Capítulo 5

Transformações Lineares

5.1 Introdução

Ao considerar a equação matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, podemos mudar o nosso ponto de vista e começar a pensar que o vetor $\mathbf{b}$ foi obtido pela ação da matriz A sobre o vetor $\mathbf{x}$. Sob esse novo ponto de vista, resolver a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ significa encontrar todos os vetores $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que são transformados no vetor $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sob a "ação" da multiplicação por A.

Antes de darmos a definição precisa do que significa uma transformação linear, vamos chamar a atenção para duas propriedades que a multiplicação de uma matriz A por um vetor $\mathbf{u}$ goza. Suponha que:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -21 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} -10 \\ -22 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = A(2\mathbf{u}) = 2A(\mathbf{u}) = 2 \begin{bmatrix} -5 \\ -11 \\ 10 \end{bmatrix},$$

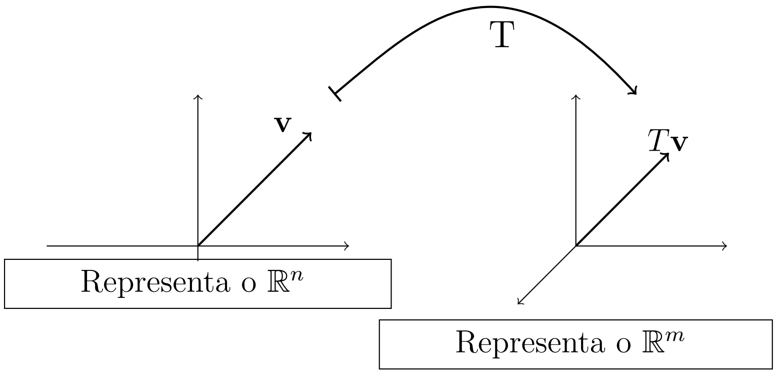
isto é, $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u}+A\mathbf{v}$ e $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A\mathbf{u}$. E são exatamente essas propriedades que caracterizam a linearidade da função.

Definição 5.1
Uma **Aplicação Linear** (ou **Transformação Linear**) T de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$ é uma função que associa um vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a um vetor $T\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, tal que para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tenhamos

(a) $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$;

(b) $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$.

Escrevemos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ e para definir T denotamos $\mathbf{v} \mapsto T\mathbf{v}$.



Assim, $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear se ela "preserva" a soma de vetores e a multiplicação de vetores por escalares, as duas operações básicas do $\mathbb{R}^n$.

Quando tratamos de funções, os termos **domínio**, **contradomínio** e **imagem** aparecem naturalmente. No caso de transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o domínio é $\mathbb{R}^n$, o contradomínio é $\mathbb{R}^m$ e a imagem é:

$$\mathcal{IM}(T) = \{\mathbf{w} \in R^m : \text{ se existe } \mathbf{v} \in R^n \text{ tal que } T(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} = \{T(\mathbf{v}) : \mathbf{v} \in R^n\}.$$

Exemplo 5.2
Da motivação inicial é claro que se A é uma matriz $m \times n$. Então, A determina uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, definida por $\mathbf{u} \mapsto T(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$. Sendo mais específicos, digamos que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

então,

$$T(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - 4y + 3z \\ 2x - 3y \end{bmatrix}.$$

Assim, dizemos que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - 4y + 3z \\ 2x - 3y \end{bmatrix}$ provem da matriz A.

Antes de continuarmos veja a seguinte definição.

Definição 5.3
Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear, no caso em que $m = n$ chamamos a transformação linear (ou aplicação linear) de **operador linear**.

Vamos dar alguns exemplos de aplicações lineares que apresentam os fatos mais marcantes a respeito dessas aplicações. Começando com o seguinte exemplo:

Exemplo 5.4
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + 3y \\ y \end{bmatrix}$$

Para entendermos o que este operador linear faz, observe que ele toma uma reta e leva em uma reta (aliás, esta propriedade é compartilhada por todas as transformações lineares). Agora considere o quadrado de coordenadas $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ e veja que esses pontos são levados em $\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, respectivamente. Portanto, este operador linear leva o quadrado em um paralelogramo, esse tipo de transformação linear é conhecido por **cisalhamento**.

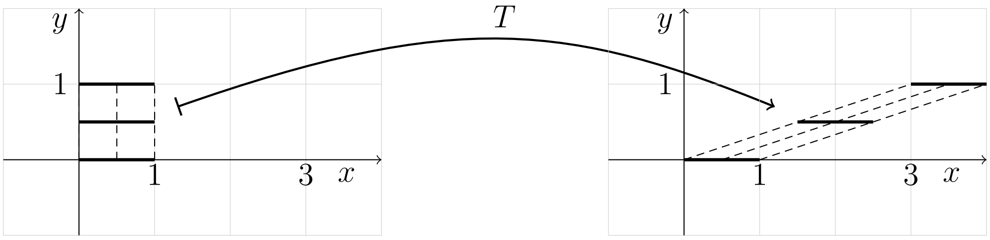


Figura 5.1: Cisalhamento

Exemplo 5.5
Dado um escalar $r > 0$, defina $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\mathbf{v} \mapsto r\mathbf{v}$. Então, chamamos T de **contração** quando $0 < r < 1$ e de **dilatação** quando $r > 1$. Observe que se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ do $\mathbb{R}^2$ e escalares α, β, então

$$\begin{aligned} T(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) &= r(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) \\ &= r\alpha\mathbf{u} + r\beta\mathbf{v} \\ &= \alpha(r\mathbf{u}) + \beta(r\mathbf{v}) \\ &= \alpha T(\mathbf{u}) + \beta T(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Portanto, T é um operador linear, pois se tomarmos $\alpha = \beta = 1$ na equação anterior temos a primeira condição para T ser uma aplicação linear e se fizermos $\beta = 0$ temos a segunda condição.

