparamos as sequências $r[A] = 4$ e $r[B] = 4$, e notamos que todos os rótulos de $r[A]$ ocorrem em $r[B]$.

Passo 4. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ também ocorrerem em $r[Y]$, responda SIM. Caso contrário, responda NÃO.

Como todos os rótulos de $r[A]$ ocorrem em $r[B]$, então o MPDN responde SIM. Isto é, $A \subseteq B$. Por termos trabalhado com hipóteses, teremos que $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$ para todos os conjuntos A e B.

Observação: No exemplo anterior, vimos que as sequências $r[A]$ e $r[B]$ são iguais, devido à hipótese inserida. Isto significa que há uma afirmação ainda mais forte que $A \subseteq B$, que é $A = B$. Desta forma, temos que $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B$.

Como o MPDN, conforme descrição neste artigo, funciona para verificar <u>inclusões</u> válidas, podemos utilizar o método para provarmos que $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$, e também que $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow B \subseteq A$ (As sequências $r[A]$ e $r[B]$ serão as mesmas da consequência anterior. Como $r[B] = r[A]$, temos, também, que $B \subseteq A$). Desta forma, teremos $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A \subseteq B$, $B \subseteq A$. Logo, $A \cup B \subseteq A \cap B \Rightarrow A = B$.

Assim, podemos enunciar, de maneira geral, que $r[X] = r[Y]$ se, e somente se, o MPDN responde SIM para $H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow X \subseteq Y$ e também responde SIM para $H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow Y \subseteq X$.

Logo, $r[X] = r[Y]$ se, e somente se, temos que $\models H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow X \subseteq Y$ e também temos que $\models H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow Y \subseteq X$.

Portanto, $r[X] = r[Y]$ se, e somente se, $\models H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow X = Y$.

Exemplo 7.2 Para todos os conjuntos A, B e C temos que:

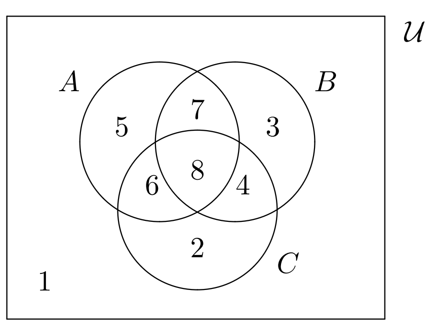
$$A \cap B \subseteq C,\ (A \cup B) \cap C \subseteq (A \cup C) \cap B \ \Rightarrow A \subseteq B \cup C.$$

Verdadeiro ou falso?

Vamos executar o **Algoritmo do Tratamento de Hipóteses**:

PASSO 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A, B e C.

O diagrama numerado para os conjuntos A, B e C é:



PASSO 2. Execute, para uma hipótese H_i $(1 \leq i \leq m)$ não tratada, o Passo 3, o Passo 4 e o Passo 5.

A hipótese que precisa ser tratada é $A \cap B \subseteq C$.

PASSO 3. Em relação a H_i ($1 \leq i \leq m$), calcule a sequência $r[X_i]$ de rótulos para X_i (o termo esquerda da inclusão H_i) e a sequência $r[Y_i]$ de rótulos para Y_i (o termo direito da inclusão H_i).

Vamos, então, calcular $r[X]$ e $r[Y]$ para esta hipótese, isto é, calcularemos $r[A \cap B]$ e $r[C]$.

Pelo diagrama, podemos ver que

$$r[A \cap B] = 78$$

$$r[C] = 2468$$

PASSO 4. Em relação a H_i ($1 \leq i \leq m$), compare as sequências de rótulos $r[X_i]$ e $r[Y_i]$.

Temos que

$$r[A \cap B] = 78$$

$$r[C] = 2468$$

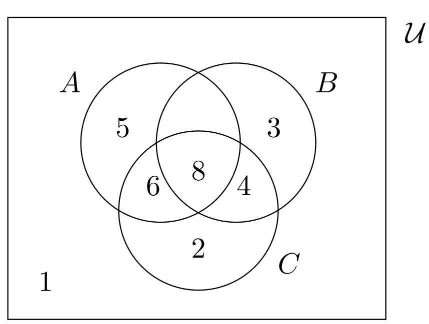
O rótulo 7 ocorre em $r[A \cap B]$, mas não ocorre em $r[C]$.

PASSO 5. Apague do diagrama numerado todos os rótulos de $r[X_i]$ que *não* ocorrem em $r[Y_i]$. Execute o Passo 6.

Vamos apagar o rótulo 7 do diagrama numerado. Assim, temos novas sequências de rótulos dos termos X_i e Y_i de H_i e um novo diagrama numerado.

$$r[A \cup B] = 8$$

$$r[A \cap B] = 2468$$



Passo 6. Se há hipóteses ainda não tratadas, execute o Passo 2. Senão, execute o MPDN, utilizando o diagrama numerado resultante dos passos anteriores, obtendo sim ou não de acordo com o MPDN.

