

1 Листок 3. Задача 9

- $2\xi_1 \sim N(0, 4)$, $-3\xi_2 \sim N(3, 9)$, $\xi_3 \sim N(0, 4)$, $-\xi_4 \sim N(-1, 4)$
- Сумма независимых случайных величин с нормальным распределением – случайная величина с нормальным распределением: $\xi = 2\xi_1 - 3\xi_2 + \xi_3 - \xi_4 \sim N(2, 21)$
- Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, тогда $\eta\sqrt{21} + 2 = \xi$. Получаем:

$$P(|\xi| < 13) = F_\xi(13) - F_\xi(-13) = \Phi\left(\frac{13-2}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-13-2}{\sqrt{21}}\right) = \Phi\left(\frac{11}{\sqrt{21}}\right) - \Phi\left(\frac{-15}{\sqrt{21}}\right)$$

2 Листок 3. Задача 10

- Так как величины независимые:

$$\rho_{\xi,\eta}(x, y) = \rho_\xi(x) \rho_\eta(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

- Найдем плотность $\frac{\xi}{\eta}$ (так как $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$, то есть на краях они константы, то мы спокойно можем брать производные от вторых интегралов):

$$\begin{aligned} \rho_{\frac{\xi}{\eta}}(t) &= \left(F_{\frac{\xi}{\eta}}(t)\right)'_t = \left(\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{tx} \rho_{\xi,\eta}(x, y) dy dx\right)'_t + \left(\int_{-\infty}^0 \int_{tx}^{+\infty} \rho_{\xi,\eta}(x, y) dy dx\right)'_t = \\ &= \int_0^{+\infty} x \rho_{\xi,\eta}(x, tx) dx - \int_{-\infty}^0 x \rho_{\xi,\eta}(x, tx) dx = -\frac{1}{2\pi(t^2+1)} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}} d\left(-\frac{(t^2+1)x^2}{2}\right) + \\ &\quad + \frac{1}{2\pi(t^2+1)} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{(t^2+1)x^2}{2}} d\left(-\frac{(t^2+1)x^2}{2}\right) = \frac{1}{\pi(t^2+1)} \end{aligned}$$

3 Листок 3. Задача 4с

- Пусть $X = \frac{\xi + \zeta\eta}{\sqrt{1+\zeta^2}}$

- Вычислим $\varphi_X(t)$:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}e^{itX} =$$

Распишем по определению (через интеграл) для ζ (так как все величины независимые, то их совместная плотность это произведение всех плотностей, то есть все честно):

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{E}e^{it\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\xi + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\eta\right)} dx$$

- Константы $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ и $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ можно воспринимать как синус и косинус, тогда воспользовавшись номером 4а, получаем

$$\mathbb{E}e^{it\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\xi + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\eta\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- В итоге получаем

$$\varphi_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot 1 = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Получили харфункцию $N(0, 1)$. $\Rightarrow X \sim N(0, 1)$

■

4 Листок 3. Задача 11b

- $\xi + \eta \sim -\xi - \eta \sim \xi - \eta \sim -\xi + \eta \sim N(0, 8)$
- Раскроем модули по формуле полной вероятности:

$$\begin{aligned} P(2 \leq |\xi| + |\eta| \leq 3) &= P^2(\xi < 0) P(2 \leq -\xi - \eta \leq 3) + \\ &+ P^2(\xi \geq 0) P(2 \leq \xi + \eta \leq 3) + 2P(\xi < 0) P(\xi \geq 0) P(2 \leq \xi - \eta \leq 3) \end{aligned}$$

- Пользуясь функцией распределения стандартного распределения, раскроем все вероятности ($P(\xi < 0) = P(\xi \geq 0) = \frac{1}{2}$, так как $F_\xi(t) = \Phi\left(\frac{t}{2}\right)$):

$$\begin{aligned} P(2 \leq |\xi| + |\eta| \leq 3) &= \frac{1}{4} \left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right) \right) + \frac{1}{4} \left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\Phi\left(\frac{3-0}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2-0}{2\sqrt{2}}\right) \right) = \Phi\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) - \Phi\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$