Решение уравнения $x^2 = 2$ в множествах $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.

Решение на множестве $\mathbb{Q}$:

Докажем, что $\sqrt{2}$ иррациональное число, т.е. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

От противного. Если $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, то $\sqrt{2}$ представимо в виде несократимой дроби:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q};\ 2 = \frac{p^2}{q^2};\ 2q^2 = p^2$$

где $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ => p^2 четное => p четное => $\exists\, k \in \mathbb{N}$: $p=2k$.

Тогда $2q^2 = p^2$ => $2q^2 = 4k^2$;

$q^2 = 2k^2$ => q^2 четное => q четное => $\frac{p}{q}$ – сократимая дробь. Противоречие.

Решение на множестве $\mathbb{R}$:

Докажем, что $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$: $\alpha^2 = 2$.

Пусть $X = \{x \in \mathbb{R}: (x \geqslant 0) \wedge (x^2 \leqslant 2)\}$

1) $0 \in X$ (=>$X \neq \emptyset$)
2) $\forall\, x \in X$: $x \leqslant 2$ (т.к. если $\exists\, x \in X$: $x>2$ => $x^2>4$) => по принципу верхней грани $\alpha = \sup X \in \mathbb{R}$.

Три возможных варианта:

1) $\alpha^2<2$; **2) $\alpha^2>2$;** **3) $\alpha^2=2$**

1) **$2-\alpha^2>0$**

   $\forall\, n \in \mathbb{N}: (\alpha + \frac{1}{n})^2 = \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \alpha^2 + \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n} = \alpha^2 + \frac{2\alpha+1}{n} < 2 \Leftrightarrow n > \frac{2\alpha+1}{2-\alpha^2}$

(по постулату Архимеда)

Значит $\alpha + \frac{1}{n} \in X$ => $\alpha + \frac{1}{n} \leqslant \sup X = \alpha$.

Противоречие.

2) **$\alpha^2-2>0$**

   $\forall\, n \in \mathbb{N}: (\alpha - \frac{1}{n})^2 = \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{1}{n^2} \geqslant \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} - \frac{1}{n^2} \geqslant \alpha^2 - \frac{2\alpha}{n} - \frac{1}{n} = \alpha^2 - \frac{2\alpha+1}{n} > 2 \Leftrightarrow$
   $n > \frac{2\alpha+1}{\alpha^2-2}$

(по постулату Архимеда)

Значит $\alpha - \frac{1}{n} \notin X$ => $\alpha - \frac{1}{n} \geqslant \sup X = \alpha$.

Противоречие.

=> $\alpha^2 = 2$.