Lógica, Números e Funções
Texto 1 – Conjuntos

Profa Renata de Freitas
GAN-IME-UFF

Neste texto, começamos a estudar conjuntos. Conjuntos, hoje em dia, constituem a base da linguagem matemática.

1 Conjuntos numéricos

Vejamos alguns exemplos de conjuntos. Na Matemática, os mais importantes são os conjuntos numéricos: $\mathbb{N}$ — o conjunto dos números naturais, $\mathbb{Z}$ — o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Q}$ — o conjunto dos números racionais, $\mathbb{R}$ — o conjunto dos números reais, $\mathbb{C}$ — o conjunto dos números complexos.

O conjunto dos números naturais, que denotamos por $\mathbb{N}$, é constituído pelos números usados pra contar: $1, 2, 3, 4$, e assim por diante. Ou seria: $0, 1, 2, 3, 4$, e assim por diante? Esse é o nosso primeiro exemplo e aqui já temos uma dúvida: o número zero é ou não é um elemento do conjunto $\mathbb{N}$?

Com os números naturais podemos fazer contas de somar e o resultado de qualquer conta será sempre um elemento do conjunto dos naturais. Por isso dizemos que o conjunto dos números naturais é <u>fechado</u> para a operação de adição. Mas não é assim se formos fazer contas de subtrair também.

Se queremos subtrair, é melhor passar para o conjunto dos números inteiros, que denotamos por $\mathbb{Z}$. Os elementos do conjunto dos números inteiros são: $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$, e assim por diante. O conjunto dos números inteiros é fechado para as operações de adição e subtração: com números inteiros podemos fazer contas de somar e de subtrair e o resultado de qualquer conta será sempre um número inteiro.

Tanto $\mathbb{N}$ quanto $\mathbb{Z}$ são fechados para a operação de multiplicação também. Mas não é assim se formos fazer contas de dividir também. O conjunto dos números inteiros é fechado para a adição e a subtração, é fechado para a multiplicação, mas não é fechado para a divisão.

Se queremos dividir, é melhor passar para o conjunto dos números racionais, que denotamos por $\mathbb{Q}$. Os elementos do conjunto dos números racionais são todas as frações que a gente pode formar usando números inteiros no numerador e inteiros não nulos no denominador. Usando números racionais podemos fazer contas de somar, subtrair, multiplicar e dividir (desde que não seja por zero) e o resultado de qualquer conta é sempre um número racional. Ou seja, o conjunto dos números racionais é fechado para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (excluindo o zero da posição de divisor).

Em seguida temos o conjunto dos números reais, que são os números que a gente usa para medir. Por exemplo, se temos um quadrado cujo lado mede 1 centímetro, não temos nenhum número racional para representar a medida da diagonal desse quadrado. A diagonal de um quadrado de lado 1 é $\sqrt{2}$, que não é um número racional. (Vamos ver a prova desse fato em um texto mais adiante.) Usando números reais podemos somar, subtrair, multiplicar e dividir (desde que não seja por zero), e o resultado de qualquer conta será sempre um número real. O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é fechado para essas quatro operações. Mas não é assim se quisermos tirar a raiz quadrada. Nem sempre a raiz quadrada de um número real é um número real. A raiz quadrada de números negativos não é um número real.

É aí que chegamos ao conjunto dos números complexos, que denotamos por $\mathbb{C}$. No conjunto dos números complexos podemos fazer qualquer conta (com exceção de dividir por zero) e o resultado está garantido: podemos até tirar a raiz quadrada de números negativos.

Estamos falando de *conjuntos* numéricos e seus *elementos* e não definimos o que é um conjunto e o que é ser elemento de um conjunto... E nem vamos definir. A partir da próxima seção, no entanto, começamos a *explicar* esses conceitos.

2 Conjuntos, elementos, pertinência

Os conceitos *ser um conjunto* e *ser um elemento de um conjunto* são considerados como *primitivos*, i.e., não são definidos formalmente.O nosso entendimento sobre eles é guiado pela familiaridade e a intuição que temos sobre conjuntos e elementos.