Exemplo 5.6
Considere a aplicação $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y^2 \end{bmatrix}$. Vamos mostrar que T não é um operador linear. Para isso considere os vetores: $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Portanto:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}.$$

Se T fosse um operador linear deveria ocorrer a igualdade, isto é,

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=T\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right)+T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right).$$

5.2 Propriedades de uma Transformação Linear e sua Matriz

Se $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ é uma transformação linear, então $T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$. De fato, seja $\mathbf{u}\in\mathbb{R}^n$ então $T(\mathbf{0})=T(0\mathbf{u})=0T(\mathbf{u})=\mathbf{0}$.

Considere novamente a transformação linear $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ e suponha que $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_p$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ e seja $\mathbf{u}=\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_p\mathbf{u}_p$ uma combinação linear destes vetores logo:

$$\begin{aligned}T(\mathbf{u})&=T(\alpha_1\mathbf{u}_1+\alpha_2\mathbf{u}_2+\cdots+\alpha_p\mathbf{u}_p)\\&=T(\alpha_1\mathbf{u}_1)+T(\alpha_2\mathbf{u}_2)+\cdots+T(\alpha_p\mathbf{u}_p)\\&=\alpha_1T(\mathbf{u}_1)+\alpha_2T(\mathbf{u}_2)+\cdots+\alpha_pT(\mathbf{u}_p).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Isso nos sugere duas consequências importantes: A primeira consequência é a de que se soubermos como uma aplicação linear age sobre uma base de $\mathbb{R}^n$, podemos determinar a ação da transformação linear no restante dos vetores por aplicar a fórmula anterior; a segunda consequência é a de que podemos associar uma matriz a uma transformação linear, da seguinte forma: suponha que $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ é a base canônica do $\mathbb{R}^n$. Então dado qualquer vetor $\mathbf{u}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^n x_i\mathbf{e}_i$ e daí,

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\right)=\sum_{i=1}^n x_iT(\mathbf{e}_i)$$

e $T(\mathbf{e}_i)$ são vetores de $\mathbb{R}^m$, isto é, $T(\mathbf{u})$ é uma combinação linear $T(\mathbf{e}_i)\in\mathbb{R}^m$. Escrevendo isto em termos da multiplicação de matrizes temos:

$$\begin{bmatrix}T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}.$$

Portanto, a transformação linear T fica completamente determinada pela matriz $\begin{bmatrix}T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & \cdots & T(\mathbf{e}_n)\end{bmatrix}_{m\times n}$ e chamamos esta matriz de **matriz da aplicação linear na base canônica**. Mais para frente esse nome fará mais sentido. No momento vamos dar alguns exemplos.

Exemplo 5.7
Vamos retornar ao exemplo 5.5, em que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, que toma $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mapsto 3\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, que tal como havíamos comentado é uma dilatação e é um operador linear. Vamos determinar qual seria a matriz desse operador linear com respeito à base canônica. Seja $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$, logo, $T(\mathbf{e}_1) = \left[\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right]$ e $T(\mathbf{e}_2) = \left[\begin{smallmatrix}0\\3\end{smallmatrix}\right]$ e, portanto, a matriz fica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 5.8
Considere a transformação linear $R : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, que para cada vetor $\mathbf{v}$ retorna um vetor $R(\mathbf{v})$, obtido por fazer uma rotação de θ radianos em torno da origem no sentido anti-horário. A próxima figura nos fornece uma demonstração geométrica de que $R(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = R(\mathbf{u}) + R(\mathbf{v})$.

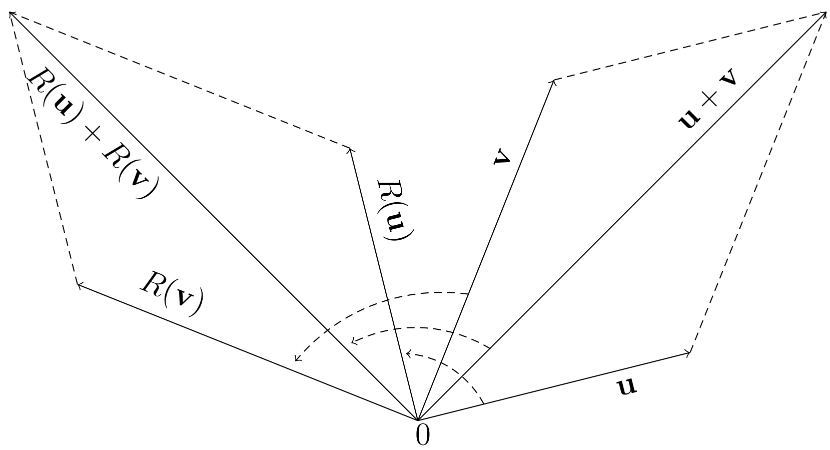


Figura 5.2: Rotação de vetores

Com um desenho similar se prova que $R(\alpha\mathbf{v}) = \alpha R(\mathbf{v})$. Portanto, esta aplicação é linear. Vamos determinar a sua matriz na base canônica. Para isto, vamos investigar onde os vetores $\mathbf{e}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right], \mathbf{e}_2 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]$ são levados. Na figura abaixo vemos que: $R(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{bmatrix}$, $R(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ e a matriz na base canônica desta transformação é:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