Há hipóteses que precisam ser tratadas. Logo, devemos voltar para o Passo 2.

Passo 2. Execute, para uma hipótese H_i $(1 \leq i \leq m)$ não tratada, o Passo 3, o Passo 4 e o Passo 5.

A hipótese que precisa ser tratada é $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cup C) \cap B$.

Passo 3. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, calcule a sequência $r[X_i]$ de rótulos para X_i (o termo esquerda da inclusão H_i) e a sequência $r[Y_i]$ de rótulos para Y_i (o termo direito da inclusão H_i).

Vamos, então, calcular $r[X]$ e $r[Y]$ para esta hipótese, isto é, calcularemos o rótulo $r[(A \cup B) \cap C]$ e o rótulo $r[(A \cup C) \cap B]$.

Pelo diagrama, podemos ver que

$$r[A \cup B] = 34568$$

$$r[C] = 2468$$

$$r[(A \cup B) \cap C] = 468$$

$$r[A \cup C] = 24568$$

$$r[B] = 348$$

$$r[(A \cup C) \cap B] = 48$$

Passo 4. Em relação a H_i $(1 \leq i \leq m)$, compare as sequências de rótulos $r[X_i]$ e $r[Y_i]$.

Temos que

$$r[(A \cup B) \cap C] = 468$$

$$r[(A \cup C) \cap B] = 48$$

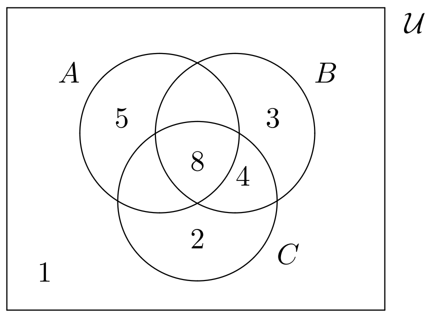
O rótulo 6 ocorre em $r[(A \cup B) \cap C]$, mas não ocorre em $r[(A \cup C) \cap B]$.

Passo 5. Apague do diagrama numerado todos os rótulos de $r[X_i]$ que *não* ocorrem em $r[Y_i]$. Execute o Passo 6.

Vamos apagar o rótulo 6 do diagrama numerado. Assim, temos novas sequências de rótulos dos termos X_i e Y_i de H_i e um novo diagrama numerado.

$$r[(A \cup B) \cap C] = 48$$

$$r[(A \cup C) \cap B] = 48$$



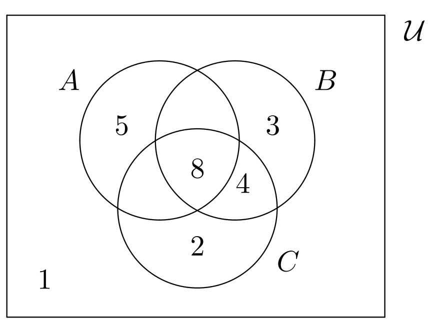
Passo 6. Se há hipóteses ainda não tratadas, execute o Passo 2. Senão, execute o MPDN, utilizando o diagrama numerado resultante dos passos anteriores, obtendo SIM ou NÃO de acordo com o MPDN.

Como não há mais hipóteses para tratarmos, podemos executar o MPDN com o diagrama que obtivemos.

Execução do MPDN

Passo 1. Desenhe um Diagrama Numerado para A, B e C.

Como já executamos o Algoritmo do Tratamento de Hipóteses, devemos usar o diagrama resultante desta etapa no MPDN:



PASSO 2. Calcule a sequência $r[X]$ de rótulos para X e a sequência $r[Y]$ de rótulos para Y.

Como a inclusão a ser verificada é $A \subseteq B \cup C$, devemos, então, calcular $r[A]$ e $r[B]$.

$$r[A] = 58$$
$$r[B \cup C] = 2348$$

.

PASSO 3. Compare as sequências de rótulos $r[X]$ e $r[Y]$.

Comparamos as sequências $r[A] = 58$ e $r[B \cup C] = 2348$, e notamos que o rótulo 5 ocorre em $r[A]$, mas não ocorre em $r[B \cup C]$.

PASSO 4. Se todos os rótulos que ocorrem em $r[X]$ também ocorrerem em $r[Y]$, responda SIM. Caso contrário, responda NÃO.

Como há um rótulo de $r[A]$ que não ocorre em $r[B \cup C]$, então o MPDN responde NÃO. Isto é, $A \nsubseteq B \cup C$. Por termos trabalhado com hipóteses, teremos que **não** é verdade que $A \cap B \subseteq C$, $(A \cup B) \cap C \subseteq (A \cup C) \cap B \quad \Rightarrow \quad A \subseteq B \cup C$. para todos os conjuntos A, B e C.

