<u>Критерий Коши сходимости последовательности.</u>

(Последовательность $\{X_n\} \subset \mathbb{R}$ сходится)$\Leftrightarrow$

(выполняется условие Коши: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ \forall m \geqslant N(\varepsilon)$: $|X_n - X_m| < \varepsilon$)

Определение:

Последовательность $\{X_n\}$ фундаментальна $\Leftrightarrow$ последовательность $\{X_n\}$ сходится в себе

Применение критерия Коши для доказательства расходимости гармонического ряда:

Рассмотрим последовательность $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$. Покажем, что эта последовательность не является фундаментальной, то есть, что

$\exists \varepsilon > 0 : \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n > k, \exists p \in \mathbb{N} : |H_{n+p} - H_n| \geq \varepsilon$. Оценим разность

$|H_{n+p} - H_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \cdots + \frac{1}{n+p} = \frac{p}{n+p}$. Пусть $p \doteq n$. Тогда

$\forall n \in \mathbb{N} : |H_{2n} - H_n| \geq \frac{1}{2}$. Следовательно, данная последовательность не является фундаментальной и по критерию Коши расходится. Тогда по определению ряд также расходится.

Задачи для самостоятельного выполнения:

1) Доказать сходимость последовательности $\{x_n\} = \{\frac{\sin a}{2} + \frac{\sin 2a}{2^2} + \cdots + \frac{\sin na}{2^n}\}$, используя критерий Коши.
2) Доказать что последовательность, заданная общим членом $\{x_n\} = \frac{3n}{n+1}$ фундаментальная.