1 Листок 3. Задача 8c1

- Применим метод Грама-Шмидта к подпространству (X_1, X_2) со скалярным произведением $(X, Y) = EXY$:
$$b_1 = X_1$$
$$b_2 = X_2 - pr_{b_1} X_2 = X_2 - \frac{(X_2, X_1)}{(X_1, X_1)} X_1 = X_2 - \frac{\operatorname{cov}(X_2, X_1)}{\operatorname{cov}(X_1, X_1)} X_1 = -\frac{1}{2} X_1 + X_2$$
Теперь отнормируем вектора:
$$Y_1 = \frac{b_1}{\sqrt{(b_1, b_1)}} = \frac{b_1}{2} = \frac{X_1}{\sqrt{2}}$$
$$Y_2 = \frac{b_2}{\sqrt{(b_2, b_2)}} = \frac{b_2}{\sqrt{\frac{1}{4} \cdot 2 + 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1}} = \sqrt{2} b_2 = -\frac{X_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} X_2$$
- Теперь имеем:
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix}$$
- $Y_1, Y_2 \sim N(0, 1)$ по теореме с лекции.

2 Листок 3. Задача 11a

- Так как величины независимы:
$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) = \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{8}}$$
- Распишем искомую веротяность, как интеграл плотности по нужной области G (разности окружности радиуса 3 и 2) и сделаем тригонометрическую замену ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):
$$P\left(4 \le \xi^2 + \eta^2 \le 9\right) = \int_G \rho_{\xi,\eta}(x, y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_2^3 \frac{1}{8\pi} e^{-\frac{r^2}{8}} dr d\varphi = 2\pi \cdot \frac{1}{8\pi} \int_2^3 r e^{-\frac{r^2}{8}} dr =$$
$$= \frac{1}{8} \int_2^3 e^{-\frac{r^2}{8}} d\left(r^2\right) = \frac{1}{8} \cdot (-8) \left(e^{-\frac{9}{8}} - e^{-\frac{1}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{9}{8}}\right)$$

3 Задача 13

- Выпишем интеграл матожидания и посчитаем его:
$$\mathbb{E}\xi^4 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x^3 e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$
$$= 0 - \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{2\pi}} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 + 3 \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=\Phi(+\infty) - \Phi(-\infty) = 1 - 0} = 3$$