Execução opcional: Método de Criação de Contraexemplos Unitários

PASSO 1. Identifique um rótulo R que ocorre em $r[X]$, mas que não ocorre em $r[Y]$.

Temos que o rótulo 5 ocorre em $r[A]$, mas não ocorre em $r[B \cup C]$.

PASSO 2. Para todo i, com $1 \leq i \leq n$, se R ocorre em $r[A_i]$, tome $A_i = \{R\}$. Senão, tome $A_i = \emptyset$.

Temos que $r[A] = 58$, $r[B] = 348$ e $r[C] = 248$.

5 ocorre em $r[A]$, logo $A = \{5\}$.

5 não ocorre em $r[B]$, logo $B = \emptyset$.

5 não ocorre em $r[C]$, logo $C = \emptyset$.

PASSO 3. Determine os valores de X e Y a partir de A, B e C calculados no passo anterior.

Tomando $A = \{5\}$ e $B = C = \emptyset$, temos:

$A = \{5\}$. $B \cup C = \emptyset$.

PASSO 4. Conclua que $X \not\subseteq Y$ para os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ calculados no passo anterior.

Como $A = \{5\}$ e $B \cup C = \emptyset$, temos que $A \not\subseteq B \cup C$.

8 Criação de método essencialmente diagramático

Embora o MPDN trabalhe com diagramas, todo o cálculo quanto à inclusão ou não de conjuntos é realizado (por quem utiliza o método) através da manipulação de sequências de rótulos. Isto enfraquece o MPDN no sentido de buscarmos um método *essencialmente diagramático*, isto é, um método que utilize diagramas para não somente construir os termos, mas também para compará-los através de seus diagramas.

Com isso, podemos destacar dois pontos neste novo método:

– **Construção de diagramas para termos**

A construção do diagrama para um termo começa com um diagrama simples, representando um termo da inclusão que desejamos verificar. Inserimos uma marcação na região compreendida pela curva que representa o termo.

Ao analisarmos o operador principal que ocorre no termo (interseção, união ou complementação), aplicamos regras que criam um diagrama de mesmo significado do anterior, de modo que a informação representada pelo operador resulte em diagramas compostos (diagramas com informação disjuntiva) e em multidiagramas (diagramas com informação conjuntiva). Para manter o significado entre os diagramas novo e antigo, é necessário que as marcações se espalhem (ou sejam subtraidas) das regiões do diagrama novo (em relação ao antigo). As marcações são modificadas para a construção do novo diagrama de acordo com as regras dos operadores.

Quando chega-se ao estágio em que não há mais diagramas com ocorrência de operadores, insere-se os diagramas dos conjuntos faltantes em cada um dos diagramas, de modo que seja possível a (re)aglutinação destes diagramas, representando o mesmo termo do início do processo, porém, agora, em forma normal.

Com isso, obtem-se o diagrama de um termo, na forma normal, cujas marcações indicarão as regiões mínimas que podem abrigar um elemento que pertença àquele termo.

Neste ponto, é interessante notar que as marcações no diagrama têm o mesmo significado dos rótulos do MPDN. Ou seja, com o diagrama (em forma normal) para termos, conseguimos obter informações sobre inclusão apenas manipulando as marcações (de maneira diagramática), e não mais os rótulos, mesmo que, semanticamente, rótulos e marcações sejam iguais.

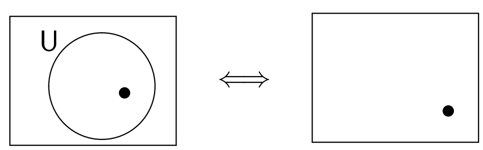
– **Comparação de diagramas para termos**

  Após a construção dos diagramas 9em forma normal) de ambos os termos da inclusão cujo método verificará a validade, basta compararmos visualmente as marcações de um diagrama em relação ao outro, tal como é a comparação de sequências de rótulos no MPDN. Se todas as marcações do diagrama para um termo X ocorre também no diagrama para um termo Y, então $X \subseteq Y$.

8.1 Regras para construção de diagramas em forma normal

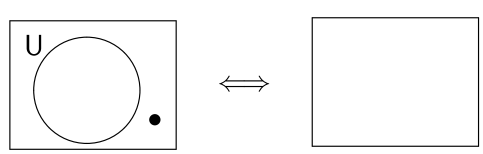
Vamos apresentar, informalmente, as regras para construir um diagrama em forma normal.