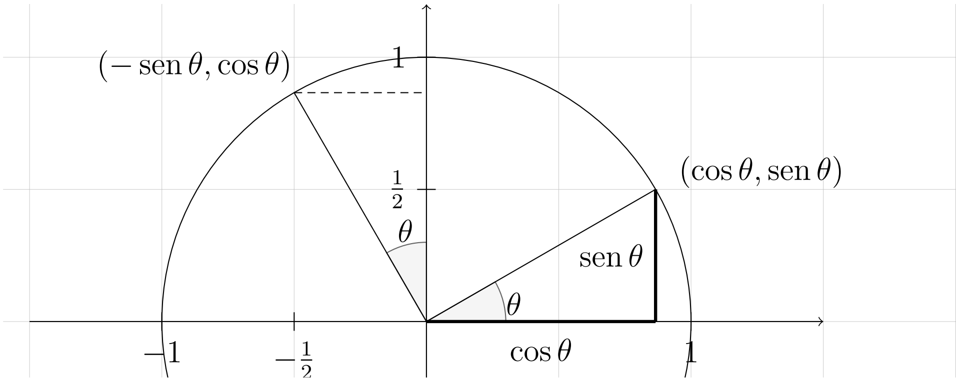


Figura 5.3: Rotação de um ângulo θ

O próximo exemplo trata da projeção ortogonal sobre o eixo x e o outro da reflexão em torno desse eixo. Estes são exemplos de duas importantes famílias de aplicações lineares as projeções e as reflexões.

Exemplo 5.9
Considere a aplicação $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$. É possível essa verificação porque a mesma faz um gráfico em que essa aplicação é linear, uma vez que ela pega um vetor $\mathbf{u}$ qualquer e projeta perpendicularmente sobre o eixo x. Essa aplicação é conhecida como projeção ortogonal sobre o eixo do x.

Agora a reflexão em torno do eixo x.

Exemplo 5.10
A reflexão $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ do vetor $\mathbf{u}$ sobre o eixo x toma o vetor $\mathbf{u}$ e retorna o vetor $S\mathbf{u}$ do lado oposto desse eixo, de tal maneira que o segmento de reta determinado por $\mathbf{u}$ e $S\mathbf{u}$ é perpendicular ao eixo x e o eixo corta este segmento no ponto médio.

Observe que o vetor $\mathbf{u} + S\mathbf{u}$ está sobre o eixo x, uma vez que o eixo é exatamente a diagonal do paralelogramo determinado pelos vetores $\mathbf{u}$ e $S\mathbf{u}$. Além disso, o vetor $\mathbf{u}+S\mathbf{u}$ é igual a duas vezes a projeção de $\mathbf{u}$ sobre o eixo x. Portanto:

$$2P\mathbf{u} = \mathbf{u} + S\mathbf{u} \Leftrightarrow S\mathbf{u} = 2P\mathbf{u} - \mathbf{u}.$$

Logo,

$$S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = 2P\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

5.2.1 Composição e Aplicação Invertível

Considere duas funções (ou aplicações) $f : A \to B$ e $g : B \to C$. A **composição**, denotada por $f \circ g$, é a aplicação $f \circ g : A \to C$, definida por:

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)),$$

isto é, primeiro aplicamos f em $a \in A$ e depois aplicamos g em $f(a)$ para obter $g(f(a)) \in C$.

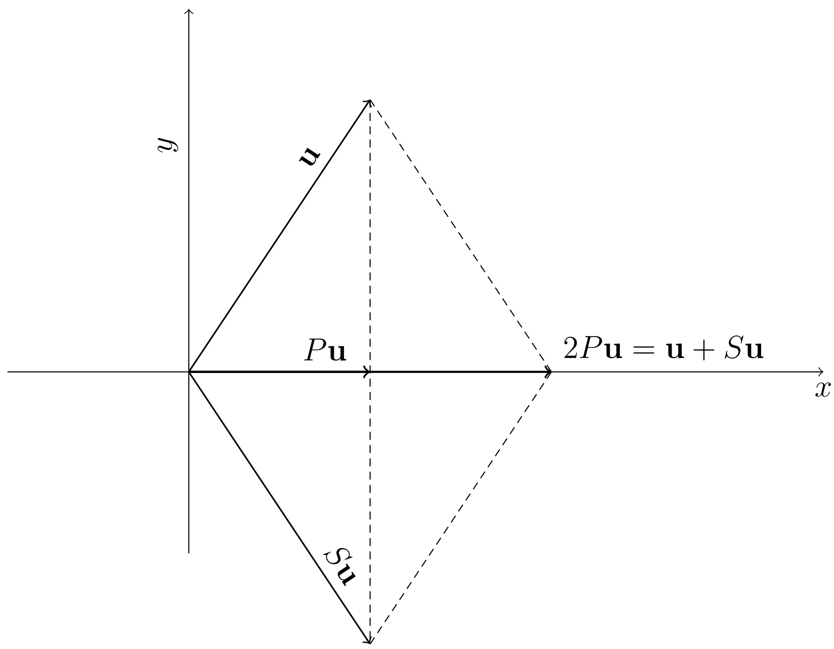


Figura 5.4: Reflexão em torno do eixo x

Exemplo 5.11
Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^2 - 3x$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2$ então

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2(x^2)^2 - 3(x^2) = 2x^4 - 3x^2.$$

Se A é um conjunto não-vazio, a aplicação $f : A \to A$ definida por $f(a) = a$ para todo $a \in A$ é chamada de **aplicação identidade** sendo, geralmente, denotada por I_A ou simplesmente por I. Assim, $I(a) = a$ para todo $a \in A$.

Seja $f : A \to B$ uma aplicação. Dizemos que $g : B \to A$ é a **aplicação inversa** de f, denotada por $g = f^{-1}$, se

$$f \circ g = I_B \quad \text{e} \quad g \circ f = I_A.$$

Exemplo 5.12
Considere o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 3x + 7y \end{bmatrix}$. Verifique se S definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -7x + 5y \\ 3x - 2y \end{bmatrix}$ é a inversa de T.

