1 Листок 3. Задача 12

- Пусть $R_X = \operatorname{cov}(X, X)$.
- Так как
$$A\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & a\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}X_1 + aX_2\\X_2\end{pmatrix},$$
то $(X_1 + aX_2, X_2) \sim N\left(0, AR_XA^T\right)$.
$$AR_XA^T = \begin{pmatrix}3 + 2a + 2a^2 & 1 + 2a\\1 + 2a & 2\end{pmatrix}$$
- На лекции была теорема: если вектор $(X_1 + aX_2, X_2)$ имеет нормальное распределение и $\operatorname{cov}(X_1 + aX_2, X_2) = 1+2a = 0$, то случайные величины X_1+aX_2 и X_2 независимы. Получаем, что $a = -\frac{1}{2}$.

2 Листок 3. Задача 8b*

- Из прошлого номера мы выразили случайный вектор (ξ, η) через независимые стандартные случайные величины e_1 и e_2 ($a, c > 0$ по понятным причинам):
$$\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & 0\\b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$$
- Теперь найдем
$$P(\xi \geq 0, \eta \geq 0) = P(ae_1 \geq 0, be_1 + ce_2 \geq 0) = P\left(e_1 \geq 0, e_2 \geq -\frac{be_1}{c}\right) =$$
$$= \int_0^{+\infty}\int_{-\frac{bx}{c}}^{+\infty} \rho_{e_1,e_2}(x, y)\, dydx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\frac{bx}{c}}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dydx =$$
Сделаем полярную замену
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\varphi dr = \frac{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}{4\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} d\left(r^2\right) = \frac{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}{2\pi}$$
- Аналогично
$$P(\xi \leq 0, \eta \leq 0) = \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^{-\frac{bx}{c}} \rho_{e_1,e_2}(x, y)\, dydx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\varphi dr = \frac{\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}{2\pi}$$
- $$P(\xi \leq 0, \eta \geq 0) = \int_{-\infty}^0\int_{-\frac{bx}{c}}^{+\infty} \rho_{e_1,e_2}(x, y)\, dydx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\varphi dr = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}{2\pi}$$
- $$P(\xi \geq 0, \eta \leq 0) = \int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{-\frac{bx}{c}} \rho_{e_1,e_2}(x, y)\, dydx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\pi-\operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}^{\frac{3\pi}{2}} e^{-\frac{r^2}{2}} r d\varphi dr = \frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{c}\right)}{2\pi}$$

3 Листок 4. Задача 4

Посчитатем распределение η, используя свойства условного матожидания:

$$P(\eta = s) = \mathbb{E}\mathrm{Ind}_{\eta=s} = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{\eta=s}|\xi\right)\right] = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)\,\mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{\eta=s}|\xi = k\right) = \sum_{k=s}^{\infty} P(\xi = k)\,\mathbb{E}\left(\mathrm{Ind}_{\eta=s}|\xi = k\right) =$$

$$= \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} P\left(\mathrm{Ind}_{\eta=s} = 1|\xi = k\right) = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \binom{k}{s} p^s (1-p)^{k-s} = p^s e^{-\lambda} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{\lambda^k k! (1-p)^{k-s}}{k! s! (k-s)!} =$$

$$= \frac{\lambda^s p^s e^{-\lambda}}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \frac{(1-p)^{k-s}}{(k-s)!} = \frac{\lambda^s p^s e^{-\lambda}}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k}{k!} = \frac{\lambda^s p^s e^{-\lambda p}}{s!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!}$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-p)^k e^{-\lambda(1-p)}}{k!} = 1$$

так как это сумма вероятностей $P(\zeta = k)$, где $\zeta \sim Poiss\,(1-p)$. Таким образом, получаем

$$P(\eta = s) = \frac{(\lambda p)^s e^{-\lambda p}}{s!},$$

то есть $\eta \sim Poiss\,(\lambda p)$ ■

4 Листок 4. Задача 9

- Для совместного распределения просто заполним табличку $P(X = x, Y = y)$:

X \ Y	0	1	2	3	4
0	$\frac{1}{70}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{3}{35}$	0	0
1	0	$\frac{4}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{4}{35}$	0
2	0	0	$\frac{3}{35}$	$\frac{4}{35}$	$\frac{1}{70}$

- $P(Y = 3) = 0 + \frac{4}{35} + \frac{4}{35} = \frac{8}{35}$ (нашли из таблицы). Находим условное распредление:

$$P(X = 0|Y = 3) = \frac{P(X = 0, Y = 3)}{P(Y = 3)} = 0$$

$$P(X = 1|Y = 3) = \frac{P(X = 1, Y = 3)}{P(Y = 3)} = \frac{1}{2}$$

$$P(X = 2|Y = 3) = \frac{P(X = 2, Y = 3)}{P(Y = 3)} = \frac{1}{2}$$

- Находим условные ожидания по определению:

$$\mathbb{E}\left(X|Y\right) = \begin{cases} 0, & Y = 0 \\ \frac{1}{2}, & Y = 1 \\ 1, & Y = 2 \\ \frac{3}{2}, & Y = 3 \\ 2, & Y = 4 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}\left(Y|X\right) = \begin{cases} \frac{4}{3}, & X = 0 \\ 2, & X = 1 \\ \frac{8}{3}, & X = 2 \end{cases}$$