• Elemento pertencente ao conjunto Universo (U in):



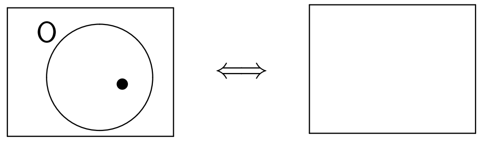
Como a região retangular representa o conjunto universo, se um elemento $x \in (\mathcal{U})$, não é necessária uma elipse para representar o conjunto universo num diagrama em forma normal.

• Elemento não pertencente ao conjunto Universo (U out):



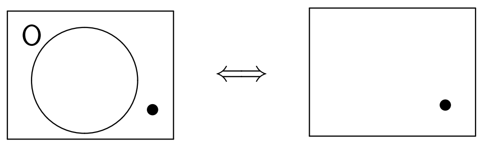
Da mesma forma que em U out, se um elemento não pertence ao conjunto Universo, não precisamos de uma elipse para representar esta informação no diagrama em forma normal. Basta que o elemento fique fora da região retangular. Neste caso, o elemento sequer aparece no diagrama.

- Elemento pertencente ao conjunto vazio (O in):



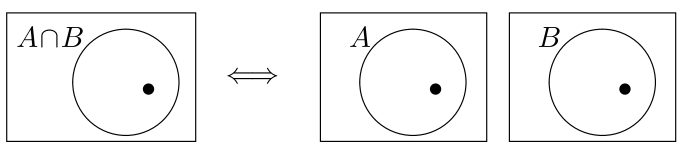
O conjunto vazio num diagrama em forma normal é representado pela região fora do retângulo. Logo, se um elemento pertence ao conjunto vazio, ele não deve aparecer na região interna ao retângulo.

- Elemento não pertencente ao conjunto vazio (O out):



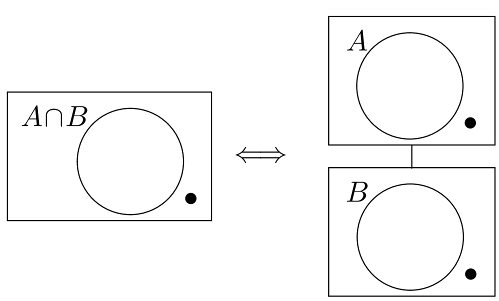
O conjunto vazio num diagrama em forma normal é representado pela região fora do retângulo. Logo, se um elemento não pertence ao conjunto vazio, ele deve aparecer na região interna ao retângulo.

- Elemento pertencente à intereseção de dois conjuntos A e B ($\cap$ in)



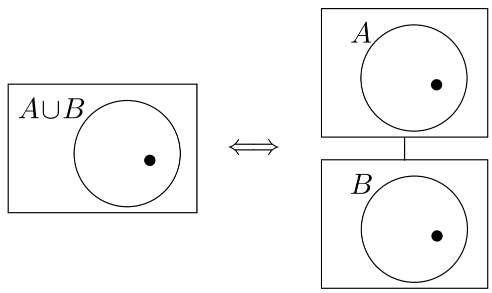
Se um elemento pertence à interseção entre dois conjuntos A e B, sabemos, então, que este elemento pertence a A e também pertence a B. Deste modo, representaremos esta informação com o multidiagrama com os diagramas unitários dos conjuntos A e B, tais que o elemento em questão pertença aos dois conjuntos.

- Elemento não pertencente à interseção de dois conjuntos A e B ($\cap$ out)



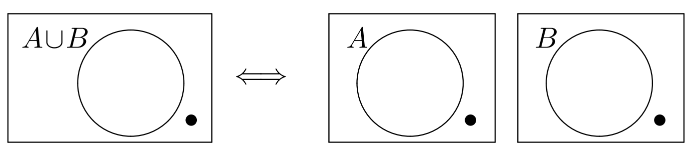
Se um elemento não pertence à interseção entre dois conjuntos A e B, sabemos, então, que este elemento não pertence a A ou não pertence a B. Deste modo, representaremos esta informação com o diagrama composto dos conjuntos A e B, tais que o elemento em questão não pertença a, pelo menos, um dos dois conjuntos.

- Elemento pertence à união de dois conjuntos A e B ($\cup$ in)



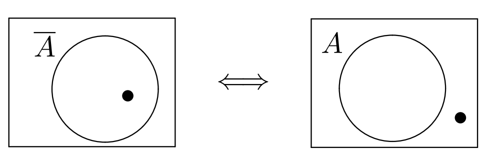
Se um elemento pertence à união entre dois conjuntos A e B, sabemos, então, que este elemento pertence a A ou pertence a B. Deste modo, representaremos esta informação com o diagrama composto dos conjuntos A e B, tais que o elemento em questão pertença a, pelo menos, um dos dois conjuntos.

