Листок 1. Задача 9.

- Пусть ξ_i – равномерное распределенная случайная величина, отвечающая за время приема i-того пациента. Тогда $E\xi_i = \dfrac{1+4}{2} = 2.5$, $D\xi_i = \dfrac{(4-1)^2}{12} = \dfrac{9}{12}$.
- Теперь введем случайную величину, отвечающую за суммарное время приема: $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$. $E\eta = 4 \cdot 2.5 = 10$. Так как ξ_i не зависят друг от друга, можем просто найти дисперсию $D\eta = 4 \cdot \dfrac{9}{12} = 3$.
- Теперь применим неравенство Чебышева к η: $P\left(|\eta - 10| \geq 2\right) = P\left(\eta \geq 12\right) + P\left(\eta \leq 8\right) \leq \dfrac{D\eta}{2^2} = \dfrac{3}{4}$
- Допустим, у нас есть две плотности ρ_1 и ρ_2, которые симметричны относительно некторой точки m (не ограничивая общности, будем считать, что $m = 0$), тогда по формуле свертки посчитаем плотность суммы этих случайных величин: $\rho\left(t\right) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1\left(x\right)\rho_2\left(t-x\right)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_1\left(-x\right)\rho_2\left(\left(-t\right)-\left(-x\right)\right)dx = \rho\left(-t\right)$. То есть плотность суммы этих случайных величин тоже симметрична относительно m. Таким образом плотность $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4$ симметрична относительно 10. То есть $P\left(\eta \leq 8\right) = P\left(\eta \geq 12\right)$
- Получаем $P\left(\eta \geq 12\right) \leq \dfrac{1}{2} \cdot P\left(|\eta - 10| \geq 2\right) \leq \dfrac{3}{8}$.

Листок 1. Задача 10.

- Найдем распределение $F_{m_n}(t) = P\left(m_n < t\right) = 1 - P\left(m_n > t\right) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - (1-t)^n & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 < t \end{cases}$
- $m_n \geq 0$, $m_{n+1} \leq m_n \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} m_n = m$.
- Надо доказать, что $P(m = 0) = 1 = F_m(0)$.
- Рассмотрим систему вложенных множеств $A_n = \left[0, \dfrac{1}{n}\right]$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$. Из непрерывности вероятностной меры знаем, что:
  $P\left(m \in A\right) = P(m = 0) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(m \in A_n\right) = \lim\limits_{n\to\infty} P\left(0 \leq m \leq \dfrac{1}{n}\right)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(0 \leq m \leq \dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} F_m\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty} F_{m_k}\left(\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{k\to\infty}\left(1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^k\right) = $
  $= \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 = P\left(m = 0\right)$. ∎

Листок 1. Задача 11.

- Рассмотрим сходимость $\ln\eta_n = \ln\sqrt[n]{\xi_1 \cdots \xi_n} = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\ln\xi_1 + \cdots + \ln\xi_n\right)$.

- $\ln \xi_1, \ln \xi_2, \cdots$ – последовательность одинаково распределенных, попарно независимых случайных величин с конечным вторым моментом:
  $E \ln^4 \xi_1 = \int_0^1 \ln^4 x dx < \infty$ (так как $\int_0^1 \ln x dx$ сходится, и там $\ln x < 0$ везде)
- Применяя закон больших чисел, получаем, что
  $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot (\ln \xi_1 + \cdot + \ln \xi_n) = E \ln \xi_1 = \int_0^1 1 \cdot \ln x dx = -1$
- То есть $\lim\limits_{n\to\infty} \ln \eta_n = -1$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty} \eta_n = \frac{1}{e}$