

# Теория вероятности и математическая статистика, 2 курс, 2 семестр

@defunator

11 марта 2020 г.

## Содержание

1	Сходимости случайных величин	2
2	Характеристические функции	6
3	Неравенство типа Хефдинга-Чернова	9
4	Теоремы непрерывности	11
5	Многомерная характеристическая функция и ЦПТ	14
6	Многомерное нормальное распределение	17
7	Условные математические ожидания: дискретный случай	20
8	Условные математические ожидания: общий случай	23

# 1 Сходимости случайных величин

**Определение 1.** Последовательность случайных величин  $\xi_n$  сходится к случайной величине  $\xi$ :

1. Почти наверное ( $\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$ ), если

$$P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right) = 1$$

2. По вероятности ( $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ ), если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) = 0$$

3. По распределению ( $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ ), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(x) = F_{\xi}(x)$$

для любых  $x$ , в которых непрерывна  $F_{\xi}$

**Теорема 1.** (Эквивалентное определение сходимости по распределению)  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall g$  — непрерывна и ограничена на  $\mathbb{R}$  верно  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}g(\xi_n) = \mathbb{E}g(\xi)$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Пусть  $t$  — точка непрерывности  $F_{\xi}(t)$ . Заметим, что  $F_{\xi}(t) = P(\xi \in (-\infty, t]) = \mathbb{E}\text{Ind}_{(-\infty, t]}(\xi)$ .

В силу:

$$(1) \mathbb{E}\text{Ind}_{(a_i, b_i]}(\xi_n) = F_{\xi_n}(b_i) - F_{\xi_n}(a_i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(b_i) - F_{\xi}(a_i) = \mathbb{E}\text{Ind}_{(a_i, b_i]}(\xi)$$

(2) Линейность предела (с какими-то коэффициентами  $c_i$ )

Верна следующая сходимость:

$$\mathbb{E} \sum_{i=1}^N c_i \cdot \text{Ind}_{(a_i, b_i]}(\xi_n) \rightarrow \mathbb{E} \sum_{i=1}^N c_i \cdot \text{Ind}_{(a_i, b_i]}(\xi)$$

Теперь нам бы хотелось от непрерывной ограниченной функции на прямой перейти к функции на отрезке, а там мы уже сможем ее приблизить ступенчатой и воспользоваться предыдущим утверждением и все доказать. Мы знаем, что

$\forall \varepsilon > 0 \exists A: P(-A < \xi \leq A) > 1 - \varepsilon$  (потому что  $P(\xi \in \mathbb{R}) = 1$ ). Тогда получаем:

$$F_{\xi_n}(A) - F_{\xi_n}(-A) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_{\xi}(A) - F_{\xi}(-A) = P(-A < \xi \leq A) > 1 - \varepsilon$$

То есть для  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n > N$  верно:

$$|(F_{\xi_n}(A) - F_{\xi_n}(-A)) - (F_{\xi}(A) - F_{\xi}(-A))| < \varepsilon$$

Комбинируя последние два утверждения, получаем для  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \exists N \forall n > N$ :

$$F_{\xi_n}(A) - F_{\xi_n}(-A) > F_{\xi}(A) - F_{\xi}(-A) - \varepsilon > 1 - 2\varepsilon$$

Из чего следует  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \exists N \forall n > N$ :

$$P(-A \leq \xi_n \leq A) \geq F_{\xi_n}(A) - F_{\xi_n}(-A) > 1 - \varepsilon$$

Теперь возьмем любую непрерывную ограниченную функцию  $g$ , приблизим ее на отрезке  $[-A, A]$  ступенчатой функцией  $g_{\varepsilon}$ , что  $|g(x) - g_{\varepsilon}(x)| < \varepsilon$ , а вне отрезка положим  $g_{\varepsilon} = 0$ . Имеем  $\forall \varepsilon > 0 \exists A \forall n$ :

$$|\mathbb{E}g(\xi_n) - \mathbb{E}g(\xi)| \leq |\mathbb{E}(1 - \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi_n)) \cdot g(\xi_n) - \mathbb{E}(1 - \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi)) \cdot g(\xi)| +$$

$$+ |\mathbb{E} \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi_n) \cdot g(\xi_n) - \mathbb{E} \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi) \cdot g(\xi)|$$

Ясно, что первый модуль  $< C \cdot 2\varepsilon$  (из ограниченности  $g \forall x_1, x_2: |g(x_1) - g(x_2)| < C$  и так как  $P(|\xi| > A), P(|\xi_n| > A) < \varepsilon$ ). А во втором модуле  $g$  заменим на  $g_\varepsilon$  с погрешностью  $\varepsilon$ , то есть он  $< 2\varepsilon + |\mathbb{E} \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi_n) \cdot g_\varepsilon(\xi_n) - \mathbb{E} \text{Ind}_{[-A, A]}(\xi) \cdot g_\varepsilon(\xi)|$ . А про оставшийся модуль мы уже знаем, что он сходится к 0, так как ступенчатая функция (то есть  $< \varepsilon$  для  $\forall n > N$ ). В итоге имеем:  $|\mathbb{E} g(\xi_n) - \mathbb{E} g(\xi)| < \varepsilon$ . То есть  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} g(\xi_n) = \mathbb{E} g(\xi)$

←

Пусть  $t$  — точка непрерывности  $F_\xi(t)$ . Мы знаем, что  $F_\xi(t) = \mathbb{E} \text{Ind}_{(-\infty, t]}(\xi)$ . Для  $\forall \delta > 0$  определим функции:

$$g_{-\delta}(x) = \begin{cases} 1 & x < t - \delta \\ \frac{1}{\delta} \cdot (t - x) & t - \delta \leq x \leq t \\ 0 & t < x \end{cases}$$

$$g_{+\delta}(x) = \begin{cases} 1 & x < t \\ \frac{1}{\delta} \cdot (t - x) & t \leq x \leq t + \delta \\ 0 & t + \delta < x \end{cases}$$

Заметим, что  $\forall x$ :

$$\text{Ind}_{(-\infty, t-\delta]}(x) \leq g_{-\delta}(x) \leq \text{Ind}_{(-\infty, t]}(x) \leq g_{+\delta}(x) \leq \text{Ind}_{(\infty, t+\delta]}(x)$$

Взяв матожидания ( $x = \xi_n$ ) от второго и третьего неравенств, получим:

$$\mathbb{E} g_{-\delta}(\xi_n) \leq F_{\xi_n}(t) \leq \mathbb{E} g_{+\delta}(\xi_n)$$

Теперь устремим  $n \rightarrow \infty$ :

$$\mathbb{E} g_{-\delta}(\xi) \leq \inf_{n \rightarrow \infty} \lim F_{\xi_n}(x) \leq \sup_{n \rightarrow \infty} \lim F_{\xi_n}(x) \leq \mathbb{E} g_{+\delta}(\xi)$$

Рассмотрим первое и последнее неравенство той цепочки ( $x = \xi$  и возьмем то него матожидание), получим:

$$F_\xi(t - \delta) \leq \mathbb{E} g_{-\delta}(\xi) \leq \mathbb{E} g_{+\delta}(\xi) \leq F_\xi(t + \delta)$$

Теперь  $\delta \rightarrow 0$ :

$$F_\xi(t) = \mathbb{E} g_{-\delta}(\xi) = \inf_{n \rightarrow \infty} \lim F_{\xi_n}(t) = \sup_{n \rightarrow \infty} \lim F_{\xi_n}(t) = \mathbb{E} g_{+\delta}(\xi)$$

Получаем:  $F_\xi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_{\xi_n}(t)$

■

**Теорема 2.**  $\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{p} \xi$

*Доказательство.* Знаем  $P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right) = 1$ . Заметим вложенность следующих событий для  $\forall \varepsilon >$

0:  $\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right\} \Rightarrow \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$  (это по сути и есть определение предела, что для  $\forall \varepsilon$ , начиная с некоторого  $N$  выполняется условие). То есть:

$$1 = P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\right) \leq P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}\right) = 1$$

Так как последовательность множеств  $A_N = \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$  расширяющаяся ( $A_N \subseteq A_{N+1}$ ), в объединении они дают событие вероятности 1, значит по теореме непрерывности  $\lim_{N \rightarrow \infty} P(A_N) = 1$ .

