1 Листок 3. Задача 9

- $2\xi_1 \sim N(0,4)$, $-3\xi_2 \sim N(3,9)$, $\xi_3 \sim N(0,4)$, $-\xi_4 \sim N(-1,4)$
- Сумма независимых случайных величин с нормальным распределением − случайная величина с нормальным распределением: $\xi = 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 \sim N(2,21)$
- Пусть $\eta \sim N(0,1)$, тогда $\eta\sqrt{21} + 2 = \xi$. Получаем:

$$P(|\xi| < 13) = F_\xi(13) - F_\xi(-13) = \Phi\left(\frac{13-2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-13-2}{\sqrt{21}}\right) = \Phi\left(\frac{11}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{21}}\right)$$

2 Листок 3. Задача 10

- Так как величины независимые:

$$\rho_{\xi,\eta}(x,y) = \rho_\xi(x)\,\rho_\eta(y) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

- Найдем плотность $\frac{\xi}{\eta}$ (так как $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, то есть на краях они константы, то мы спокойно можем брать производные от вторых интегралов):

$$\rho_{\frac{\xi}{\eta}}(t) = \left(F_{\frac{\xi}{\eta}}(t)\right)'_t = \left(\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{tx}\rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx\right)'_t + \left(\int_{-\infty}^{0}\int_{tx}^{+\infty}\rho_{\xi,\eta}(x,y)\,dy\,dx\right)'_t =$$

$$= \int_0^{+\infty} x\rho_{\xi,\eta}(x,tx)\,dx - \int_{-\infty}^{0} x\rho_{\xi,\eta}(x,tx)\,dx = -\frac{1}{2\pi(t^2+1)}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}}\,d\left(-\frac{(t^2+1)x^2}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi(t^2+1)}\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}}\,d\left(-\frac{(t^2+1)x^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi(t^2+1)}$$

3 Листок 3. Задача 4c

- Пусть $X = \dfrac{\xi + \zeta\eta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$
- Вычислим $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} =$$

Распишем по определению(через интеграл) для ζ (так как все величины независимые, то их совместная плотность это произведение всех плотностей, то есть все честно):

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\mathbb{E}e^{it\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\xi + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\eta\right)}dx$$

- Контстанты $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ можно воспринимать как синус и косинус, тогда воспользовавшись номером 4a, получаем

$$\mathbb{E}e^{it\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\xi + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\eta\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- В итоге получаем

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot 1 = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Получили харфункцию $N(0,1)$. $\Rightarrow X \sim N(0,1)$

$\blacksquare$

4 Листок 3. Задача 11b

- $\xi + \eta \sim -\xi - \eta \sim \xi - \eta \sim -\xi + \eta \sim N(0,8)$
- Раскроем модули по формуле полной вероятности:

$$P(2 \leq |\xi| + |\eta| \leq 3) = P^2(\xi < 0) P(2 \leq -\xi - \eta \leq 3) +$$

$$+ P^2(\xi \geq 0) P(2 \leq \xi + \eta \leq 3) + 2P(\xi < 0) P(\xi \geq 0) P(2 \leq \xi - \eta \leq 3)$$

- Пользуясь функцией распределения стандартного распределения, раскроем все вероятности ($P(\xi < 0) = P(\xi \geq 0) = \frac{1}{2}$, так как $F_\xi(t) = \Phi\left(\frac{t}{2}\right)$):

$$P(2 \leq |\xi| + |\eta| \leq 3) = \frac{1}{4}\left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{1}{4}\left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right)\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right)\right) = \Phi\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$$