Observe que

$$S\left(T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = S\begin{bmatrix} 2x + 5y \\ 3x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7(2x + 5y) + 5(3x + 7y) \\ 3(2x + 5y) - 2(3x + 7y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

e

$$T\left(S\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = T\begin{bmatrix} -7x + 5y \\ 3x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(-7x + 5y) + 5(3x - 2y) \\ 3(-7x + 5y) + 7(3x - 2y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Portanto, $S = T^{-1}$.

5.2.2 Aplicação Linear Injetora e Sobrejetora

As aplicações lineares formam uma classe bastante especial de funções na qual é fácil decidir se uma certa aplicação é invertível ou não. Inicialmente, vamos lembrar que uma aplicação $f : A \to B$ tem inversa se, e somente se, f for uma aplicação injetora e sobrejetora. Por isso, para saber se uma certa aplicação é invertível, precisamos estudar a fim de constatar se a aplicação é injetora e sobrejetora.

Dizemos que a transformação linear $f : A \to B$ é injetora se para cada $a \neq b$ em A tivermos que $f(a) \neq f(b)$ em B. Apesar dessa definição ser mais natural, é comum utilizarmos a seguinte forma equivalente: $f : A \to B$ é injetora se sempre que $f(a) = f(b)$, quando pudermos mostrar que $a = b$.

No caso da aplicação ser uma aplicação linear, digamos $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, podemos substituir este critério pelo seguinte: se $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ em $\mathbb{R}^m$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

De fato, vamos admitir que $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear e injetora e como sabemos que o vetor nulo de $\mathbb{R}^n$ é sempre levado no vetor nulo de $\mathbb{R}^m$, então se

$$T(\mathbf{u}) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$$

e, reciprocamente se admitir que sempre ocorre $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}$, então se

$$T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) \Leftrightarrow T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{0},$$

logo $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Portanto, $\mathbf{u} = \mathbf{v}$. Daí que T é injetora.

Por isso, no estudo da injetividade de uma aplicação linear é muito útil a introdução do seguinte conceito:

Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear o subconjunto dos vetores de $\mathbb{R}^n$ que são levados por T no vetor nulo de $\mathbb{R}^m$ é chamado de **núcleo** de T e é denotado por:

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n : T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}.$$

Segue do que foi discutido anteriormente que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$ se, e somente se, T é injetora.

Exemplo 5.13
Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \mapsto x - y$. Ao calcularmos $\mathcal{N}(T)$ obtemos $\mathcal{N}(T) = \left\{\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\}$, que coincide com a reta $y = x$, ou ainda, $\mathcal{N}(T) = \operatorname{Span}\left\{\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right\}$.

Dizemos que $f : A \to B$ é **sobrejetora** se, para todo $b \in B$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

Reescrevendo esse critério, para aplicações lineares, obtemos: uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, é **sobrejetora** se para cada vetor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ é imagem de algum vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$. Isso é equivalente a pedir que $\mathcal{IM}(T) = \mathbb{R}^m$.

Exemplo 5.14

Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $\begin{bmatrix} -y \\ 3x \\ 0 \end{bmatrix}$. Então, a imagem de T

$$\begin{aligned}\mathcal{IM}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ 3x \\ 0 \end{bmatrix} : x,\, y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} : x,\, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

O núcleo de T é dado pelos vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, tais que:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -y \\ 3x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $x = y = 0$ e daí

$$\mathcal{N}(T) = \operatorname{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5.3 Álgebra Matricial

Vamos introduzir operações sobre as matrizes e depois mostrar que essas operações provêm das operações sobre as transformações lineares. Para começar, vamos definir o que significa dizer que a matriz $A = [a_{ij}]$ é igual à matriz $B = [b_{ij}]$, isso significa que ambas as matrizes são $m \times n$ e que as entradas correspondentes são iguais $a_{ij} = b_{ij}$. Quando isso acontece denotamos por $A = B$.

Dado um escalar $r \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = [a_{ij}]$, definimos o produto de r por A, por ser a matriz $r \cdot A = [ra_{ij}]$, isto é, cada uma das entradas da matriz é multiplicada pelo escalar r. E dado as matrizes $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ de ordem $m \times n$, definimos a soma das matrizes por ser uma outra matriz, também de ordem $m \times n$, dada por

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}],$$

isto é, entrada da matriz $A + B$ é a soma das entradas correspondentes de A e B.

Essas operações têm as seguintes propriedades:

a. $A + B = B + A$	d. $r(A + B) = rA + rB$
b. $(A + B) + C = A + (B + C)$	e. $(r + s)A = rA + sB$
c. $(A + 0) = A$	f. $r(sA) = (rs)A$

5.3.1 A Transposta de uma Matriz

Dada a matriz A de ordem $m \times n$, a **transposta** de A é a matriz $n \times m$, denotada por A^t, cujas colunas são formadas pelas linhas correspondentes de A.

Exemplo 5.15

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Então,

$$A^t = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}.$$

Se A e B são matrizes do mesmo tipo e $r \in \mathbb{R}$, logo valem as seguintes propriedades:

a. $(A^t)^t = A$;
b. $(A+B)^t = A^t + B^t$;
c. $(rA)^t = rA^t$;

Denotaremos por $\mathbf{M}(m \times n)$ ao conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$.

5.3.2 Multiplicação de Matrizes

Vamos introduzir a multiplicação de matrizes que tem uma definição um tanto complicada. Mais para frente veremos que definimos a multiplicação para que a mesma possa ser utilizada na composição de transformações lineares.