Теперь заметим:  $P(A_N) \leq P(|\xi_N - \xi| < \varepsilon)$ . То есть:  $\lim_{N \rightarrow \infty} P(|\xi_N - \xi| < \varepsilon) = 1$ . Или что то же самое:  $\lim_{N \rightarrow \infty} (1 - P(|\xi_N - \xi| < \varepsilon)) = \lim_{N \rightarrow \infty} P(|\xi_N - \xi| \geq \varepsilon) = 0$  — определение сходимости по вероятности. ■

**Теорема 3.** (Теорема Лебега о мажорируемой сходимости)  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$  и  $|\xi_n|, |\xi| \leq \eta$  п. н. (где  $\eta$  — случайная величина, что  $\mathbb{E}\eta < \infty$ ), то  $\mathbb{E}\xi_n \rightarrow \mathbb{E}\xi$

*Доказательство.* Докажем теорему в частном случае, когда  $\eta \equiv C$ .  $\forall \varepsilon > 0 \forall n$   $|\mathbb{E}\xi_n - \mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi_n - \xi| = \mathbb{E}|\xi_n - \xi| \cdot \text{Ind}_{|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon} + \mathbb{E}|\xi_n - \xi| \cdot \text{Ind}_{|\xi_n - \xi| < \varepsilon} \leq 2C \cdot P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) + \varepsilon \cdot 1$ . Так как  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi$ , то  $\exists N \forall n > N: P(|\xi_n - \xi| \geq \varepsilon) < \varepsilon$ . Тогда получаем:  $|\mathbb{E}\xi_n - \mathbb{E}\xi| < 2C \cdot \varepsilon + \varepsilon$ . То есть  $\mathbb{E}\xi_n \rightarrow \mathbb{E}\xi$ . ■

**Предложение 1.**  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow$  для  $\forall g$  — непрерывная,  $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$

*Доказательство.* Знаем для любой случайной величины  $\forall \varepsilon > 0 \exists A: P\left(|\xi| > \frac{A}{2}\right) < \varepsilon$ .  $\exists N \forall n > N$ :

$$P(|\xi_n| > A) \leq P(|\xi - \xi_n| + |\xi| > A) \leq P\left(|\xi - \xi_n| > \frac{A}{2} \vee |\xi| > \frac{A}{2}\right) \leq P\left(|\xi - \xi_n| > \frac{A}{2}\right) + P\left(|\xi| > \frac{A}{2}\right) < \varepsilon$$

. Теперь возьмем  $g$ , она равномерно непрерывна на  $[-A, A]$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |x - y| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(y)| < \varepsilon \quad \forall x, y \in [-A, A]$$

Докажем  $g(\xi_n) \xrightarrow{p} g(\xi)$ :

$$\begin{aligned} P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon) &= P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon \mid \xi_n, \xi \in [-A, A]) \cdot P(\xi_n, \xi \in [-A, A]) + \\ &+ P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon \mid \xi_n, \xi \notin [-A, A]) \cdot P(\xi_n, \xi \notin [-A, A]) \end{aligned}$$

Посмотрев на определение равномерной непрерывности, заметим, что:

$$P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon \mid \xi_n, \xi \in [-A, A]) \leq P(|\xi_n - \xi| \geq \delta)$$

А это уже, так как у нас есть сходимость по вероятности  $\rightarrow 0$ . И заметим, что

$$P(\xi_n, \xi \notin [-A, A]) \leq P(|\xi_n| > A) + P(|\xi| > A) < 2\varepsilon$$

То есть  $\rightarrow 0$  при  $n, A \rightarrow \infty$  Все, получили, что  $P(|g(\xi_n) - g(\xi)| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$  при  $n, A \rightarrow \infty$ . ■

**Следствие 1.**  $\xi_n \xrightarrow{p} \xi \Rightarrow \xi_n \xrightarrow{d} \xi$

*Доказательство.* Берем предыдущее предложение. Потом используем теорему Лебега для произвольной непрерывной ограниченной  $g$  и вспоминаем эквивалентное определение сходимости по распределению. ■

**Теорема 4.** (Эквивалентное определение сходимости почти наверное)

$$\xi_n \xrightarrow{n.n.} \xi \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$$

*Доказательство.* Рассмотрим следующие события:

$$A_k^\varepsilon = \{|\xi_k - \xi| > \varepsilon\}$$

$$A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$$

Заметим, что:

$$\left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} = \{\exists k \geq n : |\xi_k - \xi| > \varepsilon\} = \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$$

$$\left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \neq \xi \right\} = \{\exists \varepsilon > 0 \forall n \exists k \geq n : |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k^{\varepsilon=\frac{1}{m}} = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}$$

Тогда имеем:

$$\xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi \Leftrightarrow P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n \neq \xi\right) = 0 \Leftrightarrow P\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall m \ P\left(A^{\frac{1}{m}}\right) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ P(A^\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow$$

Теперь заметим вложенность последовательности событий  $B_n^\varepsilon = \bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon$  и, взглянув на определение

$A^\varepsilon$ , по теореме о непрерывности вероятностной меры продолжаем цепочку:

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{k \geq n} A_k^\varepsilon\right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon\right) = 0$$

■

Теперь приведем некоторые примеры, опровергающие остальные следствия сходимостей

**Пример 1.**

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

Пусть  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ ,  $P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2}$ . Определим  $\forall n \ \xi_n(\omega_i) = (-1)^i$ . Положим  $\xi = -\xi_n$ . Тогда  $\forall f$  непрерывной и ограниченной:

$$\mathbb{E}f(\xi_n) = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \mathbb{E}f(\xi)$$

То есть  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ . Однако  $\forall n \ |\xi_n - \xi| = 2$ , то есть  $\xi_n \not\xrightarrow{P} \xi$

**Пример 2.**

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$$

Возьмем  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\xi_{2^n+p} = \text{Ind}_{[\frac{p}{2^n}, \frac{p+1}{2^n}]}$ ,  $0 \leq p < 2^n$ . Ясно, что  $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ , так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\xi_n > 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\lfloor \log n \rfloor}} = 0$$

, но  $\xi_n \not\xrightarrow{\text{п.н.}} 0$ , так как для любого исхода  $\omega$  существует бесконечно много  $n$ , что  $\xi_n(\omega) = 1$ . Теперь осталось посмотреть на теорему 4 и все станет ясно.

**Пример 3.**

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{\text{п.н.}} \xi$$

Если бы следствие имело место, то отсюда вытекало бы, что:

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \not\Rightarrow \xi_n \xrightarrow{P} \xi$$

противоречие

## 2 Характеристические функции

**Определение 2.** Характеристической функцией случайной величины  $\xi$  называется функция:

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \mathbb{E}(\cos(t\xi) + i \sin(t\xi))$$

**Предложение 2.** (Свойства характеристических функций)

1.  $\varphi_{\xi}(0) = 1, |\varphi_{\xi}(t)| \leq 1 \forall t \in \mathbb{R}$
2.  $\varphi_{a\xi+b}(t) = e^{itb}\varphi_{\xi}(at)$
3. если  $\xi_1, \dots, \xi_n$  — независимые случайные величины и  $S = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , то

$$\varphi_S(t) = \varphi_{\xi_1}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t)$$

*Доказательство.* .

1. Понятно, так как в матожидании могут быть только комплексные числа с модулем  $\leq 1$ .
2.  $\varphi_{a\xi+b}(t) = \mathbb{E}e^{it(a\xi+b)} = e^{itb}\mathbb{E}e^{i(at)\xi} = e^{itb}\varphi_{\xi}(at)$
3.  $\varphi_S(t) = \mathbb{E}(e^{it\xi_1} \dots e^{it\xi_n}) = \mathbb{E}e^{it\xi_1} \dots \mathbb{E}e^{it\xi_n} = \varphi_{\xi_1}(t) \cdots \varphi_{\xi_n}(t)$

■

**Пример 4.** Вычислим  $\varphi_{\xi}(t)$ , где  $\xi \sim N(0, 1)$ :

$$\varphi_{\xi}(t) = \mathbb{E}e^{it\xi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Заметим, что  $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ , так как это интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку. Тогда имеем:

$$\varphi_{\xi}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

Возьмем производную по  $t$ :

$$\begin{aligned} \varphi'_{\xi}(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(tx) d\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0 - \frac{t}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(tx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -t\varphi_{\xi}(t) \end{aligned}$$

Теперь надо решить дифференциальное уравнение:

$$\varphi'_{\xi}(t) = -t\varphi_{\xi}(t)$$

$$\frac{\varphi'_{\xi}(t)}{\varphi_{\xi}(t)} = -t$$

Интегрируем обе части:

$$\int \frac{d(\varphi_{\xi}(t))}{\varphi_{\xi}(t)} = \ln|\varphi_{\xi}(t)| + C = \int -tdt = -\frac{t^2}{2}$$

$$\varphi_{\xi}(t) = C'e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\varphi_{\xi}(0) = 1 = C' \Rightarrow C' = 1$$

(Ответ никак нулевым быть не может, поэтому, когда мы поделили на хар функцию ничего плохого не произошло)

**Предложение 3.** Пусть случайная величина  $\xi$  обладает конечным  $k$ -тым моментом, то есть  $\mathbb{E}|\xi|^k < \infty$ . Тогда  $\varphi$  имеет непрерывную  $k$ -тую производную и  $\varphi^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\xi^k$

