Критерий сходимости монотонной последовательности. Пределы некоторых последовательностей.

Определение:

Последовательность $\{X_n\} \subset \mathbb{R}$ называется:

1. неубывающей, если $x_n \leqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
2. возрастающей, если $x_n < x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
3. невозрастающей, если $x_n \geqslant x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
4. убывающей, если $x_n > x_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Теорема (Критерий сходимости монотонной последовательности):

1. Пусть $\{X_n\}$ не убывает. Имеем:
   ($\{X_n\}$ сходится в $\mathbb{R}$)$\Leftrightarrow$($\{X_n\}$ ограничена сверху)
2. Пусть $\{X_n\}$ не возрастает. Имеем:
   ($\{X_n\}$ сходится в $\mathbb{R}$)$\Leftrightarrow$($\{X_n\}$ ограничена снизу)

Пределы некоторых последовательностей:

1. Если q>1, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{q^n} = 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
3. a>0 => $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$
4. Если $q \in \mathbb{R}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$