<u>Принцип математической индукции. Неограниченность $\mathbb{N}$ сверху. Постулат Архимеда. Всюду плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.</u>

Постулат для $\mathbb{N}$ (принцип минимума в $\mathbb{N}$):

любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент, то есть

($\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}$) => ($\exists$ k $\in$ K такое, что $\forall$ n $\in$ K: k$\leqslant$n)

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел.

Теорема (метод математической индукции)

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: p(1), p(2),...,p(n), p(n+1),...

Допустим, что:

1) установлено, что p(1) верно (база индукции)

2) для любого n доказано, что если верно p(n), то верно p(n+1) (индукционный переход)

Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Обоснование метода:

Логическим основанием для этого метода доказательства служит аксиома индукции, пятая из аксиом Пеано, определяющих натуральные числа.

5-я аксиома Пеано (аксиома индукции):

Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n, вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Выведем принцип математической индукции из принципа наименьшего числа. Доказательство от противного.

Предположим, что утверждение $A(n)$ верно не при любых n. Рассмотрим множество тех чисел, для которых оно неверно. В нем есть наименьшее число N. Это число не равно 1, так как $A(1)$ истинно. Но тогда $A(N-1)$ истинно по выбору N. Значит, и $A(N) = A(N-1+1)$ истинно. Пришли к противоречию.

Неограниченность $\mathbb{N}$ сверху: $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Доказательство от противного. Пусть $\mathbb{N}$ ограничено сверху, т.е. $\exists$ a $\in \mathbb{R}$: $\mathbb{N} \leqslant \{a\}$ => (по лемме о существовании sup) => $\exists\ \alpha \overset{\text{def}}{=} \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. По определению sup для Ɛ=1 $\exists$ n$\in\mathbb{N}$: n $>$ α-1.

Тогда n+1 > α = sup $\mathbb{N}$, где n+1$\in\mathbb{N}$. Противоречие.

Постулат Архимеда: $\forall$ a$\in\mathbb{R}$ $\forall$ Ɛ>0 $\exists$ n$\in\mathbb{N}$: a<Ɛ*n

Доказательство:

т.к. $\mathbb{N}$ неограниченно сверху, то $\exists$ n$\in\mathbb{N}$: n>$\frac{a}{\varepsilon}$ => $\forall$ Ɛ>0 n*Ɛ>a.

Следствие: $\forall$ Ɛ>0 $\exists$ n$\in\mathbb{N}$: $\frac{1}{n}$<Ɛ

Доказательство:

в постулате Архимеда представим a=1 и заметим, что $\frac{1}{n}$<Ɛ $\Leftrightarrow$ 1<n*Ɛ.

Всюду плотность множества $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{R}$.

$\forall\ x\in\mathbb{R}\ \ \forall\ \varepsilon>0\ \exists\ q\in\mathbb{Q}: |x-q|\leqslant\varepsilon$

Доказательство:

заметим, что $x-\varepsilon<x+\varepsilon \Rightarrow \exists\ q\in\mathbb{Q}: x-\varepsilon<q<x+\varepsilon$, т.е. $|x-q|<\varepsilon$ ($\Rightarrow |x-q|\leqslant\varepsilon$) т.е. $\mathbb{Q}$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.