

Принцип математической индукции. Неограниченность \mathbb{N} сверху. Постулат Архимеда. Всюду плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R} .

Постулат для \mathbb{N} (принцип минимума в \mathbb{N}):

любое непустое подмножество натуральных чисел имеет наименьший элемент, то есть

$$(\emptyset \neq K \subset \mathbb{N}) \Rightarrow (\exists k \in K \text{ такое, что } \forall n \in K: k \leq n)$$

Математическая индукция — метод математического доказательства, который используется, чтобы доказать истинность некоторого утверждения для всех натуральных чисел.

Теорема (метод математической индукции)

Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности утверждений, занумерованных натуральными числами: $p(1), p(2), \dots, p(n), p(n+1), \dots$

Допустим, что:

1) установлено, что $p(1)$ верно (база индукции)

2) для любого n доказано, что если верно $p(n)$, то верно $p(n+1)$ (индукционный переход)

Тогда все утверждения нашей последовательности верны.

Обоснование метода:

Логическим основанием для этого метода доказательства служит аксиома индукции, пятая из аксиом Пеано, определяющих натуральные числа.

5-я аксиома Пеано (аксиома индукции):

Если какое-либо предложение доказано для 1 (база индукции) и если из допущения, что оно верно для натурального числа n , вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа (индукционное предположение), то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Выведем принцип математической индукции из принципа наименьшего числа. Доказательство от противного.

Предположим, что утверждение $A(n)$ верно не при любых n . Рассмотрим множество тех чисел, для которых оно неверно. В нем есть наименьшее число N . Это число не равно 1, так как $A(1)$ истинно. Но тогда $A(N-1)$ истинно по выбору N . Значит, и $A(N) = A(N-1+1)$ истинно. Пришли к противоречию.

Неограниченность \mathbb{N} сверху: $\sup \mathbb{N} = +\infty$

Доказательство от противного. Пусть \mathbb{N} ограничено сверху, т.е. $\exists a \in \mathbb{R}: \mathbb{N} \leq \{a\} \Rightarrow$ (по лемме о существовании \sup) $\Rightarrow \exists \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$. По определению \sup для $\varepsilon=1 \exists n \in \mathbb{N}: n > \alpha-1$.

Тогда $n+1 > \alpha = \sup \mathbb{N}$, где $n+1 \in \mathbb{N}$. Противоречие.

Постулат Архимеда: $\forall a \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: a < \varepsilon \cdot n$

Доказательство:

т.к. \mathbb{N} неограниченно сверху, то $\exists n \in \mathbb{N}: n > \frac{a}{\varepsilon} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad n \cdot \varepsilon > a$.

Следствие: $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}: \frac{1}{n} < \varepsilon$

Доказательство:

в постулате Архимеда представим $a=1$ и заметим, что $\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow 1 < n \cdot \varepsilon$.

Всюду плотность множества \mathbb{Q} в \mathbb{R} .

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q}: |x - q| \leq \varepsilon$$

Доказательство:

заметим, что $x - \varepsilon < x + \varepsilon \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Q}: x - \varepsilon < q < x + \varepsilon$, т.е. $|x - q| < \varepsilon (\Rightarrow |x - q| \leq \varepsilon)$ т.е. \mathbb{Q} всюду плотно в \mathbb{R} .

Задачи для самостоятельного выполнения:

Задача 1. Докажите, что $5^n - 4n + 15$ делится на 16 при всех $n \in \mathbb{N}_0$.

Задача 2. Доказать, что при любом натуральном n число a_n делится на b .

$$a_n = 2n^3 + 3n^2 + 7n, \quad b = 6.$$

Задача 3. Докажите методом математической индукции: $4^{2n-1} + 1$ кратно 5 для всех $n \geq 1$.

Задача 4. Используя метод математической индукции, докажите, что для любого натурального числа истинно следующее утверждение: $6^{2n-2} + 3^{n+1} + 3^{n-1}$ кратно 11.

Задача 5. Доказать равенство

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Задача 6. Доказать методом математической индукции:

$$p + (p+1) + (p+2) + \dots + (p+n) = \frac{(2p+n)(n+1)}{2}.$$