Нижняя и верхняя грани числового множества и их свойства.

Лемма о существовании sup и inf множества:

1) Любое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань $\forall(\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ и X огр. сверху$) \Rightarrow (\exists \sup X \in \mathbb{R})$
2) Любое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань $\forall(\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}$ и X огр. снизу$) \Rightarrow (\exists \inf X \in \mathbb{R})$

Определение (inf):

Точной нижней границей множества X называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество X снизу:

$\operatorname{Inf} X \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ d \in \mathbb{R}: (\forall x \in X)\ x \geqslant d \}$

Замечание (inf):

1) Если множество X не ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$
2) По определению считается, что $\inf \emptyset = -\infty$
3) $(\inf X = -\infty) \Leftrightarrow$ (X неогр. снизу, т.е. $\forall\ d \in \mathbb{R}\ \ \exists\ x \in X$: $d > x$)

Свойства inf:

1) Если множество X не пусто, то $\inf X \leqslant \sup X$
2) Если множество X ограничено снизу (т.е. $\forall\ x \in X$: $x \geqslant d$) то $\inf X \geqslant d$
3) $\exists \min X \Rightarrow \exists \inf X = \min X$
4) $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$: $\inf A \geqslant \inf B$

Определение (sup):

Точной верхней границей множества X называется наименьшее из чисел, ограничивающих множество X сверху:

$\sup X \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ c \in \mathbb{R}: (\forall x \in X)\ c \leqslant d \}$

Замечание (sup):

5) Если множество X не ограничено сверху, то $\sup X = +\infty$
6) По определению считается, что $\inf \emptyset = +\infty$
7) $(\sup X = +\infty) \Leftrightarrow$ (X неогр. сверху, т.е. $\forall\ c \in \mathbb{R}\ \ \exists\ x \in X$: $x > c$)

Свойства sup:

4) Если множество X не пусто, то $\inf X \leqslant \sup X$
5) Если множество X ограничено сверху (т.е. $\forall\ x \in X$: $x \leqslant c$) то $\sup X \leqslant c$
6) $\exists \max X \Rightarrow \exists \sup X = \max X$
7) $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$: $\sup A \leqslant \sup B$