Considere as matrizes $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}(m \times n)$ e $B = [b_{ij}] \in M(n \times k)$ definimos a matriz $AB = [d_{ij}] \in M(m \times k)$ por

$$d_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj}.$$

Parafraseando, o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz AB é a soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A e da j-ésima coluna de B. Observe, em primeiro lugar que o tamanho das linhas de A é igual ao tamanho das colunas de B e que a quantidade de linhas (colunas) da matriz AB é igual a quantidade de linhas de A (colunas de B).

Exemplo 5.16
Considere A uma matriz 2×2 e B uma matriz 2×3 então AB é uma matriz 2×3 e a entrada 12 é

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 6 \\ -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & 3(1)+2(-5) & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \square & -7 & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}.$$

Também podemos encarar a multiplicação da matriz como multiplicação de vetores, veja exemplo abaixo

Exemplo 5.17
Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 \end{bmatrix},$$

onde $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ são os vetores colunas de A e B, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{21}a_{12} + b_{31}a_{13} & b_{12}a_{11} + b_{22}a_{12} + b_{32}a_{13} \\ b_{11}a_{21} + b_{21}a_{22} + b_{31}a_{23} & b_{12}a_{21} + b_{22}a_{22} + b_{32}a_{23} \\ b_{11}a_{31} + b_{21}a_{32} + b_{31}a_{33} & b_{12}a_{31} + b_{22}a_{32} + b_{32}a_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} b_{11}\mathbf{v}_1 + b_{21}\mathbf{v}_2 + b_{31}\mathbf{v}_3 & b_{12}\mathbf{v}_1 + b_{22}\mathbf{v}_2 + b_{32}\mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A\mathbf{w}_1 & A\mathbf{w}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Como podemos ver o resultado do produto AB pode ser visto como vetores colunas, onde cada coluna é uma combinação linear dos vetores colunas da matriz A, com os coeficientes da coluna correspondente da matriz B, e também, os vetores colunas de AB podem ser visto como o produto de A pelos vetores colunas correspondentes de B. Claramente isso se generaliza para matrizes de qualquer ordem em que o produto faça sentido.

A matriz $0 = [0] \in M(m \times n)$ é chamada de **matriz nula**. A matriz nula possui a seguinte propriedade: para quaisquer outras matrizes $A \in M(k \times m)$ e $B \in M(n \times k)$ temos

$$A0 = 0 \in M(k \times n) \text{ e } 0B = 0 \in M(m \times k).$$

Outra matriz que desempenha um papel importante é a matriz quadrada $I = [\delta_{ij}]$ onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j, \\ 0 \text{ se } i \neq j. \end{cases}$$

Esta matriz tem a seguinte propriedade: qualquer que seja a matriz $A = [a_{ij}] \in M_n$ temos

$$A \cdot I = A \text{ e } I \cdot A = A,$$

chamaremos tal matriz de **matriz identidade**.

Com respeito a operação de multiplicação de matrizes ela possui as seguintes propriedades: suponha que $A \in \mathbf{M}(m \times n)$, e sejam B e C matrizes do tipo adequado para que as operações de soma e produto sejam possíveis

a.	$A(BC) = (AB)C$	Associatividade da multiplicação;
b.	$A(B + C) = AB + AC$	propriedade distributiva à esquerda;
b'.	$(B + C)A = BA + CA$	propriedade distributiva à direita;
c.	$r(AB) = (rA)B = A(rB)$	r é um escalar;
d.	$I_mA = A = AI_m$	onde I_m é a matriz identidade;
e.	$(AB)^t = B^tA^t$.	

Exemplo 5.18

Em geral a propriedade comutativa não é verdadeira para as matrizes. Para perceber isso considere:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

logo,

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix} \text{ e, claramente, } AB \neq BA.$$

Diremos que uma matriz $B \in \mathbf{M}(n \times m)$ é o **inverso à direita** de $A \in \mathbf{M}(m \times n)$ se $AB = I_m$ e diremos que a matriz $C \in \mathbf{M}(n \times m)$ é o **inverso à esquerda** de A se $CA = I_n$.

No caso em que a matriz $A \in \mathbf{M}(m \times n)$ possua inverso à direita B e à esquerda C então:

$$B = I_n B = (CA)B = C(AB) = CI_m = C,$$

e isso significa que $B = C$, em particular $m = n$ e a matriz A é quadrada. Logo, se A possui inverso à esquerda e à direita ao mesmo tempo, eles são os mesmos, além disso, pelo mesmo argumento usado anteriormente, se A possui inversa à direita e à esquerda ao mesmo tempo, então esta inversa é única e chamamos esta matriz de **matriz inversa** de A e a denotamos por A^{-1} e, nesse caso, diremos simplesmente que A é invertível.

Exemplo 5.19
Vamos começar por considerar a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Queremos determinar uma matriz $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, tal que $AB = I_2$, mas isso implica no seguinte:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+z & 2y+w \\ 3x+z & 3y+w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e daí, precisamos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x & & +z & & = & 1 \\ & 2y & & +w & = & 0 \\ 3x & & +z & & = & 0 \\ & 3y & & +w & = & 1 \end{cases}.$$

Nesse caso, resolvendo por escalonamento, obtemos $x = -1, y = 1, z = 3$ e $w = -2$ e portanto, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, além disso, se fizermos BA também obtemos a matriz identidade e, portanto, $B = A^{-1}$.

Uma matriz $A \in \mathbf{M}(m \times n)$ pode admitir mais de uma inversa à direita.

Exemplo 5.20
Se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

considere para quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{R}$ a seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix},$$

daí,

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, uma matriz $A \in \mathbf{M}(m \times n)$ pode admitir mais de uma inversa à esquerda.