Já viu, né? Nosso próprio entendimento... Intuição... Temos que tomar cuidado: nossa intuição muitas vezes nos engana. Por exemplo, algumas vezes um conjunto é um elemento (de um outro conjunto). Podemos juntar em um conjunto todos os conjuntos numéricos que a gente acabou de ver que não são fechados para a divisão. Formamos, então, um conjunto que tem dois elementos: o conjunto dos naturais e o conjunto dos inteiros. Conjuntos podem ser elementos.

Vejamos outro exemplo: podemos considerar o conjunto das alunas e alunos da Turma B1 da disciplina Lógica, Números e Funções. Cada uma das alunas e cada um dos alunos que compõem a turma é um elemento deste conjunto. Juliana é um elemento deste conjunto.

Por outro lado, podemos considerar a aluna Juliana como um conjunto de órgãos. Dessa forma, o elemento Juliana do conjunto Turma B1 de Lógica, Números e Funções é um conjunto e tem seus próprios elementos. Coração é um elemento de Juliana.

Esta situação é, na verdade, corriqueira. Podemos considerar o conjunto das pastas da pasta Meus documentos do desktop da Profa. Renata. Cada pasta armazenada nesta pasta é um elemento deste conjunto.

Assim, um mesmo objeto pode tanto ser considerado como um elemento ou um conjunto, dependendo do contexto.

Usamos o símbolo $\in$ para denotar a relação de pertinência entre objetos e conjuntos. Escrevemos, por exemplo, "Juliana $\in$ Turma B1 de LNF", e lemos "Juliana pertence à Turma B1 de LNF" ou "Juliana é um elemento da Turma B1 de LNF"; escrevemos "Jogos $\in$ Meus Documentos", e lemos "Jogos pertence a Meus Documentos" ou "Jogos é um elemento de Meus Documentos".

Em geral, dados os objetos a e b:

notação	*leitura*
$a \in b$	a é elemento de b
$a \in b$	a pertence a b
$a \notin b$	a não é elemento de b
$a \notin b$	a não pertence a b

3 Conjuntos finitos e infinitos

Em outro texto tratar de cardinalidade de conjuntos e definir formalmente quando um conjunto é finito ou infinito. Mas, para isso, vamos usar a noção de função, que só será estudada mais adiante. Por enquanto, vamos ficar com uma ideia um tanto vaga de quando um conjunto é finito e quando é infinito.

Dizemos que um conjunto é finito se possui um número (natural) bem determinado de elementos. Eis alguns exemplos de conjuntos finitos:

- O conjunto cujo único elemento é o time carioca que já foi campeão mundial.
- O conjunto das células de memória de um computador.
- O conjunto dos grãos de areia da praia de Copacabana.
- O conjunto dos átomos do universo.

Um conjunto é infinito se quando retiramos qualquer quantidade finita de elementos dele, ele continua tendo infinitos elementos. Conjuntos infinitos aparecem especialmente na Matemática:

- O conjunto dos números naturais.
- O conjunto dos números racionais.
- O conjunto dos pontos do Plano Cartesiano.
- O conjunto das curvas que podemos desenhar no espaço.

4 Definição de conjuntos

Um conjunto é denotado pela apresentação de sua definição entre chaves: $\{\ \ ,\ \ \}$. Vamos estudar duas maneiras de definir um conjunto:

- por lista ou indicação de uma lista,
- por propriedade.

Para definir um conjunto por *lista*, apresentamos uma lista dos *nomes* dos elementos do conjunto. Um conjunto definido por lista é denotado pela apresentação dos nomes dos seus elementos separados por vírgulas e encerrados entre chaves. Por exemplo:

$$\mathsf{Meus\ Documentos} = \{\mathsf{Artigos}, \mathsf{Orientacoes}, \mathsf{Aulas}, \mathsf{Apresentacoes}, \mathsf{Projetos}\}.$$

A definição por lista é adequada apenas para conjuntos finitos *pequenos* (com poucos elementos). No caso de conjuntos finitos *grandes* ou de conjuntos infinitos, podemos apresentar uma *indicação da lista* dos elementos do conjunto.

