

## 1 Листок 2. Задача 10b

- $\varphi_\eta(t) = Ee^{it\eta} = Ee^{it(AU+(1-A)V)}$
- Распишем матожидание по индикаторам для случайной величины  $A$ :

$$\varphi_\eta(t) = P(A=1)Ee^{itU} + P(A=0)Ee^{itV} = p\varphi_u(t) + (1-p)\varphi_v(t)$$

## 2 Листок 2. Задача 12

**Теорема 1.** (Слабый закон больших чисел)

Пусть  $\xi_n$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем  $E\xi_1 = \mu < \infty$ ,  $E\xi_1^2 < \infty$ . Тогда для  $\eta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\eta_n - \mu|) = 0$$

*Доказательство.* Разложим хар функцию в ряд Маклорена до второго члена (можем это сделать, так как первые и вторые моменты конечны и воспользуемся формулой  $\varphi_X^{(k)}(0) = i^k EX^k$ ):

$$\varphi_X(t) = 1 + itEX + o(t)$$

Запишем разложение для  $\eta_n$ :

$$\begin{aligned} \varphi_{\eta_n}(t) &= \varphi_{\xi_1 + \dots + \xi_n}\left(\frac{t}{n}\right) = \varphi_{\xi_1}^n\left(\frac{t}{n}\right) = \left(1 + i\frac{t}{n}\mu + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = \\ &= \left(1 + \frac{it\mu}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right)\right)^{\left(\frac{n}{it\mu}\right) \cdot (it\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{it\mu} \end{aligned}$$

Получили характеристическую функцию константы, а значит функция распределения будет совпадать с константной, то есть  $\eta_n \xrightarrow{d} \mu \Rightarrow \eta_n \xrightarrow{P} \mu$ . Из определения сходимости по вероятности, получаем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\eta_n - \mu|) = 0$$

■