Аксиоматика действительных чисел. Элементарные свойства действительных чисел. Два неравенства треугольника для модуля.

Определение:

Операция на множестве X есть отображение (=правило) F, которое каждой паре чисел $x, y \in X$ ставит в соответствие некоторый один $F(x, y) \in X$.

Примеры:

1) $F = +$ на $\mathbb{Q}$: $x, y \in \mathbb{Q}$ -> $+(x, y) \equiv x+y \in \mathbb{Q}$
2) $F = *$ на $\mathbb{Q}$: $x, y \in \mathbb{Q}$ -> $*(x, y) \equiv x*y \in \mathbb{Q}$

Определение:

Множеством вещественных чисел ($\mathbb{R}$) называется множество в котором выполняются следующие аксиомы.

1. **Аксиомы сложения**
   На $\mathbb{R}$ определена операция «+» которая называется операцией сложения, такая что
   1.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z=x+(y+z)$
   1.2 $\exists$ нейтральный элемент $0 \in \mathbb{R}$, такой что $\forall x \in \mathbb{R}$: $x+0=0+x=x$
   1.3 $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists$ противоположный элемент $(-x) \in \mathbb{R}$, такой что $x+(-x)=(-x)+x=0$
   1.4 $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x+y=y+x$
2. **Аксиомы умножения**
   На $\mathbb{R}$ определена операция «*» которая называется операцией умножения, такая что
   2.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x*y)*z=x*(y*z)$
   2.2 $\exists$ нейтральный элемент $1 \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$, такой что $\forall x \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$: $x*1=1*x=x$
   2.3 $\forall x \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$ $\exists$ обратный элемент $x^{-1} \in \mathbb{R}\text{-}\{0\}$, такой что $x*(x^{-1})=(x^{-1})*x=1$
   2.4 $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $x*y=y*x$
3. **Аксиома связи сложения и умножения**
   3.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x+y)*z=(x*z)+(y*z)$
4. **Аксиомы порядка**
   В множестве $\mathbb{R}$ введено отношение порядка «$\leqslant$», такое что
   4.1 $\forall x \in \mathbb{R}$: $x \leqslant x$ (рефлексивность)
   4.2 Если $x, y \in \mathbb{R}$: $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant x)$, то $x=y$ (закон тождества)
   4.3 Если $x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)$, то $x \leqslant z$ (транзитивность)
   4.4 $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $(x \leqslant y) \vee (y \leqslant x)$ (линейная упорядоченность)
5. **Аксиомы связи отношения порядка с сложением и умножением**
   5.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, если $x \leqslant y$, то $x+z \leqslant y+z$
   5.2 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, если $(0 \leqslant x) \wedge (0 \leqslant y)$, то $(0 \leqslant x*y)$
6. **Аксиома полноты и непрерывности $\mathbb{R}$**
   6.1 $\forall \emptyset = X, Y \subset \mathbb{R}, X \leqslant Y, \exists c \in \mathbb{R}: X \leqslant \{c\} \leqslant Y$
   (т.е. $\forall x \in X, \forall y \in Y: x \leqslant c \leqslant y$)

Некоторые следствия определения и дополнительные сведения:

1. $x, y \in \mathbb{R}$, полагаем y-x =y+(-x) и $\frac{x}{y} = y * (x^{-1})$
2. $x \in \mathbb{R}$, x^n=x*x*…*x (n раз) и $x^{-n} = (x^{-1})^n$
3. $\forall x \in \mathbb{R}$: 0*x=0
4. $\forall x \in \mathbb{R}$: (-1)*x=(-x)
5. $x, y \in \mathbb{R}$: $(x<y) \Leftrightarrow (x \leqslant y) \wedge (x \neq y)$
   $(x>y) \Leftrightarrow (y<x)$
6. всегда $\forall x, y \in \mathbb{R}$ имеет место: либо x<y, либо x=y, либо x>y (трихотомия)
7. если x>0, то (-x)<0
8. а) x>0 и y>0 => x*y>0
   б) x<0 и y>0 => x*y<0
   в) x<0 и y<0 => x*y>0
9. 0<1

Неравенства треугольника для абсолютной величины числа:

1) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$
2) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

Задачи для самостоятельного выполнения:

1) Доказать, используя аксиомы Пеано, что (a+b)+c = a+(b+c) для любых натуральных чисел a,b,c.
2) Доказать, что (a+b)c = ac+bc для любых натуральных чисел a,b,c.
3) Используя аксиомы действительных чисел, доказать, что 0*a=0 для любого действительного числа a.
4) Используя аксиомы действительных чисел, доказать, что 1>0.