Um conjunto definido por indicação de lista é denotado pela apresentação dos nomes de *alguns* dos seus elementos separados por vírgulas e encerrados entre chaves e são usadas reticências para substituir os nomes de elementos do conjunto que não são listados. Devem ser listados nomes de elementos em quantidade suficiente para que o leitor possa inferir quais nomes foram substituídos pelas reticências. Eis uma apresentação do conjunto das alunas da Turma B1 de Lógica, Números e Funções por indicação de lista:

$$A = \{\mathsf{Ana}\ ,\ \mathsf{Bruna}\ ,\ \mathsf{Clara}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathsf{Iasmim}\ ,\ \ldots\ ,\ \mathsf{Vitoria}\}.$$

No caso de conjuntos infinitos, podem ser usados *nomes genéricos* que indiquem a forma dos elementos do conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números naturais pode ser apresentado assim:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2,\ \ldots\ ,\ n\ ,\ \ldots\}$$

e o conjunto dos números pares, assim:

$$\mathbb{P} = \{0, 2, 4,\ \ldots\ ,\ 2n\ ,\ \ldots\}.$$

Há ainda outras formas mais complicadas, dependendo do que se passa na cabeça do autor da definição do conjunto.

Para definir um conjunto por *propriedade*, devemos apresentar um conjunto universo e uma propriedade que se aplica a elementos desse universo. Os elementos do conjunto definido são os elementos do conjunto universo que possuem a propriedade.

Um conjunto definido por propriedade é denotado do seguinte modo:

$$\{x \in \mathcal{U} : P(x)\},$$

onde $\mathcal{U}$ é o nome do conjunto *universo* e $P(x)$ é uma especificação da *propriedade*, envolvendo a *variável* x.

Apesar de ser estranho, a expressão

$$\{x \in \mathcal{U} : P(x)\}$$

costuma ser lida como

o conjunto dos x pertencentes a $\mathcal{U}$ tais que x é P.

Outra maneira de denotar um conjunto definido por propriedade é

$$\{x \;:\; x \in \mathcal{U} \text{ e } P(x)\},$$

ou ainda de formas mais complicadas, dependendo do que se passa na cabeça do autor da definição do conjunto.

Por exemplo, o conjunto

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} \;:\; x \text{ é par}\}$$

também pode ser denotado por

$$\mathbb{P} = \{x \;:\; \text{ existe } y \in \mathbb{N} \text{ tal que } x = 2y\}$$

ou, ainda, por

$$\mathbb{P} = \{2y \;:\; y \in \mathbb{N}\}.$$

5 Igualdade

Nossa intuição sobre os conceitos primitivos vai sendo *ajustada* pelos axiomas, postulados ou princípios da teoria. Muitos dos princípios da teoria de conjuntos são mencionados implicitamente neste texto, mas agora vamos enunciar explicitamente um princípio, que regula a relação de igualdade entre conjuntos.

Princípio da Extensionalidade – Dois conjuntos são <u>iguais</u> se, e somente se, possuem exatamente os mesmos elementos.

Por exemplo, considere os conjuntos:

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é natural}\}, \\ B &= \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é soma de 4 quadrados}\}. \end{aligned}$$

Temos que A e B são iguais.

Para saber se dois conjuntos A e B são iguais, precisamos saber apenas <u>quais</u> são os elementos de A e de B. Assim:

Não importa a ordem em que os elementos são apresentados. Por exemplo:

$$\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$$

Não importa se há repetição na apresentação dos elementos. Por exemplo:

$$\{1, 2, 2, 3\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 3\}$$

Não importa a maneira como os elementos são apresentados. Por exemplo:

$$\{1,2,2,2,3\} = \{3,3,|\sqrt{4}|,1\}$$

Não importa o universo em que os objetos são tomados. Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 3\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 4 = 0\}$$

Propriedades básicas da igualdade

Estamos interessados nas propriedades da igualdade que valem para todos os conjuntos, independente da natureza dos seus elementos.

