

Первый замечательный предел.

Формулировка:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Доказательство. Заметим, что отношение $\frac{\sin x}{x}$ представляет собой четную функцию. Поэтому при анализе поведения этой функции можно ограничиться областью малых положительных значений аргумента x .

Пусть x – центральный угол окружности единичного радиуса, выраженный в радианах. Сравним между собой площади фигур, показанных на рисунке 1.

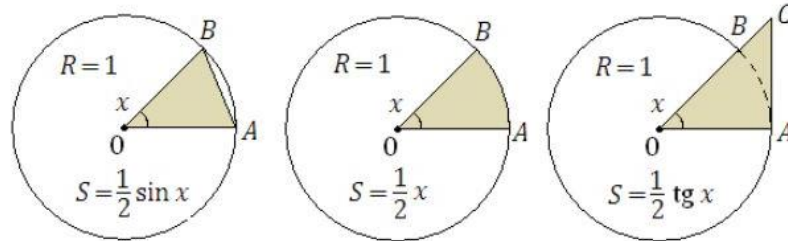


Рис.1. Равнобедренный треугольник AOB , круговой сектор AOB и прямоугольный треугольник AOC .

Очевидно, что для всех $0 < x < \pi/2$ выполняется неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Представим $\operatorname{tg} x$ в виде отношения $\sin x$ к $\cos x$ и разделим обе части этого двойного неравенства на $\sin x$. Тогда неравенство

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

влечет за собой

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Поскольку $\cos x \rightarrow 1$ при $x \rightarrow 0$, то и $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$.

Задачи для самостоятельного выполнения:

- 1) Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{3x}$
- 2) Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$
- 3) Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{2x^2}$
- 4) Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x}$
- 5) Найти предел: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} x (1 - \cos^2 3x)}{x^2 + 5x}$