1 Листок 2. Задача 10b

- $\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(AU+(1-A)V)}$
- Распишем матожидание по индикаторам для случайной величины A:

$$\varphi_\eta(t) = P(A=1)\,Ee^{itU} + P(A=0)\,Ee^{itV} = p\varphi_u(t) + (1-p)\,\varphi_v(t)$$

2 Листок 2. Задача 12

Теорема 1. *(Слабый закон больших чисел)*
Пусть ξ_n — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $E\xi_1 = \mu < \infty,\ E\xi_1^2 < \infty$. Тогда для $\eta_n = \dfrac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - \mu|) = 0$$

Доказательство. Разложим хар функцию в ряд Маклорена до второго члена (можем это сделать, так как первые и вторые моменты конечны и воспользуемся формулой $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k EX^k$):

$$\varphi_X(t) = 1 + itEX + o(t)$$

Запишем разложение для η_n:

$$\varphi_{\eta_n}(t) = \varphi_{\xi_1+\cdots+\xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{\xi_1}^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 + i\frac{t}{n}\mu + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{\left(\frac{n}{it\mu}\right)\cdot(it\mu)} \xrightarrow{n\to\infty} e^{it\mu}$$

Получили характеристическую функцию константы, а значит функция распределенения будет совпадать с константной, то есть $\eta_n \xrightarrow{\text{d}} \mu \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{\text{P}} \mu$. Из определения сходимости по вероятности, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} P(|\eta_n - \mu|) = 0$$

■