- Elemento não pertence à união de dois conjuntos A e B ($\cup$ out)



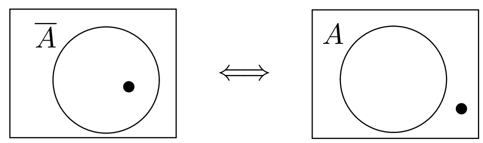
Se um elemento não pertence à união entre dois conjuntos A e B, sabemos, então, que este elemento não pertence a A e também não pertence a B. Deste modo, representaremos esta informação com o multidiagrama com os diagramas unitários dos conjuntos A e B, tais que o elemento em questão não pertença aos dois conjuntos.

- Elemento pertence ao complementar de um conjunto ($-$ in)



Se um elemento pertence ao complementar de um conjunto, sabemos que ele não pertence ao conjunto em questão. Como um diagrama em forma normal deve ter elipses representando conjuntos (sem ocorrência de operadores), devemos representar esta informação com o diagrama unitário do conjunto em questão, tal que o elemento não pertença a este conjunto.

- Elemento não pertence ao complementar de um conjunto (− out)

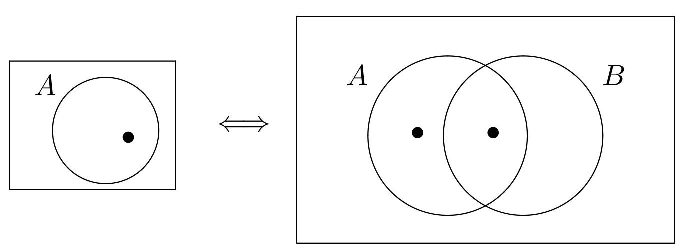


Se um elemento não pertence a um conjunto, sabemos que ele pertence ao complementar do conjunto em questão. Quando necessário, devemos representar esta informação com o diagrama unitário do conjunto em questão, tal que o elemento não pertença a este conjunto.

- Adicionar curva

Como um diagrama em forma normal deve ter uma curva para cada variável para conjunto que ocorre na inclusão a ser verificada, podemos adicionar uma curva para os conjuntos que não estão notoriamente representados no diagrama. Para isso, a curva nova deve ter interseção com todas as regiões mínimas do diagrama atual, de modo que, se há uma marcação (ponto •) numa região mínima dividida, então a marcação deve ser "duplicada".

Exemplo:

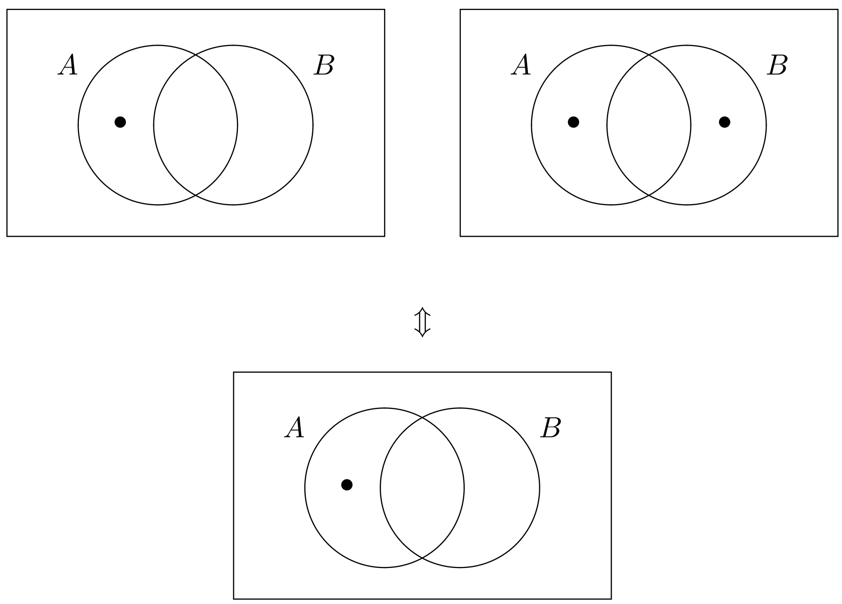


Exemplo da inclusão da curva para o conjunto B no diagrama com o unitário A. Repare no ponto • duplicado.

- Unificar diagramas

Diagramas só podem ser unificados se estiverem na forma normal com respeito aos mesmos conjuntos. O diagrama resultante também estará em forma normal com respeito a estes conjuntos. Se os diagramas que serão unificados são parte de um diagrama composto, o diagrama resultante estará marcado nas regiões mínimas que estão marcadas em pelo menos um dos diagramas que serão unificados. No entanto, se os diagramas que serão unificados são parte de um multidiagrama, o diagrama resultante estará marcado nas regiões mínimas que estão marcadas, simultaneamente, nos dois diagramas que serão unificados.

