

Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении и ее следствие.

Определение:

$$a, b \in \mathbb{R}, a < b$$

$$C(a, b) = \{f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ непрерывна в } \forall x \in (a, b)\}$$

$$C[a, b] = \{f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \in C(a, b) \text{ и } \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)\}$$

Теорема (Больцано-Коши о промежуточном значении):

$$(f \in C[a, b]) \wedge (f(a) \cdot f(b) < 0) \Rightarrow (\exists c \in (a, b): f(c) = 0)$$

Следствие:

Если $f \in C[a, b]$ и число L лежит между $f(a)$ и $f(b)$, то $\exists c \in [a, b]: f(c) = L$

Задачи для самостоятельного выполнения:

Докажите, что многочлен нечетной степени всегда имеет корень.

Указание. Представьте многочлен $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ в виде $p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right)$ и покажите, что при x , больших по модулю, он принимает как положительные, так и отрицательные значения.