Para todos os conjuntos A, B e C, para todos os objetos $x \in \mathcal{U}$, temos que:

(1) $A = A$ *(Reflexividade)*

(2) Se $A = B$, então $B = A$ *(Simetria)*

(3) Se $A = B$ e $B = C$, então $A = C$ *(Transitividade)*

Verificando igualdades

Como verificar se dois conjuntos dados A e B são iguais? Por exemplo:

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \text{ é soma de 3 quadrados}\} = \mathbb{N}?$$

Dois conjuntos são iguais quando possuem exatamente os mesmos elementos. Assim, se queremos verificar se A e B são iguais, podemos fazer isso verificando se:

– todo elemento de A é também elemento de B,

– todo elemento de B é também elemento de A.

Essa ideia nos leva à noção de inclusão de conjuntos.

6 Inclusão

Definição 1. *Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A está contido em B, denotado por $A \subseteq B$, quando todos os objetos que são elementos de A são também elementos de B.*

Ou seja:

$$\boxed{A \subseteq B \text{ se, e somente se, para todo } x, \text{ se } x \in A, \text{ então } x \in B.}$$

Por exemplo, o conjunto das pessoas com deficiência está contido no conjunto dos seres humanos. Quando um conjunto A está contido em um conjunto B, dizemos também que A é subconjunto de B.

Notação

notação	*leitura*
$a \subseteq b$	a está contido em b
$a \subseteq b$	a é subconjunto de b
$a \not\subseteq b$	a não está contido em b
$a \not\subseteq b$	a não é subconjunto de b

Observe a semelhança entre o símbolo $\leq$, utilizado quando comparamos números, e o símbolo $\subseteq$, utilizado quando comparamos conjuntos.

Propriedades básicas da inclusão

Estamos interessados nas propriedades da inclusão que valem para todos os conjuntos, independente da natureza dos seus elementos.

Para todos os conjuntos A, B e C, temos que:

(1) $A \subseteq A$ *(Reflexividade)*

(2) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$, então $A = B$ *(Antissimetria)*

(3) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$ *(Transitividade)*

Observe que as propriedades listadas da relação $\subseteq$, sobre conjuntos, são inteiramente análogas a propriedades da relação $\leq$, sobre números. Mas, neste contexto, a semelhança pára por aí. Por exemplo, para números, vale:

$$\text{para todos os números } x \text{ e } y, \text{ temos que } x \leq y \text{ ou } y \leq x.$$

Mas existem conjuntos A e B tais que nem $A \subseteq B$ nem $B \subseteq A$. Por exemplo, dados os conjuntos $A = \{1\}$ e $B = \{2\}$, temos que $A \not\subseteq B$ e $B \not\subseteq A$.

Como verificar inclusões?

Terminamos este texto com uma questão para você pensar: dados dois conjuntos A e B, como verificar se $A \subseteq B$? Considere os conjuntos A e B a seguir.

1. Em cada item, verifique se $A \subseteq B$.

2. Em seguida, pense na questão que nos interessa mais: em cada item, tente explicar *como* você verificou se $A \subseteq B$.

   (a) $A = \{a, e\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$

   (b) $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{a, b, c, d, e\}$

   (c) $A = \{a, e, i, o, u\}$ e $B = \{x : x$ é letra do alfabeto latino$\}$

   (d) $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{x : x$ é letra do alfabeto latino$\}$

   (e) $A = \{x \in \mathbb{N} : x$ é par e primo$\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$

   (f) $A = \{x \in \mathbb{Z} : x$ é soma de quadrados$\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} : x$ é positivo$\}$

Vamos retomar esta questão no próximo texto.