<u>Критерий Коши сходимости последовательности.</u>

(Последовательность $\{X_n\}\subset\mathbb{R}$ сходится)$\Leftrightarrow$

(выполняется условие Коши: $\forall\varepsilon>0\ \exists N(\varepsilon)\in\mathbb{N}\ \forall n\geqslant N(\varepsilon)\ \forall m\geqslant N(\varepsilon)$: $|X_n-X_m|<\varepsilon$)

Определение:

Последовательность $\{X_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ последовательность $\{X_n\}$ сходится в себе

Применение критерия Коши для доказательства расходимости гармонического ряда:

Рассмотрим последовательность $H_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$. Покажем, что эта последовательность не является фундаментальной, то есть, что $\exists\varepsilon>0:\forall k\in\mathbb{N}\ \exists n>k,\exists p\in\mathbb{N}:|H_{n+p}-H_n|\geq\varepsilon$. Оценим разность $|H_{n+p}-H_n|=\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+p}\geq\frac{1}{n+p}+\cdots+\frac{1}{n+p}=\frac{p}{n+p}$. Пусть $p\doteq n$. Тогда $\forall n\in\mathbb{N}:|H_{2n}-H_n|\geq\frac{1}{2}$. Следовательно, данная последовательность не является фундаментальной и по критерию Коши расходится. Тогда по определению ряд также расходится.