Exemplo 5.21
Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e considere quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ e $C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & a \\ 3 & -2 & b \end{bmatrix}$, logo,

$$CA = \begin{bmatrix} -1 & 1 & a \\ 3 & -2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos demonstrar o seguinte teorema que nos fornece algumas propriedades úteis a respeito da inversa de uma matriz A.

Teorema 5.22
a) Se $A \in \mathbf{M}_n$ é invertível, então a sua inversa A^{-1} é única;

b) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} também o é e $(A^{-1})^{-1} = A$;

c) Se $A, B \in \mathbf{M}_n$ são matrizes invertíveis, então AB também é invertível e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração: Como a) já foi estabelecida, vamos demonstrar b). Dizer que A^{-1} é invertível significa dizer que existe uma matriz C, tal que

$$CA^{-1} = I \text{ e } A^{-1}C = I.$$

Mas, A satisfaz estas equações e como a inversa é única pela letra a), segue que $(A^{-1})^{-1} = A$. Já na letra c) observe que como A e B são invertíveis existem únicas A^{-1} e B^{-1} e veja que:

$$\begin{aligned} (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I \text{ e} \\ (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I, \end{aligned} \tag{5.3}$$

portanto, AB é invertível e a sua inversa é $B^{-1}A^{-1}$. $\square$

5.4 Matrizes Elementares

O objetivo dessa seção é introduzir as matrizes elementares e com elas descrever um processo que permite obter a matriz inversa, isso é claro, nos casos em que a matriz admite uma inversa. Gostaria de chamar a atenção que as matrizes elementares também podem ser usadas na criação de algoritmos que permitem manipular matrizes, dito isso, vamos ao que nos interessa. Iniciamos lembrando que existem apenas três operações elementares que podemos usar no processo de escalonamento, que são:

(a) $\ell_i \to \ell_i + \alpha \ell_j$;

(b) $\ell_i \to \alpha \ell_i$;

(c) $\ell_i \leftrightarrow \ell_j$.

Diremos que E é uma **matriz elementar** se E pode ser obtido da matriz identidade I por aplicar apenas umas das três operações elementares.

Exemplo 5.23
Veja que a matriz $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar pois pode ser obtida por aplicar $\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1$ na matriz identidade.

As matrizes elementares têm inúmeras aplicações, em particular, nós podemos substituir as operações elementares sobre as linhas (as colunas), por multiplicar a matrizes elementares à esquerda (à direita) da matriz que queremos que sofra a operação elementar. Veja o próximo exemplo.

Exemplo 5.24
Digamos que gostaríamos de aplicar a operação elementar $\ell_2 \to \ell_2 - 2\ell_1$ na matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, mas ao invés de fazer isso faça:

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

É fácil de ver que o resultado é o mesmo. Isso nos diz que podemos substituir o procedimento de aplicar uma operação elementar em uma matriz por multiplicar a mesma, à esquerda, pela matriz elementar obtida da matriz identidade por aplicar mesma operação elementar.

Olhando o resultado, vemos que o próximo passo, para escalonar a matriz seria aplicar $\ell_2 \to -\frac{1}{2}\ell_2$ na matriz obtida acima. Então vamos multiplicar por $E' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ e teremos

$$E'EA = E'(EA) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Para demonstrar o resultado principal enunciado no teorema a seguir vamos necessitar do seguinte lema:

Lema 5.25
Se E é uma matriz elementar, então E é invertível.

Demonstração: De fato se E é uma matriz elementar, então podemos determinar uma matriz elementar E' obtida por fazer a operação inversa que a efetuada para obter E. Logo, $E'E = I$. □

O resultado principal fica.

Teorema 5.26
Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Então, A é invertível se, e somente se, a sua forma escalonada reduzida for a matriz identidade.

Demonstração. Suponha que A é invertível, isto é, existe uma matriz B $n \times n$, tal que $AB = I = BA$. Vamos começar analisando o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ para mostrar que a única solução possível é $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. De fato, multiplicando a equação $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ por B temos que $0 = B \cdot 0 = B(A\mathbf{x}) = (BA)\mathbf{x} = I\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Por outro lado, se resolvermos o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ através de um escalonamento de linhas, obtemos a matriz R, que está escalonada de forma reduzida e é linha equivalente A, ou seja, $R = E_k \cdots E_1 A$, onde $E_1, \ldots, E_k$ são matrizes elementares. Mas o sistema $R\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é claramente equivalente ao sistema, $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, portanto tem a mesma e única solução $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, e como R está na forma escalonada reduzida, a única possibilidade é de $R = I$. Logo, se A é invertível então ela é linha equivalente a matriz identidade. Reciprocamente, se A é linha equivalente a matriz identidade, isto é, $I = E_k \cdots E_1 A$, e multiplicando por $E_k^{-1}, E_{k-1}^{-1}, \ldots, E_1^{-1} I$, obtemos que $A = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}$, ou seja, A é um produto de matrizes elementares e portanto invertível. □

Analisando a demonstração do teorema 5.26 podemos vislumbrar um método para obtermos a inversa de uma matriz. Suponha que A é uma matriz invertível, isto é, existe um número finito de matrizes elementares $E_1, \ldots, E_k$, tais que:

$$I = E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 A = (E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I)A.$$

Isso mostra que $E_k E_{k-1} \cdots E_2 E_1 I = A^{-1}$. Isto é, se aplicarmos as mesmas operações, e na mesma ordem, necessárias para levar a matriz A a sua forma escalonada reduzida, na matriz identidade, obtemos a matriz inversa de A. Isso nos motiva a definir um algoritmo para obtermos a inversa de uma matriz. Para isso basta considerar uma nova matriz $B = [A : I]$, por acrescentar a matriz identidade a direita de A então, se escalonarmos a matriz A, para que se torne a matriz identidade, segue que B se torna $[I : C]$ e então, C será a matriz inversa de A.

