Определение предела последовательности. Предел постоянной. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

Определение 1:

Последовательностью вещественных чисел называется любая функция вида f: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

Если n$\in\mathbb{N}$, то X_n=F(n).

Определение 2:

Число x$\in\mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{X_n\}\in\mathbb{R}$, если

$(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$, что $\forall\ n\in\mathbb{N}, n\geqslant N$: $|X_n - X| < \varepsilon)$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Предел постоянной последовательности:

Если X_n=X $\in\mathbb{R}$ для больших n, то $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$

Единственность предела:

$(\lim\limits_{n\to\infty} X_n = x) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} X_n = y) \Rightarrow (x=y)$

Ограниченность сходящейся последовательности:

Последовательность $\{X_n\}$ называется ограниченной, если $\{X_n: n \in \mathbb{N}\}$ ограничена, т.е. $\exists c>0$, такое что $\forall\ n\in\mathbb{N}$: $|X_n|\leqslant c$.

Утверждение: если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} X_n = x \in\mathbb{R}$, то $\{X_n\}$ ограничена.

Следствие: если $\{X_n\}$ не ограничена, то она не имеет предела.

Задачи для самостоятельного выполнения:

1) Найти предел последовательности, заданной общим членом $y_n = \frac{n}{n+4}$.
2) Докажите по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, если

   a) $x_n = 2^{\frac{-1}{\log_2 n}}$; c) $x_n = 2^{\frac{1}{\log_2 n}}$;
   b) $x_n = 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$; d) $x_n = 2^{\frac{-1}{\sqrt{n}}}$.
3) Докажите по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, если

   a) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$; b) $x_n = \sqrt{\ln n}$.
4) Докажите по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, если

   a) $x_n = 2^{-\sqrt{n}}$; b) $x_n = 1/\ln(n^2+1)$.
5) (!) Докажите, что если последовательность (x_n) имеет предел и $x_n \le a$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$ и всех $n \in \mathbb{N}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le a$.