*Доказательство.* Заметим, что:

$$\left| \frac{e^{i\Delta t\xi} - 1}{\Delta t} \right| \leq \frac{\sqrt{(\cos(\Delta t\xi) - 1)^2 + \sin^2(\Delta t\xi)}}{|\Delta t|} = \frac{\sqrt{2 - 2\cos(\Delta t\xi)}}{|\Delta t|} = \frac{2|\sin(\frac{\Delta t\xi}{2})|}{\Delta t} \leq \frac{2 \cdot \frac{|\Delta t\xi|}{2}}{|\Delta t|} = |\xi|$$

Возьмем вместо  $\Delta t$  последовательность  $a_n \rightarrow 0$ . Получим, что последовательность случайных величин, сходящихся почти наверное и ее предел ( $i\xi$ ) ограничены случайной величиной ( $\xi$ ) с конечным ожиданием, получаем по теореме Лебега:

$$\mathbb{E} \frac{e^{ian\xi} - 1}{a_n} \rightarrow \mathbb{E}i\xi$$

Теперь посчитаем производную хар функции:

$$\varphi'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbb{E} e^{it\xi} \cdot \frac{e^{i\Delta t\xi} - 1}{\Delta t} = i\mathbb{E} e^{it\xi} \xi$$

Теперь очевидна непрерывность первой производной и  $\varphi'(0) = i\mathbb{E}\xi$ , для производных высших порядков аналогично

■

**Теорема 5.**

$$\xi_n \xrightarrow{d} \xi \Leftrightarrow \forall t \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi_n}(t) = \varphi_{\xi}(t)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Очевидно по Теореме 1

$\Leftarrow$

Докажем при условии  $\sup_n \mathbb{E}\xi_n^2 \leq C < \infty$ . По неравенству Чебышева:

$$P(|\xi_n| \geq A) \leq \frac{\mathbb{E}\xi_n^2}{A^2} \leq \frac{C}{A^2}$$

Пусть  $f$  — ограниченная непрерывная функция и  $M = \sup|f|$ . Из записанного неравенства Чебышева следует, что  $\forall \varepsilon > 0 \exists A$ :

$$P(|\xi_n| \geq A) \leq \varepsilon, \quad P(|\xi| \geq A) \leq \varepsilon$$

Пусть непрерывная ограниченная  $f_\varepsilon$  совпадает с  $f$  на  $[-A, A]$ , потом от  $-A-1$  до  $-A$  и от  $A+1$  до  $A$  она будет прямой из 0 в  $f(-A)$  и  $f(A)$  соответственно, а дальше будет повторять этот шаблон (периодическая). Заметим, что:

$$|\mathbb{E}f_\varepsilon(\xi_n) - \mathbb{E}f(\xi_n)| < 2M\varepsilon, \quad |\mathbb{E}f_\varepsilon(\xi) - \mathbb{E}f(\xi)| < 2M\varepsilon$$

Теперь равномерно приблизим  $f_\varepsilon$  комбинацией  $\sin, \cos$  (знаем с матана, что периодическую можно так приблизить). А из сходимости хар функции мы знаем, что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \sin(\xi_n) = \mathbb{E} \sin(\xi)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \cos(\xi_n) = \mathbb{E} \cos(\xi)$$

То есть получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f_\varepsilon(\xi_n) = \mathbb{E}f_\varepsilon(\xi)$ . В итоге, вспоминая те неравенства с  $2M\varepsilon$  и устремляя  $n \rightarrow \infty$ :

$$\mathbb{E}f(\xi) - 4M\varepsilon \leq \inf_{n \rightarrow \infty} \lim \mathbb{E}f(\xi_n) \leq \sup_{n \rightarrow \infty} \lim \mathbb{E}f(\xi_n) \leq \mathbb{E}f(\xi) + 4M\varepsilon$$

Устремляя  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}f(\xi_n) = \mathbb{E}f(\xi)$ , что доказывает сходимость по распределению.

■

**Следствие 2.**  $\varphi_\xi \equiv \varphi_\eta \Rightarrow F_\xi \equiv F_\eta$

*Доказательство.* Предыдущая теорема + Теорема 1. ■

**Теорема 6.** (Центральная предельная теорема)

Пусть  $\xi_n$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем  $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$ ,  $\mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2$ . Тогда  $\forall x$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

(справа записана  $F(t)$  — функция распределения случайной величины с распределением  $N(0, 1)$ )

*Доказательство.* Переходя к случайным величинам  $\xi_i = \frac{\xi_i - \mu}{\sigma}$  далее будем считать, что  $\mathbb{E}\xi_i = 0$  и  $\mathbb{D}\xi_i = 1$ . Пусть  $\varphi$  — хар функция случайной величины  $\xi_1$ . Тогда хар функция случайной величины

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{n}}$$

равна

$$\varphi_n(t) = \left(\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

Разложим  $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$  в ряд Тейлора в 0 (при  $n \rightarrow \infty$ ), помним предложение 3:

$$\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \varphi(0) + x\varphi'(0) + \dots = 1 + 0 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Следовательно получаем:

$$\varphi_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{-\frac{2n}{t^2} \cdot \left(-\frac{t^2}{2}\right)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Получили характеристическую функцию нормального распределения, то есть и функции распределения должны совпадать. ■



### 3 Неравенство типа Хефдинга-Чернова

**Теорема 7.** (Неравенство Хефдинга-Чернова)

Пусть случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_n$  независимы и  $a_i \leq \xi_i \leq b_i$ . Тогда для случайной величины  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  и для каждого  $t > 0$  выполнено

$$P(|S_n - \mathbb{E}S_n| \geq t) \leq 2 \exp \left( -\frac{t^2}{4 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2} \right)$$

*Доказательство.* Пусть  $\eta_i = \xi_i - \mathbb{E}\xi_i$ , тогда  $|\eta_i| \leq b_i - a_i$ . Заметим, что для каждого  $\lambda > 0$  (просто домножили и взяли экспоненту):

$$P(S_n - \mathbb{E}S_n \geq t) = P\left(\sum_{i=1}^n \eta_i \geq t\right) = P(e^{\lambda \sum \eta_i} \geq e^{\lambda t})$$

Теперь применим неравенство Маркова:

$$P(e^{\lambda \sum \eta_i} \geq e^{\lambda t}) \leq e^{-\lambda t} \mathbb{E}e^{\lambda \sum \eta_i}$$

Вспомним, что  $\eta_1, \dots, \eta_n$  независимы:

$$e^{-\lambda t} \mathbb{E}e^{\lambda \sum \eta_i} = e^{-\lambda t} \prod \mathbb{E}e^{\lambda \eta_i}$$

Оценим каждый множитель  $\mathbb{E}e^{\lambda \eta_i}$  отдельно. Разложим его в ряд Тейлора:

$$\mathbb{E}e^{\lambda \eta_i} = 1 + \lambda \mathbb{E}\eta_i + \lambda^2 \mathbb{E}\eta_i^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k \mathbb{E}\eta_i^k \leq 1 + \lambda^2 (b_i - a_i)^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} \lambda^k (b_i - a_i)^k$$

Докажем, что при  $R > 0$ :

$$1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} R^k \leq e^{R^2}$$

Если  $R > 1$ :

$$1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} R^k = 1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} R^{2k} \left( \frac{k!}{(2k-1)!} R^{-1} + \frac{n!}{(2n)!} \right) \leq 1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} R^{2k} = e^{R^2}$$

Если же  $R \leq 1$ :

$$1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} R^k \leq 1 + \frac{1}{2}R^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} R^2 = 1 + R^2 \leq e^{R^2}$$

Таким образом:

$$P(S_n - \mathbb{E}S_n \geq t) \leq \exp \left( -\lambda t + \lambda^2 \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right)$$

Взяв  $\lambda = \frac{t}{2 \sum (a_i - b_i)^2}$  получим желаемое неравенство. Для  $P(S_n - \mathbb{E}S_n \geq t)$  получим такую же оценку, и, объединяя их, получим оценку на модуль, только придется домножить оценку на 2. ■

**Следствие 3.** Пусть  $\xi_i \sim \text{Bern}(p)$  – набор  $n$  независимых случайных величин,  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , тогда

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq t\right) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4}}$$

*Доказательство.* Разделим каждую случайную величину на  $n$ , тогда  $\mathbb{E} \frac{S_n}{n} = p$ , а  $\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$ . Подставляем и получаем, нужное неравенство ■

**Пример 5.** Пусть в ящике какое-то количество черных и белых шаров. Каким должен быть размер выборки, чтобы оценить долю белых шаров с малой погрешностью? Пусть  $\xi_i$  — бернуллевская случайная величина, равная 1, если шар белого цвета и 0, если цвет черный. Мы хотим оценить вероятность успеха  $p$ . По неравенству выше:

$$P \left( \left| \frac{S_n}{n} - p \right| \geq t \right) \leq 2e^{-\frac{nt^2}{4}} \leq \varepsilon$$

Тогда при размере выборки  $n = O \left( \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{t^2} \right)$  выборочное среднее приближает реальную долю белых шаров с точностью  $t$  с вероятностью более  $1 - \varepsilon$  (то есть вероятность, что наша оценка верна  $\geq 1 - \varepsilon$ )

## 4 Теоремы непрерывности

Для применения ЦПТ на практике важную роль играют так называемые теоремы о непрерывности.