Exemplo 5.27
Vamos usar esse processo para obter a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para isso considere a matriz:

$$[A|I] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vamos escaloná-la. Comece por fazer $\ell_2 \to \ell_2 + \ell_1$ e $\ell_3 \to \ell_3 - 2\ell_1$ e obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & | & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\ell_1 \to \ell_1 - \ell_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & | & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & | & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\ell_2 \to \ell_2 + \frac{3}{2}\ell_3]{\ell_1 \to \ell_1 - \frac{5}{2}\ell_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -5/2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\ell_3 \to \frac{1}{2}\ell_3]{\ell_2 \to -\ell_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1/2 & -5/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1/2 & -3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e, portanto, } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -5/2 & -1 \\ 1/2 & -3/2 & -1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.5 Núcleo e Imagem

Nesta seção vamos conectar os conceitos da dimensão da imagem de uma transformação linear com a dimensão do seu núcleo, os quais nos darão um invariante importante para as aplicações lineares. Vamos começar com o seguinte teorema:

Teorema 5.28
Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Então o núcleo de T é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e a imagem de T é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

Com o objetivo de estabelecer a segunda versão do Teorema do Posto, veja o seguinte exemplo.

Exemplo 5.29
Suponha que $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ é a uma aplicação linear definida por

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \\ a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z \end{bmatrix}.$$

Então se $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^t$ e $\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t$ é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, portanto a matriz associada a T é

$$A = \begin{bmatrix} T(\mathbf{e}_1) & T(\mathbf{e}_2) & T(\mathbf{e}_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix}.$$

A imagem de T é exatamente o espaço gerado pela coluna da matriz A e, portanto, a dimensão da imagem de T é igual a dimensão do espaço-coluna e esse, por sua vez, é dado pelo número de colunas-pivô da matriz A. Por outro lado, o núcleo de T consiste em todos os vetores $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$ para os quais $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$ e, em termos da matriz A, é exatamente a solução do sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é a dimensão do núcleo A, a qual é dada pelo número de variáveis livres do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

E podemos sintetizar isso por dizer que

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(T) &= \operatorname{Nuc}(A), \\ \mathcal{IM}(T) &= \operatorname{Col}(A). \end{aligned}$$

Daí temos que:

Teorema 5.30 (Teorema do Posto, versão 2)
Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear, então:

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{IM}(T) = \dim \mathbb{R}^n = n. \tag{5.4}$$

Exemplo 5.31
Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por

$$\begin{bmatrix} z \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z + t \\ 2x - 2y + 3z + 4t \\ 3x - 3y + 4z + 5t \end{bmatrix}.$$

(a) Encontre uma base e a dimensão do $\mathcal{N}(T)$.

Queremos encontrar os vetores $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} z & y & z & t \end{bmatrix}^t$, tais que $T(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Mas isso é equivalente a resolver ao sistema:

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + 4t = 0 \\ 3x - 3y + 4z + 5t = 0 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As variáveis livres são y e t. Portanto, $\dim \mathcal{N}(T) = 2$. E fazendo $y = 1$, $t = 0$ obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ e fazendo $y = 0$, $t = 1$ obtemos $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}^t$. Assim,

$$\mathcal{N}(T) = \operatorname{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(b) Encontre uma base e a dimensão da imagem de T.

Observe que no sistema escalonado anteriormente somente a primeira e a terceira coluna são colunas-pivô. Portanto, o vetor obtido da primeira e da terceira coluna da matriz inicial geram a imagem, isto é,

$$\mathcal{IM}(T) = \text{Span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vamos exibir outra maneira de obter uma base para a $\mathcal{IM}(T)$. Inicialmente, calcule a imagem dos vetores da base canônica do $\mathbb{R}^4$:

$$T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Sabemos que estes vetores geram a $\mathcal{IM}(T)$. Como $\mathcal{IM}(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, segue que qualquer combinação linear desses vetores ainda são vetores da $\mathcal{IM}(T)$, em particular, se aplicarmos as 3 operações elementares. Para isso, monte uma matriz com estes vetores nas linhas e escalone a matriz segundo linhas,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Os vetores $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}^t, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ são claramente LI e, também, geram a imagem. Portanto, formam uma base da $\mathcal{IM}(T)$ e novamente temos que a $\dim \mathcal{IM}(T) = 2$.

Assim, podemos confirmar o teorema 5.30 pois temos que

$$\dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{IM}(T) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4.$$

Exercícios resolvidos

R5.1. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix}$. Mostre que T é linear.

Solução: Precisamos mostrar que T é uma aplicação linear, isto é, que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $T(\alpha\mathbf{u}) = \alpha T(\mathbf{u})$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$

e $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$. Suponha que $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} x' \\ y' \end{smallmatrix}\right]$, então:

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}+\mathbf{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} x+x'+y+y' \\ y+y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'+y' \\ y' \end{bmatrix} = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}), \\ T(\alpha\mathbf{u}) &= T\left(\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} x+y \\ y \end{bmatrix} = \alpha T(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

E isso demonstra que T é uma aplicação linear. □

R5.2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+y+z \\ 2x-3y+4z \end{bmatrix}$. Mostre que T é linear.

Solução: Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \text{ e veja que } T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

E como vale $A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$ e $A(\alpha\mathbf{u}) = \alpha A(\mathbf{u})$, para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, segue que T é uma aplicação linear. □

R5.3. Mostre que as aplicações abaixo não são lineares.

