

## 1 Листок 1. Задача 12

- Найдем функцию распределения  $M_n$ . Утверждение  $M_n \leq x$  равносильно тому, что  $\xi_1, \dots, \xi_n \leq t$ . Таким образом, получаем:

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\xi_1 \leq x) \cdots P(\xi_n \leq x) = F^n(x)$$

- $F(x) \sim 1 - \frac{b}{x^a}$  при  $x \rightarrow \infty$ , так как  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a (1 - F(x)) = b$ , где  $a, b > 0$ .
- Пусть  $\eta = \frac{M_n}{(bn)^{\frac{1}{a}}}$ . Тогда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_\eta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(M_n \leq x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n\left(x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right)$$

Теперь воспользуемся полученной эквивалентностью (при  $x \geq 0$ , при  $x < 0$  по определению функции распределения ясно, что  $F_\eta(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , так как  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\eta(x) = 0$ ):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n\left(x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{b}{x^a \cdot (bn)}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^a \cdot n}\right)^{(-x^a \cdot n) \cdot (-x^{-a})} = e^{-x^{-a}}$$

■

## 2 Листок 2. Задача 5а

- Потому что не выполняется свойство характеристических функций, что  $\phi(0) = 1$ .

## 3 Листок 2. Задача 10а

- Посчитаем матожидание по определению:

$$\phi_\eta(x) = Ee^{ix\eta} = \int_0^1 e^{ixt} (1-t) dt + \int_{-1}^0 e^{ixt} (1+t) dt$$

- $\int e^{ixt} dt = \frac{e^{ixt}}{ix} + C$
- $\int e^{ixt} t dt = \frac{1}{ix} \int t d(e^{ixt}) = \frac{1}{ix} \cdot t e^{ixt} - \frac{1}{ix} \int e^{ixt} dt = \frac{e^{ixt}}{ix} \left(t - \frac{1}{ix}\right) + C$
- Продолжая первый пункт:

$$\begin{aligned} \phi_\eta(x) &= \frac{1}{ix} (e^{ix} - 1) - \frac{e^{ix} (ix - 1) + 1}{(ix)^2} + \frac{1}{ix} (1 - e^{-ix}) + \frac{-1 - e^{-ix} (-ix - 1)}{(ix)^2} = \frac{e^{ix} - 2 + e^{-ix}}{(ix)^2} = \\ &= \frac{-e^{-ix} + 2 - e^{ix}}{x^2} \end{aligned}$$

## 4 Листок 2. Задача 3

- $\varphi_{a\xi+b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Ee^{i(at)\xi} = e^{itb} \varphi_\xi(at)$

- (a) Соберем случайную величину с распределением  $U[a, b]$  из линейной комбинации  $\xi$  с распределением  $U[0, 1]$ . Это будет просто  $(b-a)\xi + a$  (биекция из отрезка  $[0, 1]$  в  $[a, b]$ , несложно видеть, что  $F_{(b-a)\xi+a}(t) = P\left(\xi \leq \frac{t-a}{b-a}\right) = \frac{t-a}{b-a}$ , то есть случайная величина имеет нужное распределение). Получаем:

$$\varphi_{(b-a)\xi+a}(t) e^{ita} \varphi_\xi((b-a)t) = e^{ita} \frac{e^{it(b-a)} - 1}{it(b-a)} = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}$$

- (b) Соберем случайную величину с распределением  $N(\mu, \sigma^2)$  из линейной комбинации  $\xi$  с распределением  $N(0, 1)$ . Это будет просто  $\sigma\xi + \mu$ . Матожидание и дисперсия вроде нужные, проверим функцию распределения:

$$F_{\sigma\xi+\mu}(t) = P\left(\xi \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

сделаем замену  $y = \sigma x + \mu$ , получим:

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}} dy$$

Теперь уже видно, что если взять производную, то получим нужную плотность  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

Теперь вычислим характеристическую функцию:

$$\varphi_{\sigma\xi+\mu}(t) = e^{it\mu} \varphi_\xi(\sigma t) = e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

## 5 Листок 2. Задача 11

- Возьмем плотность из 10a
- Найдем хар функцию:

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E \cos(t\xi) + iE \sin(t\xi) = E \cos(t\xi) + i \int_{-1}^1 (1-|x|) \sin(tx) dx$$

Так как этот интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку, то он = 0. Следовательно имеем:

$$\varphi(t) = E \cos(t\xi)$$