**Предложение 4.** Если последовательность случайных величин  $\xi_n \xrightarrow{d} \xi$ , то для всякой непрерывной  $g$   $g(\xi_n) \xrightarrow{d} g(\xi)$

*Доказательство.* Следует из Теоремы 1 (эквивалентное определение сходимости по распределению). ■

**Лемма 1.** Пусть  $X, Y, Z$  – случайные величины. Тогда

$$P(X + Y \leq t) \leq P(X + Z \leq t + \varepsilon) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0$$

*Доказательство.* Заметим, что

$$\begin{aligned} P(X + Y \leq t) &\leq P(X + Y \leq t, |Y - Z| \leq \varepsilon) + P(X + Y \leq t, |Y - Z| \geq \varepsilon) \leq \\ &\leq P(X + Z - \varepsilon \leq t) + P(|Y - Z| \geq \varepsilon) \end{aligned}$$

■

**Предложение 5.** Если  $\xi_n \xrightarrow{P} a = \text{const}$  и  $\eta_n \xrightarrow{d} \eta$ , то  $\xi_n \eta_n \xrightarrow{d} a\eta$ ,  $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{d} a + \eta$

*Доказательство.* Докажем утверждение для суммы. Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда по лемме имеем:

$$P(\xi_n + \eta_n \leq t) \leq F_{\eta_n}(t - a + \varepsilon) + P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)$$

и

$$P(\xi_n + \eta_n \leq t) \geq F_{\eta_n}(t - a - \varepsilon) - P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)$$

Устремляя сначала  $n \rightarrow \infty$ , а затем  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Из сходимости по вероятности получаем, что  $P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon) \rightarrow 0$ . Тогда в итоге имеем:

$$\begin{aligned} \lim (F_{\eta_n}(t - a - \varepsilon) - P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)) &\leq \lim F_{\xi_n + \eta_n}(t) \leq \lim (F_{\eta_n}(t - a + \varepsilon) + P(|\xi_n - a| \geq \varepsilon)) \\ \lim F_{\xi_n + \eta_n}(t) &= F_{\eta}(t - a) = F_{a + \eta}(t) \end{aligned}$$

Теперь докажем утверждение для произведения. Пусть  $a = 0$  (случай, когда  $a \neq 0$  выводится из суммы  $(\xi_n - a)\eta_n$  и  $a\eta_n$ ). Теперь заметим, что  $\forall \varepsilon > 0 \forall C > 0$  верно включение:

$$\{|\xi_n \eta_n| > \varepsilon\} \subseteq \{|\eta_n| > C\} \cup \left\{|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{C}\right\}$$

(Пояснение: это верно, так как пересечение отрицания обоих событий точно приводит к противоречию). Тогда, переходя к вероятностям, получаем:

$$P(|\xi_n \eta_n| > \varepsilon) \leq 1 - F_{\eta_n}(C) + F_{\eta_n}(-C) + P\left(|\xi_n| > \frac{\varepsilon}{C}\right)$$

Устремляя сначала  $n \rightarrow \infty$ , а затем  $C \rightarrow \infty$ , получаем, что  $\xi_n \eta_n \xrightarrow{P} 0 \Rightarrow \xi_n \eta_n \xrightarrow{d} 0$ . ■

**Пример 6.** (Выборочная дисперсия)

Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин  $\xi_i$ , причем  $\mathbb{E}\xi_i = \mu$  и  $\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2$ . Тогда последовательность случайных величин

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\xi_i - \bar{\xi}_n)^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

где  $\bar{\xi}_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$  (умножаем на  $\frac{1}{n-1}$ , а не на  $\frac{1}{n}$ , чтобы  $\mathbb{E}s_n^2 = \sigma^2$ , то есть таким образом посчитанная дисперсия по вероятности сходится к именно тому, чему и надо, в другом случае будет небольшое смещение в  $\frac{n-1}{n}$  раз, но с увеличением  $n$  разница в любом случае будет стираться). Действительно:

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - 2n\bar{\xi}_n \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i + n\bar{\xi}_n^2 \right) = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - n\bar{\xi}_n^2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 - \frac{n}{n-1} \bar{\xi}_n^2$$

Теперь заметим, что по ЗБЧ:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 + \mu, \quad \bar{\xi}_n \xrightarrow{P} \mu$$

Получили искомую сходимость

**Пример 7.** Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин  $\xi_i$ , причем  $\mathbb{E}\xi_i = \mu$  и  $\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2 > 0$ . Тогда из ЦПТ следует, что:

$$\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1)$$

Более того, так как  $s_n^2 \xrightarrow{P} \sigma^2 > 0$ , то имеет место сходимость по распределению величин:

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{\xi}_n - \mu)}{s_n^2} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1)$$

**Предложение 6.** Пусть  $a, h_n \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  и  $f$  — непрерывно дифференцируемая функция на  $\mathbb{R}$ . Если последовательность случайных величин  $\xi_n$  сходится по распределению к  $\xi$ , то:

$$\frac{f(a + h_n \xi_n) - f(a)}{h_n} \xrightarrow{d} f'(a) \xi$$

*Доказательство.* Имеет место равенство:

$$\begin{aligned} \frac{f(a + h_n \xi_n) - f(a)}{h_n} &= \frac{f(a + 1 \cdot h_n \xi_n) - f(a + 0 \cdot h_n \xi_n)}{h_n} = \frac{1}{h_n} \int_0^1 f(a + th_n \xi_n) d(a + th_n \xi_n) = \\ &= \xi_n \int_0^1 f(a + th_n \xi_n) dt \end{aligned}$$

Из предложения 5(самый конец) получаем, что  $h_n \xi_n \xrightarrow{P} 0$ . Также заметим, что функция

$$g(y) = \int_0^1 f(a + ty) dt$$

непрерывна. Следовательно по предложению 4:

$$g(h_n \xi_n) = \int_0^1 f(a + th_n \xi_n) dt \xrightarrow{P} g(0) = f'(a)$$

Теперь снова используя предложение 5, получаем нужную сходимость. ■

**Пример 8.** Пусть задана последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин  $\xi_i$ , причем  $\mathbb{E}\xi_i = \mu$  и  $\mathbb{D}\xi_i = \sigma^2 > 0$ . Если  $h$  — непрерывно дифференцируемая функция, то

$$\sqrt{n} (h(\bar{\xi}_n) - h(\mu)) \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, q), \quad q = \sigma h'(\mu)$$

Действительно, имеем равенство

$$\sqrt{n} \frac{(h(\bar{\xi}_n) - h(\mu))}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{h(\mu + n^{-\frac{1}{2}} \sigma \zeta_n) - h(\mu)}{n^{-\frac{1}{2}}}$$

где (сходимость по ЦПТ)

$$\zeta_n = \frac{\sqrt{n} (\bar{\xi}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, 1)$$

Используем предложение 6 и получаем требуемое.

**Пример 9.** Пусть  $\xi_1, \dots, \xi_n$  положительные независимые одинаково распределенные случайные величины,  $\mathbb{E}\xi_1 = \mu$ ,  $0 < \mathbb{D}\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ . Рассмотрим случайную величину  $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$  и найдем предел в смысле сходимости по распределению у последовательности случайных величин

$$\sqrt{n} \left( \frac{n}{S_n} - \frac{1}{\mu} \right).$$

Первый способ:

$$\sqrt{n} \left( \frac{n}{S_n} - \frac{1}{\mu} \right) = -\frac{1}{\mu} \frac{n}{S_n} \sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right)$$

По ЦПТ

$$\sqrt{n} \left( \frac{S_n}{n} - \mu \right) \xrightarrow{d} \xi \sim N(0, \sigma^2)$$

По ЗБЧ

$$\frac{n}{S_n} \xrightarrow{P} \frac{1}{\mu}$$

Таким образом имеем:

$$\sqrt{n} \left( \frac{n}{S_n} - \frac{1}{\mu} \right) \xrightarrow{d} -\frac{1}{\mu} \xi \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}\right)$$

Второй способ:

Пусть  $h(x) = \frac{1}{x}$ , тогда

$$\sqrt{n} \left( \frac{n}{S_n} - \frac{1}{\mu} \right) = \sqrt{n} \left( h\left(\frac{S_n}{n}\right) - h(\mu) \right) \xrightarrow{d} \xi \sim N\left(0, \sigma^2 (h'(\mu))^2\right) = N\left(0, \frac{\sigma^2}{\mu^4}\right)$$

## 5 Многомерная характеристическая функция и ЦПТ

**Определение 3.** Характеристическая функция случайного вектора  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)^T$  определяется равенством

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E}e^{ix\xi} = \mathbb{E}e^{i\sum_{i=1}^m x_i \xi_i}$$

