Определение предела последовательности. Предел постоянной. Единственность предела. Ограниченность сходящейся последовательности.

Определение 1:

Последовательностью вещественных чисел называется любая функция вида f: $\mathbb{N}\to\mathbb{R}$.

Если n$\in\mathbb{N}$, то X_n=F(n).

Определение 2:

Число x$\in\mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{\mathrm{X}_n\}\in\mathbb{R}$, если

$(\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}) \stackrel{\text{def}}{=} (\forall\ \mathcal{E}>0\ \exists\ \mathrm{N}=\mathrm{N}(\mathcal{E})\in\mathbb{N}$, что $\forall\ \mathrm{n}\in\mathbb{N},\ \mathrm{n}\geqslant\mathrm{N}\colon |\mathrm{X}_n - \mathrm{X}| < \mathcal{E})$.

Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся, в противном случае – расходящейся.

Предел постоянной последовательности:

Если X_n=X $\in\mathbb{R}$ для больших n, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n$= X

Единственность предела:

$(\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{x}) \wedge (\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{y})$ => (x=y)

Ограниченность сходящейся последовательности:

Последовательность $\{\mathrm{X}_n\}$ называется ограниченной, если $\{\mathrm{X}_n\colon \mathrm{n}\in\mathbb{N}\}$ ограничена, т.е. $\exists \mathrm{c}>0$, такое что $\forall\ \mathrm{n}\in\mathbb{N}\colon |\mathrm{X}_n|\leqslant\mathrm{c}$.

Утверждение: если $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{X}_n$= x $\in\mathbb{R}$, то $\{\mathrm{X}_n\}$ ограничена.

Следствие: если $\{\mathrm{X}_n\}$ не ограничена, то она не имеет предела.