Exemplo:



Exemplo da unificação de um diagrama composto. Repare que, no diagrama resultante, apenas o ponto • que ocorre nos dois diagramas permaneceu. Repare, também, que o diagrama resultante está na forma normal com respeito a $\{A, B\}$, tais como os diagramas anteriores à unificação.

Acompanhe o exemplo (do início da apresentação do MPDN) resolvido pelo método novo, de acordo com as perspectivas de andamento do projeto.

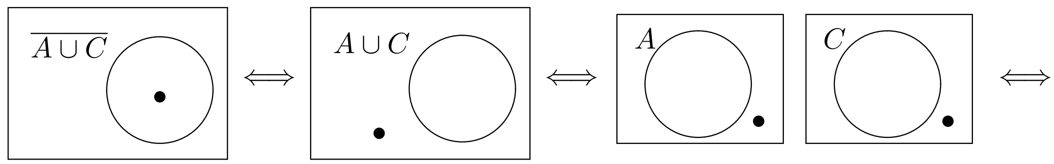
Exemplo 8.1 Para todos os conjuntos A, B e C temos que:

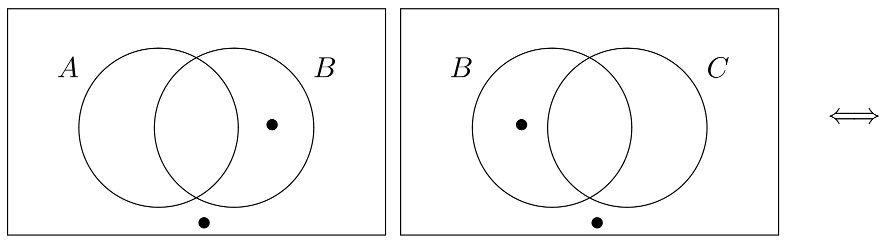
$$\overline{A \cup C} \subseteq \overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}.$$

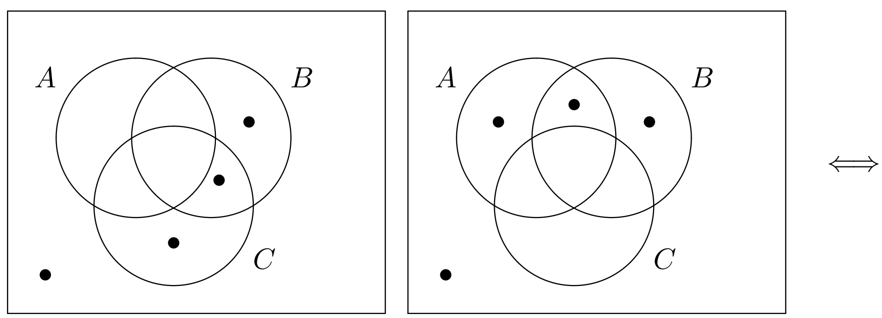
Verdadeiro ou falso?

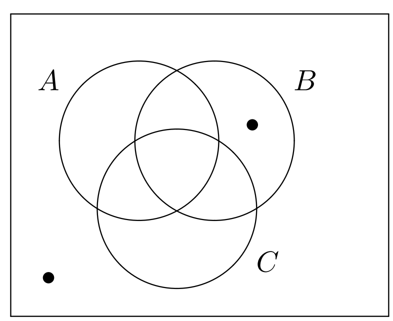
Aplicando a ideia que vimos há pouco, devemos construir os diagramas (em forma normal) para ambos os lados da inclusão para, depois, compará-los.

- Construir os diagramas em forma normal
  - Construir o diagrama de $\overline{A \cup C}$:

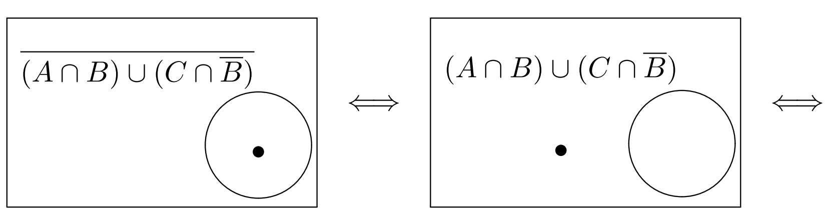


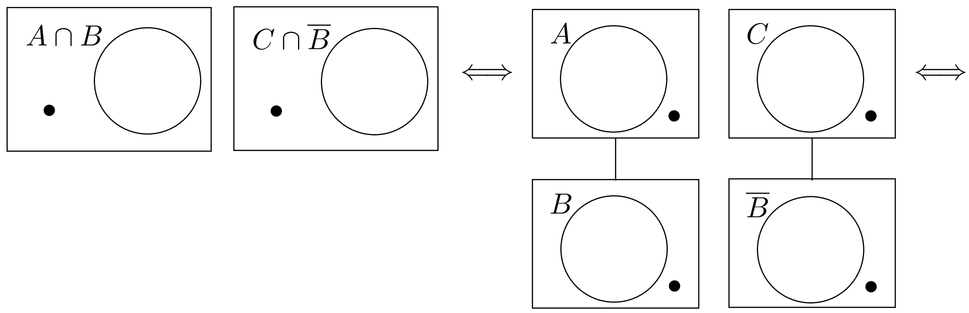


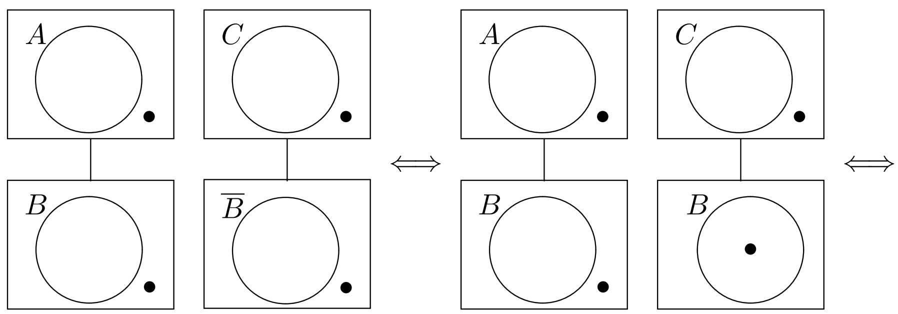


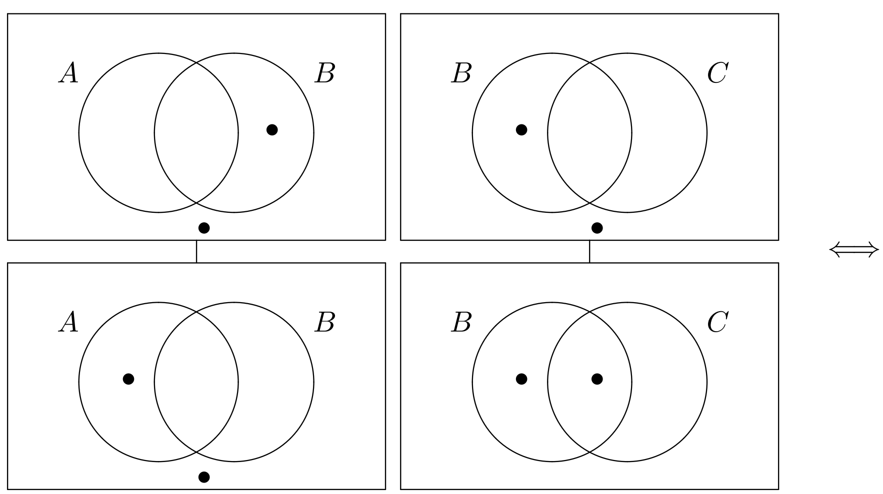


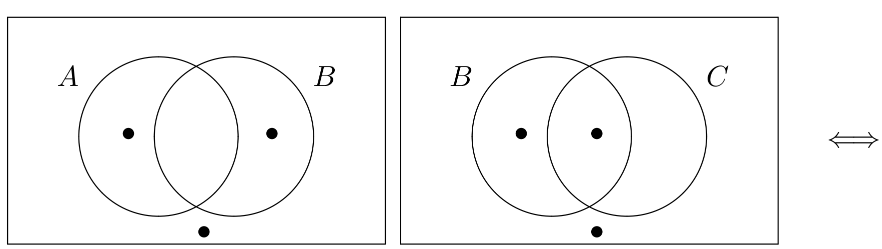
  - Construir o diagrama de $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}$:

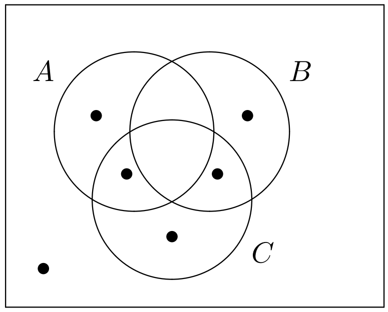


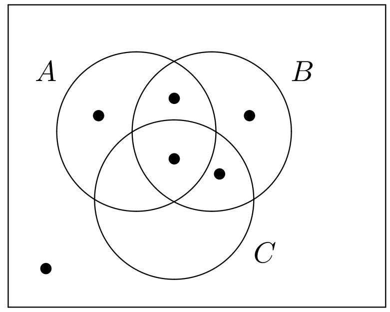

$A \cap B$
$C \cap \overline{B}$
$\Longleftrightarrow$
A
C
B
$\overline{B}$
$\Longleftrightarrow$


