Нижняя и верхняя грани числового множества и их свойства.

Лемма о существовании sup и inf множества:

1) Любое непустое ограниченное сверху множество имеет верхнюю грань
$\forall(\emptyset\neq X\subset \mathbb{R}$ и X огр. сверху$)\Rightarrow(\exists \sup X \in \mathbb{R})$
2) Любое непустое ограниченное снизу множество имеет нижнюю грань
$\forall(\emptyset\neq X\subset \mathbb{R}$ и X огр. снизу$)\Rightarrow(\exists \inf X \in \mathbb{R})$

Определение (inf):

Точной нижней границей множества X называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество X снизу:

$\text{Inf } X \stackrel{\text{def}}{=} \max \{ d \in \mathbb{R}: (\forall x \in X)\ x \geqslant d \}$

Замечание (inf):

1) Если множество X не ограничено снизу, то $\inf X = -\infty$
2) По определению считается, что $\inf \emptyset = -\infty$
3) $(\inf X = -\infty) \Leftrightarrow$ (X неогр. снизу, т.е. $\forall\ d \in \mathbb{R}\ \ \exists\ x \in X$: $d>x$)

Свойства inf:

1) Если множество X не пусто, то $\inf X \leqslant \sup X$
2) Если множество X ограничено снизу (т.е. $\forall\ x \in X$: $x \geqslant d$) то $\inf X \geqslant d$
3) $\exists \min X \Rightarrow \exists \inf X = \min X$
4) $\emptyset\neq A\subset B\subset \mathbb{R}$: $\inf A \geqslant \inf B$

Определение (sup):

Точной верхней границей множества X называется наименьшее из чисел, ограничивающих множество X сверху:

$\sup X \stackrel{\text{def}}{=} \min \{ c \in \mathbb{R}: (\forall x \in X)\ x \leqslant c \}$

Замечание (sup):

1) Если множество X не ограничено сверху, то $\sup X = +\infty$
2) По определению считается, что $\inf \emptyset = +\infty$
3) $(\sup X = +\infty) \Leftrightarrow$ (X неогр. сверху, т.е. $\forall\ c \in \mathbb{R}\ \ \exists\ x \in X$: $x>c$)

Свойства sup:

1) Если множество X не пусто, то $\inf X \leqslant \sup X$
2) Если множество X ограничено сверху (т.е. $\forall\ x \in X$: $x \leqslant c$) то $\sup X \leqslant c$
3) $\exists \max X \Rightarrow \exists \sup X = \max X$
4) $\emptyset\neq A\subset B\subset \mathbb{R}$: $\sup A \leqslant \sup B$

Задачи для самостоятельного выполнения:

1) Записать ⌉A с помощью кванторов, если A = {C — верхняя грань множества $X \subset R$}.
2) Записать ⌉B, если B = {множество X ограничено снизу}.
3) Пусть Y+X – множество чисел вида x+y и Y*X – множество чисел вида x*y, где $x \in \mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ и $y \in \mathrm{Y} \subset \mathbb{R}$. Проверьте:

   а) всегда ли sup(X+Y) = supX + sup Y;

   б) sup(X*Y) = supX*supY.
4) Найдите точные грани множества всех правильных рациональных дробей $\{\frac{m}{n}: m, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{m} < \mathrm{n}\}$ и покажите, что это множество не имеет наименьшего и наибольшего элементов.
5) Найдите точные грани множества рациональных чисел, удовлетворяющих неравенству $x^2 < 2$.