

Лемма о вложенных отрезках.

Определение:

Пусть $\{a_n\}, \{b_n\} \subset \mathbb{R}$ и $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $\{[a_n, b_n]\}$, где $n=1, \dots, \infty$ называется последовательностью отрезков. Эта последовательность называется вложенной (или состоящей из вложенных отрезков), если $\forall n \in \mathbb{N}: [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ или $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ ($\{a_n\}$ не убывает, $\{b_n\}$ не возрастает).

Лемма:

\forall последовательность $\{[a_n, b_n]\}$, где $n=1, \dots, \infty$ вложенных отрезков имеет хотя бы одну общую точку:

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}: c \in [a_n, b_n]$$

Если дополнительно $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, то общая точка для всех вложенных отрезков единственна и $c = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup(a_n)$ и

$$c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \inf(b_n), \text{ где } n \in \mathbb{N}$$