

## Листок 1. Задача 9.

- Пусть  $\xi_i$  – равномерное распределенная случайная величина, отвечающая за время приема  $i$ -того пациента. Тогда  $E\xi_i = \frac{1+4}{2} = 2.5$ ,  $D\xi_i = \frac{(4-1)^2}{12} = \frac{9}{12}$ .
- Теперь введем случайную величину, отвечающую за суммарное время приема:  
 $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ .  $E\eta = 4 \cdot 2.5 = 10$ . Так как  $\xi_i$  не зависят друг от друга, можем просто найти дисперсию  $D\eta = 4 \cdot \frac{9}{12} = 3$ .
- Теперь применим неравенство Чебышева к  $\eta$ :  
 $P(|\eta - 10| \geq 2) = P(\eta \geq 12) + P(\eta \leq 8) \leq \frac{D\eta}{2^2} = \frac{3}{4}$
- Допустим, у нас есть две плотности  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , которые симметричны относительно некоторой точки  $m$  (не ограничивая общности, будем считать, что  $m = 0$ ), тогда по формуле свертки посчитаем плотность суммы этих случайных величин:  $\rho(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(x) \rho_2(t-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1(-x) \rho_2((-t) - (-x)) dx = \rho(-t)$ . То есть плотность суммы этих случайных величин тоже симметрична относительно  $m$ . Таким образом плотность  $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$  симметрична относительно 10. То есть  $P(\eta \leq 8) = P(\eta \geq 12)$
- Получаем  $P(\eta \geq 12) \leq \frac{1}{2} \cdot P(|\eta - 10| \geq 2) \leq \frac{3}{8}$ .

## Листок 1. Задача 10.

- Найдем распределение  $F_{m_n}(t) = P(m_n < t) = 1 - P(m_n > t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1-t)^n & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \end{cases}$
- $m_n \geq 0, m_{n+1} \leq m_n \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$ .
- Надо доказать, что  $P(m = 0) = 1 = F_m(0)$ .
- Рассмотрим систему вложенных множеств  $A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ,  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ . Из непрерывности вероятностной меры знаем, что:  

$$P(m \in A) = P(m = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(m \in A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(0 \leq m \leq \frac{1}{n}\right)$$
- $$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(0 \leq m \leq \frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} F_m\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} F_{m_k}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 = P(m = 0). \end{aligned}$$
 ■

## Листок 1. Задача 11.

- Рассмотрим сходимость  $\ln \eta_n = \ln \sqrt[n]{\xi_1 \cdots \xi_n} = \frac{1}{n} \cdot (\ln \xi_1 + \cdots + \ln \xi_n)$ .

- $\ln \xi_1, \ln \xi_2, \dots$  — последовательность одинаково распределенных, попарно независимых случайных величин с конечным вторым моментом:

$$E \ln^4 \xi_1 = \int_0^1 \ln^4 x dx < \infty \text{ (так как } \int_0^1 \ln x dx \text{ сходится, и там } \ln x < 0 \text{ везде)}$$

- Применяя закон больших чисел, получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot (\ln \xi_1 + \dots + \ln \xi_n) = E \ln \xi_1 = \int_0^1 1 \cdot \ln x dx = -1$$

- То есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \eta_n = -1$ . Следовательно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = \frac{1}{e}$