(a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xy \\ 2x-3y \end{bmatrix}$;

Solução: Observe que se tomarmos $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, então:

$$T\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}\right) = T\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \text{ e } T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Isso mostra que $T(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ não é sempre igual que $T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$ e, portanto, T não é uma aplicação linear. □

(b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+3 \\ 2x \\ x+y \end{bmatrix}$.

Solução: Observe que

$$T(\mathbf{0}) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, T não pode ser linear. □

(c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} |x| \\ 2x - y + z \end{bmatrix}$.

Solução: Para vermos que T não pode ser uma transformação linear, tome $\mathbf{u} = \left[\begin{smallmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \end{smallmatrix}\right]$ e $\mathbf{v} = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, então

$$T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Portanto, $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \neq T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$. □

R5.4. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação, tal que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Admita que T é um operador linear e encontre a fórmula para T.

Solução: Vamos começar analisando o que T faz com os vetores da base canônica, para isto, vamos usar que T é linear:

$$\begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) - 2T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que qualquer vetor $\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = x\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + y\left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ e daí,

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = xT\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) + yT\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = x\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3x - 5y \end{bmatrix}.$$

□

R5.5. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $\begin{bmatrix} x & y & z & t \end{bmatrix}^t \mapsto \begin{bmatrix} x - y + z + t \\ x + 2z - t \\ x + y + 3z - 3t \end{bmatrix}$. Encontre uma base e a dimensão de: (a) da imagem de F, (b) do núcleo de F.

Solução: Vamos começar obtendo o $\mathcal{N}(F)$. Seja A matriz na base canônica de F. Calcular o $\mathcal{N}(F)$ é equivalente a calcular os vetores que satisfazem $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Escalonando a matriz deste sistema homogêneo obtemos:

$$\begin{aligned} [A \quad \mathbf{0}] \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \to \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

as soluções do sistema são $x = 2z + t$ e $y = -z + 2t$, portanto, $\mathcal{N}(F) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. Para o cálculo da $\mathcal{IM}(A)$ se lembrarmos que a 1ª e 2ª coluna são colunas pivô da matriz escalonada, então a 1ª e a 2ª colunas de A geram a imagem de A. Segue que $\mathcal{IM}(F) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$. □

R5.6. Ache a transformação linear a qual é uma rotação anti-horária de 45°.

Solução: Lembre-se de que a matriz associada a uma rotação anti-horária é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Como o ângulo é de 45° segue que $\theta = \pi/4$, então

$$R\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}(x-y)/2 \\ \sqrt{2}(x+y)/2 \end{bmatrix}.$$

□

R5.7. Sejam:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sejam T e S as transformações lineares dadas por A, B, respectivamente. Encontre $R_1 = T \circ S$ e $R_2 = S \circ T$.

Solução: Como T e S são as transformações lineares definidas pelas matrizes A e B, respectivamente, segue que

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - 2z \\ 2x - y - z \\ -y + z \end{bmatrix} \text{ e } S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -3x + y - z \\ -y + z \\ -2y \end{bmatrix}.$$

e daí

$$R_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = T\left(S\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} -3x + 5y - z \\ -6x + 5y - 3z \\ -y - z \end{bmatrix}$$

e

$$R_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = S\left(T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right)\right) = \begin{bmatrix} -x + 4z \\ -2x + 2z \\ -4x + 2y + 2z \end{bmatrix}.$$

Observe ainda que $R_1 \neq R_2$. □

Exercícios propostos

P5.1. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear. Mostre que $\mathcal{N}(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e que $\mathcal{IM}(T)$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^m$.

P5.2. Mostre que são lineares as seguintes aplicações: (a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x+2y-3z \\ 4x-3y+6z \end{bmatrix}$; (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, a aplicação definida por $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$, com $a, b, c,$ e d escalares.

P5.3. Seja $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear. Se soubermos que:

$$F\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ e } F\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Determine $F(\mathbf{u})$, sendo $\mathbf{u}$ um vetor genérico do $\mathbb{R}^3$.

P5.4. Sejam $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ e $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas por $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x \\ y+z \end{bmatrix}$ e $G\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$. Calcule (se possível):

a) $F + 2G$,

b) $G \circ F$ e, por fim,

c) $F \circ G$.

P5.5. Admita que os operadores a seguir possuem inversas e encontre a fórmula para T^{-1} quando:

$$\text{(a)}\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T}{\mapsto} \begin{bmatrix} x+2y \\ -2x+3y \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \text{(b)}\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \overset{T}{\mapsto} \begin{bmatrix} 2x-3y \\ x-4y \end{bmatrix}.$$

P5.6. Para cada uma das matrizes abaixo, determine a aplicação linear associada. Depois encontre uma base e a dimensão do núcleo e da imagem de cada uma delas.

$$(a)\quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad (b)\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

P5.7. Encontre todas as possíveis inversas à esquerda da matriz:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

P5.8. Suponha que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido pela matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Encontre (se existirem) vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$, tais que:

a) $T(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$ e b) $T(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$.

P5.9. Ache a transformação linear que é uma rotação anti-horária de 60°.

P5.10. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x - 2y \\ z \\ x + y \end{bmatrix}.$$

Mostre que T é uma aplicação linear, injetora e sobrejetora, portanto, invertível. Encontre T^{-1}.

P5.11. Sejam $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear injetora e se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ um conjunto LI. Mostre que:

$$\{T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_k)\} \text{ também é LI.}$$

P5.12. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma transformação linear com a seguinte propriedade: Se $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ é uma base do $\mathbb{R}^n$, então $\{T(\mathbf{u}_1), T(\mathbf{u}_2), \ldots, T(\mathbf{u}_k)\}$ é linearmente independente em $\mathbb{R}^m$. Prove então que T é injetora.