**Предложение 7.**  $\varphi_\xi \equiv \varphi_\eta \Leftrightarrow \xi$  и  $\eta$  имеют одинаковые распределения

*Доказательство.* Заметим, что

$$F_\xi(x_1, \dots, x_m) = \mathbb{E}I_{\leq x_1}(\xi_1) \cdots I_{\leq x_m}(\xi_m)$$

По аналогии с одномерным случаем, нам достаточно доказать, что

$$\mathbb{E}g_1(\xi_1) \cdots g_m(\xi_m) = \mathbb{E}g_1(\eta_1) \cdots g_m(\eta_m)$$

для непрерывных периодических функций  $g_k(u)$ . Такие функции приближаются линейными комбинациями функций вида  $e^{i\mu_k u}$ . Значит, достаточно проверять совпадение выражений вида

$$\mathbb{E} \exp(i\mu_1 \xi_1 + \cdots + i\mu_m \xi_m) = \mathbb{E} \exp(i\mu_1 \eta_1 + \cdots + i\mu_m \eta_m)$$

А это у нас есть (это хар функции). ■

**Следствие 4.** Случайные величины  $\xi_1, \dots, \xi_m$  независимы тогда и только тогда, когда

$$\varphi_\xi(y_1, \dots, y_m) = \varphi_{\xi_1}(y_1) \cdots \varphi_{\xi_m}(y_m)$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

$$\varphi_\xi(y_1, \dots, y_m) = \mathbb{E}e^{i(\xi_1 y_1 + \cdots + \xi_m y_m)} = \mathbb{E}e^{i\xi_1 y_1} \cdots e^{i\xi_m y_m} =$$

В силу независимости  $\xi_i$

$$= \mathbb{E}e^{i\xi_1 y_1} \cdots \mathbb{E}e^{i\xi_m y_m} = \varphi_{\xi_1}(y_1) \cdots \varphi_{\xi_m}(y_m)$$

$\Leftarrow$

Сделаем новый вектор  $(\eta_1, \dots, \eta_m)$ , так что:

1. Распр  $\eta_i =$  распр  $\xi_i \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$
2.  $\eta_1, \dots, \eta_m$  независимы

Определим  $F(y) = F_{\eta_1}(y_1) \cdots F_{\eta_m}(y_m)$ . Тогда мы знаем, что существует вектор, у которого такая функция распределения, из чего непременно следует независимость  $\eta_1, \dots, \eta_m$

Посчитаем хар. функцию  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$

$$\varphi_\eta(y) = \left[ \begin{array}{l} \text{в силу} \\ \text{нез - сти } \eta_i \end{array} \right] = \varphi_{\eta_1}(y_1) \cdots \varphi_{\eta_m}(y_m) = \varphi_{\xi_1}(y_1) \cdots \varphi_{\xi_m}(y_m) = \varphi_\xi(y)$$

По предыдущему предложению и независимости  $\eta_1, \dots, \eta_m \Rightarrow \xi_1, \dots, \xi_m$  независимы. ■

**Теорема 8.** Пусть последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов  $\xi^n = (\xi_1^n, \dots, \xi_m^n) \in \mathbb{E}$  имеют конечные

$$\mathbb{E}\xi_i^1 = \mu_i, \quad r_{ij} = \text{cov}(\xi_i^1, \xi_j^1)$$

Тогда величины

$$\eta_i^n = \frac{\xi_i^1 + \dots + \xi_i^n - n\mu_i}{\sqrt{n}}$$

таковы, что последовательность векторов  $\eta^n = (\eta_1^n, \dots, \eta_m^n) \xrightarrow{d} \eta$ , характеристическая функция которого имеет вид

$$\varphi_\eta(y) = \exp\left(-\frac{\langle yR, y \rangle}{2}\right), \quad R = (r_{ij})$$

*Доказательство.* В векторной форме:

$$\eta^n = \frac{\sum_{s=1}^n \xi^s - \mu n}{\sqrt{n}}$$

Запишем хар. функцию:

$$\varphi_{\eta^n}(t) = \varphi_{(\xi^1 - \mu + \dots + \xi^n - \mu)/\sqrt{n}}(t) = \varphi_{\xi^1 - \mu + \dots + \xi^n - \mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) =$$

В силу независимости  $\xi_i$  и их одинаковой распределенности

$$= \left(\varphi_{\xi^1 - \mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n$$

**Напоминание.** Пусть  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  и  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ . Тогда ряд Тейлора функции  $F$  в точке  $a$  это

$$\begin{aligned} F(x) &= F(a) + \sum_{i=1}^n \frac{dF(a)}{dx_i} (x_i - a_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{d^2 F(a)}{dx_i dx_j} (x_i - a_i)(x_j - a_j) \\ &+ \dots + \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \frac{d^k F(a)}{dx_{i_1} \dots dx_{i_k}} (x_{i_1} - a_{i_1}) \dots (x_{i_k} - a_{i_k}) + R_k(x - a, a) \end{aligned}$$

Разложим в ряд Тейлора:

$$\left(\varphi_{\xi^1 - \mu}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 + \left\langle \nabla \varphi_{\xi^1 - \mu}(0), \frac{t}{\sqrt{n}} \right\rangle + \frac{1}{2} \cdot D^2 \varphi_{\xi^1 - \mu}(0) \left\langle \frac{t}{\sqrt{n}}, \frac{t}{\sqrt{n}} \right\rangle + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$$

Рассмотрим на 2-мерном случае (на других аналогично):

$$\varphi_\xi(t_1, t_2) = \mathbb{E}e^{it_1\xi_1 + it_2\xi_2}$$

Первая производная:

$$\frac{d}{dt_j} \varphi_\xi(t) = i\mathbb{E}\xi_j e^{it_1\xi_1 + it_2\xi_2}; \quad \frac{d}{dt_j} \varphi_\xi(0) = i\mathbb{E}\xi_j$$

В нашем случае нетрудно понять, что  $\nabla \varphi_{\xi^1 - \mu}(0) = 0$ , так как у нас  $\xi$  это  $\xi^1 - \mu$ , а  $i\mathbb{E}(\xi_i^1 - \mu_i) = 0$

Вторая производная:

$$\frac{d^2}{dt_j dt_s} \varphi_\xi(t) = -\mathbb{E}\xi_j \xi_s e^{it_1\xi_1 + it_2\xi_2}; \quad \frac{d^2}{dt_j dt_s} \varphi_\xi(0) = -\mathbb{E}\xi_j \xi_s$$

В нашем случае  $-\mathbb{E}(\xi_j^1 - \mu_j)(\xi_s^1 - \mu_s) = -r_{js}$

Получаем:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\langle Rt, t \rangle \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{1}{2}\langle Rt, t \rangle}$$

■



## 6 Многомерное нормальное распределение

**Определение 4.** Случайный вектор  $\xi \in \text{Mat}_{m \times 1}$  имеет *нормальное распределение* или является *гауссовским*, если  $\forall x \in \mathbb{R}^m$

$$\varphi_\xi(x) = \mathbb{E} e^{ix\xi} = e^{ix\mu - \frac{1}{2}xRx^T}$$

где  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)^T$ ,  $R \in \text{Mat}_{m \times m}$  – симметричная неотрицательно определенная. Далее кратко пишем

$$\xi \sim N(\mu, R)$$

**Определение 5.** Пусть  $\xi \in \text{Mat}_{m \times 1}$  случайный вектор. Матрица  $R \in \text{Mat}_{m \times m}$  с компонентами  $r_{ij} = \text{cov}(\xi_i, \xi_j)$  называется *ковариационной матрицей* вектора  $\xi$ . Можно еще написать, что

$$R = \text{cov}(\xi, \xi) = \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T$$

**Лемма 2.** Симметричная неотрицательно определенная матрица  $R \in \text{Mat}_{m \times m}$  является ковариационной матрицей случайного вектора-столбца  $\xi \in \text{Mat}_{m \times 1}$  тогда и только тогда, когда  $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$

$$\text{cov}(x\xi, y\xi) = x\text{cov}(\xi, \xi)y^T = xRy^T$$

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Распишем по определению ковариации двух случайных величин (у нас именно они):

$$\text{cov}(x\xi, y\xi) = \mathbb{E}[(x\xi - \mathbb{E}x\xi)(y\xi - \mathbb{E}y\xi)] = \mathbb{E}[x(\xi - \mathbb{E}\xi)y(\xi - \mathbb{E}\xi)] =$$

Транспонируя скаляр, получаем тот же скаляр:

$$= \mathbb{E}[x(\xi - \mathbb{E}\xi)(y(\xi - \mathbb{E}\xi))^T] = \mathbb{E}[x(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T y^T] = x\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T]y^T = x\text{cov}(\xi, \xi)y^T$$

