1 Листок 1. Задача 12

- Найдем функцию распределения M_n. Утверждение $M_n \leq x$ равносильно тому, что $\xi_1, \cdots \xi_n \leq t$. Таким образом, получаем:

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = P(\xi_1 \leq x) \cdots P(\xi_n \leq x) = F^n(x)$$

- $F(x) \sim 1 - \dfrac{b}{x^a}$ при $x \to \infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty} x^a (1 - F(x)) = b$, где $a, b > 0$.

- Пусть $\eta = \dfrac{M_n}{(bn)^{\frac{1}{a}}}$. Тогда имеем:

$$\lim_{n\to\infty} F_\eta(x) = \lim_{n\to\infty} P\left(M_n \leq x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{n\to\infty} F^n\left(x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right)$$

Теперь воспользуемся полученной эквивалентностью (при $x \geq 0$, при $x < 0$ по определению функции распределения ясно, что $F_\eta(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, так как $\lim\limits_{x\to-\infty} F_\eta(x) = 0$):

$$\lim_{n\to\infty} F^n\left(x \cdot (bn)^{\frac{1}{a}}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{b}{x^a \cdot (bn)}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^a \cdot n}\right)^{(-x^a \cdot n)\cdot\left(-x^{-a}\right)} = e^{-x^{-a}}$$

■

2 Листок 2. Задача 5а

- Потому что не выполняется свойство характеристических функций, что $\phi(0) = 1$.

3 Листок 2. Задача 10а

- Посчитаем матожидание по определению:

$$\phi_\eta(x) = Ee^{ix\eta} = \int_0^1 e^{ixt}(1-t)\,dt + \int_{-1}^0 e^{ixt}(1+t)\,dt$$

- $\displaystyle\int e^{ixt}dt = \frac{e^{ixt}}{ix} + C$

- $\displaystyle\int e^{ixt}tdt = \frac{1}{ix}\int td\left(e^{ixt}\right) = \frac{1}{ix}\cdot te^{ixt} - \frac{1}{ix}\int e^{ixt}dt = \frac{e^{ixt}}{ix}\left(t - \frac{1}{ix}\right) + C$

- Продолжая первый пункт:

$$\phi_\eta(x) = \frac{1}{ix}\left(e^{ix} - 1\right) - \frac{e^{ix}(ix-1)+1}{(ix)^2} + \frac{1}{ix}\left(1 - e^{-ix}\right) + \frac{-1 - e^{-ix}(-ix-1)}{(ix)^2} = \frac{e^{ix} - 2 + e^{-ix}}{(ix)^2} =$$

$$= \frac{-e^{-ix} + 2 - e^{ix}}{x^2}$$

4 Листок 2. Задача 3

- $\varphi_{a\xi+b}(t) = Ee^{it(a\xi+b)} = e^{itb}Ee^{i(at)\xi} = e^{itb}\varphi_\xi(at)$

(a) Соберем случайную величину с распределением $U[a,b]$ из линейной комбинации ξ с распределением $U[0,1]$. Это будет просто $(b-a)\xi + a$ (биекция из отрезка $[0,1]$ в $[a,b]$, несложно видеть, что $F_{(b-a)\xi+a}(t) = P\left(\xi \leq \dfrac{t-a}{b-a}\right) = \dfrac{t-a}{b-a}$, то есть случайная величина имеет нужное распределение). Получаем:

$$\varphi_{(b-a)\xi+a}(t)\, e^{ita}\varphi_\xi((b-a)t) = e^{ita}\frac{e^{it(b-a)}-1}{it(b-a)} = \frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

(b) Соберем случайную величину с распределением $N(\mu,\sigma^2)$ из линейной комбинации ξ с распределением $N(0,1)$. Это будет просто $\sigma\xi+\mu$. Матожидание и дисперсия вроде нужные, проверим функцию распределения:

$$F_{\sigma\xi+\mu}(t) = P\left(\xi \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} e^{\frac{x^2}{2}}dx =$$

сделаем замену $y = \sigma x + \mu$, получим:

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2\cdot\frac{1}{2}}dy$$

Теперь уже видно, что если взять производную, то получим нужную плотность $\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{\frac{(t-y)^2}{\sigma^2}}$
Теперь вычислим характеристическую функцию:

$$\varphi_{\sigma\xi+\mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_\xi(\sigma t) = e^{it\mu}\cdot e^{-\frac{\sigma^2t^2}{2}} = e^{it\mu-\frac{\sigma^2t^2}{2}}$$

5 Листок 2. Задача 11

- Возьмем плотность из $10a$
- Найдем хар функцию:

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = E\cos(t\xi) + iE\sin(t\xi) = E\cos(t\xi) + i\int_{-1}^{1}(1-|x|)\sin(tx)\,dx$$

Так как этот интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку, то он $= 0$. Следовательно имеем:

$$\varphi(t) = E\cos(t\xi)$$