

## Ограниченные и неограниченные множества. Максимальный и минимальный элементы множества.

Пусть  $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$

### Определение 1:

Множество  $X$  называется

- 1) **ограниченным сверху**, если  $\exists c \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in X: x \leq c$   
( $c$  – верхняя граница  $X$ )
- 2) **ограниченным снизу**, если  $\exists d \in \mathbb{R}$ , такое что  $\forall x \in X: x \geq d$   
( $d$  – нижняя граница  $X$ )
- 3) **ограниченным**, если  $X$  ограничено сверху и снизу одновременно

### Определение 2:

Множество  $X$  называется

- 1) **неограниченным сверху**, если  $\forall b \in \mathbb{R} \exists x \in X: x > b$
- 2) **неограниченным снизу**, если  $\forall b \in \mathbb{R} \exists x \in X: x < b$
- 3) **неограниченным**, если  $X$  неограниченно сверху и снизу одновременно

### Определение 3:

$$(a \in \mathbb{R} = \max X) \Leftrightarrow ((a \in X) \wedge (\forall x \in X: x \leq a))$$

$$(b \in \mathbb{R} = \min X) \Leftrightarrow ((b \in X) \wedge (\forall x \in X: x \geq b))$$

### Задачи для самостоятельного выполнения:

- 1) Пусть  $X = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n\}$ .
  - а) Указать наименьший и наибольший элементы этого множества, если они существуют.
  - б) Каковы множества верхних и нижних граней для множества  $X$ . Найти  $\sup X$  и  $\inf X$ .
- 2) Для множества  $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 1/2^n, n \in \mathbb{N}\}$  найти  $\max X$ ,  $\min X$ ,  $\sup X$  и  $\inf X$  если они существуют.
- 3) Для множества  $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x < 0\}$  найти  $\max X$ ,  $\min X$ ,  $\sup X$  и  $\inf X$  если они существуют.
- 4) Пусть  $X, Y \subset \mathbb{R}$  – произвольные ограниченные сверху множества. Доказать, что множество  $X + Y = \{z \in \mathbb{R} \mid z = x + y, x \in X, y \in Y\}$  ограничено сверху и справедливо равенство  $\sup(X + Y) = \sup X + \sup Y$ .