$\Leftarrow$

Возьмем  $x = e_i$ ,  $y = e_j$  (базисные единичные вектора). Тогда из данного равенства получим:

$$\text{cov}(e_i\xi, e_j\xi) = \text{cov}(\xi_i, \xi_j) = e_i R e_j = r_{ij}$$

Следовательно  $R = \text{cov}(\xi, \xi)$  по определению. ■

**Предложение 8.**  $\forall A \in \text{Mat}_{m \times m} \forall b \in \text{Mat}_{m \times 1}$  и  $\xi \in \text{Mat}_{m \times 1}$  – случайного вектора, верно:

$$\text{cov}(A\xi + b, A\xi + b) = AR_\xi A^T$$

*Доказательство.* Распишем по определению:

$$\begin{aligned} \text{cov}(A\xi + b, A\xi + b) &= \mathbb{E}[(A\xi + b - \mathbb{E}(A\xi + b))(A\xi + b - \mathbb{E}(A\xi + b))^T] = \\ &= \mathbb{E}[(A\xi + b - b - \mathbb{E}A\xi)(A\xi + b - b - \mathbb{E}A\xi)^T] = \mathbb{E}[(A\xi - \mathbb{E}A\xi)(A\xi - \mathbb{E}A\xi)^T] = \\ &= A\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\xi - \mathbb{E}\xi)^T]A^T = AR_\xi A^T \end{aligned}$$

■

**Следствие 5.** Если вектор  $\xi \sim N(\mu, R)$ , то вектор  $A\xi + b \sim N(A\mu + b, AR_\xi A^T)$

**Теорема 9.** Вектор  $\xi \in \text{Mat}_{m \times 1}$  имеет нормальное распределение тогда и только тогда, когда  $\forall x \in \mathbb{R}^m$  случайная величина  $x\xi$  имеет нормальное распределение

*Доказательство.*  $\Rightarrow$

Если  $\xi$  нормальный вектор, то

$$\begin{aligned}\varphi_{x\xi}(t) &= \mathbb{E}e^{itx\xi} = \varphi_{\xi}(tx) = \exp\left(-\frac{1}{2}txR(tx)^T + itx\mu\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}t^2xRx^T + itx\mu\right)\end{aligned}$$

Получили хар функцию нормального распределения  $x\xi \sim N(x\mu, xRx^T)$ .

$\Leftarrow$

В обратную сторону:

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(x) &= \mathbb{E}e^{ix\xi} = \varphi_{x\xi}(1) = \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbb{D}x\xi + i\mathbb{E}x\xi\right) = \exp\left(-\frac{1}{2}\text{cov}(x\xi, x\xi) + ix\mu\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}xRx^T + ix\mu\right)\end{aligned}$$

, где  $R = \text{cov}(\xi, \xi)$ ,  $\mu = \mathbb{E}\xi$ . Последний переход вытекает из леммы2. ■

**Следствие 6.** Если  $\xi \sim N(\mu, R)$ , то  $R = \text{cov}(\xi, \xi)$ ,  $\mu = \mathbb{E}\xi$ .

**Следствие 7.** Если вектор  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  имеет нормальное распределение и  $\text{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ , то случайные величины  $\xi_1$  и  $\xi_2$  независимы.

*Доказательство.* Пусть

$$\mu = \mathbb{E}\xi = (\mu_1, \mu_2)$$

Заметим, что

$$R = \text{cov}(\xi, \xi) = \begin{pmatrix} \text{cov}(\xi_1, \xi_1) & 0 \\ 0 & \text{cov}(\xi_2, \xi_2) \end{pmatrix}$$

Теперь запишем хар функцию  $\xi$ :

$$\begin{aligned}\varphi_{\xi}(x_1, x_2) &= \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2\mathbb{D}\xi_1 + x_2^2\mathbb{D}\xi_2) + i(x_1\mu_1 + x_2\mu_2)\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\mathbb{D}\xi_1 + ix_1\mu_1\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}x_2^2\mathbb{D}\xi_2 + ix_2\mu_2\right) = \varphi_{\xi_1}(x_1) \varphi_{\xi_2}(x_2)\end{aligned}$$

Теперь из следствия4 вытекает независимость  $\xi_1$  и  $\xi_2$  ■

**Следствие 8.** Если  $\xi \sim N(\mu, R) (\in \text{Mat}_{m \times 1})$ , то  $\exists A \in \text{Mat}_{m \times k}$ , что  $\xi = A\eta + \mu$ , где  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)^T$ ,  $\eta_i$  — независимые  $N(0, 1)$  случайные величины. Причем  $AA^T = R$

*Доказательство.* Пусть

$$\xi' = \xi - \mu = (\xi'_1, \dots, \xi'_m)^T$$

Свели задачу к задачи нахождения ортонормированного базиса  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)^T$  в подпространстве  $\langle \xi'_1, \dots, \xi'_m \rangle$  со скалярным произведением  $(X, Y) = \mathbb{E}XY$ . Эта задача решается методом Грама-Шмидта. Получили матрицу перехода  $A$ , что

$$\xi - \mu = \xi' = A\eta$$

То есть

$$\xi = A\eta + \mu$$

Осталось пояснить  $AA^T = R$ :

$$R = \text{cov}(\xi, \xi) = \text{cov}(\xi - \mu, \xi - \mu) = \text{cov}(A\eta, A\eta) = A\text{cov}(\eta, \eta)A^T = AEA^T = AA^T$$

$\text{cov}(\eta, \eta) = E$ , так как это ортонормированный базис. ■

**Теорема 10.** Если  $\xi \sim N(\mu, R)$  (в этой теореме сделаем  $\mu := \mu^T \in R^m$ ) и  $\det R \neq 0$ , случайный вектор  $\xi$  имеет плотность

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \sqrt{\det R}} e^{-2^{-1}(x-\mu)R^{-1}(x-\mu)^T}$$

*Доказательство.* Так как  $\xi = A\eta + \mu$ , причем  $\exists A^{-1}$ , то

$$\begin{aligned} P(\xi \in B) &= P(A\eta + \mu \in B) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^m} \int_{A\eta + \mu \in B} e^{-2^{-1}xx^T} dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}}} \int_B e^{-2^{-1}(A^{-1}(x-\mu))(A^{-1}(x-\mu))^T} d(A^{-1}(x-\mu)) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{m}{2}} \det A} \int_B e^{-2^{-1}(A^{-1}(x-\mu))(A^{-1}(x-\mu))^T} dx \end{aligned}$$

Остается заметить, что

$$\det AA^T = (\det A)^2 = \det R$$

и что

$$\begin{aligned} A^{-1}(x-\mu)(A^{-1}(x-\mu))^T &= (x-\mu)A^{-1}(A^{-1})^T(x-\mu)^T = \\ &= (x-\mu)(AA^T)^{-1}(x-\mu)^T = (x-\mu)R^{-1}(x-\mu)^T \end{aligned}$$

■

**Пример 10.** Пусть  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)^T$ , где  $\xi_i \sim N(0, \sigma^2)$  и независимы между собой (или, что то же самое  $\xi \sim N(0, \sigma^2 E)$ ). Положим

$$\bar{\xi} = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}, \quad \zeta = (\xi_1 - \bar{\xi})^2 + \dots + (\xi_n - \bar{\xi})^2$$

( $\zeta$  — выборочная дисперсия). Покажем, что  $\bar{\xi}$  и  $\zeta$  независимы.

Пусть  $U \in \text{Mat}_{n \times n}$  — ортогональная матрица ( $UU^T = E$ ), первая строка которой имеет вид  $(n^{-\frac{1}{2}}, \dots, n^{-\frac{1}{2}})$ . Тогда координаты вектора  $u = U\xi \sim N(0, U\sigma^2 EU^T) = N(0, \sigma^2 E)$  являются независимыми. Заметим, что  $u_n = \bar{\xi}\sqrt{n}$  и что

$$u^T u = u_1^2 + \dots + u_n^2 = n\bar{\xi}^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2 = \xi^T U^T U \xi = \xi^T \xi = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$$

Иначе говоря

$$u_2^2 + \dots + u_n^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - n\bar{\xi}^2$$

Теперь заметим

$$\zeta = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - 2 \sum_{i=1}^n \xi_i \bar{\xi} + n\bar{\xi}^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 - n\bar{\xi}^2 = u_2^2 + \dots + u_n^2$$

Так как  $u_1, \dots, u_n$  — независимы, то и  $\frac{u_1}{\sqrt{n}} = \bar{\xi}$  и  $u_2^2 + \dots + u_n^2 = \zeta$  тоже независимы.

