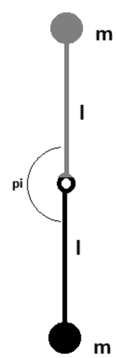
стабилизация LQR по линейной модели в верхнем положении равновесия

6 июня 2024 г.

Сначала начнем с математического описания задачи. Представим себе математический маятник — это стержень длиной l и с массой в точке на конце m. Он качается около горизонтальной оси, находящейся на верхнем конце стержня. Нам нужно стабилизировать маятник в верхнем положении (инвертированном маятнике) с помощью линейно-квадратичной регуляции (LQR-регулятора).



Шаг 1: Линеаризация системы Пусть угол отклонения маятника от вертикали обозначается как θ. Хорошо известные уравнения движения для маятника с моментом силы u имеют вид:

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} - mgl\sin(\theta) = u,$$

где b — коэффициент демпфирования, g — ускорение свободного падения.

Линейная модель Мы будем линеаризовать это уравнение вокруг верхнего положения равновесия $\theta = \pi$ (положение инвертированного маятника). Для этого делаем малые отклонения $\theta' = \theta - \pi$. Тогда:

$$\sin(\theta) \approx -\sin(\theta') = -\theta',$$

$$\cos(\theta) \approx -1.$$

Линеаризованное уравнение примет вид:

$$ml^2\ddot{\theta}' + b\dot{\theta}' + mgl\theta' = u,$$

или

$$\ddot{\theta}' + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}' + \frac{g}{l}\theta' = \frac{u}{ml^2}.$$

Шаг 2: Формирование состояния пространства Для применения LQR, нам нужна модель в состоянии пространства:

$$\mathbf{x} = (\ \theta\ )'\ \dot{\theta}',$$

$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\ })\ \theta'$
$\ddot{\theta}'$.

Из уравнения движения:

$$\ddot{\theta}' = -\frac{g}{l}\theta' - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}' + \frac{u}{ml^2}.$$

Следовательно, состояние пространства можно записать как:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\dot{\ })\ \theta' - \frac{g}{l}\theta' - \frac{b}{ml^2}\dot{\theta}' + \frac{u}{ml^2}.$$

В матричном виде:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

где

$$\mathbf{A} = (\ 0\ )\ 1 - \frac{g}{l} - \frac{b}{ml^2},$$

$$\mathbf{B} = (\ 0\ )\ \frac{1}{ml^2}.$$

Шаг 3: Определение LQR контроллера Цель LQR — минимизировать функционал:

$$J = \int_0^\infty (\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x} + u^T R u)\, dt,$$

где $\mathbf{Q}$ и R — это матрицы, задающие вес состояния и управления соответственно.

Решение уравнения Риккати даёт оптимальный контроллер в виде:

$$u = -\mathbf{K}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{K}$ — это матрица обратной связи состояния, которую можно найти, решив непрерывное уравнение Риккати.