A
C
B
$\overline{B}$
$\Longleftrightarrow$
A
C
B
B
$\Longleftrightarrow$

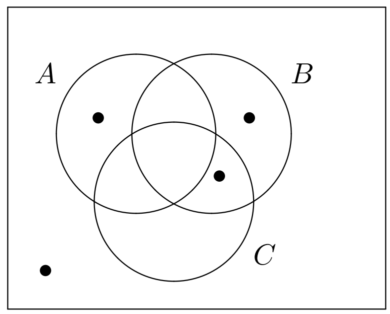

A
B
B
C
A
B
B
C
$\Longleftrightarrow$


A
B
B
C
$\Longleftrightarrow$

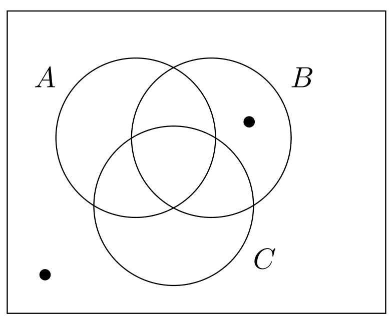


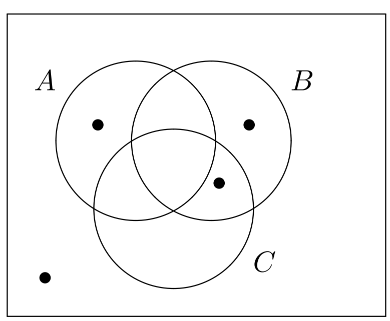


$\Longleftrightarrow$



- Comparar os diagramas de $\overline{A \cup C}$ e $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}$





Como todos os pontos $\bullet$ do primeiro diagrama ocorrem também no segundo diagrama, temos que $\overline{A \cup C}$ e $\overline{(A \cap B) \cup (C \cap \overline{B})}$ para todos os conjuntos A, B e C.

Tal como o MPDN, o método essencialmente diagramático também pode ser usado para encontrar contraexemplos unitários (quando a inclusão não for verdadeira para todos os conjuntos $A, B, C, \ldots$) e, sobretudo, para o *cálculo diagramático com hipóteses (tratamento de consequências).*

Não conhecemos nenhum sistema baseado em diagramas de Venn apropriado para a identificação de igualdades válidas (verdadeiras para todos os conjuntos) na Álgebra Booleana. Neste sentido, o método que apresentamos, inspirado no sistema *Venn-II*, apresentado em [6] é uma contribuição original.

9 Conclusão

Um diagrama numerado, como vimos, pode ser compreendido como a união de interseções fundamentais na forma normal. Ou seja, quando provamos que um termo é equivalente a outro na forma normal (Teorema da Forma Normal), garantimos que este termo pode ser representado no diagrama numerado.

Como o termo está na forma normal, temos garantia que cada interseção fundamental que ocorre neste termo está relacionada a uma, e somente uma, região do diagrama numerado.

Intuitivamente, para sabermos se um termo está contido em outro, já que cada um está representado por interseções fundamentais, basta que comparemos estas interseções. Ao verificarmos que toda interseção fundamental de um termo ocorre, também, em outro, temos, aí, uma relação de inclusão entre eles. Este resultado será sustentado pela prova do Teorema das Interseções Fundamentais.

Ao provarmos estes dois teoremas, mostraremos que o MPDN é *correto* e *completo*, isto é, nunca leva a resultados errados e sempre chega ao resultado correto.

O próximo passo no desenvolvimento desse trabalho é investigar como podemos utilizar o MPDN para provar que uma inclusão é consequência de um conjunto de inclusões.

Referências

[1] Elliott Mendelson, *Boolean Algebra and Switching Circuits*, Schaum's outline series, McGraw-Hill, 1970.

[2] Renata de Freitas e Petrucio Viana, *Álgebra de Conjuntos*. Notas de aula disponíveis na página da disciplina Matemática Discreta, acessíveis através da página do Grupo de Lógica Matemática da UFF, no endereço `http://www.uff.br/grupodelogica`.

[3] Renata de Freitas e Petrucio Viana, *Notas de Aula de Lógica para Ciência da Computação*. na página do Grupo de Lógica Matemática da UFF, no endereço `http://www.uff.br/grupodelogica`.

[4] Frank Ruskey e Mark Weston, A Survey of Venn Diagrams, *The Electronic Journal of Combinatorics* (ed. June 2005), Dynamic Surveys 5, disponível no endereço `http://www.combinatorics.org/files/Surveys/ds5/VennEJC.html`.

[5] Robert Doran, The Gray Code, *Journal of Universal Computer Science*, vol. 13, no. 11 (2007), 1573-1597.

[6] S-J Shin. *The Logical Status of Diagrams*, Cambrigde University Press, 1994.