Распределение величины  $\chi = \eta_1^2 + \dots + \eta_n^2$ , где  $\eta_i$  независимые с распределением  $N(0, 1)$ , называют распределением хи-квадрат с  $n$  степенями свободы и обозначают через  $\chi_n^2$ . Найдём плотность распределения  $\chi_n^2$ :

$$P(\chi \leq t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2 \leq t} e^{-\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{2}} dx =$$

Делаем сферическую замену ( $w_n$  — площадь  $n$ -мерной единичной сферы):

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} w_n \int_0^{\sqrt{t}} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr$$

Тогда

$$\rho(t) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} w_n \cdot \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} t^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2} (2\pi)^{-\frac{n}{2}} w_n t^{\frac{n-2}{2}} e^{-\frac{t}{2}} \text{Ind}_{t>0}$$

## 7 Условные математические ожидания: дискретный случай

Предположим, что задана дискретная случайная величина

$$\xi(w) = \sum_{i=1}^n x_i \text{Ind}_{A_i}(w)$$

Рассмотрим следующую задачу: найти математическое ожидание  $\xi$ , если достоверно известно, что произошло событие  $B$ ,  $P(B) > 0$ . Поскольку мы знаем, что событие  $B$  произошло, то надо пересчитать вероятности  $A_k$  с учетом новой информации, а именно, заменить  $P(A_k)$  на  $P(A_k|B)$ . Таким образом, надо вычислить математическое ожидание не относительно исходной вероятностной меры  $P$ , а относительно условной вероятности  $P(\cdot|B)$ .

**Определение 6.** Имеем:

$$\mathbb{E}(\xi|B) = \sum_{i=1}^n x_i P(A_i|B) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\mathbb{E}(\text{Ind}_{A_i} \text{Ind}_B)}{P(B)} = \frac{\mathbb{E}(\xi \text{Ind}_B)}{P(B)}$$

Это выражение будем называть *условным математическим ожиданием относительно события  $B$* .

Пусть теперь имеется разбиение

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^N B_k, \quad B_k \cap B_m = \emptyset, \quad P(B_k) > 0$$

Обозначим это разбиение  $\{B_k\}$  через  $\mathcal{B}$ . Удобно собрать вместе значения условных математических ожиданий  $\mathbb{E}(\xi|B_k)$ .

**Определение 7.** Рассмотрим случайную величину:

$$\Lambda(w) = \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) \mathbb{E}(\xi|B_i)$$

Если  $w \in B_i$ , то эта случайная величина выдает среднее значение  $\xi$  при условии, что произошло событие  $B_i$ . Величину  $\Lambda(w)$  называют *условным математическим ожиданием относительно разбиения  $\mathcal{B}$*  и обозначают через  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$ .

Случайную величину

$$P(A|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\text{Ind}_A|\mathcal{B})$$

называют условной вероятностью события  $A$  относительно разбиения  $\mathcal{B}$ . Ясно, что

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) &= \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) \mathbb{E}(\xi|B_i) = \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) \sum_{j=1}^n x_j P(A_j|B_i) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) x_j P(A_j|B_i) = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) P(A_j|B_i) = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i}(w) \mathbb{E}(\text{Ind}_{A_j}|B_i) = \sum_{j=1}^n x_j \mathbb{E}(\text{Ind}_{A_j}|\mathcal{B}) = \\ &= \sum_{j=1}^n x_j P(A_j|\mathcal{B}) \end{aligned}$$

**Пример 11.** Рассмотрим важный пример, когда  $\mathcal{B} = \{B, \overline{B}\}$ . Тогда

$$P(A|\mathcal{B}) = \text{Ind}_B(w) P(A|B) + \text{Ind}_{\overline{B}}(w) P(A|\overline{B})$$

Если  $w \in B$ , то  $P(A|\mathcal{B})(w) = P(A|B)$

**Теорема 11.** Имеют место следующие свойства условного математического ожидания:

- (1) (линейность)  $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\mathcal{B}) = \alpha\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) + \beta\mathbb{E}(\eta|\mathcal{B})$
- (2) (монотонность) из  $\xi \leq \eta$  следует  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) \leq \mathbb{E}(\eta|\mathcal{B})$
- (3) (аналог формулы полной вероятности)  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) = \mathbb{E}\xi$
- (4) (независимость) если случайная величина  $\xi$  не зависит от разбиения  $\mathcal{B}$ , т.е. случайные величины  $\xi$  и  $\text{Ind}_{B_k}$  независимы, то  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \mathbb{E}\xi$
- (5) для всякой случайной величины  $\eta = \sum_{k=1}^N c_k \text{Ind}_{B_k}$  верно равенство  $\mathbb{E}(\eta\xi|\mathcal{B}) = \eta\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$

*Доказательство.* Свойства (1) и (2) следуют из того, что они верны отдельно для каждого  $B_k$ . Свойство (3) проверяется непосредственной подстановкой:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i} \mathbb{E}(\xi|B_i)\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^N \text{Ind}_{B_i} \frac{\mathbb{E}(\xi \text{Ind}_{B_i})}{P(B_i)}\right) = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\text{Ind}_{B_i}) \frac{\mathbb{E}(\xi \text{Ind}_{B_i})}{P(B_i)} = \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(\xi \text{Ind}_{B_i}) = \mathbb{E}\xi \end{aligned}$$

Обоснуем пункт (4). Так как  $\xi$  и  $\text{Ind}_{B_k}$  независимы, то

$$\mathbb{E}(\xi|B_k) = \frac{\mathbb{E}(\xi \text{Ind}_{B_k})}{P(B_k)} = \frac{\mathbb{E}\xi \mathbb{E} \text{Ind}_{B_k}}{P(B_k)} = \mathbb{E}\xi$$

Следовательно,

$$\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B}) = \sum_{k=1}^N \text{Ind}_{B_k}(w) \mathbb{E}(\xi|B_k) = \sum_{k=1}^N \text{Ind}_{B_k}(w) \mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi$$

Для обоснования (5) достаточно заметить, что

$$\mathbb{E}(\eta\xi|B_k) = c_k \mathbb{E}(\xi|B_k)$$

■

Наиболее типична ситуация, когда разбиение  $\mathcal{B}$  появляется посредством некоторой случайной величины

$$\eta = \sum_{i=1}^N y_i \text{Ind}_{B_i},$$

где  $y_i$  — различные числа и  $P(B_i) > 0$ .

**Определение 8.** В этом случае  $B_i = \{w : \eta(w) = y_i\}$  и условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(\xi|\mathcal{B})$  обозначают через  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  и называют *условным математическим ожиданием относительно  $\eta$* .

Несложно предъявить функцию  $F$  (это можно сделать несколькими способами), что

$$\mathbb{E}(\xi|\eta)(w) = F(\eta(w))$$

Легко видеть, что  $F(y_i) = \mathbb{E}(\xi|B_i)$ .

Можно воспринимать  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  как проекцию  $\xi$  на  $\eta$ , а  $\mathbb{E}\xi\eta$  как их скалярное произведение.

**Лемма 3.** Для условного математического ожидания выполнено

$$\mathbb{E}(\xi f(\eta)) = \mathbb{E}[f(\eta) \mathbb{E}(\xi|\eta)]$$

для произвольной функции  $f$ . Кроме того, если для какой-то случайной величины  $\zeta = g(\eta)$  выполнено

$$\mathbb{E}(\xi f(\eta)) = \mathbb{E}(f(\eta) \zeta),$$

то  $\zeta = \mathbb{E}(\xi|\eta)$  п.н.

*Доказательство.* По (5) и (3) из теоремы 11:

$$\mathbb{E}[f(\eta) \mathbb{E}(\xi|\eta)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(f(\eta) \xi|\eta)] = \mathbb{E}(f(\eta) \xi)$$

Докажем вторую часть:

$$\mathbb{E}(f(\eta) \zeta) = \mathbb{E}(\xi f(\eta)) = \mathbb{E}[f(\eta) \mathbb{E}(\xi|\eta)]$$

$$\mathbb{E}[f(\eta) (\zeta - \mathbb{E}(\xi|\eta))] = 0$$

Так как  $\zeta$  и  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  — функции от  $\eta$ , то возьмем  $f(\eta) = \zeta - \mathbb{E}(\xi|\eta)$  и получим:

$$\mathbb{E}(\zeta - \mathbb{E}(\xi|\eta))^2 = 0,$$

то есть  $\zeta = \mathbb{E}(\xi|\eta)$  п.н. ■

Теперь докажем, что  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  и правда является проекцией  $\xi$  на  $\eta$ .

**Предложение 9.** Пусть  $\mathbb{E}\xi^2 < \infty$ . Условное математическое ожидание  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  среди всех случайных величин вида  $f(\eta)$  является лучшим среднеквадратическим приближением для  $\xi$ , т.е.

$$\min_{\zeta=f(\eta)} \mathbb{E}(\xi - \zeta)^2 = \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta)]^2$$

*Доказательство.* Пусть  $\zeta = f(\eta)$ . Так как  $(\mathbb{E}(\xi|\eta) - \zeta)$  — функция от  $\eta$

$$\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta))(\mathbb{E}(\xi|\eta) - \zeta)] = 0,$$

то

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\xi - \zeta)^2 &= \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta)) + (\mathbb{E}(\xi|\eta) - \zeta)]^2 = \\ &= \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta)]^2 + \underbrace{2\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta))(\mathbb{E}(\xi|\eta) - \zeta)]}_{=0} + \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\eta) - \zeta]^2 \geq \mathbb{E}[\xi - \mathbb{E}(\xi|\eta)]^2 \end{aligned}$$

Последнее неравенство достигается взятием  $\zeta = \mathbb{E}(\xi|\eta)$  ■

## 8 Условные математические ожидания: общий случай

**Определение 9.**  $\xi, \eta$  — случайные величины.  $\mathbb{E}|\xi| < \infty$ . Тогда случайная величина вида  $F(\eta)$  называется *условным математическим ожиданием*  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$ , если

$$\mathbb{E}[\xi f(\eta)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\eta) f(\eta)]$$

для любой ограниченной  $f$ . Любые две случайные величины, удовлетворяющие этому условию почти наверное совпадают (лемма 3).

Из этого определения следует, что  $\mathbb{E}(\xi|\eta)$  есть наименее отличающаяся от  $\xi$  случайная величина вида  $F(\eta)$ , то есть проекция  $\xi$  на  $\eta$ .

**Предложение 10.** Предположим, что распределение случайной величины  $(\xi, \eta)$  задано совместной плотностью  $\rho_{\xi\eta}(x, y)$ . Тогда

$$\mathbb{E}[g(\xi, \eta) | \eta = y] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \frac{\rho_{\xi\eta}(x, y)}{\rho_{\eta}(y)} dx$$

*Доказательство.* Имеет место цепочка равенств:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g(\xi, \eta) f(\eta)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(y) \rho_{\xi\eta}(x, y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \frac{\rho_{\xi\eta}(x, y)}{\rho_{\eta}(y)} \rho_{\eta}(y) dy}_{=F(y)} dy = \mathbb{E}[F(\eta) f(\eta)] \end{aligned}$$

Следовательно  $F(\eta) = \mathbb{E}(\xi|\eta)$  по определению. ■

**Определение 10.** Условной плотностью случайной величины  $\xi$  при условии  $\eta = y_0$  называется следующая величина

$$\rho_{\xi|\eta}(x|y_0) = \frac{\rho_{\xi,\eta}(x, y_0)}{\rho_{\eta}(y_0)}$$

Теперь докажем теорему 11, только для непрерывного случая

**Теорема 12.** Имеют место следующие свойства условного математического ожидания:

- (1) (линейность)  $\mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\zeta) = \alpha\mathbb{E}(\xi|\zeta) + \beta\mathbb{E}(\eta|\zeta)$
- (2) (монотонность) из  $\xi \leq \eta$  следует  $\mathbb{E}(\xi|\zeta) \leq \mathbb{E}(\eta|\zeta)$
- (3) (аналог формулы полной вероятности)  $\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) = \mathbb{E}\xi$
- (4) (независимость) если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$ , то  $\mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}\xi$
- (5) для всякой случайной величины  $\zeta = g(\eta)$  верно равенство  $\mathbb{E}(\zeta\xi|\eta) = \zeta\mathbb{E}(\xi|\eta)$

*Доказательство.* Докажем (1). По определению для любой ограниченной  $f$  имеем:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\zeta) \mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\zeta)] &= \mathbb{E}[f(\zeta) (\alpha\xi + \beta\eta)] = \alpha\mathbb{E}[f(\zeta) \xi] + \beta\mathbb{E}[f(\zeta) \eta] = \\ &= \mathbb{E}[f(\zeta) (\alpha\mathbb{E}(\xi|\zeta) + \beta\mathbb{E}(\eta|\zeta))] \end{aligned}$$

Теперь взяв  $f(\zeta) = \mathbb{E}(\alpha\xi + \beta\eta|\zeta) - (\alpha\mathbb{E}(\xi|\zeta) + \beta\mathbb{E}(\eta|\zeta))$ , получим нужное равенство почти наверное.

Во втором, если перенести все вправо, то по сути надо доказать

$$\xi \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta) \geq 0$$

Возьмем функцию

$$f(\eta) = 1 - \operatorname{sgn}(\mathbb{E}(\xi|\eta)) \geq 0$$

Тогда по определению

$$\mathbb{E}[f(\eta)\mathbb{E}(\xi|\eta)] = \mathbb{E}[f(\eta)\xi] \geq 0$$

В то же время

$$\mathbb{E}[f(\eta)\mathbb{E}(\xi|\eta)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi|\eta) - |\mathbb{E}(\xi|\eta)|] \leq 0$$

Следовательно

$$\mathbb{E}(\xi|\eta) = |\mathbb{E}(\xi|\eta)|$$

почти наверное, следовательно она почти наверное  $\geq 0$ .

В (3) возьмем  $f(\eta) \equiv 1$  и запишем определение.

(4):

$$\mathbb{E}[f(\eta)\xi] = \mathbb{E}f(\eta)\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}[f(\eta)\mathbb{E}\xi] \Rightarrow \mathbb{E}(\xi|\eta) = \mathbb{E}\xi$$

(5):

$$\mathbb{E}[f(\eta)\xi\zeta] = \mathbb{E}[f(\eta)\mathbb{E}(\xi\zeta|\eta)]$$

С другой стороны:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(\eta)\xi\zeta] &= \mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)\zeta] = \mathbb{E}[f(\eta)g(\eta)\mathbb{E}(\xi|\eta)] \\ &\Rightarrow \mathbb{E}(g(\eta)\xi|\eta) = g(\eta)\mathbb{E}(\xi|\eta) \end{aligned}$$

почти наверное

■

**Теорема 13.** (Аналог формулы Байеса)

$$\mathbb{E}(g(\eta)|\xi = x) = \frac{\mathbb{E}[g(\eta)\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)]}{\mathbb{E}\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)}$$

для любой ограниченной  $g$

*Доказательство.* Для любой ограниченной  $f$ :

$$\mathbb{E}[f(\xi)g(\eta)] = \mathbb{E}[g(\eta)\mathbb{E}(f(\xi)|\eta)] = \mathbb{E}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)g(\eta)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathbb{E}[\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)g(\eta)]dx$$

С другой стороны

$$\mathbb{E}[f(\xi)g(\eta)] = \mathbb{E}[f(\xi)\mathbb{E}(g(\eta)|\xi)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\rho_{\xi}(x)\mathbb{E}[g(\eta)|\xi = x]dx$$

(опять подставляя вместо  $f$  разность этих величин) получаем равенство почти наверное:

$$\mathbb{E}[\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)g(\eta)] = \rho_{\xi}(x)\mathbb{E}[g(\eta)|\xi = x]$$

Подставим  $g \equiv 1$ :

$$\mathbb{E}[\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)] = \rho_{\xi}(x)$$

В итоге получаем:

$$\mathbb{E}[g(\eta)\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)] = \mathbb{E}[\rho_{\xi|\eta}(x, \eta)]\mathbb{E}[g(\eta)|\xi = x]$$

■



**Пример 12.** Пусть  $(\xi, \eta)$  — нормальный вектор. Посчитаем  $E[\xi|\eta]$  (помним, что это как проекция  $\xi$  на  $\eta$ ). Центрируем случайные величины

$$X := \xi - \mathbb{E}\xi$$

$$Y := \eta - \mathbb{E}\eta$$

Найдем ортогональную  $Z$  проекцию  $X$  на  $Y$  (должно быть  $X = Z + \mathbb{E}[\xi|\eta]$ ):

$$Z = X - \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{cov}(Y, Y)} Y = X - \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} Y$$

Выразим  $\xi$ :

$$\xi = \mathbb{E}\xi - \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} (\eta - \mathbb{E}\eta) + Z$$

Теперь будем считать условное матожидание (условно от константы или  $f(\eta)$  она сама, условное от независимой — его ожидание):

$$\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}\xi - \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} (\eta - \mathbb{E}\eta) + \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\xi - \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} (\eta - \mathbb{E}\eta)$$

Так как  $(Y, Z)$  — нормальный вектор и  $\text{cov}(Y, Z) = 0$ , то  $Y$  и  $Z$  независимые случайные величины.  $Z \sim N\left(0, \frac{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta - [\text{cov}(\xi, \eta)]^2}{\mathbb{D}\eta}\right)$ , так как это линейная комбинация случайных величин нормального вектора.

Теперь найдем условную плотность:

$$\mathbb{E}[f(X) | Y = y] = \mathbb{E}\left[f\left(Z + \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} Y\right) | Y = y\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(z + \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} y\right) \frac{\rho_{Z,Y}(z, y)}{\rho_Y(y)} dz =$$

Совместная плотность раскладывается в произведение:

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(z + \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} y\right) \rho_Z(z) dz =$$

Делаем замену  $u = z + \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} y$ :

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \rho_Z\left(u - \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} y\right) du$$

В итоге получаем

$$\rho_{X|Y}(x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \rho_Z(z)$$

, где

$$\mu = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\mathbb{D}\eta} y$$

$$\sigma = \frac{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta - [\text{cov}(\xi, \eta)]^2}{\mathbb{D}\eta}$$